

Д.С. Карпович¹, канд. техн. наук;
 Н.В. Князева¹, магистрант;
 С.И. Карпович¹, канд. техн. наук;
 С.Г. Тихомиров², проф., д-р техн. наук;
 Ю.В. Пятаков², канд. физ.-мат. наук
 (¹БГТУ, г. Минск, ²ВГУИТ, г. Воронеж, РФ)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ КАК РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

Как правило, для представления объектов с распределенными параметрами, как и в случае объектов с сосредоточенными параметрами, используют представление в виде дифференциальных уравнений в частных производных.

Особенностью распределенных систем является наличие пространственных составляющих в сигнале входа и выхода.

Рассмотрим возможность моделирования температурного поля круглой дереворежущей пилы.

При описании объектов с распределенными параметрами можно выделить три подхода:

1. Представление в форме дифференциальных уравнений в частных производных. Уравнение Фурье можно записать в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

$$0 < x < L_x, \quad 0 < y < L_y, \quad 0 < z < L_z,$$

где $T(x, y, z, t)$ - фазовая переменная; x, y, z , - пространственные координаты; a - заданный коэффициент; L_x, L_y, L_z - заданные числа.

Граничные и начальные условия для уравнения (1) имеют вид:

$$T(0, y, z, t) = T(x, 0, z, t) = T(L_x, y, z, t) = T(x, L_y, z, t) = 0$$

$$\frac{\partial T(x, y, 0, t)}{\partial z} = 0, \quad T(x, y, L_z, t) = U(x, y, t), \quad T(x, y, z, 0) = 0. \quad (2).$$

Общий способ решения - использование приближенных численных методов. Наиболее широко распространены методы сеток.

Основная идея метода сеток - аппроксимация искомой непрерывной функции совокупностью приближенных значений, рассчитанных в некоторых точках области - узлах. Совокупность узлов, соединенных определенным образом, образует сетку. Сетка, в свою очередь, является дискретной моделью области определения искомой функции.

В методе конечных разностей используются, как правило, регулярные сетки, шаг которых постоянен либо меняется по несложному закону. Расстояние между соседними узлами - шаг сетки.

В методе конечных элементов исходная область определения функции разбивается с помощью сетки, в общем случае неравномерной, на отдельные подобласти - конечные элементы. Искомая непрерывная функция заменяется кусочно-непрерывной. Практически метод конечных элементов применяют в виде специальных программных систем, например, PDE Toolbox/MATLAB или ANSYS.

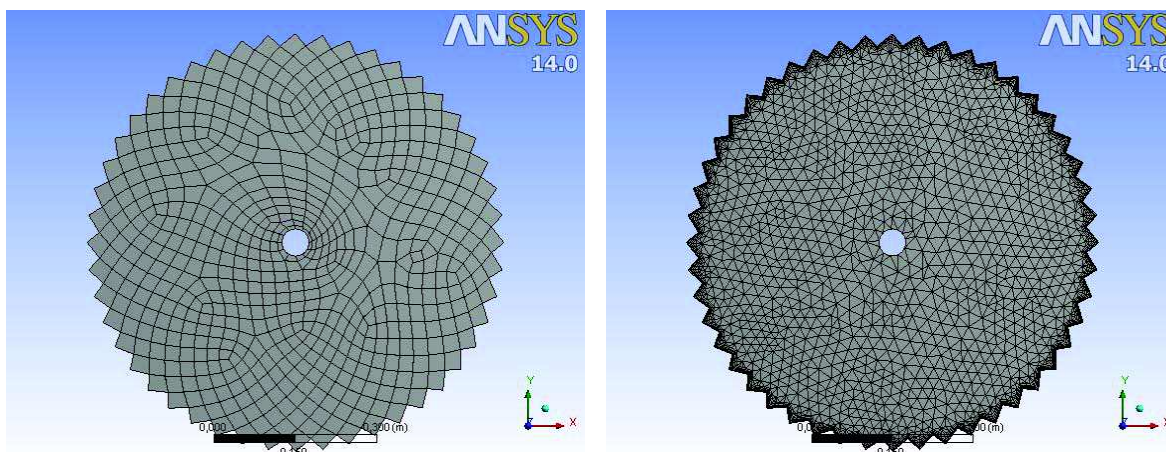
Рассмотрим особенности моделирования температурных полей в пакете ANSYS. В данной программе в ходе работы было промоделировано изменение температуры в процессе резания круглой пилой и представлено сравнение полученных результатов в зависимости от генерации конечно - элементарной сетки. Создание сетки является неотъемлемой частью процесса компьютерного инженерного моделирования (CAE). Качество сеточной модели влияет на точность, сходимость и скорость получения решения. Поэтому качественные и более автоматизированные инструменты построения сетки дают лучший результат. Технологии ANSYS предлагают совокупность методов построения сетки, различных по сложности алгоритмов и трудоемкости построения. Обладая такой возможностью, можно расположить сетку нужного типа в требуемой зоне модели и убедиться в том, что расчет модели будет выполнен точно.

Инструменты для создания сеток от компании ANSYS позволяют генерировать сеточные модели, для разных типов анализа. Каждый из сеточных методов удовлетворяет специфическим требованиям той или иной области. Данная процедура выполняется в модуле симуляции Mechanical. Сетка генерируется на геометрической модели и является основной для составления и решения системы уравнений в матричном виде.

Существует два способа генерации сетки.

