

УДК 519.624

И. Ф. Соловьева

Белорусский государственный технологический университет

**ВЛИЯНИЕ МАЛОГО ПАРАМЕТРА
ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ
НА РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ**

В данной работе рассматриваются двухточечные граничные задачи с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом пограничными слоями. Для их решения предлагается модификация метода дифференциальной ортогональной прогонки. Идея метода заключается в переходе от исходной граничной задачи к совокупности трех задач Коши. Две задачи Коши решаются в прямом направлении, а третья задача – в обратном. В зонах пограничных слоев вводятся регулирующие множители, нейтрализующие профили пограничных слоев вблизи граничных точек. В работе изучается влияние малого параметра на решение граничной задач с пограничным слоем. В качестве примера предлагается численное решение двух задач с пограничным слоем, которое было получено при использовании пакета Mathcad.

Ключевые слова: малый параметр, пограничный слой, двухточечные граничные задачи.

I. F. Solovyova

Belarusian State Technological University

**THE INFLUENCE OF A SMALL PARAMETER
AT THE HIGHEST DERIVATIVE
ON THE SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS**

In this paper, we consider the two-point boundary value problems with a small parameter multiplying the highest derivative and with the associated boundary layers. For their solution we proposed the modification of the method of differential orthogonal pivotal sweep. The idea of the method is to move from the initial boundary problem to the of three Cauchy problems. Two Cauchy problems are solved in the forward direction, and the third task – in the opposite reverse. In the areas of the boundary layers regulatory factors are introduced neutralizing the profiles of the boundary layers near the boundary points. In this paper we study the effect of a small parameter on the boundary decision-value problem with a boundary layer. As an example, we proposed a numerical solution of two problems with the boundary layer, which was obtained using the package Mathcad.

Key words: small parameter, boundary layer, the two-point boundary value problems.

Введение. Граничные задачи с малым параметром при старшей производной являются математическими моделями, описывающими диффузионно-конвективные процессы или родственные физические явления. Решение такого рода задач может быстро меняться вблизи граничных точек, т. е. здесь мы наблюдаем наличие пограничных слоев [1].

Рассмотрим дифференциальное уравнение, например, первого порядка с малым параметром при производной

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \varepsilon > 0$$

для случая, когда вырожденное уравнение, соответствующее ему

$$f(x, \bar{y}) = 0,$$

имеет единственное решение

$$\bar{y}(x) = g(x).$$

Характер поведения решения данного уравнения отражен на рис. 1. Штриховыми линиями показано поле направлений, касательных к интегральным кривым. Если $\varepsilon > 0$ очень мало, касательные к интегральным кривым даже при небольшом отклонении от функции $g(x)$ почти параллельны оси Ox .

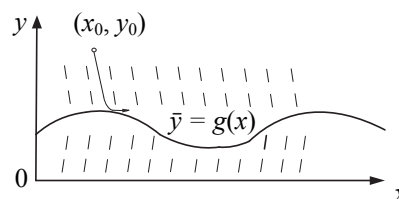


Рис. 1. Расположение пограничного слоя

На рис. 1 видно, что у любой интегральной кривой выделяются два участка с различным поведением решения. Первый участок с быстрым изменением искомой функции отражает

стремление интегральной кривой к графику функции $\bar{y}(x) = g(x)$. Он называется пограничным слоем. На втором участке градиенты решения будут намного меньше, а сама интегральная кривая практически совпадает с графиком $\bar{y}(x) = g(x)$.

Чем меньше параметр ε , тем более заметна разница в поведении решения на обоих участках.

Кривые, аналогичные интегральным кривым, показанным на рис. 1, могут соответствовать и более сложным задачам с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом пограничными слоями.

Задачи с пограничными слоями очень сложны в вычислительном отношении, а так как область их применения постоянно расширяется, то интерес к их решению неуклонно возрастает. Нужно не только применить численный метод решения задачи, но и реализовать выбранный алгоритм, используя тот или иной математический пакет. Большие сложности при решении данных задач возникают вблизи граничных точек, т. е. в зонах пограничных слоев, где наблюдается неограниченный рост решения, и особенно градиентов решения.

