ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.935.2+519.71

В. М. Марченко, И. М. Борковская, О. Н. Пыжкова
Белорусский государственный технологический университет

ГИБРИДНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С МНОГОМЕРНЫМ ВРЕМЕНЕМ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ*

Для решений линейных стационарных гибридных 2-D-систем получены интегральные представления, ядрами которых являются решения специальных сопряженных систем, что в совокупности является обобщением известного для обыкновенных систем представления формулой Коши. Введены определяющие уравнения исходных 2-D-систем, проанализированы их алгебраические свойства и, как следствие, получены представления решений 2-D-систем в виде рядов по решениям определяющих уравнений. В заключение рассмотрен нестационарный случай.

Ключевые слова: 2-D-системы, определяющие уравнения, представление решений, формула типа Коши.

V. M. Marchenko, I. M. Borkovskaya, O. N. Pyzhkova
Belarusian State Technological University

HYBRID DYNAMIC 2-D-SYSTEMS. REPRESENTATION OF SOLUTIONS

The integral representations are obtained for linear time-invariant hybrid 2-D-systems solutions. The representations are based on special conjugated systems solutions. The result is an extension of the well known for ordinary differential systems representation by Cauchy formula to 2-D-systems. We introduce the defining equations of the original 2-D-system and analyze their algebraic properties. As a result, we obtain the representations in the form of series based on their defining equations solutions. A nonstationary case is also considered.

Key words: 2-D-systems, defining equations, solution representations, Cauchy formula.

Введение. Научно-технический прогресс в настоящее время стимулирует потребность более адекватного, всестороннего и глубокого исследования математических моделей современных технологических процессов. Большинство из перечисленных процессов приводят к математическим моделям в виде гибридных систем [1–5]. Актуальными при этом оказываются как новые модели, так и новые методы их исследований.

Ниже рассматриваются гибридные дискретно-непрерывные системы с «многомерным» (2-D-мерным) временем, состоящие из непрерывной и дискретной систем.

Основная часть.

1. Постановка задачи. Рассмотрим объект управления, описываемый следующей гибридной 2-D-системой в симметрической форме (по отношению к операторам дифференцирования и сдвига):

$$\dot{x}_1(\tau, k) = A_{11}x_1(\tau, k) + A_{12}x_2(\tau, k) + B_1u(\tau, k),$$

$$\tau \in [0, +\infty), \tag{1}$$

$$x_2(\tau, k+1) = A_{21}x_1(\tau, k) + A_{22}x_2(\tau, k) + B_2u(\tau, k),$$

$$i = 0, 1, 2, ..., \tag{2}$$

где $\dot{x}_1(t, i) = \dfrac{\partial x_1(t, i)}{\partial t}$, $x_1(t, i) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t, i) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $u(t, i) \in \mathbb{R}^r$; $x_1(t, i), x_2(t, i)$ – n_1- и n_2-векторы состояния системы; $u(t, i)$ – r-вектор управляющего

* Работа выполнена в рамках сотрудничества с Белостокским техническим университетом (S/WI/2/2011).

воздействия соответственно в момент (t, i), $t \geq 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots$; $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$ – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Граничные (начальные) условия для (1) и (2) зададим в виде

$$x_1(0,k) = x_1(k),\ \ k = 0,1,2,..., \tag{3}$$

$$x_2(t,0) = x_2(t),\ t \in [0,+\infty). \tag{4}$$

Отметим, что гибридная система (1), (2) по своей структуре в некоторой степени аналогична известной 2-D-модели Россера.

