

УДК 625.731

Е. В. Наливко, С. В. Шетько

Белорусский государственный технологический университет

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЛЕГЧЕННОГО ЩИТА
С БУМАЖНЫМ СОТОВЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ, РАБОТАЮЩЕГО НА ИЗГИБ**

Разработана модель оценки эксплуатационных показателей облегченного щита по прочностным показателям его структурных элементов: растяжение-сжатие обшивок; устойчивость сотового заполнителя при сжатии (методика расчета напряжений и деформаций в облегченном щите при действии внешних нагрузок, позволяющая определять оптимальные параметры щита, обеспечивающие его необходимую прочность при минимальном весе). Установлены и описаны механизмы разрушения слоистых щитов: потеря устойчивости заполнителя в краевых зонах образцов от нормальных и сдвиговых деформаций. Выявлено, что величина поперечных деформаций сжатия не зависит от относительных размеров трехслойных щитов, а является функцией жесткости обшивок и упругости бумажного заполнителя на сжатие. Таким образом, использование компонентов с большими показателями жесткости приводит к уменьшению поперечных деформаций сжатия. Нормальные напряжения в обшивках облегченного щита при этом имеют существенный запас по предельным значениям (коэффициенты запаса по прочности для обшивки ≈ 4). При условии оптимального качества склейки определяющим фактором прочности щита является устойчивость заполнителя в краевых зонах.

В статье изложены результаты сравнительного анализа экспериментальных и новых численных методов исследования конструкций. Рассмотрен пример компьютерного анализа прочности облегченного щита при статическом изгибе с применением метода конечных элементов. Исследования решают задачи совершенствования конструкции и процесса подготовки производства облегченных щитов с сотовым заполнителем на основе современных информационных технологий.

Ключевые слова: математическая модель, анализ, изгиб, слоистый щит, бумажный сотовый заполнитель.

E. V. Nalivko, S. V. Shet'ko

Belarusian State Technological University

**MATHEMATICAL MODEL OF THE LIGHTWEIGHT BOARD
WITH PAPER HONEYCOMB CORE WORKING FOR A BEND**

The assessment model of operation indexes of a lightweight board on strength indexes of its structural elements is developed: stretching-compression of facing materials; stability of honeycomb core at compression (calculation method of tension and deformations in the lightweight board at action of an external loading allowing to determine the optimum board parameters providing its high strength with a minimum weight). Destruction mechanisms of structural sandwich construction are established and described: honeycomb core stability loss in edge zones of samples from normal and shift deformations. It is revealed that the size of lateral deformations does not depend on the relative sizes of three-layered board, and is function of facing materials rigidity and elasticity of paper honeycomb core on compression. Thus, use of components with larger rigidity indexes leads to decrease of lateral compression deformations. Normal tensions in facing materials of the lightweight board thus have an essential reserve on the limiting values (coefficients of reserve on strength for facings ≈ 4). On condition of optimum quality of gluing together the determining factor of board strength is stability of honeycomb core in edge zones.

The results of the comparative analysis of the experimental and new research techniques of constructions are explained in the article. An example of the computer strength analysis of the lightweight board at the static bend with application of terminating element method is reviewed. Researches solve problems of perfecting of design and process of production preparation of the lightweight board with paper honeycomb core on the basis of the modern informational technologies.

Key words: mathematical model, analysis, bend, structural sandwich construction, paper honeycomb core.

Введение. В настоящее время в Республике Беларусь наблюдается рост объема производства корпусной мебели и столярно-строительных изделий, что требует потребления значительных материальных и энергетических ресурсов. Однако на мебельных предприятиях мебель

в основном производится из ДСтП и МДФ, а двери – с реечным заполнением, что не отвечает современным требованиям по качеству и стоимости продукции. Одним из направлений решения данной проблемы является внедрение в производство облегченных щитов с бумажным

сотовым наполнителем. Максимальное его использование даст возможность решить проблему производства качественных и сравнительно недорогих изделий. Также благодаря использованию бумажного сотового наполнителя в мебели и столярно-строительных изделиях решится задача представления населению товаров с высокими потребительскими качествами при более низкой цене изделия.

