УДК 514.765.1

Н. П. Можей
Казанский (Приволжский) федеральный университет

ТРЕХМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ С РАЗРЕШИМОЙ ГРУППОЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА НИХ

В работе представлена локальная классификация трехмерных однородных пространств, допускающих нормальную связность. В статье рассмотрен только случай разрешимой группы Ли преобразований, полная классификация которых до сих пор не представлена. Локальная классификация однородных пространств эквивалентна описанию эффективных пар алгебр Ли. Описаны все инвариантные аффинные связности на таких однородных пространствах вместе с их тензорами кривизны и кручения. Исследованы алгебры голономии однородных пространств и найдено, когда инвариантная связность нормальна. В работе применен алгебраический подход для описания связностей, методы теории групп Ли, алгебр Ли и однородных пространств. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, при изучении пространств с аффинной связностью, а также могут применяться в общей теории относительности, которая с математической точки зрения базируется на геометрии искривленных пространств, в ядерной физике, физике элементарных частиц и др.

Ключевые слова: нормальная связность, однородное пространство, группа преобразований, алгебра голономии.

N. P. Mozhey
Kazan (Volga Region) Federal University

THREE-DIMENSIONAL MANIFOLDS WITH SOLVABLE TRANSFORMATION GROUP AND NORMAL CONNECTIONS ON THEM

In this paper we present a complete local classification of three-dimensional homogeneous spaces which admit a normal connection. In the paper we concerned only one case when Lie group of transformations is solvable but the complete classification of which is not represented yet. The local classification of homogeneous spaces is equivalent to the description of effective pairs of Lie algebras. We describe all invariant affine connections on such homogeneous spaces together with their curvature and torsion tensors. In this paper we study the holonomy algebras of homogeneous spaces and find that the invariant connection is normal. In this work we use the algebraic approach for description of connections, methods of the theory of Lie groups, Lie algebras and homogeneous spaces. The results can be applied to the study of manifolds, of spaces with affine connection, and may have applications in the general theory of relativity, which, from a mathematical point of view, based on the geometry of curved spaces, in nuclear physics, elementary particle physics, etc.

Key words: normal connection, homogeneous space, transformation group, holonomy algebra.

Введение. Понятие нормальной связности для риманова многообразия ввел Э. Картан. Многообразия с нулевым кручением (т. е. с плоской нормальной связностью) изучали почти одновременно Д. И. Перепелкин и Фабрициус – Бьерре, а также Э. Картан. Итоги этих исследований подведены в монографии Чена [1]. Нгуеи Ван Хей изучал условия существования инвариантной аффинной связности на однородном пространстве. Его результат обобщает некоторые результаты Номидзу и связан с проблемой характеризации аффинной связности, которая допускает транзитивную группу аффинных преобразований. Эта проблема изучалась Амброузом, Зингером, Номидзу и др. Связность на многообразии определяет через параллельный перенос понятие голономии. Важными примерами являются голономия связности Леви – Чивиты в римановой геометрии (называемая риманова голономия), голономия связностей в векторных расслоениях, голономия связностей Картана и др. В каждом из этих случаев голономия связности может быть описана через группу Ли – группу голономии. Исследование голономии было начато Картаном для изучения и классификации симметрических пространств, позже группы голономии использовались, чтобы изучить риманову геометрию в целом. Аффинные группы голономии – группы, возникающие как голономии аффинных связностей без кручения; те, которые не являются римановыми или псевдоримановыми, также известны как неметрические группы голономии. Теория связностей имеет много приложений, например, в калибровочных моделях фундаментальных взаимодействий связности на главных расслоениях интерпретируются как калибровочные поля – переносчики взаимодействий, характеризуемых той или иной группой симметрий.

