УДК 512.8:681.55

Ю. О. Герман[1], О. В. Герман[2]
[1]Белорусский национальный технический университет
[2]Белорусский государственный технологический университет

РАБОТА СО ЗНАНИЯМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В работе представлен оригинальный подход к построению выводов в модальных системах с нечеткими правилами вместе с необходимой техникой формализации заключений. Подход ориентирован на прикладные системы искусственного интеллекта и системы принятия решений, использующие нечеткие модальные формулы. Подход базируется на представлении нечетких модальных отношений формулами многозначных логик Я. Лукасевича с использованием для интерпретации модальных отношений. Модальность типа «возможно» интерпретируется формулой трехзначного исчисления со значением истинности не ниже 0,5; модальность типа «необходимо» интерпретируется формулой трехзначного исчисления со значением истинности, равным 1. Введены правила исчисления выводов в нечетких модальных системах, позволяющие находить трехзначные эквиваленты произвольных модальных формул. Показано, как обобщить эти правила на случай нечетких модальных систем. В качестве практической иллюстрации рассматривается задача отыскания максимального независимого множества вершин в нечетком графе. Эта задача может встретиться, например, при распознавании лиц в условиях наличия искажений на изображениях. Вершинами графа изображения являются некоторые характерные точки. Точки соединяются ребрами, если их яркость и цвет достаточно схожи. Очевидно, что при искажении изображений ребрам могут быть приписаны оценки степени сходства, отличные от 1. Представленный в статье подход может быть интересен для специалистов-прикладников, занимающихся проблемами распознавания и классификации.

Ключевые слова: модальная логика, нечеткий вывод, максимальное назависимое множество.

Yu. O. German[1], O. V. German[2]
[1]Belarusian National Technical University
[2]Belarusian State Technological University

WORK WITH KNOWLEDGE WITH THE USE OF MODAL OPERATORS

An original approach to making inferences in modal systems, including fuzzy modal calculi with the necessary formalization technique is suggested. The approach is oriented at practical usage in applied artificial intelligent and decision making systems based on fuzzy logic concepts and modal logic as well. The background of the approach consists in using J. Lukasiewicz's multi-valued logics to interpret the modal relationships. The modality of the type "possible" is interpreted by the 3-valued formula with the truth value not less than 0.5; the modality of the type "necessary" is interpreted by the 3-valued formula with the truth value equal to 1. The inference rules in the fuzzy modal system are introduced enabling one to find 3-valued formulas equivalent to the arbitrary modal formula. It is shown how to generalize these rules in the case of the fuzzy modal systems. As a practical illustration, the maximum-size independent vertex set in the fuzzy graph is considered. This problem may be encountered in face recognition with some possible distortions. The vertices stand for the points in the face image with approximately similar color and brightness. Obviously, in the case of image distortion the arcs in the graph may be assigned with the values in 0.1-diapason. The approach represented in the paper may be interesting for the researchers engaged in the recognition and classifying problems.

Key words: modal logic, fuzzy inference, a maximum-size independent set.

Введение. Практический интерес связан с нечеткими системами модальных логик. Правило модальной логики типа «*Если A*, *то*, *возможно*, *B*» может найти достаточно широкую область использования. Модальность возможности характеризует неопределенность, гипотетичность. Имеется не так много систем вывода для нечетких модальных логик. Отметим, например, аксиоматическую систему [1], систему резолюционного вывода (H. De Nivelle [2]), систему типа натурального вывода Генцена [3], табличный метод R. Gore [4]. Основные недостатки этих методов – неуниверсальность, большая вычислительная сложность и наличие ограничений на применение правил вывода. В настоящей работе предлагается процедура вывода с более широкими рамками использования, достигаемыми, правда, за счет аппроксимации логических заключений на базе многозначных логик Я. Лукасевича. Подход демонстрирует связь между n-значными логиками Я. Лукасевича и нечеткими модальными системами при $n \to \infty$.