В предлагаемой работе использовался математический пакет Mathcad. Главными достоинствами этого пакета и его преимуществом перед другими расчетными средствами являются легкость и наглядность программирования задачи, простота использования, возможность создания таблиц, графиков и текстов.

Постановка задачи. Рассмотрим двухточечные граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной вида

$$\begin{cases} \varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) - b(x)y(x) = f(x), \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad 0 < x < 1, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} -\varepsilon y''(x) + b(x)y(x) = f(x), \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad 0 < x < 1, \quad \varepsilon > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Задача (1) является задачей с одним пограничным слоем, а задача (2) – задачей с двумя пограничными слоями.

Задачи вида (1), (2) являются математическими моделями диффузионно-конвективных процессов и называются сингулярно возмущенными. Их решение может быстро изменяться вблизи граничных точек, т. е. мы имеем пограничный слой. Причина трудностей решения задач с пограничным слоем заключается в неустойчивости данного численного процесса.

Для численного решения граничных задач с пограничным слоем вида (1), (2) предлагается модификация метода дифференциальной ортогональной прогонки с введением в зонах пограничных слоев соответствующих регулирующих множителей. Этот метод позволяет применить единый подход к решению граничных задач с одним и двумя пограничными слоями.

Алгоритм модификации метода дифференциальной ортогональной прогонки.

1. Рассмотрим граничную задачу вида (2). Представим ее в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (о. д. у.) первого порядка:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\frac{f(x)}{\varepsilon} + \frac{b(x)}{\varepsilon}y_1, \quad 0 < x < 1, \quad \varepsilon > 0 \end{cases} \quad (3)$$

с граничными условиями вида

$$y_1(0) = A, \quad y_2(0) = B. \quad (4)$$

2. Введем в полученную систему о. д. у. (3) множители $m_2(x, \varepsilon) > 0$, $m_1(x, \varepsilon) > 0$, регулирующие поведение функций $y(x)$ и $y'(x)$, т. е. самого решения и градиента решения вблизи пограничных слоев, где, как правило, решение и его градиент быстро растут. При выборе этих множителей нужно учитывать, чтобы произведения $m_1(x, \varepsilon)y_1(x)$, $m_2(x, \varepsilon)y_2(x)$ были в необходимой мере стабилизированы.

3. Рассмотрим вспомогательную функцию $Q(x)$ и новые неизвестные функции $u(x)$ и $v(x)$. Получим выражение для $y(x)$ и $y'(x)$:

$$\begin{aligned} m_1(x, \varepsilon)y_1(x) &= \sin Q(x)u(x) + \cos Q(x)v(x), \\ m_2(x, \varepsilon)y_2(x) &= \cos Q(x)u(x) - \sin Q(x)v(x). \end{aligned} \quad (5)$$

4. Исходную граничную задачу представим в виде совокупности трех соответствующих задач Коши для функций $Q(x)$, $u(x)$, $v(x)$. При решении задач Коши для функций $Q(x)$ и $u(x)$ применим прямой ход прогонки. Он представлен в виде формул (6), (7).

Обратный ход прогонки для решения задачи Коши и нахождения функции $v(x)$ иллюстрируют формулы (8). При этом движение идет с конца отрезка, причем начальные условия уже получены за счет прямого хода прогонки:

$$\begin{aligned} Q' &= \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_1'}{2m_2} \sin 2Q - \left(\frac{m_2 b}{m_1 \varepsilon} + \frac{m_1}{m_2} \right) \cos^2 Q, \\ Q(0) &= \frac{\pi}{2}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$u' = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2 b}{m_1 \varepsilon} \right) \sin 2Q + \frac{m_2'}{m_2} \cos^2 Q \right] u - m_2 \frac{f}{\varepsilon} \cos Q, \quad (7)$$