Основная часть. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $(M, \bar{G})$ – однородное пространство, $G = G_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G}, G)$, где $G \subset \bar{G}$, так как многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$. Изучая однородные пространства, важно рассматривать не саму группу $\bar{G}$, а ее образ в $Diff(M)$, другими словами, достаточно изучать только эффективные действия группы $\bar{G}$ на многообразии M. Широкий класс среди однородных пространств образуют однородные пространства с разрешимой группой преобразований. Их исследование существенно затруднено тем, что в отличие от полупростых алгебр Ли не разработана структурированная теория их классификации, а сама классификация является громоздкой и трудоемкой. О «разрешимых» римановых многообразиях, на которых транзитивно действует разрешимая подгруппа полной группы изометрий, смотрите в [2]. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. В дальнейшем будем предполагать, что G – связная подгруппа, что всегда можно сделать, ограничиваясь локальной точкой зрения. *Изотропное действие* группы G на T_xM – это фактор-действие присоединенного действия G на $\bar{\mathfrak{g}}$: $s.(x+\mathfrak{g}) = (Ads)(x) + \mathfrak{g}$ для всех $s \in G$, $x \in \bar{\mathfrak{g}}$: При этом $\mathfrak{g}$ действует на касательном пространстве $T_xM = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ как $x.(y+\mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g}$ для всех $x \in \mathfrak{g}, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. С геометрической точки зрения это означает, что естественное действие стабилизатора G_x произвольной точки $x \in M$ на T_xM имеет нулевое ядро.

Поскольку однородное пространство допускает аффинную связность, $\mathfrak{g}$-модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ точен. Для определения всех изотропно-точных пар коразмерности три нужно классифицировать (с точностью до изоморфизма) все точные трехмерные $\mathfrak{g}$-модули U (это эквивалентно классификации подалгебр в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ с точностью до сопряженности), а далее найти (с точностью до эквивалентности) все пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ такие, что $\mathfrak{g}$-модули $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ и U эквивалентны. Все такие пары $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ определены в [3], дальнейшая нумерация пар соответствует приведенной там. Ограничимся случаем с ненулевым стабилизатором, так как все остальные однородные пространства – просто трехмерные группы Ли. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и фактор-пространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Хорошо известно, что инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензор кручения $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ имеет вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}},$$

тензор кривизны $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ выглядит так

$$R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]), \quad \forall\, x, y \in \bar{G}.$$

Переформулируем теорему Вана об алгебре группы голономии инвариантной связности: алгебра Ли группы голономии инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ вида

$$V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots,$$

где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Положим a равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, порожденной множеством $\{\Lambda(x); x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Первоначально a была введена в римановом случае Костантом и использовалась Лихнеровичем и Ваном в более общей ситуации. Основное свойство a таково: пусть $\mathfrak{h}^*$ – алгебра Ли группы голономии, тогда $\mathfrak{h}^* \subset a \subset \mathbb{N}(\mathfrak{h}^*)$, где $N(\mathfrak{h}^*)$ – нормализатор $\mathfrak{h}^*$ в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$. Будем говорить, что инвариантная связность *нормальна*, если $\mathfrak{h}^* = a$.

Дадим геометрическую интерпретацию понятию нормальной связности: пусть P есть инвариантная структура на однородном пространстве M. Фиксируем инвариантную связность в P и пусть $P(u_0)$ – расслоение голономии через репер $u_0 \in P$. Тогда связность нормальна тогда и только тогда, когда каждый элемент из $\bar{G}$ отображает $P(u_0)$ в себя. В силу теоремы редукции для определенного типа проблем, связанных со связностью в главном расслоении, можем считать, что P есть расслоение голономии.

Такое упрощение, вообще говоря, недостижимо, если G не отображает расслоение голономии в себя. Сформулированный результат означает, что если инвариантная связность на однородном пространстве нормальна, то теорема редукции все еще может быть успешно использована. Из него следует, что если инвариантная связность нормальна, то каждое параллельное тензорное поле на M инвариантно под действием G. Это утверждение было доказано Лихнеровичем.