Основная часть. В основе наших рассуждений лежит работа [5]. Заменим модальные формулы формулами трехзначной логики Я. Лукасевича. Формула x имеет значения {0; 0,5; 1} в трехзначной логике Лукасевича, причем 0 соответствует значению «невозможно», 0,5 – значению «не определено» и 1 – значению «необходимо» (в альтернативной нотации пишем $val(z)=\{0,\ 1,\ 2\}$ с $val(z)=(n-1)\cdot val(x)$). Далее примем:

$$\Box\, x \leftrightarrow val(x)=1,$$

$$\Diamond x \leftrightarrow val(x)\ \geq 0{,}5,$$

так как

$$\neg\Diamond x \equiv \Box\neg x\ \leftrightarrow\ val(x)\ = 0.$$

Отсюда находим:

$$\Box\, true \leftrightarrow val(true)=1=true,$$

$$\Box\, false \leftrightarrow val(false)=1=false,$$

$$\Box\, 0{,}5 \leftrightarrow val(0{,}5)=1=false;$$

$$\Diamond true \leftrightarrow val(true)\geq 0{,}5=true,$$

$$\Diamond false \leftrightarrow val(false)\geq 0{,}5=false,$$

$$\Diamond\ 0{,}5 \leftrightarrow val(0{,}5)\geq 0{,}5=true.$$

Пусть α [μ_α] обозначает формулу, которая допускает только интерпретации, в которых $val(\alpha) \geq \mu_\alpha$. Имеем:

$$\Diamond x \equiv \mu(x)\ \geq\ \ 0{,}5,$$

$$\Box\neg y \equiv \mu(\neg y)=1.$$

Для манипулирования формулами используем замены, введенные в [5]:

$$x \equiv (x_1, x_2),\ \neg x \equiv (\neg x_2, \neg x_1),$$

$$x \vee y \equiv (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2),$$

$$\neg x \equiv (\neg x_2, \neg x_1),$$

$$x \,\&\, y \equiv (x_1 \,\&\, y_1, x_2 \,\&\, y_2),$$

$$x \to y \equiv \neg x \vee y = (\neg x_2 \vee y_1, \neg x_1 \vee y_2).$$

Пусть x есть трехзначная (векторная формула) и y – двузначная пропозициональная переменная. Пропозициональная двузначная переменная может быть представлена в трехзначной логике как формула, не допускающая значения 0,5, т. е.

$$y=(y_1,\ y_2)\,\&\,(y_1y_2 \vee \neg y_1\neg y_2)=(y_1y_2,\ y_1y_2).$$

Отсюда, в частности, следует:

$$x \vee y \equiv (x_1 \vee y_1y_2, x_2 \vee y_1y_2),$$

$$x \,\&\, y \equiv (x_1 \,\&\, y_1y_2, x_2 \,\&\, y_1y_2),$$

$$x \to y \equiv \neg x \vee y = (\neg x_2 \vee y_1y_2, \neg x_1 \vee y_1y_2).$$

Пусть даны формулы

$$\Diamond x \vee y,$$

$$\neg x \vee \Box\neg y.$$

Перепишем их таким образом:

$$\mu(x)\geq 0{,}5 \vee (y_1, y_2),$$

$$(\neg x_2, \neg x_1)\vee \mu(\neg y)=1.$$

Получим в силу правил преобразования:

$$(x_1 \vee y_1, x_1 \vee y_2),$$

$$(\bar{x}_2 \vee \bar{y}_2\bar{y}_1, \bar{x}_1 \vee \bar{y}_2\bar{y}_1).$$

Замечание. Повсюду принимается недопустимость значения $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = (0, 1)$ для любой формулы α. Это означает, что необходимо всякий раз добавлять в систему формулы вида

$$\alpha_1 \vee \neg\alpha_2.$$

Примеры.