Основным фактором, сдерживающим широкое использование пустотелых щитов в изделиях мебели, является отсутствие методики выбора древесных плитных материалов и бумажного сотового наполнителя, которая позволяет определять напряжения и деформации в щите при действии нагрузок, а на их основе выбирать оптимальные параметры ячеистого щита, обеспечивающие его необходимую прочность и устойчивость при минимальном весе. Это можно сделать на основе анализа и оценки эксплуатационных характеристик и геометрии облегченного щита.

Основная часть. Облегченный щит в самом простом виде включает в себя тонкие внешние обшивки, связанные между собой слоем относительно легкого наполнителя. Тонкие обшивки должны быть высокопрочными и плотными материалами, так как они почти целиком воспринимают все нагрузки, приложенные к конструкции. Средний слой – менее плотный материал – служит для разделения и стабилизации тонких обшивок и сопротивляется сдвигу. При правильном выборе толщины внешних слоев, материалов обшивок и параметров наполнителя (размер ячеек сот, высота наполнителя) можно спроектировать трехслойный щит с высокой прочностью при малом весе.

Если бы конструкция облегченного щита была подобна общим геометрическим случаям, т. е. двутавровой балке (обшивки и средний слой щита аналогичны фланцам и перемычке балки), то для ее расчета в первом приближении можно было применить основные формулы сопротивления материалов для расчета однослойных пластинок и оболочек. Однако отличительная особенность работы трехслойного щита с сотовым наполнителем по сравнению с однослойной панелью состоит в том, что в маложестком наполнителе могут возникнуть деформации сдвига наполнителя, которые заметно повлияют на работу конструкции.

При деформировании трехслойного щита с маложестким наполнителем также могут возникнуть существенные взаимные смещения внешних слоев. Это могут быть смещения взаимного сдвига внешних слоев в направлении, параллельном срединной поверхности щита,

или смещения, связанные с изменением расстояния между внешними слоями. Эти смещения могут сильно повлиять на работу трехслойного щита и делать неприемлемыми для его расчета формулы для однослойной панели [1, 2]. Благодаря развитию средств вычислительной техники и программного обеспечения в настоящее время появилась реальная возможность осуществить сложный процесс расчета напряженно-деформированного состояния щита с сотовым наполнителем с помощью методов математического моделирования и анализа программных комплексов CAD/CAM/CAE.

В большинстве аналитических САЕ-систем (ANSYS, NASTRAN, ADAMS) применяется метод конечных элементов (МКЭ). Данный метод позволяет описать геометрию изделия с достаточной степенью точности, осуществить расчет и многокритериальный анализ конструкции с учетом физико-механических и эксплуатационных показателей материалов. МКЭ позволяет значительно уменьшить затраты при разработке новых изделий и существенно сократить объемы или даже полностью отказаться от дорогостоящих стендовых испытаний. Кроме того, с помощью этого метода можно в сравнительно короткие сроки оценить характеристики разных вариантов конструкции и выбрать наилучшую [3].

В настоящее время МКЭ широко используется при решении задач строительной механики, распространения тепла, гидромеханики (например, задач о течении жидкости в пористой среде), деревообрабатывающей промышленности (например, при моделировании напряжений в круглых пилах).

Основная идея метода конечных элементов состоит в том, что любую непрерывную величину (перемещение, давление и т. п.) можно аппроксимировать моделью, состоящей из отдельных элементов. На каждом из этих элементов исследуемая непрерывная величина аппроксимируется кусочно-непрерывной функцией, которая строится на значениях исследуемой непрерывной величины в конечном числе точек рассматриваемого элемента.

В общем случае непрерывная величина заранее неизвестна, и нужно определить значения этой величины в некоторых внутренних точках области. Дискретную модель очень легко построить, если сначала предположить, что известны числовые значения этой величины в некоторых внутренних точках области. После этого можно перейти к общему случаю.

С этой точки зрения конструкцию щита с сотовым наполнителем можно рассматривать как некоторую совокупность конструктивных элементов, соединенных в конечном числе

узловых точек. Если будут известны соотношения между силами и перемещениями для каждого отдельного элемента, то, используя приемы МКЭ, можно описать свойства и исследовать поведение конструкции в целом.

