

**І. Ф. КУЗЬМІЦКІ, ДЗ. С. КАРПОВІЧ,
В. В. ЛІХАВІЦКІ**

ТЭОРЫЯ АЎТАМАТЫЧНАГА КІРАВАННЯ

Лабараторны практыкум

Мінск БДТУ 2007

Установа адукацыі
«БЕЛАРУСКІ ДЗЯРЖАЎНЫ ТЭХНАЛАГІЧНЫ УНІВЕРСІТЭТ»

**І. Ф. КУЗЬМІЦКІ, ДЗ. С. КАРПОВІЧ,
В. В. ЛІХАВІЦКІ**

ТЭОРЫЯ АЎТАМАТЫЧНАГА КІРАВАННЯ

Лабараторны практыкум

Рэкамендавана вучэбна-метадычным аб'яднаннем вышэйшых навучальных устаноў Рэспублікі Беларусь па адукацыі ў галіне аўтаматызацыі тэхналагічных працэсаў, вытворчасцей і кіравання ў якасці вучэбнага дапаможніка для студэнтаў вышэйшых навучальных устаноў па спецыяльнасцях 1-53 01 01 «Аўтаматызацыя тэхналагічных працэсаў і вытворчасцей», 1-40 01 02-03 «Інфармацыйныя сістэмы і тэхналогіі»

Мінск 2007

УДК 531.8(076.5)
ББК 22.21я7
К 55

Рэцэнзенты:

дацэнт кафедры новых матэрыялаў і тэхналогіі ІПКіПК БНТУ
кандыдат тэхнічных навук *Дз. У. Макарчук*;
старшы выкладчык кафедры аўтаматычнага кіравання БДУІР
кандыдат тэхнічных навук *М. А. Сталбанаў*

Усе правы на дадзенае выданне абаронены. Узнаўленне ўсёй кнігі або яе часткі не можа быць ажыццёўлена без дазволу ўстановы адукацыі «Беларускі дзяржаўны тэхналагічны універсітэт».

Кузьміцкі, І. Ф.

К 55 Тэорыя аўтаматычнага кіравання. Лабараторны практыкум : вучэбны дапаможнік для студэнтаў спецыяльнасцей 1-53 01 01 «Аўтаматызацыя тэхналагічных працэсаў і вытворчасцей», 1-40 01 02-03 «Інфармацыйныя сістэмы і тэхналогіі» / І. Ф. Кузьміцкі, Дз. С. Карповіч, В. В. Ліхавіцкі. – Мінск : БДТУ, 2007. – 70 с.

ISBN 978-985-434-734-9

Практыкум прызначаны для выканання лабараторных работ па тэорыі аўтаматычнага кіравання на аснове спецыялізаваных матэматычных пакетаў Matlab і MathCAD, якія служаць для разліку, мадэлявання і візуалізацыі вынікаў.

УДК 531.8(076.5)
ББК 22.21я7

ISBN 978-985-434-734-9

© Установа адукацыі «Беларускі дзяржаўны тэхналагічны універсітэт», 2007

© Кузьміцкі І. Ф., Карповіч Дз. С., Ліхавіцкі В. В., 2007

УВОДЗІНЫ

Тэорыя аўтаматычнага кіравання з'яўляецца базавай асновай кібернетыкі. Гэтая дысцыпліна адносна маладая і ў цяперашні час развіваецца досыць інтэнсіўна. Пры гэтым для пастаяннага адсочвання новаўвядзенняў неабходная гнуткая лабараторная база. Гэта магчыма толькі з выкарыстаннем спецыялізаваных матэматычных кам'ютэрных праграм, што дазваляе імітаваць аб'екты ў сукупнасці з алгарытмамі кіравання, якія вывучаюцца. Нараўне з гнуткасцю, ужыванне кам'ютэрных праграм дазваляе скараціць апісальную частку, прысвечаную мадэляванню аб'екта, і засяродзіць увагу студэнта на якасныя і колькасныя характарыстыкі сістэм кіравання, якія вывучаюцца.

Матэматычны пакет Matlab, на аснове якога прапануецца выкананне большай часткі лабараторных работ, у цяперашні час дэ-факта з'яўляецца міжнародным стандартам для ажыццяўлення прамысловых разлікаў і мадэлявання сістэм кіравання.

Дапаможнік уключае працы па ўсім курсе дысцыпліны «Тэорыя аўтаматычнага кіравання»: даследаванне лінейных, нелінейных, дыскрэтных і аптымальных сістэм.

Лабараторная работа № 1 ЛІНЕАРЫЗАЦЫЯ ДЫНАМІЧНЫХ СІСТЭМ

Мэта работы: азнаёміцца з методыкай лінеарызацыі нелінейных дыферэнцыяльных раўнанняў.

Аналіз і рашэнне нелінейных дыферэнцыяльных раўнанняў звязаны са значнымі цяжкасцямі і магчымы толькі ў некаторых выпадках. Таму ў інжынерных разліках звяртаюцца да лінеарызацыі нелінейных дыферэнцыяльных раўнанняў, замены іх набліжанымі лінейнымі. Найболей распаўсюджаны метады лінеарызацыі – метады малых адхіленняў, які заснаваны на прапанове досыць малых адхіленняў уваходаў і выходаў ад устаноўленых значэнняў.

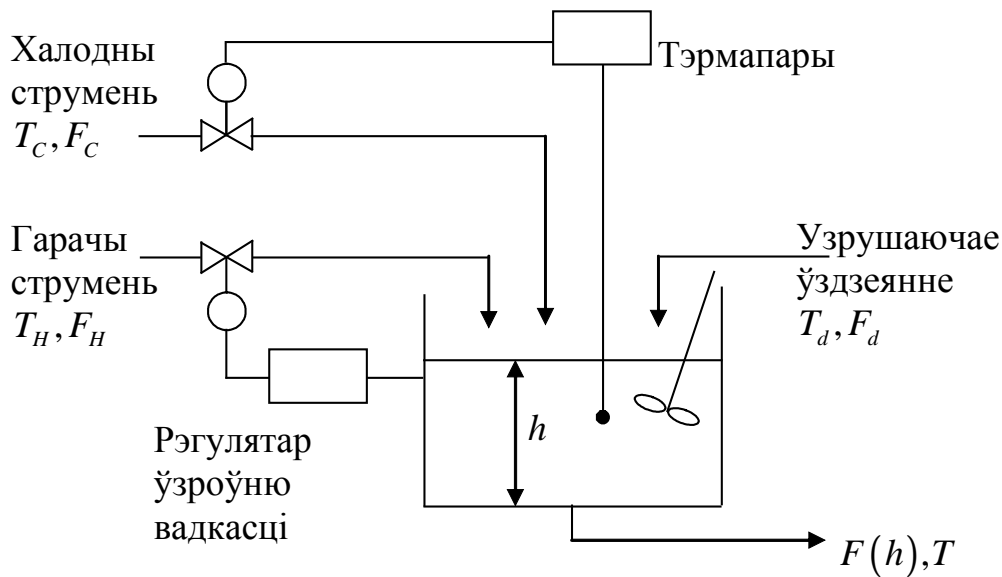
У якасці прыкладу разгледзім змешвальны бак з паравым абагрэваннем (малюнак). Бак прызначаны для змешвання і папярэдняга падагрэву рэагентаў перад іх падачай у хімічны рэактар. Змешвальны бак мае плошчу папярочнага сячэння A_c . Гарачы ўваходны струмень характарызуецца тэмпературай T_H і рэгулюемым расходам F_H ; халодны ўваходны струмень характарызуецца

тэмпературай T_C і рэгуляваным расходам F_C ; узрушэннем з'яўляецца струмень, які паступае з іншага апарата і які характарызуецца пераменнымі тэмпературай T_d і расходам F_d . У баку адбываецца поўнае змешванне; выхад залежыць ад вышыні вадкасці ў баку: $F(h) = K\sqrt{h}$. Мадэль працэсу атрымоўваецца з раўнанняў матэрыяльнага і энергетычнага балансу ў дыферэнцыяльнай форме:

$$A_c \frac{dh}{dt} = F_H + F_C + F_d - F(h);$$

$$\rho C_p A_c \frac{d(hT)}{dt} = \rho C_p [F_H T_H + F_C T_C + F_d T_d - F(h)T],$$
(1.1)

дзе ρ – шчыльнасць; C_p – цеплаёмкасць пры ўстаноўленым ціску.



