УДК 515.126

Т. Г. Шагова, ассист., магистр физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

К ВОПРОСУ О «СКЛЕИВАНИИ» РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Рассматривается следующая задача. Пусть X, Y – метрические пространства, A_1, $A_2 \subset X$, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Отображение $F: A_i \to Y$ равномерно непрерывно на A_i, $i = 1,2$. Является ли отображение F равномерно непрерывным на $A_1 \cup A_2$?

Не ограничивая общности, считаем, что множество A_1 замкнуто, так как если A_1 не является замкнутым, то в силу полноты $\mathbb{R}$ по теореме о продолжении существует, и притом единственное, непрерывное продолжение отображения F на замыкание множества A_1, и это продолжение равномерно непрерывно. Аналогично полагаем, что множество A_2 тоже замкнутое.

В случае, когда $X = \mathbb{R}$, отображение $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будет равномерно непрерывным на объединении множеств A_1 и A_2.

Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Если множества A_1 и A_2 ограничены, то объединение этих множеств является замкнутым и ограниченным, а, следовательно, компактным множеством по критерию компактности в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, по теореме Кантора отображение F будет равномерно непрерывным на объединении множеств A_1 и A_2. В случае, когда множества неограничены, отображение F, вообще говоря, равномерно непрерывным не будет. Достаточным условием сохранения равномерной непрерывности на объединении множеств является следующее:

$$\exists R, c > 0: \forall x \in A_1, y \in A_2: \|x\| > R, \|y\| > R, \|x - y\| \geq c.$$

Для произвольных метрических пространств справедлива следующая теорема.

Теорема (достаточное условие сохранения равномерной непрерывности на объединении подмножеств метрических пространств). Пусть X, Y – метрические пространства, A_1, $A_2 \subset X$, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$., замкнутые подмножества X. Отображение $F: A_i \to Y$ равномерно непрерывно на A_i, $i = 1,2$. Пусть выполняется условие:

$$\exists R, c > 0: \forall x \in A_1, y \in A_2, x \notin B[x_0, R], y \notin B[x_0, R], \rho(x, y) \geq c.$$

Если множества $A_1 \cap B[x_0, R]$, $A_2 \cap B[x_0, R]$ компактны, то отображение F равномерно непрерывно на $A_1 \cup A_2$.