Для изучения особенности работы трехмерного облегченного щита было смоделировано испытание материала на статический изгиб. Для оценки его эксплуатационных характеристик при изгибе были использованы входные параметры щита, в числе которых: 1) размер ячейки заполнителя трехслойного щита, мм; 2) высота бумажного сотового заполнителя, мм; 3) материалы обшивок; 4) толщина внешних слоев (обшивок), мм. Схема с описанием граничных условий и нагрузок показана на рис. 1.

В процессе моделирования и анализа были приняты следующие допущения:

1. Сотовый заполнитель моделировали как анизотропный материал вследствие значительного отличия упругих характеристик по направлениям ориентации ячеек. В направлении осей y и x (рис. 1) бумага работает в основном на растяжение-сжатие вдоль плоскости перегородок, упругие характеристики E_x , E_y , G_{xz} и G_{yz} принимали по справочным данным [4]; E_z и G_{xy} определяли по экспериментальным данным. Таким образом, для технической бумаги приняли: $E_x = E_y = 4,1$ ГПа; $G_{xz} = G_{yz} = 1,6$ ГПа; $E_z = 0,4$ ГПа; $G_{xy} = 0,24$ ГПа.

2. Древесностружечные и древесноволокнистые плиты можно представить себе как бесконечную систему склеенных древесных частиц, ориентированных случайным образом и определенным образом взаимодействующих между собой. Размеры этих частиц малы по сравнению с размерами плит. Следовательно, эти материалы можно рассматривать как однородную сплошную среду. Для расчета однородных тел с хаотичным расположением малых частиц ис-

пользуют теорию упругости изотропного тела, согласно которой свойства материалов в их плоскости могут считаться одинаковыми. Модуль упругости E_x и коэффициент Пуассона μ брали из табл. 1.

3. Влажность материалов во времени остается постоянной, т. е. не учитываются влажностные напряжения (в последствии будет учтен этот фактор).

4. Все нагрузки являются установившимися (без учета центробежных и демпфирующих эффектов).

Таблица 1

Упругие и прочностные характеристики различных материалов обшивок

Показатель	Материал обшивки		
	ДВП (толщина 3,2 мм)	МДФ (толщина 7,6 мм)	ДСтП (толщина 8 мм)
Прочность при изгибе $\sigma_{и}$, МПа	15	25	38
Модуль упругости при изгибе $E_{и}$, ГПа	4,3	5,1	6,0
Прочность при растяжении $\sigma_{р}$, МПа	12	17	27
Мгновенный модуль упругости при растяжении E , ГПа	2,8	4,8	5,4
Длительный модуль упругости при растяжении H , ГПа	1,5	3,4	4,3
Модуль упругости в плоскости изотропии, ГПа	3,8	4,9	6,1
Модуль сдвига в плоскости пластины G , ГПа	1,7	2,1	2,5
Коэффициент Пуассона, μ	0,12	0,17	0,22

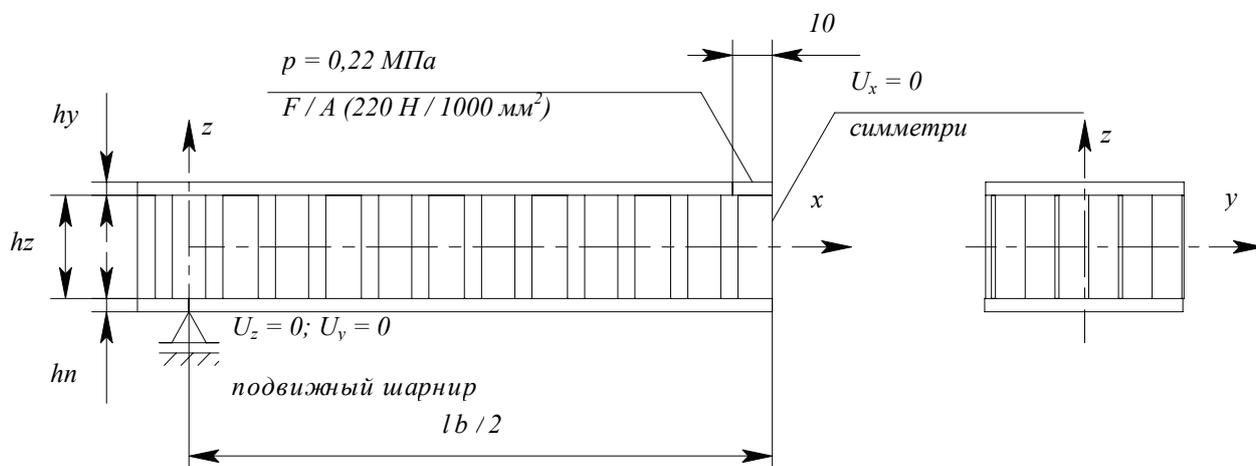


Рис. 1. Схема нагружения и закрепления образца.