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Здесь через $\{e_1,...,e_n\}$ обозначен базис $\bar{\mathfrak{g}}$ $(n=\dim\bar{\mathfrak{g}})$. Будем полагать, что подалгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается векторами $e_1,...,e_{n-3}$, а $\{e_{n-2},e_{n-1},e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации пар будет использована запись $d.n.m$, где d – размерность подалгебры, а n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, соответствующий приведенному в [3]. Будем описывать аффинную связность на трехмерном однородном пространстве через образы базисных векторов $\Lambda(e_{n-2})$, $\Lambda(e_{n-1})$, $\Lambda(e_n)$, тензор кривизны R – через $R(e_{n-2},e_{n-1})$, $R(e_{n-2},e_n)$, $R(e_{n-1},e_n)$, а тензор кручения T – через $T(e_{n-2},e_{n-1})$, $T(e_{n-2},e_n)$, $T(e_{n-1},e_n)$. Для упрощения записи будет предполагаться, что переменные обозначены x, y, z и принадлежат $\mathbb{R}$, а параметры, при их наличии, обозначаются λ, μ.

Теорема. Пусть $\mathfrak{g}$ – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ такая, что пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ допускает нормальную связность и $\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима. Тогда $\mathfrak{g}$ сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр:

$$3.20 \ \begin{array}{|ccc|}\hline z & y & x \\ & & \\ & & \\ \hline\end{array}\,, \quad 2.9 \ \begin{array}{|ccc|}\hline y & & x \\ & & \\ & & \mu y \\ \hline\end{array}\,, \ \mu=0,-1,$$

$$2.17 \ \begin{array}{|ccc|}\hline & & x \\ & & y \\ & & \\ \hline\end{array}\,, \quad 2.20 \ \begin{array}{|ccc|}\hline & y & x \\ & & \\ & & \\ \hline\end{array}\,,$$

$$2.21 \ \begin{array}{|ccc|}\hline x & y & \\ & & y \\ & & -x \\ \hline\end{array}\,, \quad 1.1 \ \begin{array}{|ccc|}\hline x & & \\ & \lambda x & \\ & & \\ \hline\end{array}\,, \ \lambda=0,-1,$$

$$1.3 \ \begin{array}{|ccc|}\hline & x & \\ -x & & \\ & & \\ \hline\end{array}\,, \quad 1.5 \ \begin{array}{|ccc|}\hline & & x \\ & & \\ & & \\ \hline\end{array}\,, \quad 1.8 \ \begin{array}{|ccc|}\hline & x & \\ & & x \\ & & \\ \hline\end{array}\,.$$

Подалгебра 1.3 допускает риманову метрику, подалгебры 1.1, 1.8 допускают псевдориманову метрику, а 3.20, 2.9, 2.17, 2.20, 2.21 и 1.5 не допускают инвариантную метрику.

Доказательство. Для получения результата, приведенного в теореме, из пар, найденных в [3], выбираем допускающие нормальную связность, выписываем соответствующее изотропное представление, находим аффинные связности, алгебры голономии, а также определяем, при каких условиях связность является нормальной.

Рассмотрим, например, пару типа 2.9.

Лемма. Любая пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ типа 2.9 при $\lambda=0$, $\mu=0,-1$ эквивалентна одной и только одной из пар 2.9.1, 2.9.2, 2.9.4–2.9.7.