1. $\Box\ (x \vee \neg x) = \Box\ ((x_1 \vee \neg x_2, x_2 \vee \neg x_1))$. Формула ложна для $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ ($val(x) = 0{,}5$). Следовательно $\Box\ (x \vee \neg x)$ не общезначима в модальном исчислении.

2. $\Box x \vee \neg\Box x$ общезначима, поскольку $\Box x$ допускает (1, 1) и $\neg\Box x$ допускает (0, 0) и (1, 0).

Обратимся к построению выводов в нечеткой модальной системе.

Пусть требуется доказать или опровергнуть выводимость формулы $\Diamond y\ \ [\mu \geq\ 1/3]$ из формул $\Diamond(x \vee y)\ \ [\mu \geq 1/3]$ и $\Box\neg x\ \ [\mu = 1]$.

Имеем:

$$x \equiv (x_1, x_2, x_3),\ y \equiv (y_1,\ y_2,\ y_3),$$

$$\neg x \equiv (\neg x_1, \neg x_3, \neg x_2),\ \neg y \equiv (\neg y_1, \neg y_3, \neg y_2),$$

$$\Diamond(x \vee y)\ [\mu \geq 1/3] = (\Diamond x \vee \Diamond y)\ [\mu \geq 1/3] =$$
$$= \Diamond(x_1 \vee y_1,\ x_2 \vee y_2,\ x_3 \vee y_3)\ \ [\mu \geq 1/3] =$$
$$= \Diamond(010 \vee 110 \vee 111) = \Diamond(x_2 \vee y_2),$$

$$\Box\neg x[\mu = 1] = \Box\,(\neg x_1 \neg x_3 \neg x_2)[\mu =\ \ 1]\ \ = \Box\,(111) =$$
$$= \Box\,(\neg x_1 \cdot \neg x_3 \cdot \neg x_2),$$

$$\Diamond y\ \ [\mu \geq 1/3] = \Diamond\ (010 \vee 110 \vee 111) = \Diamond(y_2).$$

Таким образом,

$$\Diamond(x_2 \vee y_2),$$

$$\Box\,(\neg x_1 \cdot \neg x_3 \cdot \neg x_2),$$

$$x_i = \overline{0,\ 1},\ y_i = \overline{0,\ 1},$$

откуда следует получить $\Diamond(y_2)$.

Используя аппарат трехзначной логики Лукасевича, находим непосредственно:

$$x_1 = (x_1^1,\, x_1^2),\ \ x_2 = (x_2^1,\, x_2^2),\ \ x_3 = (x_3^1,\, x_3^2),$$

$$y_1 = (y_1^1,\, y_1^2),\ \ y_2 = (y_2^1, y_2^2),\ \ \neg y_2 = \ (\neg y_2^2,\, \neg y_2^1).$$

Это дает:

$$x_2^1 \vee y_2^1,$$
$$\neg x_1^2 \cdot \neg x_1^1,$$
$$\neg x_2^2 \cdot \neg x_2^1,$$
$$\neg x_3^2 \cdot \neg x_3^1,$$
$$\neg y_2^1,$$

где $\Diamond(y_2)$ заменена на y_2^1, и отрицание последней добавлено в систему, чтобы использовать стандартный резолюционный вывод. Убеждаемся, что выводимость имеет место.

Рассмотрим пример прикладной задачи – поиск максимального независимого множества в нечетком подграфе.

Ребро графа будем считать нечетким, если определенно неизвестно, входит оно в граф или нет. Ребро считаем четким, если определенно известно, что оно входит в граф. Граф с нечеткими ребрами кодируем матрицей смежности A с элементами $a_{i,j}$, такими, что

$$a_{i,j} = 1,\ \text{если ребро } (i, j) \text{ четкое;}$$

$$a_{i,j} = 0{,}5,\ \text{если ребро } (i, j) \text{ нечеткое.}$$

Определение 1.

