Используя свойство ограниченности оператора $\boldsymbol{J}_{\gamma,\alpha,\beta} f$ в пространстве $\mathbf{I}^0_{E_1}(L_1)$, сформулируем следующую теорему, дающую достаточные условия разрешимости уравнения (1) и его явное решение в терминах правой части:

Теорема. Пусть $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{I}^0_{E_1}(L_1)$, $c(\mathbf{x}) \in \mathbf{I}_{E_1}(L_1)$. Тогда уравнение (1) разрешимо в $L_1(\mathbf{E}_1(\mathbf{b}))$ и его единственное решение дается формулой

$$\varphi(\mathbf{x}) = \left(c_0\mathbf{E} + \mathbf{T}_\psi\right)^{-1}\left(\left(\boldsymbol{J}_{\gamma,\alpha,\beta}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f\right)(\mathbf{x})\right), \tag{2}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Пономарева, С.В. Решение интегральных уравнений первого рода в некоторых пространствах / Физико-математические науки: тезисы 79-й науч.-техн. конференции, Минск, 2-6 февраля 2015 г. / УО БГТУ. – Минск: БГТУ, 2014. – 44 с. С. 37.

3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – М.: Наука, 1965-1967. – Т. 3: Эллиптические и автоморфные функции. – 1967. – 299 с.

УДК 517.968

Л. Д. Яроцкая (БГТУ, г. Минск)

ОБ УРАВНЕНИИ С ДВУМЯ ЯДРАМИ ТИПА СВЕРТКИ КОНТОРОВИЧА − ЛЕБЕДЕВА

Настоящая работа посвящена интегральному уравнению вида:

$$f(t) + (f * m_1)(t) + (f \bar{*} m_2)(t) = g(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

где в качестве одного из ядер взята классическая свёртка

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2t}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{ty}{2u} - \frac{yu}{2t} - \frac{ut}{2y}} f(u)g(y)\,du\,dy \tag{2}$$

для преобразования Конторовича – Лебедева

$$F(\tau) \equiv K_{i\tau}[f] = \int_0^\infty K_{i\tau}(x) f(x)\,dx, \quad \tau \ge 0, \tag{3}$$

а в качестве второго ядра – обобщенная свертка

$$(f \hat{*} g)(x) = \frac{2}{\pi^2 x}\int_0^\infty \tau\,\mathrm{sh}(\pi\tau) K_{i\tau}(x)\hat{F}(\tau)K_{i\tau}[g]\,d\tau. \quad (4)$$

Здесь

$$\hat{F}(\tau) = \int_0^\infty M_{i\tau}(u) f(u)\,du \quad (5)$$

интегральное преобразование, где специальная функция ядра определяется интегралом

$$M_{i\tau}(u) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u\,\mathrm{ch}\,t}\sin(\tau t)\,dt.$$

Отметим, что свертка (2) и преобразование (3) подробно изучены в монографии [1], а свойства свертки (4) – в работе [2]. При некоторых условиях на классы функций и ядер, используя результаты [1] и [2], рассматриваемое уравнение (1) путем применения преобразования Конторовича – Лебедева (3) сведено к линейному алгебраическому уравнению относительно преобразований (3), (5) в некотором классе функций:

$$F(x) + M_1(x)F(x) + M_2(x)\hat{F}(x) = G(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (6)$$

Основной метод решения уравнения (6) основан на сведении его к краевой задаче Римана для полуплоскости в классе исчезающих на бесконечности функций и применении соответствующих известных результатов [3]. В настоящей работе получены условия аналитической продолжимости интеграла Конторовича – Лебедева (3) в некоторую полосу, установлена связь между интегралом типа Коши по действительной оси и интегралом Конторовича – Лебедева (3) посредством формулы

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\tau)}{\tau - z}d\tau = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(t)\,dt\int_{-\infty}^{0} e^{-t\,\mathrm{ch}\,u}du\,\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\tau u}}{\tau - z}d\tau + \frac{1}{2}\int_0^\infty f(t)\,dt\int_0^\infty e^{-t\,\mathrm{ch}\,u}du\,\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\tau u}}{\tau - z}d\tau,$$

а также записаны аналоги формул Сохоцкого. При этом рассмотрены условия равносильности полученных задач, даны достаточные условия разрешимости и алгоритм для нахождения решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yakubovich S. B. Index transforms. Singapore: World Scientific Publishing Company. 1996. 252°p.

2. Яроцкая Л. Д. Об одной интегральной свертке, связанной с преобразованием Конторовича° – Лебедева // Труды БГТУ. 2012. №6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 31–33.

3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука. 1977. 640 с.