Наряду с гибридной 2-D-системой в симметрической форме можно рассматривать и гибридную модель 2-D-системы в нормальной форме:

$$\dot{x}_1(t,i) = A_{11}x_1(t,i) + A_{12}x_2(t,i) + B_1u(t,i),$$
$$t \in [0,+\infty), \tag{5}$$

$$x_2(t,i) = A_{21}x_1(t,i) + A_{22}x_2(t,i-1) + B_2u(t,i),$$
$$i = 0,1,2,..., \tag{6}$$

с начальными условиями

$$x_1(0,i) = x_1(i),\ \ i = 0,1,2,..., \tag{7}$$

$$x_2(t,-1) = x_2(t),\ t \in [0,+\infty). \tag{8}$$

В дальнейшем сконцентрируем внимание на системе (1), (2) в симметрической форме.

Задача. Получить явные формулы представления решений начально-краевой задачи (3), (4) для гибридной 2-D-системы (1), (2) в симметрической форме.

Теорема 1. Существует единственное решение системы (1), (2), удовлетворяющее начальным условиям (3), (4).

Доказательство. Существование и единственность такого решения можно установить, интегрируя систему (1), (2) «по шагам». Действительно, на первом шаге $k = 0$ в силу (4) функция $x_2(\cdot, 0)$ известна. Тогда, подставляя в (1), получаем обыкновенное неоднородное линейное дифференциальное уравнение $\dot{x}_1(t,0) - A_{11}x_1(t,0) = A_{12}x_2(t) + B_1u(t)$, правая часть которого при заданном управлении известна. Решение такого уравнения с начальным условием (см. (3)) $x_1(0,0) = x_1(0)$, как известно, существует, единственно и может быть вычислено, например, по формуле Коши. Тогда подставляем найденное решение $x_1(t,0), t \in [0,+\infty)$, в уравнение (2) и получаем функцию $x_2(t,1)$, $t \in [0,+\infty)$. В результате определяем решение $x_1(\cdot, 0)$, $x_2(\cdot, 0)$ при $k = 0$ и функцию $x_2(t,1)$, $t \in [0,+\infty)$, для $k = 1$. Аналогичные рассуждения имеют место на втором и всех последующих шагах при $k = 1, 2, \ldots$, что завершает доказательство теоремы 1.

Замечание 1. Как вытекает из доказательства теоремы 1, при каждом k кусочно-непрерывной функции $x_2(\cdot)$ и кусочно-непрерывном управлении $u(\cdot,k)$ решение $x_1(\cdot,k)$ является абсолютно-непрерывной, а $x_2(\cdot,k)$ – кусочно-непрерывной функциями переменной t, $t \geq 0$, $k = 1,2, \ldots$

2. Сопряженная система и сопряженное соответствие. Пусть $(m \times n_1)$ и соответственно $(m \times n_2)$ – матричные функции $X_1^*(\cdot,\cdot)$ и $X_2^*(\cdot,\cdot)$, где число m в разных случаях имеет различные значения, являются решением сопряженной системы:

$$\frac{\partial X_1^*(t,k)}{\partial t} = X_1^*(t,k)A_{11} + X_2^*(t,k)A_{21}, \tag{9}$$

$$X_2^*(t,k+1) = X_1^*(t,k)A_{12} + X_2^*(t,k)A_{22},$$
$$t \geq 0,\ k = 0,1,2,... \tag{10}$$

Тогда справедлива лемма 1.

Лемма 1. Вдоль решений основной системы (1), (2) и сопряженной системы (9), (10) имеет место следующее сопряженное соответствие:

$$\sum_{k=0}^{\theta} X_1^*(0^+,\theta-k)\,x_1(t-0,k) + \int_0^t X_2^*(t-\tau,0)\,x_2(\tau,\theta+1)\,d\tau =$$
$$= \sum_{k=0}^{\theta} X_1^*(t-0,\theta-k)\,x_1(0,k) + \int_0^t X_2^*(t-\tau,\theta+1)\,x_2(\tau,0)\,d\tau +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\theta}\int_0^t (X_1^*(t-\tau,\theta-k)B_1 + X_2^*(t-\tau,\theta-k)B_2)\,u(\tau,k)\,d\tau,$$
$$t \geq 0,\ \theta = 0,1,2,... \tag{11}$$