Малюнак. Змешвальны бак з рэгуляваннем узроўню і тэмпературы

Гэтая мадэль нелінейная, аднак яе можна лінеарызываць у асяроддзі жаданага рэжыму (h_s, T_s) , раскладаючы нелінейнасці ў шэраг Тэйлара і адкідваючы члены раскладання вышэй за першы парадак дробязі. Калі пазначыць, якія ўстанавіліся значэнні F_H, F_C, F_d, T_d , адпаведныя $h = h_s, T = T_s$, праз $F_{Hs}, F_{Cs}, F_{ds}, T_{ds}$, можна перайсці да адхіленняў ад устаноўленых значэнняў:

$$x_1 = h - h_s, \quad x_2 = T - T_s, \quad u_1 = F_H - F_{Hs},$$

$$u_2 = F_C - F_{Cs}, \quad d_1 = F_d - F_{ds}, \quad d_2 = T_d - T_{ds}.$$
(1.2)

Лінеарызаваная мадэль (мадэль у адхіленнях) пасля пераўтварэння будзе мець выгляд

$$\begin{aligned}
A_c \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{A_c} \left[u_1 + u_2 + d_1 - \frac{F(h_s)}{2h_s} x_1 \right], \\
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{A_c h_s} \left[(T_H - T_s) u_1 + (T_C - T_s) u_2 + \right. \\
&\quad \left. + (T_{ds} - T_s) d_1 + F_{ds} d_2 - F(h_s) x_2 \right].
\end{aligned}
\tag{1.3}$$

Знойдзем зараз аналітычнае рашэнне разглядаанай сістэмы. Разлічым рэакцыю дадзенай сістэмы на адзінкавае ступеньчатае ўзрушэнне па u_1 , u_2 у момант $t = 0$, пры ўмове, што $x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$,

а $d_1 = d_2 = 0$. Пасля вылічэння атрымоўваем наступнае рашэнне:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= e^{-\frac{1}{2} \frac{F(h_s)}{A_c h_s} t} x_{10} + \frac{4h_s}{F(h_s)} \left(1 - e^{-\frac{1}{2} \frac{F(h_s)}{A_c h_s} t} \right), \\
x_2(t) &= e^{-\frac{F(h_s)}{A_c h_s} t} x_{20} + \frac{T_H + T_C - 2T_s}{F(h_s)} \left(1 - e^{-\frac{F(h_s)}{A_c h_s} t} \right).
\end{aligned}
\tag{1.4}$$

У пакеце Matlab існуюць функцыі ode23 і ode45, якія прызначаныя для лікавага інтэгравання сістэм звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў (ЗДР). Яны дастасавальныя як для рашэння простых дыферэнцыяльных раўнанняў, так і для мадэлявання складаных дынамічных сістэм.

Сінтаксіс:

```

[t, X] = ode23('<імя функцыі>', t0, tf, x0);
[t, X] = ode23('<імя функцыі>', t0, tf, x0, tol, trace);
[t, X] = ode45('<імя функцыі>', t0, tf, x0);
[t, X] = ode45('<імя функцыі>', t0, tf, x0, tol, trace).

```

Гэтыя функцыі маюць наступныя параметры:

t – бягучы час; X – двухмерны масіў, дзе кожны слупок адпавядае адной пераменнай; '<імя функцыі>' – радковая пераменная, якая з'яўляецца іменем М-файла, у ім вылічваюцца правыя часткі сістэмы ЗДР; t_0 – пачатковае значэнне часу; t_{final} – канчатковае значэнне часу; x_0 – вектар пачатковых умоў; tol – зададзеная дакладнасць (па змаўчанні для ode23 $tol = 1.e-3$, для ode45 $tol = 1.e-6$); $trace$ – сцяг, які рэгулюе вывад прамежкавых вынікаў; па змаўчанні роўны нулю, што забараняе вывад прамежкавых вынікаў.

Функцыі $[t, X] = ode23('<імя функцыі>', t_0, t_f, x_0, tol, trace)$ і $[t, X] = ode45('<імя функцыі>', t_0, t_f, x_0, tol, trace)$ інтэгруюць сістэмы ОДУ, выкарыстаючы формулы Рунге – Кута адпаведна 2-га і 3-га або

4-га і 5-га парадку. Рашэнне аднародных дыферэнцыяльных раўнанняў першага, другога і трэцяга парадкаў прыведзены ў табл. Д. 1.

Заданне. Рашыць дадзеную сістэму нелінейных раўнанняў (1.3) пры наступных значэннях параметраў (табліца), а потым параўнаць атрыманае рашэнне з аналітычным (1.4).

Табліца

Зыходныя даныя да задання

Варыянт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h_s , м	0,19	0,16	0,25	0,33	0,17	0,28	0,16	0,13	0,22	0,25
A_c , м ²	0,45	0,29	0,37	0,52	0,45	0,63	0,32	0,41	0,37	0,41
T_c , °С	41	35	34	32	22	18	29	27	20	25
T_H , °С	0,5	1,3	0,6	0,8	1,5	1,7	0,9	1,0	1,3	2,0
x_{10}	0,35	0,31	0,26	0,28	0,33	0,31	0,20	0,24	0,21	0,18
x_{20}	0,31	0,20	0,24	0,21	0,26	0,28	0,33	0,35	0,31	0,26

Змест справаздачы: раўнанні і праграмы для іх рашэння ў пакеце Matlab метадамі Рунге – Кута.

Лабараторная работа № 2 ПЕРАДАТАЧНАЯ ФУНКЦЫЯ. СТРУКТУРНЫЯ ПЕРАЎТВАРЭННІ. ПРАСТОРА СТАНАЎ

Мэта работы: азнаёміцца з магчымасцю падання элементаў аўтаматыкі ў выглядзе перадачачных функцый і іх структурных злучэнняў.

Рух элементаў сістэм аўтаматыкі апісваецца лінейным дыферэнцыяльным раўнаннем з каэфіцыентамі $a_0, \dots, a_{n-1}, a_n, b_0, \dots, b_{m-1}, b_m$, пастаяннымі або пераменнымі ў часе; n і m – цэлыя лікі ($n \geq 0, m \geq 0, n \geq m$); $y(t)$ і $x(t)$ – адпаведна выхад і ўваход сістэмы (звяна). Лік n называецца парадкам раўнання (парадкам сістэмы).

$$\begin{aligned}
 a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = \\
 = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t).
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Запішам гэтае раўнанне ў аператарнай форме пры нулявых пачатковых умовах:

$$\begin{aligned} & (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0) Y(p) = \\ & = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0) X(p). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Выканаем пераўтварэнне раўнання (2.2):

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} = W(p). \quad (2.3)$$

Дачыненне выявы паводле Лапласа выходнай велічыні да выявы ўваходнай велічыні і называецца перадатачнай функцыяй сістэмы (або элемента). Арыгіналы простых функцый і іх выявы прыведзены ў табл. Д. 1.

Адной з распаўсюджаных форм матэматычнага апісання лінейных дынамічных сістэм з'яўляюцца раўнанні наступнага выгляду:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik} u_k, \quad i = \overline{1, n}; \quad y_l = \sum_{i=1}^n c_{li} x_i, \quad l = \overline{1, s}, \quad (2.4)$$

якія называюць апісаннем у прасторы станаў. Гэтая назва звязана з тым, што пры $u_k = 0$ досыць задаць пачатковае значэнне пераменных x_i , каб адназначна вызначыць стан сістэмы $x_i(t)$, y_l для любога моманту часу. Мадэль (2.4) мае n дыферэнцыяльных раўнанняў 1-га парадку з k кіруючымі ўваходнымі ўздзеяннямі, а таксама s алгебраічных суадносін для сувязі выходных пераменных сістэмы у з пераменнымі стану x . Каэфіцыенты a_{ij} , b_{ik} , c_{li} называюцца параметрамі мадэлі.

Раўнанні (2.4) зручна падаць у матрычнай форме:

$$\dot{X} = AX + BU, \quad Y = CX, \quad (2.5)$$

дзе X – вектар пераменных стану; U – вектар кіруючых (уваходных) уздзеянняў; Y – вектар выхадаў; A , B , C – матрыцы параметраў.

Пры нулявых пачатковых умовах раўнанне $\dot{X} = AX + BU$; $Y = CX$ можна пераўтварыць паводле Лапласа ў выглядзе:

$$pX(p) = AX(p) + Bu(p); \quad Y(p) = CX(p). \quad (2.6)$$

Адкуль атрымаем

$$Y(p) = C[pI - A]^{-1} Bu(p). \quad (2.7)$$

Тады маем

$$W(p) = C[pI - A]^{-1} B, \quad (2.8)$$

якая называецца матрычнай перадатачнай функцыяй сістэмы кіравання.