Размер ячейки – 15 мм, толщина соты – 25 мм, толщина МДФ – 3,2 мм

На расчетной схеме введены условные обозначения: U_z , U_y , U_x – ограничение перемещений вдоль соответствующих осей x , y , z . С целью устранения концентраторов напряжений сосредоточенную изгибающую нагрузку F заменили эквивалентным давлением, распределенным на малую площадь, соответствующую поверхности касания индентора с панелью ($A = 1000 \text{ мм}^2$).

Затем был выбран тип конечного элемента (КЭ) – SOLID95 (трехмерный элемент с 20 узлами (рис. 2)). Он предназначен для трехмерного моделирования объемных изделий сложной конфигурации.

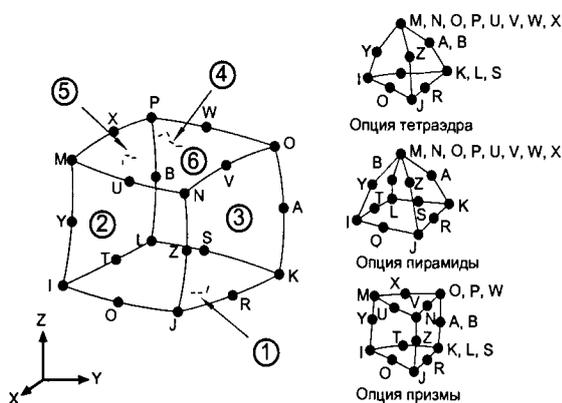


Рис. 2. Форма конечного элемента SOLID95 в виде параллелепипеда, треугольной, четырехугольной призмы и тетраэдра

Далее была сгенерирована объемная конечно-элементная сетка образца (рис. 3). Был проведен ряд предварительных расчетов, с помощью которых найдено оптимальное количество элементов сетки. Эти расчеты показали, что сетка оказывает существенное влияние не только на внутренние напряжения, но и на устойчивость модели. В результате, постепенно сгущая сетку, мы выбрали оптимальное количество и упорядоченный вид сетки. Количество элементов для трехмерного щита составило около 50 000 и увеличивалось с увеличением толщины щита.

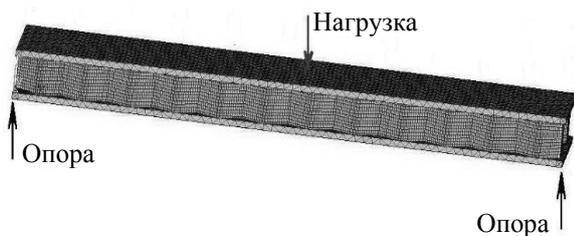


Рис. 3. Результат генерации объемной конечно-элементной сетки (использованы конечные элементы в виде параллелепипеда и треугольной призмы) и приложения нагрузок и граничных условий к модели

Результат расчета для панели с размерами ячейки 15 мм, толщиной соты 25 мм и толщиной панелей ДВП 3 мм представлены на рис. 4.

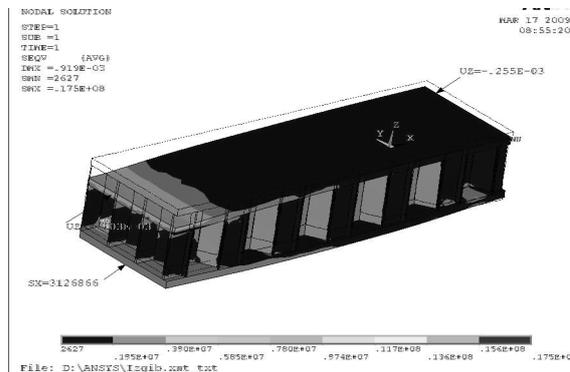


Рис. 4. Расчет бруса по методу конечных элементов

Сравнительный анализ расчета по методу конечных элементов и эксперимента можно провести по данным, представленным в табл. 2.