Доказательство. Перенося все члены уравнения (1) в одну часть, умножая полученное равенство слева на матричную функцию $X_1^*\ (t-\tau,\theta-k)$ и интегрируя по τ от $\tau = 0$ до $\tau = t$, после чего выполняя интегрирование по частям в первом интеграле вновь полученного соотношения, получаем:

$$0 = \int_0^t X_1^*(t-\tau,\theta-k)(\dot{x}_1(\tau,k) - A_{11}x_1(\tau,k) - A_{12}x_2(\tau,k) - B_1u(\tau,k)) = X_1^*(0^+,\theta-k) \times$$
$$\times x_1(t-0,k) - X_1^*(t-0,\theta-k)\,x_1(0^+,k) + \int_0^t \frac{\partial X_1^*(t-\tau,\theta-k)}{\partial(t-\tau)}\,x_1(\tau,k)\,d\tau -$$

$$-\int_0^t X_1^*(t-\tau,\theta-k)(A_{11}x_1(\tau,k)-A_{12}x_2(\tau,k)-$$
$$-B_1u(\tau,k))d\tau = X_1^*(0^+,\theta-k)x_1(t-0,k)-$$
$$-X_1^*(t-0,\theta-k)x_1(0^+,k)+$$
$$+\int_0^t\left(\frac{\partial X_1^*(t-\tau,\theta-k)}{\partial(t-\tau)}-X_1^*(t-\tau,\theta-k)A_{11}\right)\times$$
$$\times x_1(\tau,k)d\tau-\int_0^t X_1^*(t-\tau,\theta-k)(A_{12}x_2(\tau,k)+$$
$$+B_1u(\tau,k))d\tau. \qquad (12)$$

Перенося все члены уравнения (2) в одну часть, умножая полученное равенство слева на матричную функцию $X_2^*(t-\tau,\theta-k)$, суммируя по k от $k=0$ до $k=\theta$ и сдвигая индекс суммирования в первом слагаемом на 1, имеем:

$$0=\sum_{k=0}^{\theta}X_2^*(t-\tau,\theta-k)(x_2(\tau,k+1)-A_{21}x_1(\tau,k)-$$
$$-A_{22}x_2(\tau,k)-B_2u(\tau,k))=X_2^*(t-\tau,0)x_2(\tau,\theta+1)-$$
$$-X_2^*(t-\tau,\theta+1)x_2(\tau,0)+\sum_{k=0}^{\theta}(X_2^*(t-\tau,\theta-k+1)-$$
$$-X_2^*(t-\tau,\theta-k)A_{22})x_2(\tau,k)-\sum_{k=0}^{\theta}X_2^*(t-\tau,\theta-k)\times$$
$$\times(A_{21}x_1(\tau,k)+B_2u(\tau,k)). \qquad (13)$$

Суммируем в (12) по k от $k=0$ до $k=\theta$, интегрируем в (13) по τ от $\tau=0$ до $\tau=t$ и складываем полученные тождества. Получаем:

$$0=\sum_{k=0}^{\theta}(X_1^*(0^+,\theta-k)x_1(t-0,k)-X_1^*(t-0,\theta-k)\times$$
$$\times x_1(0^+,k))+$$
$$+\sum_{k=0}^{\theta}\int_0^t\left(\frac{\partial X_1^*(t-\tau,\theta-k)}{\partial(t-\tau)}-X_1^*(t-\tau,\theta-k)A_{11}\right)\times$$
$$\times x_1(\tau,k)d\tau-\sum_{k=0}^{\theta}\int_0^t X_1^*(t-\tau,\theta-k)(A_{12}x_2(\tau,k)+$$
$$+B_1u(\tau,k))d\tau+\int_0^t(X_2^*(t-\tau,0)x_2(\tau,\theta+1)-X_2^*(t-$$
$$-\tau,\theta+1)x_2(\tau,0))d\tau+\int_0^t\sum_{k=0}^{\theta}(X_2^*(t-\tau,\theta-k+1)-$$
$$-X_2^*(t-\tau,\theta-k)A_{22})x_2(\tau,k))d\tau-$$
$$-\int_0^t\sum_{k=0}^{\theta}X_2^*(t-\tau,\theta-k)(A_{21}x_1(\tau,k)+B_2u(\tau,k))d\tau$$