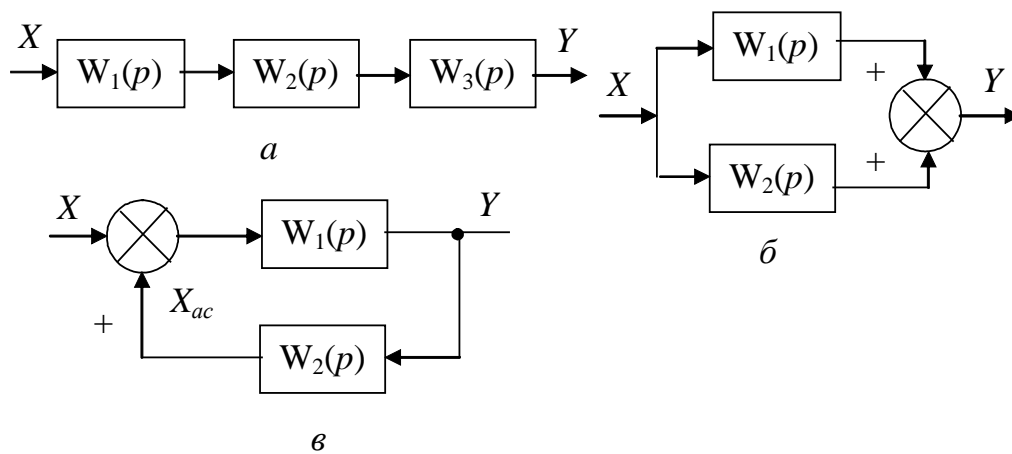
Для аналізу працэсаў у САК шырока выкарыстоўваюцца структурныя схемы. Яны ўяўляюць сабою графічнае адлюстраванне

раўнання, якое апісвае працэс. Структурная схема дазваляе ў нагляднай форме ўявіць матэматычную старану пераўтварэння ўваходных сігналаў і фарміраванне выхаднога сігналау.

Алгебраічныя аперацыі (памнажэнне, складанне і інш.) сігналаў вызначаюцца акружнасцямі, усярэдзіне якіх запісана адпаведная аперацыя. Аперацыі дыферэнцавання і інтэгравання абазначаюцца праз аператар p і вызначаюцца прамавугольнікамі, у якіх запісваецца адпаведна p ці $1/p$.

Знакі, з якімі сігналы прыходзяць у дадзены пункт, наносяцца каля адпаведнай стрэлкі ці акружнасці.

Існуюць тры асноўныя схемы злучэння элементаў: паслядоўнае, паралельнае і злучэнне з адваротнай сувяззю (малюнак).



Малюнак. Тыповыя злучэнні элементаў САР:

a – паслядоўнае злучэнне элементаў; $б$ – паралельнае злучэнне элементаў;

$в$ – злучэнне з адваротнай сувяззю

Пры паслядоўным злучэнні элементаў (a) агульная перадатачная функцыя роўная

$$W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p). \quad (2.9)$$

Пры паралельным злучэнні ($б$) агульная перадатачная функцыя вылічваецца па формуле

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p) + W_3(p). \quad (2.10)$$

Пры злучэнні з адваротнай сувяззю ($в$) маем

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)W_2(p)}. \quad (2.11)$$

У назоўніку знак «мінус» адпавядае станоўчай адваротнай сувязі, а знак «плюс» – адмоўнай адваротнай сувязі.

Трѣба адзначыць, што калі $W_2(p) = 1$ (адзіночная адваротная сувязь), то агульная перадавачная функцыя замкнутаі сістэмы будзе мець выгляд

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)}. \quad (2.12)$$

Заданне. Вядомае апісанне аб'екта ў пераменных стану. Вызначыць матрыцы каэфіцыентаў A , B і C . Запісаць дыферэнцыяльнае раўнанне аб'екта адносна u , x .

- | | | | |
|----|--|-----|---|
| 1. | $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 5x_3, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 2x_2 - x_3 + 5u, \\ y = 0,1x_1. \end{cases}$ | 2. | $\begin{cases} \dot{x}_1 = 1.5x_1 + 5x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 + 4x_3, \\ \dot{x}_3 = -8x_1 - 4x_2 - x_3 + 5u, \\ y = x_1. \end{cases}$ |
| 3. | $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -5x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 4u, \\ y = x_1. \end{cases}$ | 4. | $\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - 0.4x_2 + 6u_1, \\ \dot{x}_2 = -0,2x_1 - x_2 + 0,7u_2, \\ y_1 = 4x_1, \\ y_2 = 2x_1 + x_2. \end{cases}$ |
| 5. | $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - 0,5x_2 + 4u_1, \\ \dot{x}_2 = -0,1x_1 - x_2 + 0,4u_2, \\ y_1 = 2x_1, \\ y_2 = x_1 + x_2. \end{cases}$ | 6. | $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_3, \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 4u, \\ y = 0,5x_1. \end{cases}$ |
| 7. | $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_3, \\ \dot{x}_3 = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3. \end{cases}$ | 8. | $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = x_2 + 4x_1 + 2u, \\ y = x_1 + 2x_2. \end{cases}$ |
| 9. | $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = x_2 + 5x_1 + 4u, \\ y = x_1 + 3x_2. \end{cases}$ | 10. | $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 + 2x_2 - x_3. \end{cases}$ |

Па зададзенай структурнай схеме, згодна са сваім варыянтам (табл. 2.1), вызначыць эквівалентную перадавачную функцыю сістэмы. Запісаць мадэль у пераменных стану і вызначыць матрыцы аб'екта A , B , C .

Таблиця 2.1

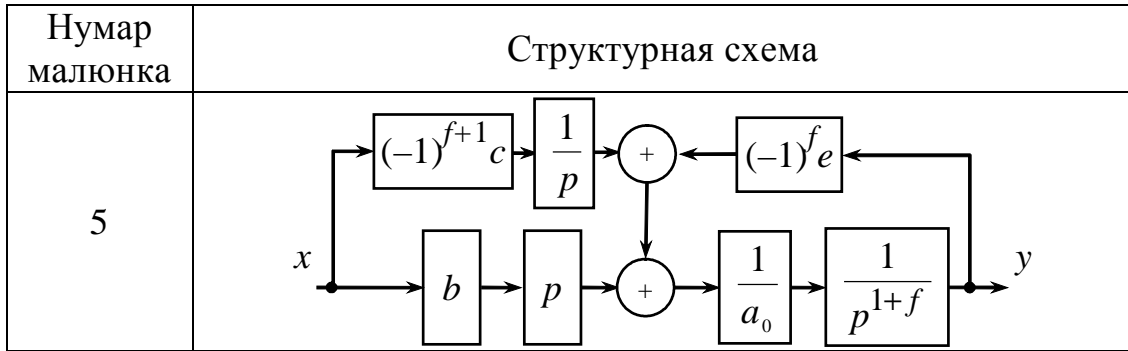
Вихідні дані до завдання

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_0	0,9	1,5	1,3	0,85	0,65	6	3,5	4,9	1	5,4
b	1,3	0,85	0,65	1,4	2,6	0,15	0,14	0,19	0,17	0,09
e	1,5	2	3	3,5	4	4,5	2,7	3,6	4,4	5,3
№ мал.	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
f	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблиця 2.2

Вихідні малюнки до завдання

Нумар малюнка	Структурная схема
1	
2	
3	
4	



Змест справаздачы: праграмы і вынікі разлікаў па пераўтварэнні ЗДР і разліку эквівалентнай перадачнай функцыі сістэмы.

Лабораторная работа № 3 ХАРАКТАРЫСТЫКІ ТЫПАВЫХ ЗВЁНАЎ

Мэта работы: азнаёміцца з магчымасцю атрымання асноўных характарыстык элементаў у пакеце MatLab.

Пераходная характарыстыка выкарыстоўваецца для апісання аднаканальных аб'ектаў

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + a_{n-1} y^{(n-2)} + \dots + a_1 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u$$

з нулявымі пачатковымі ўмовамі

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Пераходнай характарыстыкай (пераходнай функцыяй) $h(t)$ называецца рэакцыя сістэмы на адзінкавае ступеньчатае ўваходнае ўздзеянне $u(t - \tau) = 1(t - \tau)$ пры нулявых пачатковых умовах.

