

УДК 62.50

**А. В. Лапето**

Белорусский государственный технологический университет

**ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ  
АЛГОРИТМОВ АППРОКСИМАЦИИ ЗВЕНЬЕВ ЗАПАЗДЫВАНИЯ  
В ПРОМЫШЛЕННЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ**

Проводится сравнительный анализ различных вариантов аппроксимации звеньев запаздывания в ряды. Рассматривается возможность применения алгоритмов аппроксимации к математическим моделям объектов с описанием, схожим с промышленными системами управления. Для сравнения результатов моделирования систем с аппроксимированным запаздыванием и исходных систем проводится анализ частотных характеристик объектов управления. В качестве вариантов аппроксимации выступают разложения Паде, Тейлора, Лагерра.

Исследуется возможное отклонение характеристик объектов в пределах одно- и пятипроцентного интервала от номинального значения. Это отклонение может быть вызвано погрешностью средств измерения параметров объектов управления.

Результатом работы являются наборы частотных характеристик для систем управления с разными вариантами аппроксимации звеньев запаздывания при различных динамических свойствах объектов управления. Для каждого варианта разложения дается анализ характеристик в частотной области при различных сочетаниях динамики объекта и интервалах отклонения его характеристик от номинального значения.

Предлагается алгоритм выбора варианта аппроксимации в зависимости от частотных характеристик объекта управления.

**Ключевые слова:** запаздывание, аппроксимация, объект управления, модель, характеристика, структура, частота, инерционность.

**A. V. Lapeto**

Belarusian State Technological University

**THE APPLICATION OF INTERVAL ESTIMATER USING THE APPROXIMATION  
ALGORITHMS OF DELAYS IN INDUSTRIAL CONTROL SYSTEMS**

The paper presents a comparative analysis of different options of approximation of delay units into the series. The possibility of using a mathematical approximation algorithms similar to those model of industrial control systems was considered. To compare the results of modeling systems with approximation delay and the original systems the analyses of the characteristics of frequency-control objects has been made. The alternatives of approximation are the Pade expansion and approximation of Taylor and Laguerre.

While considering mathematical models of industrial objects we took into consideration the deflection characteristics of objects within a certain interval of the nominal value. This deviation is caused by an error of measurement of tools of parameters of control object.

The result is a set of frequency characteristics for control systems with different variants of approximation of the delay units at different dynamic properties of control objects. For each option, the decomposition analysis of characteristics in the frequency domain with various combinations of object dynamics and intervals deviation of its characteristics from the nominal value is given.

An algorithm for selecting options of approximation depending on the frequency characteristics of the control object has been proposed.

**Key words:** delay, approximation, the control object model, characterization, structure, frequency, persistence.

**Введение.** Наиболее распространенными примерами объектов управления с запаздыванием могут служить процессы сушки и горения, прокатка металла, ленточные транспортеры, процессы измельчения и в некоторых случаях процессы в химических реакторах [1].

Моделирование процессов, протекающих в объектах управления с запаздыванием, осуществляется с помощью дифференциальных

уравнений с отклоняющимся аргументом. Трудности в математическом решении этих уравнений перетекают в проблемы технической реализации систем управления с запаздыванием [2].

**Основная часть.** Одним из возможных способов реализации является введение компенсаторов Смита (рис. 1) по каналу управления и выхода.