или с учетом вида сопряженной системы (9), (10):

$$0=\sum_{k=0}^{\theta}X_1^*(0^+,\theta-k)x_1(t-0,k)-$$
$$-\sum_{k=0}^{\theta}X_1^*(t-0,\theta-k)x_1(0^+,k)+$$
$$+\sum_{k=0}^{\theta}\int_0^t\left(\frac{\partial X_1^*(t-\tau,\theta-k)}{\partial(t-\tau)}-\right.$$
$$\left.-X_1^*(t-\tau,\theta-k)A_{11}-X_2^*(t-\tau,\theta-k)A_{21}\right)x_1(\tau,k)d\tau+$$
$$+\sum_{k=0}^{\theta}\int_0^t(X_2^*(t-\tau,\theta-k+1)-X_1^*(t-\tau,\theta-k)A_{12}-$$
$$-X_2^*(t-\tau,\theta-k)A_{22})x_2(\tau,k)d\tau+$$
$$+\int_0^t X_2^*(t-\tau,0)x_2(\tau,\theta+1)d\tau-$$
$$-\int_0^t X_2^*(t-\tau,\theta+1)x_2(\tau,0)d\tau-\sum_{k=0}^{\theta}\int_0^t(X_1^*(t-\tau,\theta-k)B_1+$$
$$+X_2^*(t-\tau,\theta-k)B_2)u(\tau,k))d\tau=\sum_{k=0}^{\theta}X_1^*(0^+,\theta-k)\times$$
$$\times x_1(t-0,k)+\int_0^t X_2^*(t-\tau,0)x_2(\tau,\theta+1)d\tau-$$
$$-\sum_{k=0}^{\theta}X_1^*(t-0,\theta-k)x_1(0^+,k)-$$
$$-\int_0^t X_2^*(t-\tau,\theta+1)x_2(\tau,0)d\tau-$$
$$-\sum_{k=0}^{\theta}\int_0^t(X_1^*(t-\tau,\theta-k)B_1+$$
$$+X_2^*(t-\tau,\theta-k)B_2)u(\tau,k))d\tau,$$

откуда непосредственно вытекает соотношение (11). Лемма 1 доказана.

3. Представление решений в виде определенных интегралов на основе решений сопряженной системы. Пусть m – произвольное неотрицательное число и $t\ge 0$. Пусть далее $(n_1\times n_1)$ и соответственно $(n_1\times n_2)$ – матричные функции $X_1^*(\cdot,\cdot)=X_{11}^*(\cdot,\cdot)$ и $X_2^*(\cdot,\cdot)=X_{12}^*(\cdot,\cdot)$ являются решением сопряженной системы (9), (10) с начально-граничными условиями

$$X_1^*(0^+,k)=\begin{cases}I_{n_1}, & k=0,\\ 0, & k\ne 0,\end{cases}\quad k=0,1,\ldots \qquad (14)$$
$$X_2^*(\tau,0)\equiv 0,\ \ \tau\in[0,t].$$

Здесь и в дальнейшем символ I_ν означает единичную $(\nu\times\nu)$-матрицу. Имеет место теорема 2.