Адзінкавая ступеньчатая функцыя – гэта функцыя, якая валодае ўласцівасцю

$$1(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ 1, & t \geq \tau. \end{cases} \quad (3.1)$$

Для аналітычнага вызначэння пераходнай функцыі варта вырашыць дыферэнцыяльнае раўнанне пры нулявых пачатковых умовах і адзінкавым уваходным уздзеянні.

Пры даследаванні рэальнага аб'екта пераходную характарыстыку можна атрымаць эксперыментальным шляхам, падаючы на яго ўваход ступеньчатае ўздзеянне і фіксуючы рэакцыю на выхадзе. Калі ўваходнае ўздзеянне ўяўляе сабою неадзінкавую ступеньчатую функцыю

$u(t) = k \cdot 1(t)$, то выходная велічыня будзе роўная $y(t) = k \cdot h(t)$, т. ч. уяўляць сабою пераходную характарыстыку з каэфіцыентам прапарцыйнасці k .

Ведаючы пераходную характарыстыку, можна вылічыць рэакцыю сістэмы на адвольнае ўваходнае ўздзеянне з дапамогай інтэграла скруткі

$$y(t) = h(t)u(t) + \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau,$$

дзе τ – пераменная інтэгравання.

Для апісання паводзін сістэмы і яе элементаў шырока выкарыстоўваюць частотныя характарыстыкі, якія вызначаюць іх дынаміку пры ўздзеянні на ўваход гарманічных ваганняў выгляду $x_{y\hat{a}_1}(t) = A_{y\hat{a}_1} \sin(\omega_1 t)$, дзе $A_{y\hat{a}_1}$ – амплітуда ўваходных ваганняў; ω_1 – вуглавая частата ваганняў; t – час.

Калі аўтаматычная сістэма лінейная, то на яе выхадзе таксама ўсталёўваюцца сінусоідныя ваганні з частатой ω_1 , але з амплітудай $A_{y\hat{a}_1}$, ссунутыя па фазе адносна ўваходнага сігнала на вугал φ :

$$y_{\hat{a}\hat{u}_{x_1}}(t) = A_{\hat{a}\hat{u}_{x_1}} \sin(\omega_1 t - \varphi).$$

Амплітуда $A_{y\hat{a}_1}$ і фаза φ_1 выходных ваганняў залежаць ад дынамічных уласцівасцяў сістэмы, частаты і амплітуды ўваходных ваганняў. Знак «мінус» перад φ абумоўлены тым, што ў рэальных элементаў аўтаматычных сістэм выходнае ваганне адстае па фазе ад уваходнага.

Для атрымання АФЧХ досыць у перадавачную функцыю сістэмы замест аператара p падставіць значэнне $j\omega$. Пры гэтым неабходна пазбавіцца ад уяўнасці ў назоўніку, для гэтага дроб памнажаюць і дзеляць на комплексна-спалучаны з назоўнікам член.

Падставіўшы ў дыферэнцыяльнае раўнанне выразы для ўваходных і выходных ваганняў, якія ўстанавіліся, атрымаем АФЧХ:

$$W(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + K + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + K + a_1(j\omega) + a_0}.$$

Частотныя характарыстыкі могуць быць вызначаны адна праз другую з дапамогай наступных залежнасцей:

$$A(\omega) = \sqrt{\text{Re}^2(\omega) + \text{Im}^2(\omega)}; \quad \varphi(\omega) = \arctg[\text{Im}(\omega) / \text{Re}(\omega)];$$

$$\text{Re}(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega); \quad \text{Im}(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega);$$

$$W(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega) = A(\omega) [\cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)] = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}.$$

Динамічним зв'язом називають частку системи, апісваемую диференціальним (або інтегральним) раўнаннем. У агульным выпадку парадак раўнання можа быць адвольным. У сувязі з гэтым вылучым элементарныя звёны, праз якія можна паказаць складаныя звёны або нават сістэмы кіравання. Амаль усе рэальныя сістэмы, у якіх парадак лічніка меншы за парадак назоўніка, можна раскласці на звёны наступных тыпаў: інтэгральныя, дыферэнцавання, узмацняльныя (безынерцыйныя), інерцыйныя 1-га, 2-га парадку і запазняльныя (што затрымліваюць сігналы).

Разгледзім асноўныя характарыстыкі некаторых звёнаў.

Узмацняльнае (безынерцыйнае) зв'язно апісваецца раўнаннем

$$y(t) = K \cdot x(t). \quad (3.2)$$

Перадатачная функцыя

$$W(p) = K. \quad (3.3)$$

Інтегральнае зв'язно можна запісаць у выглядзе

$$y = b \int x dt, \quad (3.4)$$

дзе y – выходны сігнал; x – уваходны сігнал зв'язна.

Перадатачная функцыя

$$W(p) = \frac{b}{p}. \quad (3.5)$$

Зв'язно дыферэнцавання фармуе выходную пераменную $y(t)$ у выглядзе вытворнай уваходнай пераменнай

$$y(t) = b \frac{dx}{dt}. \quad (3.6)$$

Перадатачная функцыя зв'язна

$$W(p) = bp. \quad (3.7)$$

Рэальныя звёны дыферэнцавання валодаюць інерцыйнымі ўласцівасцямі, якія скажаюць вынік дыферэнцавання хутказмяняльных уваходных сігналаў. Прыкладам зв'язна, блізкага да зв'язна дыферэнцавання, можа служыць тахагенератар, прызначаны для дыферэнцавання вугла павароту валоў машын, напрыклад электрычных.

Аперыядычнае (інерцыйнае) зв'язно 1-га парадку апісваецца дыференціальным раўнаннем першага парадку

$$T \frac{dy}{dt} + y = kx. \quad (3.8)$$

Перадатачная функцыя зв'язна

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}. \quad (3.9)$$

Звяно другога парадку апісваецца дыферэнцыяльным раўнаннем 2-га парадку, якое мае выгляд

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = bx(t). \quad (3.10)$$

Калі карані яго характарыстычнага раўнання з'яўляюцца комплекснымі і маюць наступны выгляд:

$$p_1 = -\alpha + j\beta; p_2 = -\alpha - j\beta,$$

то такое звяно называецца вагальным.

Для дадзенага звяна часта каэфіцыенты a_2 і a_1 у раўнанні (3.10) замяняюць на $a_2 = T^2$, $a_1 = 2\xi T$, $\xi \leq 1$.

Перадатачная функцыя звяна

$$W(p) = \frac{b}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}. \quad (3.11)$$

Аперыядычнае (інерцыйнае) звяно 2-га парадку апісваецца раўнаннем (3.10) і адрозніваецца ад вагальнага тым, што карані характарыстычнага раўнання p_1, p_2 рэчаісныя, адмоўныя і розныя.

Звяно запазнення апісваецца раўнаннем

$$y(t) = x(t - \tau), \quad (3.12)$$

дзе τ – час запазнення.

Для знаходжання перадатачнай функцыі $x(t - \tau)$ прадставім у выглядзе шэрагу раскладання адносна базавага значэння $x(t)$:

Перадатачная функцыя

$$W(p) = e^{-\tau p}. \quad (3.13)$$

Па камандзе $\text{step}(W)$ будзецца графік пераходнай функцыі для l ti-мадэлі W . Гэтая мадэль можа быць бесперапыннай і дыскрэтнай. Каманда $\text{step}(W1, W2, \dots, Wn)$ дазваляе на адным графіку пабудаваць пераходныя функцыі для некалькіх мадэлей $W1, W2, \dots, Wn$. Працягласць мадэлявання можна задаць, або яно вызначаецца аўтаматычна так, каб адлюстравалася асноўныя асаблівасці пераходных працэсаў.

Пры дапамозе каманды $\text{impulse}(W)$ будзецца графік імпульснай пераходнай функцыі для l ti-мадэлі W . Гэтая мадэль можа быць бесперапыннай і дыскрэтнай. Каманда $\text{impulse}(W1, W2, \dots, Wn)$ дазваляе на адным графіку пабудаваць імпульсныя пераходныя функцыі для некалькіх мадэлей $W1, W2, \dots, Wn$.

Каманда $\text{bode}(W)$ будзе АЧХ і ФЧХ з лагарыфмічным маштабам

па восі частот, па восі ардынат адкладваюцца значэнні $A(\omega)$, прадстаўленыя ў дэцыбелах $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$ [дБ]. Значэнні фазы прадстаўлены ў градусах.

Заданне.

1. Згодна з табліцай вызначыць рэакцыю тыповых звёнаў на сінусаідальны ўваходны сігнал пры розных частотах уздзеяння. Пабудаваць амплітудныя і фазавыя характарыстыкі звёнаў.