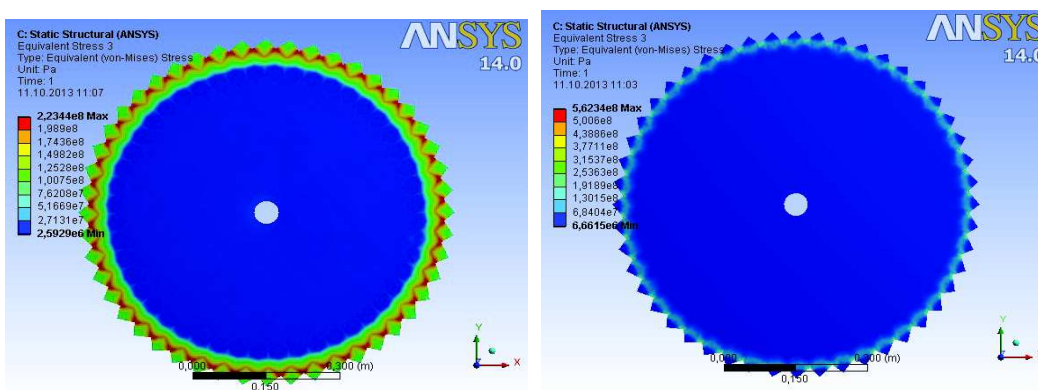
1. Автоматическая генерация сетки с установками по умолчанию при запуске на решение. При этом имеется возможность предварительно просмотреть сетку до запуска на расчет, чтобы оценить ее соответствие поставленной задаче (рисунок 1а).

2. Генерация сетки с задаваемыми пользователем установками. В этом случае мы сами самостоятельно определяем особенности создаваемой сетки значения необходимых параметров (рисунок 1б).



- а) автоматическая генерация сетки;
 б) генерация сетки с задаваемыми пользователем установками

Рисунок 1 - Генерации сетки



- а) автоматическая генерация сетки;
 б) генерация сетки с задаваемыми пользователем установками

Рисунок 2 – Напряженное состояние круглой исковой пилы

Напряженное состояние возникает в результате теплового расширения объекта и носит локальный характер. В данном примере (рис. 2) наблюдаются при этом ярко выраженные лакуны напряженное состояние в точках соединения отдельных элементов. Практическим подтверждением данного фактора является то, что облом круглой дисковой пилы происходит в точках соединения отдельных зубьев между собой. Так как взаимодействие в наибольшем случае оказывает на зубчатый венец, то при размещении узловых элементов сетки необходимо увеличить плотность узлов непосредственно в зоне режущего венца, то есть, правильным решение будет выбрать генерацию сетки с заданными пользователем установками. В пакете MATLAB были получены зависимость деформации объекта от размера конечного элемента сетки и зависимость величины напряженного состояния в объекте от размера конечного элемента сетки (рис. 3).

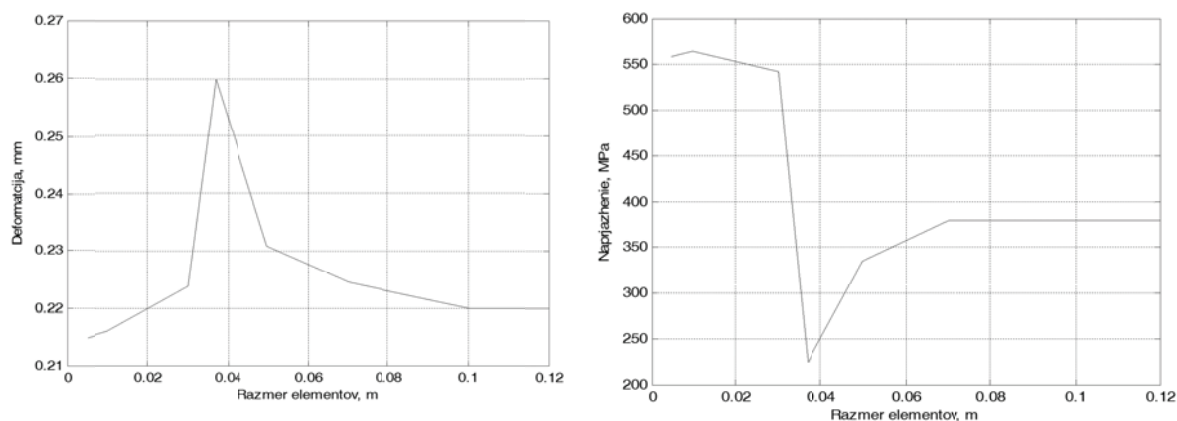


Рисунок 4 – а) график зависимости деформации круглой дисковой пилы от размера конечного элемента б) график зависимости напряжения в круглой дисковой пиле от размера конечного элемента

При анализе графиков можно сделать следующий вывод: при автоматической генерации сетки (для данного случая размер элементов равен 0,037) значения имеют существенное отклонение по величинам деформации и напряжения, следовательно, автоматическая сетка имеет большую погрешность в численном решении как уравнения теплопроводности, так и деформации.

С увеличением размеров конечных элементов сетки в области зубчатого венца рассчитанное значение деформации и напряжения стремиться к некоторому установившемуся значению. Таким образом, при величине элемента от 0,06 до 0,12 м точность будет приблизительно одинакова.

В случае уменьшения размеров (меньше 0,037м) конечных элементов сетки динамика изменения существенно отличается от изменений в диапазоне больших размеров элементов. Можно предположить, что с уменьшением размеров конечных элементов сетки точность возрастает. Наилучшим при данном допущении с точки зрения точности является выбор минимального размера элементов, но при этом следует учитывать, что уменьшение размеров элементов значительно влияет на скорость получения данного решения.

Таким образом наиболее подходящим значением для решения рассматриваемой задачи является выбор режима генерации сетки с заданными параметрами при условии размера конечного элемента сетки в 0,01м.