Теорема 2. Непрерывная компонента $x_1(t-0,m)=x_1(t,m)$ решения системы (1), (2) в точке (t,m) может быть вычислена по формуле

$$x_1(t,m)=\sum_{k=0}^{m}X_{11}^*(t-0,m-k)x_1(0,k)+$$
$$+\int_0^t X_{12}^*(t-\tau,m+1)\,x_2(\tau,0)d\tau+$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\int_{0}^{t}(X_{11}^{*}(t-\tau,m-k)B_1+X_{12}^{*}(t-\tau,m-$$
$$-k)B_2)u(\tau,k)d\tau,\quad t\geq 0, m=0,1,2,... \qquad (15)$$

Доказательство следует из сопряженного соответствия при $\theta = m$ с учетом вида начальных условий (14) сопряженной системы.

Замечание 2. Представление (15) является обобщением на гибридные 2-D-системы (1), (2) хорошо известного для обыкновенных динамических систем представления решений по формуле Коши.

Если теперь рассмотреть вопрос о представлении компоненты $x_2(t, m)$, то, исследуя сопряженное соответствие, обнаруживаем слагаемое $\int_0^t X_2^*(t-\tau,0)x_2(\tau,\theta+1)d\tau$, содержащее под знаком интеграла нужную компоненту, однако, чтобы его выразить из-под знака интеграла, приходится расширить класс функций $X_2^*(\cdot,0)$, разрешая их выбирать из класса обобщенных функций, в частности, δ-функций Дирака.

Выберем начально-краевые условия для сопряженной системы (9), (10) в следующем виде:

$$\begin{aligned}&X_1^*(0^+,k)=0, k=0,\ 1,\ ...,\\&X_2^*(t-\tau,0)=\delta(\tau-t)I_{n_2},\end{aligned}\qquad (16)$$

где $\delta(\tau-t)$ – δ-функция Дирака, сосредоточенная в точке $t, t>0$.

Пусть далее $(n_2\times n_1)$ и соответственно $(n_2\times \times n_1)$ – матричные функции $X_1^*(\cdot,\cdot)=X_{21}^*(\cdot,\cdot)$ и $X_2^*(\cdot,\cdot)=X_{22}^*(\cdot,\cdot)$ являются решением сопряженной системы (9), (10) с начально-граничными условиями (16). Тогда имеет место теорема 3.

Теорема 3. Компонента $x_2(t,m+1)$ решения системы (1), (2) в точке $(t,m+1)$ может быть вычислена по формуле

$$x_2(t,m+1)=\sum_{k=0}^{m}X_1^*(t-0,m-k)x_1(0,k)+$$
$$+\int_0^t X_2^*(t-\tau,m+1)x_2(\tau,0)d\tau+$$
$$+\sum_{k=0}^{m}\int_0^t(X_1^*(t-\tau,m-k)B_1+$$
$$+X_2^*(t-\tau,m-k)B_2)u(\tau,k)d\tau,$$
$$t\geq 0, m=0,1,2, \qquad (17)$$

Замечание 3. Поскольку в начальных условиях (16) присутствует δ-функция, то и компонента $X_{22}^*(\cdot,\cdot)$ решения сопряженной системы (9), (10) будет содержать δ-функции, которые войдут в правую часть уравнения (9) и, таким образом, приведут к соответствующим скачкам функции $X_{21}^*(\cdot,\cdot)$. Отметим также, что функция $X_{22}^*(\cdot,\cdot)$ входит в представление (17) только под знаком интеграла. Поэтому ее влияние в формуле (17) сводится к наличию соответствующих скачков в двух последних слагаемых в этой части, а следовательно, скачков компоненты $x_2(\cdot,m+1)$. Таким образом, правая часть равенства (17), стало быть, и компонента $x_2(\cdot,m+1)$ описываются обычными (не обобщенными) функциями.

Представление (17) компоненты $x_2(\cdot,m+1)$ решения системы (1), (2) по существу также является обобщением на такие системы классической формулы Коши.