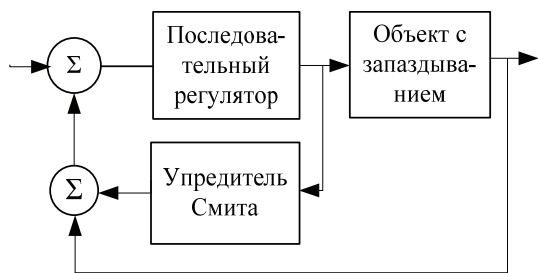


Рис. 1. Структурная схема системы управления с упредителем Смита

Рассчитав значения компенсатора, можно говорить о том, что задачу синтеза регулятора для систем управления можно решить и без учета фактора запаздывания. Однако этот метод возможно использовать лишь в том случае, если математическая модель объекта управления максимально точно описывает промышленный объект и, что наиболее важно, не изменяется с течением времени. К сожалению, в большинстве технологических процессов наблюдается обратная ситуация (изменение режима работы оборудования, изменение параметров сырья, окружающей среды и т. д.). Иными словами, при изменении параметров модели объекта управления значения компенсатора Смита и выхода остаются прежними, и, как следствие, явление запаздывания полностью не компенсируется. В результате в моменты времени, соответствующие временам запаздывания, проявляются скачкообразные изменения значений переменных состояния объекта. В случае объектов управления, находящихся на границе устойчивости, эти изменения могут существенно повлиять на качественные характеристики объекта.

С другой стороны, влияние запаздываний может быть учтено путем разложения запаздываний в различные дробно-рациональные и степенные функции [3]. Поскольку оператор запаздывания сам является единичной функцией, то погрешность аппроксимаций наиболее четко проявляется на его амплитудно-фазовой частотной характеристике (АФЧХ).

Из множества вариантов разложения звена чистого запаздывания наиболее широко на практике используется его аппроксимация рядом Паде. Передаточная функция такого звена в общем виде выглядит следующим образом:

$$W_{\tau}(p) = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!} (-\tau p)^{n-k}}{\sum_{k=1}^n \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!} (\tau p)^{n-k}}, \quad (1)$$

где  $n$  – порядок разложения.

Рассмотрим частотные характеристики такого звена. Изучение будем производить на частотах, наиболее часто встречающихся в промышленности, т. е. от 0 до 1 Гц. В качестве примера возьмем величину запаздывания, равную 10 с. Такое значение величины запаздывания характерно для теплообменных аппаратов с тонкой стенкой, получивших широкое распространение в промышленности. Рассмотрим аппроксимацию рядом Паде 2–4 порядка.

Переходя в частотную область ( $p = j\omega$ ), проанализируем поведение аппроксимаций различного порядка при изменении частоты объекта.

На всех амплитудно-фазовых частотных характеристиках ось «Real» соответствует действительной оси, а «Imag» – мнимой.

АФЧХ аппроксимаций 2–4 порядков расположены близко, однако при увеличении (рис. 2) можно увидеть, что АФЧХ разложения 4-го порядка точнее описывает АФЧХ звена чистого запаздывания, а следовательно, отклонения других характеристик будут значительно меньшими.

Во многих промышленных системах управления явление запаздывания проявляется как составная часть модели объекта управления, который в свою очередь описывается аperiодическим звеном с инерционностью, много большей, чем величина запаздывания.

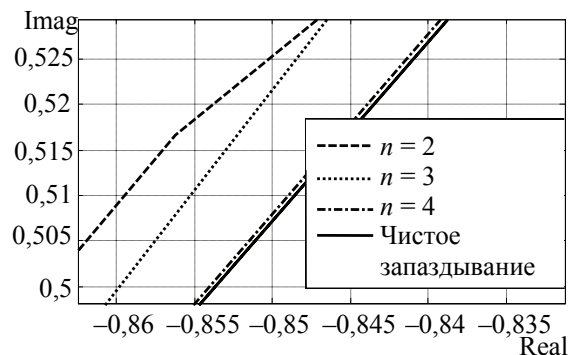


Рис. 2. Амплитудно-фазовая частотная характеристика аппроксимации Паде

Рассмотрим АФЧХ объекта с инерционностью, в 10 раз большей, чем взятая величина запаздывания, и коэффициентом усиления, равным 1. Приведенное значение соотношения величин характерно для промышленных аппаратов, работающих в сочетании с теплообменными аппаратами (например, получение полиэтилена высокого давления).

Как видно из рис. 3, на малых частотах (от 0,1 до 1,0 Гц) АФЧХ чистого запаздывания и его разложений различного порядка совпадают, однако при увеличении частоты появляется отклонение. Наименьшее отклонение соответствует 4-му порядку.