2. Вызначыць рэакцыю тыповых звёнаў на ступеньчаты ўваходны сігнал і пабудаваць пераходныя характарыстыкі.

3. Вызначыць рэакцыю тыповых звёнаў на імпульсны ўваходны сігнал і пабудаваць вагавыя характарыстыкі.

Разлік правесці ў пакеце Matlab.

$$W_1 = K_1$$

$$W_2 = K_2$$

$$W_1 = \frac{K_1}{T_1 p + 1}$$

$$W_2 = \frac{K_2}{T_2 p + 1}$$

$$W_1 = \frac{1}{T_1 p}$$

$$W_2 = \frac{1}{T_2 p}$$

$$W_1 = T_1 p$$

$$W_2 = T_2 p$$

$$W_1 = e^{-\tau_1 p}$$

$$W_2 = e^{-\tau_2 p}$$

$$W_1 = \frac{K_1}{T_1^2 p^2 + 2\xi T_1 p + 1} \cdot e^{-\tau_1 p}$$

$$W_2 = \frac{K_2}{T_2^2 p^2 + 2\xi T_2 p + 1} \cdot e^{-\tau_2 p}$$

Табліца

Выходныя даныя да задання

Варыянт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K_1	1,3	0,85	0,95	1,2	2,6	0,12	0,1	0,19	0,13	0,12
K_2	1,1	0,75	0,65	1,4	2,1	0,15	0,14	0,16	0,17	0,09
T_1	2	4	6	8	10	3	5	7	9	11
T_2	3	5	7	9	11	5	7	9	11	13
τ_1	1,4	2,1	1,5	0,14	0,85	0,95	1,2	2,1	0,15	0,14
τ_2	0,95	1,2	2,6	0,12	1,1	0,75	0,65	1,2	0,1	0,19
ξ	0,1	0,15	0,14	0,19	0,17	0,09	0,12	0,2	0,07	0,16

Змест справаздачы: раўнанні, якія звязваюць выходны і ўваходны сігналы даследуемых звёнаў, іх перадатачныя функцыі, выразы амплітудных і фазавых характарыстык, графікі АЧХ, ФЧХ, АФЧХ і графікі пераходных і вагавых характарыстык.

Лабараторная работа № 4 УСТОЙЛИВАСЦЬ ЛІНЕЙНЫХ СІСТЭМ

Мэта работы: даследаванне ўстойлівасці лінейных сістэм.

Устойлівасць з'яўляецца адным з асноўных паказчыкаў АСР, якія вызначаюць яе працаздольнасць. Таму пры даследаванні сістэмы неабходна праводзіць аналіз яе ўстойлівасці. Аўтаматычная сістэма будзе ўстойлівай, калі яе выходная велічыня застаецца абмежаванай пры любых абмежаваных па абсалютнай велічыні ўваходных уздзеянняў. Сістэма будзе няўстойлівай, калі пры заўгодна малых адхіленнях ад стану раўнавагі яна не вяртаецца да яго, а здзяйсняе недапушчальна вялікія ваганні або бесперапынна выдалаецца ад яго. Такія сістэмы непрацаздольныя.

Вызначыць устойлівасць САК магчыма прамымі і ўскоснымі метадамі. Прамы метада заснаваны на вылічэнні каранёў характарыстычнага раўнання, вылічэнне якіх ускладняецца з ростам ступені гэтага раўнання. Таму вельмі важнае значэнне ў інжынернай практыцы набываюць правілы, якія дазваляюць вызначыць устойлівасць без вылічэння каранёў. Гэтыя правілы называюць крытэрыямі ўстойлівасці. Устойлівасць з'яўляецца абавязковай, але недастатковай умовай работы сістэмы рэгулявання. Меркаваць пра ўстойлівасць лінейных АСР дазваляюць крытэрыі ўстойлівасці.

Да алгебраічных крытэрыяў адносяцца крытэрыі Раўса і Гурвіца, якія дазваляюць вызначыць устойлівасць АСР па каэфіцыентах характарыстычнага раўнання замкнутаі сістэмы. Да частотных крытэрыяў адносяцца крытэрыі Міхайлава і Найквіста, якія дазваляюць меркаваць пра ўстойлівасць па частотных характарыстыках САР.

Для ацэнкі ўстойлівасці САР шырока выкарыстоўваюць алгебраічны крытэрыі Гурвіца і частотны крытэрыі Найквіста.

Паводле крытэрыю Гурвіца, САР будзе ўстойлівай, калі для характарыстычнага ўраўнення замкнутаі сістэмы

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0 \quad (4.1)$$

пры $a > 0$ вызначальнік Гурвіца Δ_n і ўсе яго дыяганальныя міноры Δ_i станоўчыя.

Вызначальнік Гурвіца складаецца наступным чынам: па галоўнай дыяганалі выпісваюцца ўсе каэфіцыенты ад a_1 да a_n у парадку ўзрастання індэксаў. Калонкі вызначальніка ўніз ад галоўнай

дыяганалі дапаўняюцца каэфіцыентамі з індэксамі паслядоўнага памяншэння, а ўверх – узрастання. Замест каэфіцыентаў, індэксы якіх больш за n ці менш за нуль, ставяць нулі.

Вызначальнік Гурвіца мае выгляд

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

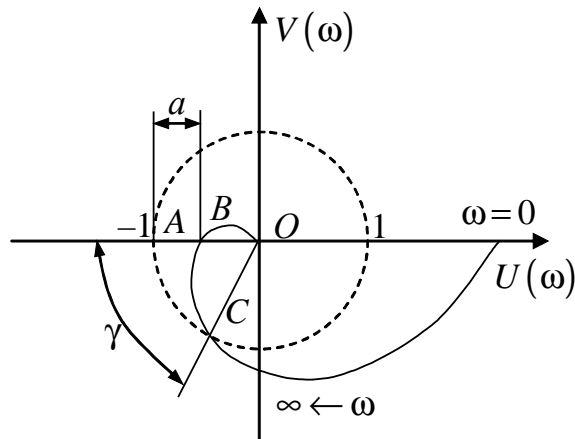
Дыяганальныя міноры Δ_i вызначаюцца па наступных формулах:

$$\Delta_1 = a_1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \text{ і г. д.}$$

Гэтыя міноры акрэслены ў выразе (4.2) штрыхавымі лініямі.

Для вызначэння ўстойлівасці САР метадам Гурвіца трэба прыраўнаваць да нуля назоўнік перадатачнай функцыі замкнутага сістэмы (4.1) і знайсці яе характарыстычнае раўнанне. Потым ў адпаведнасці з выразам (4.2) скласці вызначальнік Гурвіца і знайсці дыяганальныя міноры. Калі яны пры ўсіх станоўчых каэфіцыентах будуць мець таксама станоўчы знак, тады сістэма ўстойлівая.

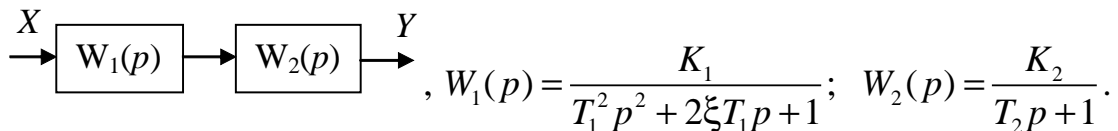
Крытэрыі Найквіста дазваляе меркаваць пра ўстойлівасць замкнутага сістэмы па ампліудна-фазавай характарыстыцы разамкнутага сістэмы. Крытэрыі Найквіста фармулюецца наступным чынам: замкнутая сістэма ўстойлівая, калі ампліудна-фазавая характарыстыка (АФХ) разамкнутага сістэмы не ахоплівае на комплекснай плоскасці пункт з каардынатамі $(-1; j0)$ пры змяненні частаты ад 0 да ∞ . Крытэрыі Найквіста дазваляе вызначыць запас устойлівасці па фазе і па модулі. Для гэтага трэба на комплекснай плоскасці правесці акружнасць адзінкавага радыуса з цэнтрам у пункце O (малюнак). Атрымаем пункт перасячэння акружнасці S з АФЧХ разамкнутага сістэмы. Правёўшы прамую OS вызначым вугал γ , які і характарызуе запас па фазе. Адрэзак $AB = a$ вызначае запас устойлівасці па модулі.



Малюнок. Визначення запасу устійливасці па крытэры Найквіста

Па камандзе $\text{nyquist}(W)$ будучца на экране графік гадографа $W(j\omega)$ у каардынатах $U(\omega) - V(\omega)$.