4. Определяющие уравнения. По аналогии с развитой для динамических систем с последействием техникой определяющих уравнений наряду с гибридной непрерывно-дискретной 2-D-системой (1) рассмотрим дискретную 2-D-систему вида

$$X_{k+1,i}^1=A_{11}X_{k,i}^1+A_{12}X_{k,i}^2+B_1U_{k,i}, \qquad (18)$$

$$X_{k,i+1}^2=A_{21}X_{k,i}^1+A_{22}X_{k,i}^2+B_2U_{k,i} \qquad (19)$$

с начальными условиями

$$X_{0,i}^1=0 \text{ для } i=0,1,..., \qquad (20)$$

$$X_{k,0}^2=0 \text{ для } k=0,1,..., \qquad (21)$$

$$U_{k,i}=\begin{cases}I_m, & k=i=0,\\ 0, & k^2+i^2\neq 0.\end{cases} \qquad (22)$$

5. Алгебраические свойства решений определяющих уравнений. Имеют место следующие утверждения.

Лемма 2. Верны следующие тождества:

$$(A_{11}+A_{12}w(I_{n_2}-A_{22}w)^{-1}A_{21})^{k-1}\times$$
$$\times(B_1+A_{12}w(I_{n_2}-A_{22}w)^{-1}B_2)\equiv\sum_{j=0}^{\infty}X_{k,j}^1w^j,$$
$$(I_{n_2}-A_{22}w)^{-1}A_{21}w(A_{11}+A_{12}w(I_{n_2}-A_{22}w)^{-1}A_{21})^{k-1}\times$$
$$\times(B_1+A_{12}w(I_{n_2}-A_{22}w)^{-1}B_2)\equiv\sum_{j=0}^{\infty}X_{k,j}^2w^j,$$
$$k=1,2,...,$$
$$(A_{22}+A_{21}w(I_{n_1}-A_{11}w)^{-1}A_{12})^{j-1}\times$$
$$\times(B_2+A_{21}w(I_{n_1}-A_{11}w)^{-1}B_1)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}X_{k,j}^2w^k,$$
$$(I_{n_1}-A_{11}w)^{-1}A_{12}w(A_{22}+A_{21}w(I_{n_1}-A_{11}w)^{-1}A_{12})^{j-1}\times$$
$$\times(B_2+A_{21}w(I_{n_1}-A_{11}w)^{-1}B_1)\equiv\sum_{j=0}^{\infty}X_{k,j}^1w^k,$$
$$j=1,2,...,$$

$$(I_{n_2}-A_{22}w)^{-1}B_2w\equiv\sum_{j=0}^{\infty}X_{0,j}^2w^j,$$

$$(I_{n_1}-A_{11}w)^{-1}B_1w\equiv\sum_{k=0}^{\infty}X_{k,0}^1w^k,$$

где $|w|<w_1,\ w\in C,\ C$ – множество комплексных чисел; w_1 – достаточно малое положительное число.

Доказательство методом математической индукции.

6. Представление решений в виде рядов по решениям определяющих уравнений. Используя преобразование Лапласа по непрерывной переменной t, z-преобразование (дискретное преобразование Лапласа) по переменной i, с учетом алгебраических свойств решений определяющих уравнений можно показать, что решение системы (1) имеет следующее разложение в ряд по решениям ее определяющих уравнений:

$$x_1(t,i)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}X_{k,j}^1\int_0^t\frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}u(\tau,i-j)d\tau+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}X_{k,j}^{11}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}x_1(0,\ i-j)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}X_{k,i+1}^{12}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}x_2(\tau,0)d\tau,\qquad(23)$$

$$x_2(t,i)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}X_{k,j}^2\int_0^t\frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}u(\tau,i-j)d\tau+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}X_{k,j}^{21}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}x_1(0,i-j)+$$
$$+\sum_{j=1}^{i}X_{0,j}^2u(t,i-j)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}X_{k,i+1}^{22}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}x_2(\tau,0)d\tau+X_{0,i+1}^{22}x_2(t,0).\qquad(24)$$

В справедливости формул (23), (24) можно убедиться непосредственной подстановкой соответствующих выражений для $x_1(t,\ i)$, $x_2(t,\ i)$ в (1)–(4).