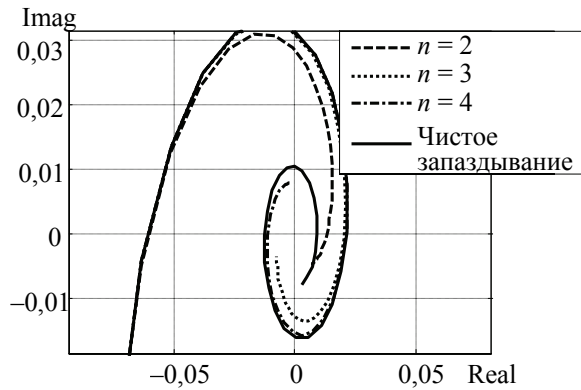


Рис. 3. АФЧХ аппроксимации Паде с инерционным объектом

Рассмотрим аппроксимацию звена чистого запаздывания рядом Тейлора (степенным рядом), описываемым в общем виде следующим выражением:

$$W_{\tau}(p) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} (-\tau p)^k. \quad (2)$$

Рассмотрение АФЧХ начнем с полинома разложения четвертой степени (рис. 4).

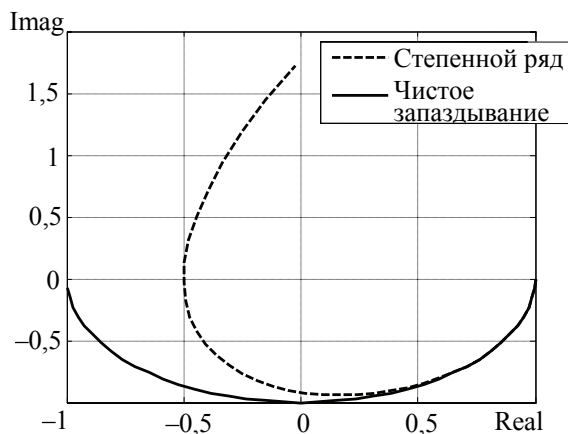


Рис. 4. АФЧХ аппроксимации степенным рядом

На низких частотах (0–0,2 Гц) кривые аппроксимации и чистого запаздывания совпадают, однако при увеличении частоты возникает значительное несоответствие, и амплитудно-фазовая характеристика разложения будет стремиться к бесконечности.

Кроме рассмотренных вариантов разложения, на практике часто используется аппроксимация приближением Лагерра:

$$W_{\tau} = \frac{(1 - p / 2n)^n}{(1 + p / 2n)^n}. \quad (3)$$

Изучим поведение аппроксимации в частотной области для дробно-рациональной функции 2–4 порядка (рис. 5).

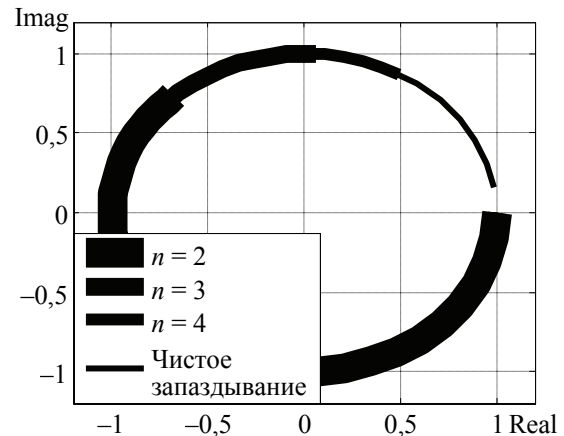


Рис. 5. АФЧХ приближения Лагерра

Из полученной АФЧХ следует, что при увеличении порядка полинома разность между фазами для чистого запаздывания и его аппроксимациями уменьшается.

Рассмотрим применение аппроксимации Паде в сочетании с инерционным объектом, описываемым передаточной функцией 2-го порядка (рис. 6).