Доказательство. Пусть $E=\{e_1,e_2\}$ – базис $\mathfrak{g}$, где

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\mu\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Через $\mathfrak{h}$ обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденную вектором e_1. Тогда имеем:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{h})&\supset\mathbb{R}e_1, & U^{(1)}(\mathfrak{h})&\supset\mathbb{R}u_1,\\ \mathfrak{g}^{(1-\mu)}(\mathfrak{h})&\supset\mathbb{R}e_2, & U^{(\lambda)}(\mathfrak{h})&\supset\mathbb{R}u_2,\\ & & U^{(\mu)}(\mathfrak{h})&\supset\mathbb{R}u_3.\end{aligned}$$

Положим:

$$[u_1,u_2]=a_1e_1+a_2e_2+\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3,$$

$$[u_1,u_3]=b_1e_1+b_2e_2+\beta_1u_1+\beta_2u_2+\beta_3u_3,$$

$$[u_2,u_3]=c_1e_1+c_2e_2+\gamma_1u_1+\gamma_2u_2+\gamma_3u_3.$$

Рассмотрим следующие случаи:

$$1.\ \mu\notin\{0,\tfrac{1}{2},2\},\ \lambda\neq\pm(1-\mu).$$

Тогда

$$\begin{aligned}&[e_1,e_2]=(1-\mu)e_2,\\ &[e_1,u_1]=u_1, && [e_2,u_1]=0,\\ &[e_1,u_2]=\lambda u_2, && [e_2,u_2]=0,\\ &[e_1,u_3]=\mu u_3, && [e_2,u_3]=u_1.\end{aligned}$$

Проверим тождество Якоби для троек $(e_i,u_j,u_k),\ i=1,2,\ 1\le j<k\le 3$, и (u_1,u_2,u_3).

1. $[e_1,[u_1,u_2]]+[u_1,[u_2,e_1]]+[u_2,[e_1,u_1]]=0$,

$(1-\mu)a_2e_2+\alpha_1u_1+\lambda\alpha_2u_2+\mu\alpha_3u_3-(\lambda+1)[u_1,u_2]=0$,

1. $(\lambda+1)\alpha_1=0$, 2. $(\mu+\lambda)a_2=0$, 3. $\lambda\alpha_1=0$,

4. $\alpha_2=0$, 5. $\alpha_3=0$.

2. $[e_2,[u_1,u_2]]+[u_1,[u_2,e_2]]+[u_2,[e_2,u_1]]=0$,

$(\mu-1)a_1e_2=0$,

6. $(\mu-1)a_1=0$.

3. $[e_1,[u_1,u_3]]+[u_1,[u_3,e_1]]+[u_3,[e_1,u_1]]=0$,

$(1-\mu)b_2e_2+\beta_1u_1+\lambda\beta_2u_2+\mu\beta_3u_3-(\mu+1)[u_1,u_3]=0$,

7. $(\mu+1)b_1=0$, 8. $b_2=0$, 9. $\beta_1=0$,

10. $(\lambda-\mu-1)\beta_2=0$, 11. $\beta_3=0$.

4. $[e_2,[u_1,u_3]] + [u_1,[u_3,e_2]] + [u_3,[e_2,u_1]] = 0$,
$(\mu - 1)b_1e_2 = 0$,
12. $b_1 = 0$.

5. $[e_1,[u_2,u_3]] + [u_2,[u_3,e_1]] + [u_3,[e_1,u_2]] = 0$,
$(1 - \mu)c_2e_2 + \gamma_1u_1 + \lambda\gamma_2u_2 + \mu\gamma_3u_3 - (\gamma + \mu)[u_2,u_3] = 0$,
13. $(\lambda + \mu)c_1 = 0$, 14. $(1 - \lambda - 2\mu)c_2 = 0$, 15. $\gamma_1 = 0$,
16. $\gamma_2 = 0$, 17. $\lambda\gamma_3 = 0$.

6. $[e_2,[u_2,u_3]] + [u_2,[u_3,e_2]] + [u_3,[e_2,u_2]] = 0$,
$(\mu - 1)c_1e_2 + \gamma_3u_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_1u_1 = 0$,
18. $\alpha_1 = 0$, 19. $\alpha_2 + (\mu - 1)c_1 = 0$, 20. $\gamma_3 + \alpha_1 = 0$.