Замечание 4. Разложения (23), (24) являются обобщением на гибридные 2-D-системы (1), (2) известного для обыкновенных динамических систем $\dot{x}(t)=Ax(t),x(0)=x_0$, представления решения $x(t)=e^{At}x_0=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^kt^k}{k!}x_0$ матричной экспонентой.

7. Нестационарные гибридные 2-D-системы. Рассмотрим нестационарную систему (1), (2):

$$\dot{x}_1(\tau,k)=A_{11}(\tau,k)x_1(\tau,k)+A_{12}(\tau,k)x_2(\tau,k)+$$
$$+B_1(\tau,k)u(\tau,k),\qquad(25)$$

$$x_2(\tau,k+1)=A_{21}(\tau,k)x_1(\tau,k)+$$
$$+A_{22}(\tau,k)x_2(\tau,k)+B_2(\tau,k)u(\tau,k),$$
$$\tau\in[t_0,t_*],\ k=0,1,...,\theta,\qquad(26)$$

с начальными условиями

$$x_1(t_0,k)=x_1(k),\ x_2(\tau,0)=x_2(\tau),$$
$$\tau\in[t_0,t_*],\ k=0,1,...,\theta.\qquad(27)$$

Изучим для определенности вопрос об обобщении формулы (15) типа Коши для компоненты $x_1(t,m)$ на случай системы (25), (26).

Перенесем все члены уравнений (25), (26) в одну часть, умножим полученные равенства слева соответственно на матричные функции $X_1^*(t_*,\theta,t,k)$ и $X_2^*(t_*,\theta,t,k)$, проинтегрируем по τ от $\tau=0$ до $\tau=t$ и просуммируем по k от $k=0$ до $k=\theta$, сложим образовавшиеся тождества, после чего выполним интегрирование по частям и сдвиг индекса суммирования в соответствующих слагаемых полученного соотношения, по аналогии с доказательством леммы 1 получаем:

$$0=\sum_{k=0}^{\theta}X_1^*(t_*,\theta,t_*-0,k)x_1(t_*-0,k)-$$
$$-\sum_{k=0}^{\theta}X_1^*(t_*,\theta,t_0+0,k)x_1(t_0+0,k)-$$
$$-\sum_{k=0}^{\theta}\int_{t_0}^{t_*}\left(\frac{\partial X_1^*(t_*,\theta,t,k)}{\partial t}+X_1^*(t_*,\theta,t,k)A_{11}(t,k)+\right.$$
$$\left.+X_2^*(t_*,\theta,t,k)A_{21}(t,k)\right)x_1(t,k)dt+$$
$$+\sum_{k=0}^{\theta}\int_{t_0}^{t_*}(X_2^*(t_*,\theta,t,k-1)-X_1^*(t_*,\theta,t,k)A_{12}(t,k)-$$
$$-X_2^*(t_*,\theta,t,k)A_{22}(t,k))x_2(t,k)dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_*}X_2^*(t_*,\theta,t,\theta)x_2(t,\theta+1)dt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_*}X_2^*(t_*,\theta,t,-1)x_2(t,0)dt-$$
$$-\sum_{k=0}^{\theta}\int_{t_0}^{t_*}(X_1^*(t_*,\theta,t,k)B_1(t,k)+$$
$$+X_2^*(t_*,\theta,t,k)B_2(t,k))u(t,k))dt,$$

и, как следствие, при $\theta=m$ имеет место теорема 4.