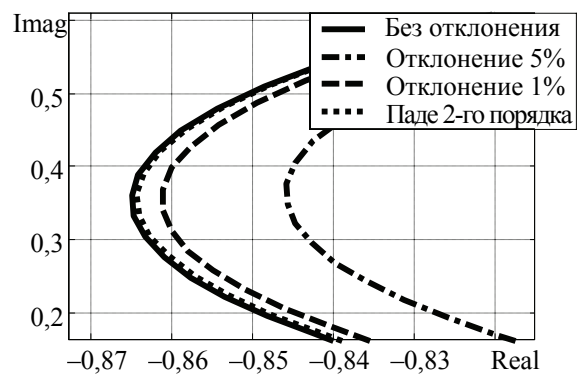


Рис. 6. АФЧХ с отклонением величины запаздывания

На практике как коэффициенты передаточных функций объекта управления, так и величина запаздывания могут отклоняться от своего номинального значения. Это может быть вызвано различными факторами, такими как изменение физико-химических свойств сырья, отклонения, обусловленные погрешностями измерения и т. д.

На рис. 6 представлены кривые АФЧХ для чистого запаздывания, разложения Паде, а также при отклонении величины запаздывания в интервале 1 и 5% от номинального значения. Можно заметить, что использование аппроксимации вносит отклонений меньше, чем изменение модели объекта управления в процессе работы. Такое поведение объекта управления характерно для низких частот. На высоких

частотах влияние аппроксимации становится значительнее влияния отклонения математических моделей.

**Заключение.** Разложение Паде дает наилучшую АФЧХ по сравнению с остальными вариантами аппроксимации. В случае наличия в объекте инерционности, значительно превышающей величину запаздывания, можно обойтись низким порядком разложения. Поскольку большинство объектов управления в промышленности характеризуется подобным образом и их собственная частота достаточно низкая, то для задач расчета регуляторов можно ограничиться порядком разложения, не превышающим четырех.

Разложение запаздывания в степенной ряд возможно использовать только на предельно низких частотах, так как АЧХ такого звена неустойчива. Также при данном варианте синтеза могут возникнуть трудности в виде физической нереализуемости регуляторов.

Приближение Лагерра характеризуется большим отклонением по фазе, чем у разложения

Паде, однако наличие единичной АЧХ в отличие от степенного ряда дает возможность использовать такой вариант аппроксимации на более широкой полосе частот. Структура самой дробно-рациональной функции проще, чем у ряда Паде, а следовательно, и время, затрачиваемое на выработку алгоритмов управления, меньше. Указанный вариант аппроксимации можно использовать, к примеру, для дальнейшего перехода от модели объекта в передаточных функциях к модели в пространстве состояний, применяя структурные способы перехода.

При изменении величины запаздывания от номинального значения отклонения в характеристиках объекта управления окажутся гораздо большими, чем влияние аппроксимации даже полиномом невысокого порядка. Однако стоит отметить, что такое заключение справедливо только на низких частотах, характерных для промышленных объектов управления.

### Литература

1. Янушевский Р. Т. Управление объектами с запаздыванием. М.: Наука, 1978. 416 с.
2. Лапето А. В. Анализ методов синтеза систем автоматического управления с запаздыванием // Труды БГТУ. 2011. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 78–80.
3. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.

### References

1. Yanushevskiy R. T. *Upravlenye ob'ektami s zapazdyvaniem* [Managing objects with delay]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 416 p.
2. Lapeto A. V. Analysis of methods for the synthesis of automatic control systems with delay. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2011, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 78–80 (In Russian).
3. Beyker Dzh., Greyvs-Morris P. *Approksimatsii Pade* [Pade Approximants]. Moscow, Mir Publ., 1986. 502 p.

### Информация об авторе

**Лапето Александр Васильевич** – ассистент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: AVLapeto@gmail.com

### Information about the author

**Lapeto Aleksandr Vasil'evich** – assistant, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: AVLapeto@gmail.com

Поступила 22.03.2015