$$u(0) = Am_1(0, \varepsilon);$$

$$v' = \left[-\frac{m_2'}{m_2} \sin 2Q + \frac{m_2 b}{m_1 \varepsilon} \cos 2Q + 2 \frac{m_1}{m_2} \cos^2 Q - \frac{m_1}{m_2} \right] v + \left[\frac{m_2'}{m_2} \sin^2 Q - \frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2 b}{m_1 \varepsilon} \right) \sin 2Q \right] v + m_2 \frac{f}{\varepsilon} \sin Q, \quad (8)$$

$$v(1) = \frac{1}{\cos Q(1)} [B - \sin Q(1)] u(1), \cos Q(1) = 0.$$

Полученные задачи Коши являются благоприятными в вычислительном отношении.

Рассмотрим влияние пограничных слоев на решение задачи вида (1).

В задаче (1) «заморозим» коэффициенты, предполагая при этом, что $a(x) = \text{const}$, $b(x) = \text{const}$. Будем считать при этом, что $f(x) \equiv 0$. Тогда общее решение исходной граничной задачи запишется в виде: $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$. Используя граничные условия задачи, определим неизвестные C_1, C_2 :

$$C_1 = \frac{B - Ae^{\lambda_1}}{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}, \quad C_2 = \frac{B - Ae^{\lambda_2}}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}}.$$

Функцию $y(x)$ можно представить в таком виде, чтобы в нем явно выделялось влияние величин A и B :

$$y(x) = AG_1(x) + BG_2(x),$$

$$\text{где } G_1(x) = \frac{e^{\lambda_1 + \lambda_2 x} - e^{\lambda_2 + \lambda_1 x}}{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}; \quad G_2(x) = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}.$$

Обозначим

$$G^{(0)} = A; \quad G^{(1)} = y'(0) = AG_1'(0) + BG_2'(0) = \frac{A(\lambda_2 e^{\lambda_1} - \lambda_1 e^{\lambda_2}) + B(\lambda_1 - \lambda_2)}{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}.$$

С учетом обозначений решение граничной задачи предстанет в следующем виде:

$$y_1(x) = G^{(0)} H_1(x) + G^{(1)} H_2(x),$$

$$\text{где } H_1(x) = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 x} - \lambda_2 e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad H_2(x) = \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Легко заметить, что $y_1(x) = y(x)$.

Таким же образом получается решение граничной задачи и на правом конце отрезка.

Обозначим

$$y(1) = D(1) = B; \quad y'(1) = D(1) = AG_1'(1) + BG_2'(1).$$

Тогда решение граничной задачи с пограничным слоем примет вид

$$y_2(x) = D^{(0)} P_1(x) + D^{(1)} P_2(x),$$

$$\text{где } P_1(x) = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2(1-x)} - \lambda_2 e^{-\lambda_1(1-x)}}{\lambda_1 - \lambda_2};$$

$$P_2(x) = \frac{e^{-\lambda_2(1-x)} - e^{-\lambda_1(1-x)}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Легко заметить, что $y_1(x) = y(x)$.

Рассмотрим поведение функций $P_1(x), P_2(x)$ на концах отрезка $[0, 1]$.

Если $x \rightarrow 0$, то $P_1(x) \rightarrow K_1$,

$$\text{где } K_1(x) = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2} - \lambda_2 e^{-\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \gg 1.$$

$$P_2(x) \rightarrow K_2 \text{ при } x \rightarrow 0,$$

$$\text{где } K_2(x) = \frac{e^{-\lambda_2} - e^{-\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \gg 1.$$

Рассмотрев все возможности поведения функции на отрезке $[0, 1]$, можно заметить, что функции $P_1(x), P_2(x)$ имеют пограничный слой в точке $x = 0$. Функции $G_1(x), G_2(x)$ и $H_1(x), H_2(x)$ имеют пограничный слой в точке $x = 1$. При этом изменение производных для этих функций в соответствующих зонах пограничных слоев является равносильным.