Заданне. Вызначыць перадачную функцыю разамкнутаі сістэмы. Вызначыць перадачную функцыю замкнутаі сістэмы. Ацаніць устойлівасць сістэмы.



Табліца

Зыходныя даныя да задання

Варыянт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K_1	1,8	2,1	1,3	0,9	1,7	1,2	2,0	0,8	1,5	1,2
K_2	3,0	3,5	3,9	3,4	3,6	3,1	3,3	3,5	3,7	3,9
T_1	2,0	1,2	2,5	1,2	1,5	2,8	1,1	1,8	2,7	1,4
T_2	4,0	4,2	5,0	4,3	4,5	3,8	5,1	4,5	4,7	3,7
ξ	0,43	0,32	0,51	0,35	0,38	0,49	0,52	0,37	0,42	0,22

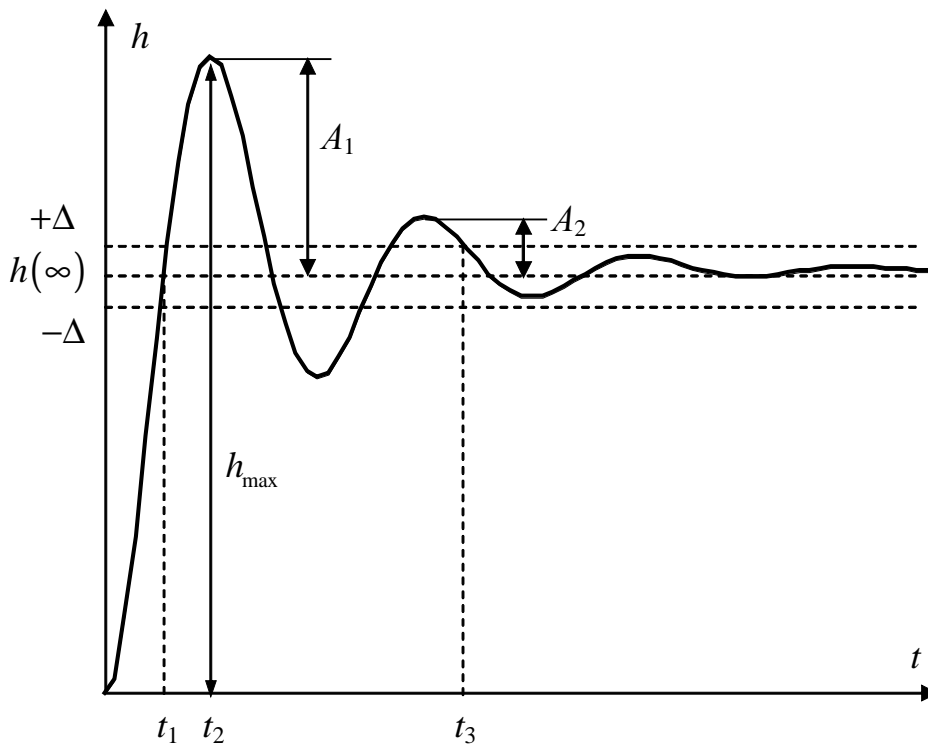
Змест справаздачы: праграмы і вынікі разліку устойлівасці па крытэрыях Гурвіца і Найквіста.

Лабараторная работа № 5 ПАКАЗЧЫКІ ЯКАСЦІ СІСТЭМ КІРАВАННЯ

Мэта работы: азнаёміцца з правіламі знаходжання прамых, ус-
косных і інтэгральных паказчыкаў якасцей пераходных працэсаў.

Якасць працэсу рэгулявання ацэньваюць якасцю пераходных працэсаў і памылкамі ва ўстаноўленых рэжымах. Якасць пераходных працэсаў звычайна ацэньваюць па пераходнай функцыі (малюнак), якая ўяўляе сабою рэакцыю сістэмы на знешняе ўздзеянне тыпу адзінкавай ступеньчатай функцыі.

Паводле віду характарыстыкі пераходны працэс можа быць апэрыядычным або вагальным.



Малюнак. Ілюстрацыя ацэнак хуткадзеяння

Ацэнкамі хуткадзейнасці могуць служыць: t_1 – час ад пачатку працэсу да першага моманту дасягнення значэння $h(\infty)$, якое ўстанавілася (тычыцца толькі вагальных працэсаў); t_2 – час дасягнення першага максімуму (таксама толькі вагальных працэсаў).

На практыцы ў якасці ацэнкаў хуткадзеяння часцей за ўсё выкарыстоўваюць велічыню t_3 , якую звычайна пазначаюць t_p і называюць часам пераходнага працэсу. Часам рэгулявання называюць час, на працягу якога, пачынаючы з моманту прыкладання ўздзеяння да сістэмы, адхіленне рэгуляванай велічыні $h(t)$ адрозніваецца ад новага ўстаноўленага значэння не больш за $\Delta = 5\%$ (калі велічыня Δ не зададзена). Гэты паказчык характарызуе хуткадзеянне сістэмы: чым меншы t_p , тым лепш сістэма рэагуе на знешнія ўздзеянні.

Перарэгуляванне – гэта колькасная ацэнка, якая характарызуе вагальныя ўласцівасці сістэмы, пазначаецца літарай σ і вызначаецца ў працэнтах адносна ўстаноўленага значэння (малюнак) па выразе

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h(\infty)}{h(\infty)} 100\% . \quad (5.1)$$

Відавочна, што чым большае перарэгуляванне, тым больш сістэма схільная да ваганняў.

Для ацэнкі дакладнасці выкарыстоўваецца памылка рэгулявання

$$\varepsilon_d(t) = h(\infty) - h(t), \quad (5.2)$$

якая з цягам часу імкнецца да некаторага пастаяннага значэння, называемага статычнай памылкай:

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_d(t). \quad (5.3)$$

Статычная памылка з’яўляецца адной з асноўных колькасных характарыстык працэсаў сістэмы.

Вагальнасць сістэмы m характарызуецца лікам ваганняў рэгуляванай велічыні за час пераходнага працэсу. Вагальнасць звязана са ступенню згасання ϕ выразам $\phi = 1 - e^{2\pi m}$.

Ступень згасання ϕ – адна з ацэнак вагальнасці працэсу. Пад ступенню згасання разумеюць дачыненне рознасці дзвюх суседніх амплітуд ваганняў, накіраваных у адзін бок, да першай з іх $\phi = (A_1 - A_2) / A_1$.

Калі за час рэгулявання лік ваганняў крывой пераходнага працэсу будзе меншы або роўны зададзенаму па ўмовах тэхналогіі, то лічаць, што па вагальнасці сістэма валодае патрабаванай якасцю рэгулявання.

Інтэгральныя ацэнкі ўяўляюць сабою абагульненыя паказчыкі якасці пераходнага працэсу. Звычайна для іх азначэння выкарыстоўваюць дынамічную памылку.

У якасці інтэгральнай ацэнкі можна выкарыстаць наступныя велічыні:

1) першую інтэгральную ацэнку

$$I_1 = \int_0^t \varepsilon_d(t) dt, \quad (5.4)$$

якая дае аб’ектыўныя вынікі толькі ў выпадку манатоннага пераходнага працэсу;

2) другую інтэгральную ацэнку

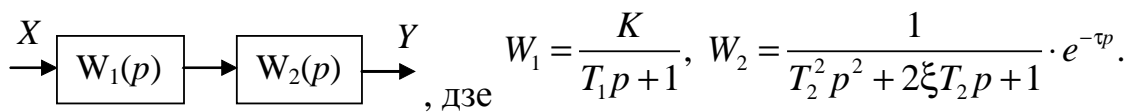
$$I_2 = \int_0^t \varepsilon_d^2(t) dt ; \quad (5.5)$$

3) трэцюю інтэгральную ацэнку

$$I_3 = \int_0^t (\varepsilon_d^2(t) + \alpha \varepsilon'_d(t)) dt. \quad (5.6)$$

Найбольш зручнай ацэнкай з'яўляецца I_2 , якая параўнальна проста вылічваецца і можа ўжывацца для характарыстыкі як манатоннага, так і вагальнага працэсаў. Яна адлюстроўвае затраты энергіі на здзяйсненне пераходнага працэсу.

Заданне. Вызначыць паказчыкі якасці для сістэмы



Варыянт задання выбіраецца згодна з табліцай.