А. (Нечетким) независимым множеством нечеткого графа назовем любое множество его вершин, никакие две из которых не связаны четким ребром (таким образом, допускается связь нечеткими ребрами).

Б. Ядром нечеткого независимого множества Ψ считаем подмножество его вершин $\Psi_C \subseteq \Psi$, никакие две из которых не соединены нечетким ребром.

Определение 2. Пусть для нечеткого графа определены два независимых множества Ψ_1, Ψ_2. Говорим, что Ψ_1 максимально предпочтительнее (*м*-предпочтительнее) Ψ_2, если размер его ядра больше размера ядра Ψ_2.

Определение 3. Нечеткое независимое множество Ψ называется *м*-максимальным, если оно имеет ядро максимального размера, а при условии равенства размеров ядер содержит наибольшее общее число вершин.

Целью является отыскание *м*-максимального независимого множества нечеткого графа.

Пусть матрица A смежности нечеткого графа имеет такой вид:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
D_1	0	0,5	1	0	0	0	0
D_2	0,5	0	1	1	0	1	0
D_3	1	1	0	0	0	1	0
D_4	0	1	0	0	0	1	0,5
D_5	0	0	0	0	0	1	1
D_6	0	1	1	1	1	0	0
D_7	0	0	0	0,5	1	0	0

Формулировку задачи можно записать следующим образом:

$$D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + D_6 + D_7 \to \max,$$
$$\neg D_1 \vee \neg D_3,$$
$$\neg D_2 \vee \neg D_3,$$
$$\neg D_2 \vee \neg D_4,$$
$$\neg D_2 \vee \neg D_6,$$
$$\neg D_3 \vee \neg D_6,$$
$$\neg D_4 \vee \neg D_6,$$
$$\neg D_5 \vee \neg D_6,$$
$$\neg D_5 \vee \neg D_7,$$
$$\Diamond(\neg D_1 \vee \neg D_2),$$
$$\Diamond(\neg D_4 \vee \neg D_7).$$

Используя двоичную интерпретацию модальных формул, перепишем систему в «чистых» булевских переменных. Введем представления

$$D_i = (x_i, y_i),\ i = \overline{1,7};$$

$$\neg D_r \vee \neg D_s = (\neg y_r,\, \neg x_r) \vee (\neg y_s,\, \neg x_s) \ = \\ = (\neg y_r \vee \neg y_s,\, \neg x_r \vee \neg x_s);$$

$$\Diamond(\neg D_r \vee \neg D_s) \ = \ \Diamond(\neg y_r \vee \neg y_s,\, \neg x_r \vee \neg x_s) \ = \\ = \neg y_r \vee \neg y_s.$$

Имеем:

$$M \cdot y_1 + M \cdot y_2 + M \cdot y_3 + M \cdot y_4 + M \cdot y_5 + \\ + \ M \cdot y_6 + M \cdot y_7 + x_1 + x_2 + x_3 + \\ + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \to \max,$$

$$\neg y_1 \vee \neg y_3, \neg x_1 \vee \neg x_3,$$
$$\neg y_2 \vee \neg y_3, \neg x_2 \vee \neg x_3,$$
$$\neg y_2 \vee \neg y_4, \neg x_2 \vee \neg x_4,$$
$$\neg y_2 \vee \neg y_6, \neg x_2 \vee \neg x_6,$$
$$\neg y_3 \vee \neg y_6, \neg x_3 \vee \neg x_6,$$
$$\neg y_4 \vee \neg y_6, \neg x_4 \vee \neg x_6,$$

$$\neg y_5 \vee \neg y_6, \neg x_5 \vee \neg x_6,$$

$$\neg y_2 \vee \neg y_7, \neg x_2 \vee \neg x_7,$$

$$\neg y_1 \vee \neg y_2,$$

$$\neg y_4 \vee \neg y_7,$$

$$\neg x_1 \vee \neg y_1, \neg x_2 \vee \neg y_2, \neg x_3 \vee \neg y_3, \neg x_4 \vee \neg y_4,$$