Учитывая поведение функций $H_1(x), H_2(x)$ и $P_1(x), P_2(x)$, заметим, что можно указать внутреннюю точку $x_0 \in (0, 1)$ вблизи точки $x = 0$ и такую внутреннюю точку $x_0 \in (0, 1)$ вблизи точки $x_0 = 1$, что поведение функций $H_1(x), H_2(x)$ на интервале $[0, x_0]$ и функций $P_1(x), P_2(x)$ на отрезке $[x_1, 1]$ будет благоприятным в том смысле, что на этих отрезках влияние пограничного слоя будет нейтрализовано.

Эти закономерности можно обобщить на случай линейных граничных задач общего вида, а также нелинейных граничных задач.

Пример 1. Рассмотрим граничную задачу с пограничным слоем:

$$\varepsilon y''(x) + x \cos x y'(x) + (x + x^3) y(x) = 0$$

с граничными условиями вида

$$y(-1) = 1, \quad y(1) = 2, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

Решение этой задачи реализовано на базе пакета Mathcad и представлено в виде графика функции (рис. 2).

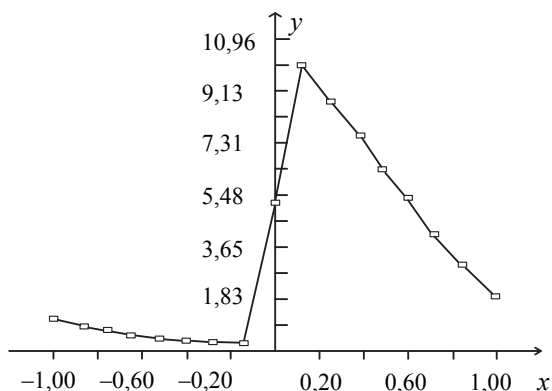


Рис. 2. Графическое решение задачи для примера 1

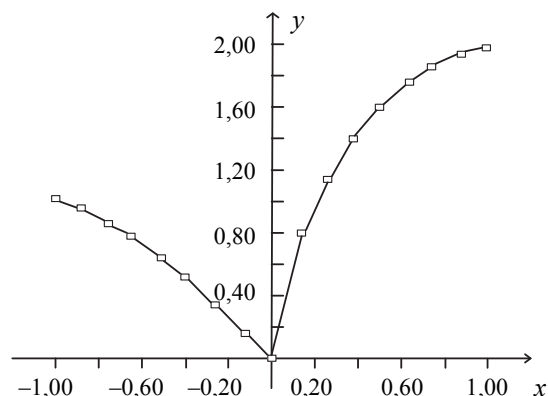


Рис. 3. Графическое решение задачи для примера 2

Пример 2. Рассмотрим граничную задачу с пограничным слоем:

$$\varepsilon y''(x) + \left(\frac{3x}{2} + \frac{|x|}{2} \right) y'(x) + (x \sin x - 1)y(x) = 0$$

с граничными условиями

$$y(-1) = 1, \quad y(1) = 2, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

Решение получено с помощью пакета Mathcad. Оно представлено в виде графика на рис. 3.

Заключение. Предложенная в данной статье модификация метода дифференциальной ортогональной прогонки удобна в реализации. Она достаточно проста и перспективна для решения граничных задач с одним и двумя пограничными слоями. Регулирующие множители, стоящие перед решением и его градиентом, нейтрализуют рост решения и его производной непосредственно в зонах пограничных слоев, что тоже говорит в пользу данной модификации метода. Кроме того, она позволяет избежать решения громоздких систем уравнений.

Литература

1. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983. 186 с.

References

1. Dulan E., Miller J., Schilders W. *Ravnomernyye chislennyye metody resheniya zadach s pogranichnym sloem* [Uniform numerical methods for solving problems with initial and boundary layer]. Moscow, Mir Publ., 1983. 186 p.

Информация об авторе

Соловьева Ирина Федоровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ira1234568@tut.by

Information about the author

Solovyova Irina Fedorovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ira1234568@tut.by

Поступила 27.02.2015