Табліца

Зыходныя даныя да задання

Варыянт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	0,2	0,5	0,7	0,9	1,5	1,3	0,85	0,65	1,4	2,6
T_1	10	12	16	9	14	21	18	5	17	11
T_2	25	35	48	67	75	68	51	38	61	84
τ	2	3	5	1,5	4	3,5	2,9	1	3,4	7
ξ	0,1	0,15	0,14	0,19	0,17	0,09	0,12	0,2	0,07	0,16

Змест справаздачы: графікі пераходных працэсаў і разлічаныя паказчыкі якасці.

Лабараторная работа № 6 СІНТЭЗ ЛІНЕЙНАЙ СІСТЭМЫ КІРАВАННЯ НА АСНОВЕ ЖАДАНАГА ПАКАЗЧЫКА ВАГАЛЬНАСЦІ

Мэта работы: азнаёміцца з метадыкай разліку рэгулятара на аснове жаданага паказчыка вагальнасці.

Паказчыкам вагальнасці называецца максімальнае значэнне ардынаты амплітудна-частотнай характарыстыкі замкнутага сістэмы пры пачатковай ардынаце, роўнай адзінцы.

$$M_{\max} = |\Phi(j\omega)|_{\max} = \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|_{\max}.$$

Разглядаюць звычайна амплітудна-частотную характарыстыку адносна задавальнага ўздзеяння. Фізічны сэнс гэтай ацэнкі заключаецца ў тым, што яна паказвае максімальна магчымае дачыненне амплітуды рэгуляванай велічыні да амплітуды гарманічнага задавальнага ўздзеяння. Ускосным паказчыкам вагальнасці з'яўляецца таксама запас устойлівасці, пры памяншэнні якога вагальнасць сістэмы павялічваецца.

Лічыцца, што сістэма мае дапушчальны запас устойлівасці пры $1,5 \leq M \leq 1,7$, добры запас устойлівасці пры $1,1 \leq M \leq 1,3$. Сістэмы выкарыстоўваюцца як пры $M = 1$, так і пры $M > 2$. Абгрунтаваныя рэкамендацыі ўстанаўліваюць для кожнага класа сістэм на падставе вопыту іх эксплуатацыі.

Значэнне M можа быць вызначана непасрэдна па АФЧХ разамкнутай сістэмы з адзінкавай зваротнай сувяззю. На комплексную плоскасць наносяць сямейства акружнасцей радыусам R з цэнтрам, зрушаным улева ад пачатку каардынат на C :

$$R = \frac{M}{M^2 - 1}, \quad C = \frac{M^2}{M^2 - 1}.$$

Задаючыся рознымі значэннямі M ад 1 да ∞ , можна пабудаваць сямейства такіх акружнасцей.

Пры $M = \infty$ акружнасць зводзіцца ў пункт з каардынатамі $[-1; j0]$. Затым на разгляданай комплекснай плоскасці будуецца АФЧХ. Найменшая акружнасць, якая кране АФЧХ, вызначыць значэнне M разгляданай сістэмы.

Калі пры праектаванні сістэмы ставіцца ўмова, каб яе паказчык вагальнасці быў не большы за некаторы зададзены, то для выканання гэтага неабходна, каб амплітудна-фазавая характарыстыка не заходзіла ўнутр акружнасці, адпаведнай гэтаму значэнню M . Амплітудна-фазавая характарыстыка можа толькі крануцца гэтай акружнасці. У гэтым выпадку паказчык вагальнасці будзе якраз роўны зададзенаму значэнню.

Такім чынам, акружнасць M_{\max} з'яўляецца забароненай зонай для амплітудна-фазавай характарыстыкі разамкнутай сістэмы. Гэтая зона ахоплівае пункт $(1; j0)$ і забяспечвае атрыманне зададзенага запасу ўстойлівасці.

Сінтэз П-рэгулятара. Прымаем, што перадатачная функцыя рэ-

гулятара $W(p) = k = 1$. Будуем АФЧХ разамкнутай сістэмы. Праводзім прамень з пачатку каардынат з вуглом нахілу $\varphi = \arcsin \frac{1}{M_{\text{эаä}}}$. Далей

будуем акружнасць з цэнтрам, які ляжыць на восі абсцыс так, каб яна кранулася праменя і нашай АФЧХ. Аднавіўшы перпендыкуляр у пункце дотыку прамой і акружнасці да восі абсцыс, атрымаем некаторае значэнне A . Гэтае значэнне A звязана з каэфіцыентам узмацнення рэгулятара k наступнай залежнасцю:

$$k = \frac{1}{A}.$$

Сінтэз ІІІ-рэгулятара. Прымаем, што прапарцыйная складовая перадатачнай функцыі рэгулятара $k = 1$. Задаўшыся пастаяннай інтэгравання (напрыклад, $T_1 = 1$), будуем АФЧХ разамкнутай сістэмы. Праводзіцца прамень з пачатку каардынат з вуглом нахілу $\varphi = \arcsin \frac{1}{M_{\text{эаä}}}$. Далей па аналогіі з ІІ-рэгулятарам будуем акружнасць

з цэнтрам, што ляжыць на восі абсцыс так, каб яна кранулася прамой і нашай АФЧХ. Аднавіўшы перпендыкуляр у пункце дотыку прамой і акружнасці да восі абсцыс, атрымаем значэнне A . Далей, задаючыся іншымі значэннямі пастаяннай інтэгравання, будуем новыя АФЧХ і паўтараем аперацыю з пабудовай акружнасці. Атрымаўшы набор пастаянных інтэгравання і адпаведных ім каэфіцыентаў узмацнення, будуем крывую $k = f(T_2)$. Праводзім з пачатку каардынат датычную да крывой, і ў пункце дотыку атрымаем аптымальныя значэнні k і T_1 , пры падстаноўцы якіх у перадатачную функцыю АФЧХ разамкнутай сістэмы кранаецца акружнасці з зададзеным паказчыкам вагальнасці.

Падставіўшы атрыманыя каэфіцыенты ў перадатачную функцыю і пабудаваўшы АФЧХ разамкнутай сістэмы, пераконваемся, што АФЧХ сапраўды кранаецца акружнасці, адпаведнай акружнасці з зададзеным паказчыкам вагальнасці. Далей замыкаем сістэму і будуем АЧХ. Дачыненне максімуму да значэння задавальнага ўздзеяння таксама адпавядае зададзенаму паказчыку вагальнасці.

Складзём праграму на мове Matlab:

```
clc, clear
% заданне перадатачнай функцыі аб'екта
WW=tf([1366.875 13668.75],[400 12732 102218 155648 84015 45100]);
nyquist(WW) % пабудова АФЧХ
```



```

M=1.15; % паказчык вагальнасці
w=-2:0.01:2; % частата
s=i*w; % пераход у частотную вобласць
Kp=1; Ti=1.765; % каэфіцыенты рэгулятара
% заданне перадачнай функцыі аб'екта разам з рэгулятарам
W=((1366.875*s+13668.75).*(Kp+1./(Ti*s)))/(400*s.^5+12732*s.^4
+102218*s.^3+155648*s.^2+84015*s + 45100);
re=real(W); im=imag(W); % вылучэнне ўяўнай і сапраўднай частак
R=M/(1-M^2); C=(M^2)/(1-M^2); % пабудова акружнасці радыуса R
y1=sqrt(R^2-(w-C).^2);y2=-sqrt(R^2-(w-C).^2); K=tan(asin(1/M));
y3=K*w; % пабудова датычнай
plot(re,im,w,y1,w,y2,w,y3),grid % пабудова АФЧХ аб'екта і акружнасці
xlabel('Re'); ylabel('Im') % заданне назваў восей
title('Разлік каэфіцыентаў рэгулятара') % надпіс на графіку
Kp=[0 1 1.2 9 1.51 1.62 1.67]; % заданне вектараў атрыманых пар
Ti=[0 1.765 2.1180 2.6475 3.1770 3.53]; % каэфіцыент рэгулятара
figure(2)
x=1.765:0.0001:3.53; % інтэрпаляцыя крывой каэфіцыент рэгулятара
y=interp1(Ti,Kp,x,'linear');
plot(Ti,Kp,'*',x,y),grid% пабудова крывой каэфіцыента рэгулятара
xlabel('T'); ylabel('Kp')% заданне назваў восей
title('Разлік каэфіцыентаў рэгулятара')% надпіс на графіку

```

Заданне. Разлічыць II- і III-рэгулятары па даных табліцы. Даныя для сістэмы выкарыстаць з лабараторнай работы № 5.

Табліца

Зыходныя даныя да задання

Варыянт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>M</i>	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,05	1,18	1,14	1,23	1,27

Змест справаздачы: праграмы для разліку II- і III-рэгулятараў, графікі пераходных працэсаў для разлічаных сістэм.