где M – положительное число, превосходящее, например, удвоенное число вершин (M = 15). Целевая функция допускает нечеткие ребра, но обеспечивает максимальный размер ядра, а при равенстве размеров ядер – наибольший общий размер *м*-независимого множества. Задача сведена к известной задаче линейного булевского программирования и может быть решена, например, методом Балаша [6]. Так, используя пакет ПОИСК РЕШЕНИЯ в MS Excel, найдем *м*-независимое множество: $\{D_3, D_4, D_5\}$ (есть и иные варианты). Нечетких ребер нет.

Заключение. Предложенные методы могут прямо использоваться в различных интеллектуальных системах. Подход допускает прямое обобщение на модальную нечеткую логику предикатов.

Нечеткая модальная логика требует глубокого философского осмысления и исследований в различных направлениях. Например, возьмем формулу $\Diamond P(x)[\mu \geq 0{,}8]$. Эта формула устанавливает определенную степень уверенности в истинности $\Diamond P(x)$. Однако последняя формула сама определена недостоверно (она, возможно, истинна, а, возможно, и нет). Таким образом, можно поставить вопрос о правомочности навешивать степень достоверности на иную степень достоверности. Однако это не совсем так. В нашем понимании здесь имеет место простая коррекция итоговой оценки достоверности.

Литература

1. Cherkassky V. FUZZY Inference Systems: a critical review // Springer. 1998. P. 259.

2. Nivelle H. D., Schmidt R. A., Hustadt U. Resolution-based methods for modal logics // Logic J. IGPL. 2002. No. 10 (1). P. 51–83.

3. Proof theory of modal logic / editor H. Wansing. Norwell (USA): Kluwer Academic Press, 1996.

4. Gore R. Tableau methods for modal and temporal logics // Handbook of tableau method / D'Agostino [et al.]. USA: Kluwer, 1999. P. 670.

5. Герман О. В., Самко Р. А., Герман Ю. О. Система вывода для нечеткой логики на базе многозначных исчислений Лукасевича // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. 2010. Вып. XVIII. С. 190–193.

6. Pardalos M. P., Xue J. The maximum clique problem // Journal of global optimization. 1994. Vol. 4 (3). P. 301–328.

References

1. Cherkassky V. FUZZY Inference Systems: a critical review. *Springer*, 1998, pp. 259.

2. Nivelle H. De, Schmidt R. A., Hustadt U. Resolution-based methods for modal logics. *Logic J. IGPL*, 2002, no. 10 (1), pp. 51–83.

3. Wansing H. Proof theory of modal logic. Norwell (USA), Kluwer Academic Press, 1996.

4. Gore R. Tableau methods for modal and temporal logics. *Handbook of tableau method*. USA, Kluwer, 1999, pp. 670.

5. German O. V., Samko R. A., German Yu. O. An inference system for a fuzzy logic on the basis of multivalued Lukasiewicz calculi. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series VI, Physical-mathematical sciences and informatics, 2010, issue XVIII, pp. 190–193 (In Russian).

6. Pardalos M. P., Xue J. The maximum clique problem. *Journal of global optimization*, 1994, vol. 4 (3), pp. 301–328.

Информация об авторах

Герман Юлия Олеговна – ассистент кафедры САПР. Белорусский национальный технический университет (220013, Минск, пр-т Независимости, 65, Республика Беларусь). E-mail: juliagerman@tut.by

Герман Олег Витольдович – кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ovgerman@tut.by

Information about the authors

German Juliya Olegovna – assistant, the Department of Automatized Design Systems. Belarusian National Technical University (65, Nezavisimosti Ave., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: juliagerman@tut.by

German Oleg Vitol'dovich – Ph. D. (Engineering), Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ovgerman@tut.by

Поступила 12.03.2015