Для традиционных древесных материалов в качестве физико-механических характеристик принято использовать предел прочности и модуль упругости при изгибе. В нашем случае установлено, что разрушение образцов при изгибе происходит не вследствие изгиба, а от потери устойчивости сотового заполнителя в краевых зонах образца от поперечных деформаций сжатия и деформаций сдвига. При проведении расчета получено распределение давлений сжатия, действующих на сотовый заполнитель, и выявлено, что в местах установки опор давление достигает критического значения раньше других величин, определяющих прочность пакета. Поэтому возникает вопрос о сопоставлении эксплуатационных показателей различных материалов.

Для слоистых материалов возможно определение нормальных напряжений в слоях при известной изгибающей нагрузке.

Расчетные данные по нормальным напряжениям в обшивках слоистых щитов различного состава представлены в табл. 2. При анализе полученных данных очевидно, что значения действующих нормальных напряжений гораздо ниже допускаемых для материалов самих обшивок (табл. 1), следовательно, при изгибе сотовых щитов с заполнителем малой жесткости не происходит разрушения материала обшивок. Нормальные напряжения в обшивках при этом имеют существенный запас по предельным значениям (коэффициенты запаса по прочности n для обшивки ≈ 4).

В качестве критериев для оценки эффективности использования трехслойных щитов можно использовать удельные показатели прочности и жесткости щитов.

Таблица 2

Результаты расчета напряжений и прогибов в панелях

Размер ячейки, мм	Высота БСЗ, мм	Предельное усилие изгиба (экспер.), Н	Результаты эксперимента				МКЭ			
			Напряжения в обшивке, МПа	Наиб. прогиб, мм	Удел. прочность при изгибе, МПа	Относительная жесткость щитов при изгибе, Н·м ²	Напряжения в обшивке, МПа	Наиб. прогиб, мм	Удел. прочность при изгибе, МПа	Относительная жесткость щитов при изгибе, Н·м ²
Материал обшивок – ДВП, $\delta = 3$ мм, $\rho = 880$ кг/м ³										
15	15	410	7,3	2,6	22,8	51,33	7,7	2,8	24,1	47,66
	25	384	4,2	2,3	18,3	54,34	4,35	2,4	18,9	56,7
	35	345	2,7	1,8	15,0	62,39	2,5	1,7	13,9	58,92
25	15	311	6,0	2,4	19,4	246	5,65	2,2	18,2	225,5
	25	280	3,3	1,7	15,7	312,7	2,45	1,6	11,7	294,3
	35	225	1,9	1,27	11,2	336,3	1,77	1,2	10,4	317,8
35	15	275	5,5	2,3	18,3	684,1	5,88	2,4	19,6	713,8
	25	246	3,0	1,3	14,3	1032,7	2,85	1,2	13,6	953,3
	35	217	1,9	1,1	11,9	1128,7	1,65	1,0	10,3	1026,1
Материал обшивок – МДФ, $\delta = 8$ мм, $\rho = 750$ кг/м ³										
15	15	2215	13,0	1,88	23,2	383,5	12,5	1,8	22,3	367,2
	25	1950	7,5	1,40	17,4	453,4	7,88	1,4	18,3	453,4
	35	1650	4,7	1,11	13,1	483,9	4,39	1,0	12,2	435,9
25	15	1450	9,9	1,76	18,0	1564,1	10,4	1,9	18,9	1688,5
	25	1325	5,5	1,22	13,1	2061,8	5,61	1,2	13,4	2028,0
	35	1140	3,5	1,05	10,3	2181,2	3,24	0,9	9,5	1869,6
35	15	1345	8,8	1,57	16,0	4901,4	8,3	1,2	15,1	3746,3
	25	1005	4,3	1,09	10,2	5275,2	4,52	1,2	10,8	5807,6
	35	948	3	0,87	8,8	6234,3	3,18	0,9	9,4	6449,3
Материал обшивок – ДСтП, $\delta = 8$ мм, $\rho = 675$ кг/м ³										
15	15	2550	15,0	1,97	27,8	421,4	16,5	2,2	30,6	470,6
	25	2185	8,4	1,52	20,0	467,9	9,41	1,7	22,4	523,3
	35	1830	5,2	1,19	14,9	500,6	5,49	1,2	15,7	504,8
25	15	1685	11,5	1,72	21,7	1859,8	12,28	1,8	23,2	1946,3
	25	1490	6,2	1,27	15,1	2263,5	5,74	1,2	14,0	2138,7
	35	1240	3,8	1,04	11,5	2518,8	4,37	1,1	13,2	2664,1
35	15	1590	10,4	1,45	19,6	5878,8	11,42	1,5	21,5	6081,5
	25	1120	4,8	1,09	12,0	6273,8	5,04	1,2	12,6	6906,9
	35	1042	3,3	0,93	10,0	6410,4	3,52	1,0	10,7	6892,9