7. $[u_1,[u_2,u_3]] + [u_2,[u_3,u_1]] + [u_3,[u_1,u_2]] = 0$,
$-c_1e_1 + \gamma_3\beta_2u_2 - a_2u_1 - \alpha_1\beta_2u_2 = 0$,
21. $c_1 + a_2 = 0$, 22. $\beta_2(\gamma_3 - \alpha_1) = 0$.

Окончательно имеем:

$$\begin{array}{ll}
\lambda = 0: & \lambda = \mu + 1: \\
[u_1, u_2] = \alpha_1 u_1, & [u_1, u_2] = 0, \\
[u_1, u3] = 0, & [u_1, u_3] = \beta_2 u_2, \\
[u_2, u_3] = -\alpha_1 u_3, & [u_2, u_3] = 0,
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\lambda = 1 - 2\mu: & \lambda \neq \mu + 1, \lambda \neq 1 - 2\mu: \\
[u_1, u_2] = 0, & [u_1, u_2] = 0, \\
[u_1, u_3] = 0, & [u_1, u_3] = 0, \\
[u_2, u_3] = c_2 e_2, & [u_2, u_3] = 0.
\end{array}$$

1.1. $\lambda = 0$.

1.1.1. $\alpha_1 = 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$.

1.1.2. $\alpha_1 \neq 0$. Если $\mu \neq 0$, тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_4, \mathfrak{g}_4)$ посредством отображения $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_4 \to \bar{\mathfrak{g}}$, где

$$\pi(e_i) = e_i, i = 1,2, \quad \pi(u_1) = u_1,$$
$$\pi(u_2) = \alpha_1 u_2, \quad \pi(u_3) = u_3,$$

и в случае $\mu = 1$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре при помощи отображения $\pi_{\mu=1}$: $\bar{\mathfrak{g}}_1 \to \bar{\mathfrak{g}}$, где

$$\pi_{\mu=1}(e_i) = e_i, i = 1,2, \quad \pi_{\mu=1}(u_1) = u_1,$$
$$\pi_{\mu=1}(u_2) = u_2 - \alpha_1 e_1, \quad \pi_{\mu=1}(u_3) = u_3.$$

1.2. $\lambda = 1 + \mu$.

1.2.1. $\beta_2 = 0$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ тривиальна.

1.2.2. $\beta_2 \neq 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$ при помощи отображения π: $\bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, где

$$\pi(e_1) = e_1, \ \pi(e_2) = \beta_2 e_2, \ \pi(u_1) = \beta_2 u_1,$$
$$\pi(u_2) = u_2, \ \pi(u_3) = u_3.$$

1.3. $\lambda \neq 1 + \mu$, $\lambda \neq 1 - 2\mu$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ тривиальна. Аналогично получим другие результаты леммы.

Пусть $\mathfrak{n}_i$ – максимальный нильпотентный идеал алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}_i$. Заметим, что $\dim \mathfrak{n}_1 = 4$ и $C^3\mathfrak{n}_1 = \{0\}$, $\dim \mathfrak{n}_2 = 4$ и $C^3\mathfrak{n}_2 \neq \{0\}$, $\dim n_i = 3$ для $i = 4, \ldots, 7$. Отсюда следует, что все пары $(\bar{\mathfrak{g}}_i, \mathfrak{g}_i)$ для $i = 2, \ldots, 7$ не эквивалентны тривиальной паре $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$. Аналогично другие пары, определенные в лемме, не эквивалентны друг другу.

Прямыми вычислениями получаем, что для всех указанных пар типа 2.9 связность имеет вид

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,1} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим пару 2.9.1 при $\lambda = 0$, $\mu = -1$, тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}q_{2,2} - q_{1,1}p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1} - q_{2,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}q_{1,1} - q_{2,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2} - p_{1,2}q_{2,2} & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения

$$(p_{1,2} - q_{1,1}, 0, 0), (0, 2p_{2,3}, 0), (0, 0, q_{1,1} - p_{1,2}).$$

Связность является нормальной при $p_{1,2} \neq 0$, $p_{2,3} \neq 0$, $q_{2,2} = -2q_{1,1}$, тогда алгебра голономии – $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$.