Теорема 4. Компонента $x_1(t,m)$ решения системы (25), (26) в точке (t,m) может быть вычислена по формуле

$$x_1(t_*, m) = \sum_{k=0}^{m} X_{11}^*(t_*, m, t_0+0, k)\, x_1(t_0+0, k) +$$
$$+\int_{t_0}^{t_*} X_{12}^*(t_*, m, t, -1)\, x_2(t, 0)\, dt +$$
$$+\sum_{k=0}^{m}\int_{t_0}^{t_*} (X_{11}^*(t_*, m, t, k) B_1(t, k) +$$
$$+ X_{12}^*(t_*, m, t, k) B_2(t, k)) u(t, k)\, dt,$$
$$t_* \ge t_0,\ m = 0, 1, 2, ...,$$

где $X_{11}^*(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot) = X_1^*(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$, $X_{12}^*(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot) = X_2^*(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ – решение сопряженной системы

$$\frac{\partial X_1^*(t_*, \theta, t, k)}{\partial t} + X_1^*(t_*, \theta, t, k) A_{11}(t, k) +$$
$$+ X_2^*(t_*, \theta, t, k) A_{21}(t, k) = 0,$$

$$X_2^*(t_*, \theta, t, k+1) = X_1^*(t_*, \theta, t, k) A_{12}(t, k) +$$
$$+ X_2^*(t_*, \theta, t, k) A_{22}(t, k),\ \tau \le t_*,\ k = \theta, \theta-1, ..., 0,$$

с граничными условиями вида

$$X_1^*(t_*, m, t_*-0, k) = \begin{cases} I_{n_1}, k = m, \\ 0, k \ne m, \end{cases} \quad k = 0, 1, ..., m;$$

$$X_2^*(t_*, m, t, m+1) \equiv 0,\ \tau \in [t_0, t_*].$$

Заключение. Для линейных гибридных 2-D-систем в симметрической форме получены явные представления решения на основе сопряженных систем и путем разложения в ряды по решениям определяющих уравнений таких систем. Полученные результаты могут быть использованы в задачах оптимизации на траекториях таких систем.

Литература

1. Dai L. Singular control systems // Lecture notes in control and information sciences: 118. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. 319 p.

2. De la Sen M. A note about total stability of a class of hybrid systems // Informatica. 2006. Vol. 17, no. 4. P. 565–576.

3. Куржанский А. Б. Отчет о 16-м международном конгрессе ИФАК (IFAC) – международной федерации по автоматическому управлению // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 183–189.

4. Марченко В. М., Борковская И. М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем // Труды БГТУ. 2012. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 7–10.

5. Марченко В. М., Пыжкова О. Н. Относительная управляемость линейных стационарных гибридных систем с многомерным временем // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. 2008. Вып. XVI. С. 3–5.

References

1. Dai L. Singular control systems. *Lecture notes in control and information sciences*: 118. Berlin; Heidelberg, Springer-Verlag, 1989. 319 p.

2. De la Sen M. A note about total stability of a class of hybrid systems. *Informatica*, 2006, vol. 17, no. 4, pp. 565–576.

3. Kurzhanskiy A. B. The 16-th IFAC Congress report. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 2006, no. 1, pp. 183–189 (In Russian).

4. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M. Stability and stabilization of the linear hybrid discrete-continues stationary systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 7–10 (In Russian).

5. Marchenko V. M., Pyzhkova O. N. Relative controllability of the linear stationary hybrid systems with multidimensional time. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series VI, Physical-mathematical sciences and informatics, 2008, issue XVI, pp. 3–5 (In Russian).

Информация об авторах

Марченко Владимир Матвеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: vladimir.marchenko@gmail.com

Борковская Инна Мечиславовна − кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: borkovskaia@gmail.com

Пыжкова Ольга Николаевна − кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: olga.pyzhcova@gmail.com

Information about the authors

Marchenko Vladimir Matveevich − D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vladimir.marchenko@gmail.com

Borkovskaya Inna Mechislavovna − Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: borkovskaia@gmail.com

Pyzhkova Olga Nikolaevna − Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: olga.pyzhcova@gmail.com

Поступила 12.03.2015