Как видно из результатов расчета, удельная прочность с высотой сотового заполнителя существенно уменьшается, однако при этом в большей степени происходит увеличение жесткости. Определяющим фактором при выборе конфигурации щита в данном случае будет являться назначение и условия эксплуатации.

Как следует из полученных данных, расчет напряженно-деформированного состояния щитов с сотовым заполнителем по методу конечных элементов дает удовлетворительные резуль-

таты, хорошо согласуемые с экспериментом. Погрешность результатов не превышает 5–10%.

Заключение. В результате проверки путем проведения эксперимента установлена адекватность предложенного расчета с использованием программных средств, реализующих метод конечных элементов.

Установлено, что разрушение слоистых щитов происходит от потери устойчивости заполнителя в краевых зонах образцов от нормальных и сдвиговых деформаций.

Список литературы

1. Прочность, устойчивость, колебания: справочник в 3 т. Т. 2 / под общ. ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. С. 243–265.
2. Расчет трехслойных конструкций: справочник / В. Н. Кобелев, С. И. Тимофеев; под общ. ред. В. Н. Кобелева. М.: Машиностроение, 1984. С. 5–44.

3. Морозов Е. М. ANSYS в руках инженера: Механика разрушения. Изд. 2-е, испр. М.: ЛЕНАНД, 2010. 456 с.
4. Рудицын М. Н. Справочное пособие по сопротивлению материалов. Изд. 3-е, перераб. и доп. / М. Н. Рудицын, П. Я. Артемов, М. И. Любошиц. Минск: Высшая школа, 1970. 630 с.

References

1. *Prochnost', ustoychivost', kolebaniya: spravochnik: v 3 t. T. 2.* [Strength, stability, oscillation: reference book in 3 vol. Vol. 2]. Moscow: Mashinostroenye Publ., 1968, pp. 243–265.
2. Kobelev V. N., Timofeev S. I. *Raschet trekhsloynnykh konstruksiy* [Calculation of sandwich construction: reference book]. Moscow: Mashinostroenye Publ., 1984, pp. 5–44.
3. Morozov E. M. *ANSYS v rukakh inzhenera: Mekhanika razrusheniya* [ANSYS in the engineer's hand: Mechanics of destruction]. Moscow: LENAND Publ., 2010, 456 p.
4. Ruditsyn M. N., Artemov P. Ya., Lyuboshits M. I. *Spravochnoe posobie po soprotivleniyu materialov: publ. third, the processed and the added* [The reference book on resistance of materials]. Minsk: Vysshaya shkola Publ., 1970, 630 p.

Информация об авторах

Наливко Елена Васильевна – ассистент кафедры технологии и дизайна изделий из древесины. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова 13а, Республика Беларусь). E-mail: Nalivko83@bk.ru

Шетько Сергей Васильевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры технологии и дизайна изделий из древесины. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова 13а, Республика Беларусь). E-mail: Shs@belstu.by

Information about the authors

Nalivko Elena Vasil'evna – assistant, Department of technology and design of wooden articles. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Nalivko83@bk.ru

Shet'ko Sergey Vasil'evich – Ph. D. Engineering, assistant professor, associate professor, Department of technology and design of wooden articles. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Shs@belstu.by

Поступила 20.02.2015