Рассмотрим пару 2.9.2 при $\mu = -1$, тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}q_{2,2} - q_{1,1}p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1} - q_{2,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3} - q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3} - q_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3} - q_{1,1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}q_{1,1} - q_{2,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2} - p_{1,2}q_{2,2} & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения

$$\left(p_{1,2}-q_{1,1},0,0\right),\left(0,2p_{2,3}-1,0\right),\left(0,0,q_{1,1}-p_{1,2}\right).$$

Связность является нормальной при $p_{1,2} \neq 0$, $p_{2,3} \neq 0$, $2q_{1,1} + q_{2,2} \neq 0$, тогда алгебра голономии – $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, либо при $p_{1,2} \neq 0$, $p_{2,3} \neq 0$, $2q_{1,1} + q_{2,2} = 0$, тогда алгебра голономии – $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$.

Рассмотрим пару 2.9.4 при $\mu = -1$, тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}q_{2,2}-q_{1,1}p_{1,2}-p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1}-q_{2,2}p_{2,3}-p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}q_{1,1}-q_{2,2}p_{2,3}-p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2}-p_{1,2}q_{2,2}+p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения

$$\left(p_{1,2}-q_{1,1}-1,0,0\right),\left(0,2p_{2,3},0\right),\left(0,0,q_{1,1}-p_{1,2}+1\right).$$

Связность является нормальной при $p_{1,2} \neq 0$, $p_{2,3} \neq 0$, $2q_{1,1} + q_{2,2} = 0$, тогда алгебра голономии – $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$. Изотропно-точные пары и нормальные связности на них в остальных случаях находятся аналогично.

Проводя аналогичные вычисления, получаем алгебры голономии:

3.20	$\begin{pmatrix} p_6 & p_1 & p_2 \\ 0 & p_3 & p_5 \\ 0 & p_4 & -p_3 \end{pmatrix}$	2.17	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.21	$\begin{pmatrix} p_3 & p_1 & 0 \\ p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & p_2 & -p_3 \end{pmatrix}$	2.20	$\begin{pmatrix} 0 & s_1 & s_2 \\ 0 & s_3 & s_4 \\ 0 & s_5 & -s_3 \end{pmatrix}$

В случае 2.9 алгебра голономии – $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$, для остальных пар рассуждения аналогичны.

Заключение. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, при изучении пространств с аффинной связностью, а также могут иметь приложения в общей теории относительности, которая с математической точки зрения базируется на геометрии искривленных пространств, в ядерной физике, физике элементарных частиц и др.

Литература

1. Chen Bang-Yen. Geometry of submanifolds // Pure and Appl. Math. 1973. No. 22. 308 p.

2. Gordon Carolyn S., Wilson Edward N. Isometry groups of Riemannian solvemanifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 307, no. 1. P. 245–269.

3. Komrakov B., Tchourioumov A., Mozhey N. Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces // Preprints Univ. Oslo. 1993. Vol. 1–3, no. 35–37. 432 p.

References

1. Chen Bang-Yen. Geometry of submanifolds. *Pure and Appl. Math.*, 1973, no. 22, 308 p.

2. Gordon Carolyn S., Wilson Edward N. Isometry groups of Riemannian solvemanifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1988, vol. 307, no. 1, pp. 245–269.

3. Komrakov B., Tchourioumov A., Mozhey N. Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces. *Preprints Univ. Oslo*, 1993, vol. 1–3, no. 35–37, 432 p.

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна − кандидат физико-математических наук, доцент, докторант. Казанский (Приволжский) федеральный университет (420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, Российская Федерация). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna − Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Doctoral Candidate. Kazan (Volga Region) Federal University (18, Kremlyovskaya str., 420008, Kazan, Russia). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила 27.02.2015