Лабараторная работа № 7 СІНТЭЗ ЛІНЕЙНАЙ СІСТЭМЫ КІРАВАННЯ НА АСНОВЕ ЖАДАНАЙ СТУПЕНІ ЗГАСАННЯ

Мэта работы: азнаёміцца з метадкай сінтэзу разліку II- і III-рэгулятараў на аснове жаданай ступені згасання.

Для замкнутой системы найдены корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = \alpha \pm j\beta. \quad (7.1)$$

Зрушим уяўную вось на месца размяшчэння ўяўных каранёў і ўвядзём новую пераменную:

$$p = (j - m)\omega, \quad (7.2)$$

дзе $m = \frac{\alpha}{\beta}$.

Зараз адносна новай частотнай характарыстыкі можна зрабіць наступныя здагадкі. Калі асноўны карань, які вызначае паводзіны пераходнай характарыстыкі, знаходзіцца на восі Im , то можам выкарыстаць умовы знаходжання мяжы ўстойлівасці разамкнутай сістэмы паводле Найквіста.

$$W_R((j - m)\omega) \cdot W_{\text{aa}}((j - m)\omega) = -1 + j0. \quad (7.3)$$

Адгэтуль можна вызначыць параметры рэгулятара з раўнанняў па сапраўднай і ўяўнай частках.

Залежнасць паміж m і ψ можа быць выяўлена наступным чынам:

$$\psi = 1 - e^{-2\pi m}. \quad (7.4)$$

Перадаточная функцыя рэгулятара наступная:

$$W_R = k_i \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right), \quad (7.5)$$

або

$$W_R = C_1 + \frac{C_0}{p}. \quad (7.6)$$

$$\left(-C_1 + \frac{C_0(j + m)\omega}{(1 + m^2)\omega^2} \right) W_{\text{aa}}((j + m)\omega) = 1. \quad (7.7)$$

$$C_0 = \text{Im} \left(\frac{1}{W_{\text{aa}}((j - m)\omega)} \right) \omega (1 + m^2), \quad (7.8)$$

$$C_1 = -\text{Re} \left(\frac{1}{W_{\text{aa}}((j - m)\omega)} \right) + \frac{C_0 m}{\omega(1 + m^2)}.$$

Затым, задаючыся частатой $\omega = (10^{-4} \div 10^{-1})$, будзем залежнасць

C_0 ад C_1 . Атрымоўваем лінію роўнай ступені згасання, па якой вызначаем C_0 і C_1 . Адкуль

$$k_i = C_1, T_1 = \frac{C_1}{C_0}.$$

Праграма для разліку каэфіцыентаў рэгулятара

```

clc, clear
T1=2.0927;
T2=0.8816;
h=0.001;
m=0.85;
for v=600:1500;
a=v*h;
W(v)=1.1/((0.1*T1*a*(i-m)+1)*((T2^2)*(a*(i-m))^2+T1*a*(i-m)+1));
C0(v)=imag(1/W(v))*a*(1+m^2);
C1(v)=-real(1/W(v))+imag(1/W(v))*m;
end
plot(C1,C0)
zoom
[C1,C0]=ginput(1)

```

Заданне. Разлічыць П- і ІІІ-рэгулятары па даных табліцы. Даныя для сістэмы выкарыстаць з лабараторнай работы № 5.

Табліца

Зыходныя даныя да задання

Варыянт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	0,6	0,64	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,77	0,66	0,73

Змест справаздачы: праграмы для разліку П- і ІІІ-рэгулятараў, графікі пераходных працэсаў для разлічаных сістэм.

Лабараторная работа № 8 ІНВАРЫЯНТНЫЯ СІСТЭМЫ

Мэта работы: азнаёміцца з прынцыпам пабудовы шматзвязных сістэм.

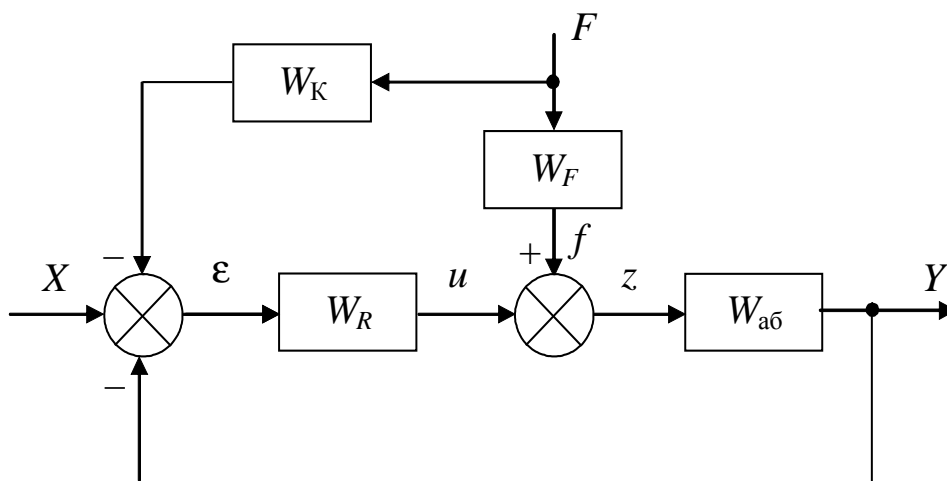
Камбінаванае рэгуляванне – гэта асноўны і шырока выкарыстоўваны спосаб забеспячэння інварыянтнасці рэгуляванай велічыні ад узрушэння. У сістэме камбінаванага рэгулявання

кампенсавальны ланцуг стварае сігнал u , які выклікае такое дзеянне выканаўчага элемента, якое кампенсуе (з той або іншай дакладнасцю) непасрэдны

ўплыў узрушэння f на аб'ект i , такім чынам, на рэгуляваную велічыню Y . Замкнуты контур здзяйсняе рэгуляванне па адхіленні: забяспечвае прайграванне рэгуляванай велічынёй задавальнага ўздзеяння і памяншае ўплыў другарадных узрушэнняў. Кампенсавальны ланцуг уключае другі пункт уздзеяння ўздзеяння на сістэму і ў сувязі з гэтым не можа забяспечыць абсалютную інварыянтнасць. У лепшым выпадку магчымая толькі поўная (з дакладнасцю да пераходнай складніка) інварыянтнасць, таму замкнуты контур удзельнічае і ў памяншэнні ўплыву асноўнага ўздзеяння.

Сінтэз сістэмы камбінаванага рэгулявання можа здзяйсняцца па частках. Спачатку варта выканаць сінтэз замкнутага контуру рэгулявання адным з раней выкладзеных метадаў. Затым можна разлічыць кампенсавальны ланцуг: вылучыць адчувальны элемент для вымярэння узрушэння; вызначыць пункт уключэння гэтага ланцуга ў замкнуты контур; скласці ўмову інварыянтнасці; вызначыць від і параметры перадатчнай функцыі ланцуга і элементы для фізічнай рэалізацыі ланцуга.

Кампенсавальны ланцуг уключае адчувальны элемент для вымярэння ўздзеяння і элемент, які стварае неабходны кампенсавальны сігнал. Умовай інварыянтнасці рэгуляванай велічыні Y ад узрушэння f з'яўляецца роўнасць, якая вяртае ў нуль перадатчную функцыю W_F .



Мал. 8.1. Сістэма з кампенсатарам

Прымаем, што ўваходнае ўздзеянне X роўнае нулю. Тады сігнал з другога суматара запішацца ў наступным выглядзе:

$$z = FW_F - FW_{\hat{E}}W_R - YW_R.$$

Для забеспячэння інварыянтнасці неабходна, каб забяспечвалася наступная ўмова:

$$FW_F - FW_{\hat{E}}W_R = 0,$$

адкуль бачна, што $W_F = W_{\hat{E}}W_R$. Атрымоўваем перадатачную функцыю кампенсатара:

$$W_{\hat{E}} = \frac{W_F}{W_R}.$$

Далей прааналізуем W_K па фізічнай рэалізаванасці

$$W_{\hat{E}} = C_0 + C_1p + C_2p^2 + \dots$$

Неабходна адзначыць, што гэты прынцып пабудовы інварыянтных сістэм добра рэалізуецца пры ўмове павольных змен узрушальных уздзеянняў. Таксама трэба мець магчымасць вымяраць узрушальнае ўздзеянне, і каб яно істотна ўплывала на сістэму. Для большасці тэхналагічных працэсаў гэтая ўмова выконваецца.

Трэба адзначыць, што з-за недакладнасцей у вызначэнні параметраў аб'екта і выкананні кампенсавальнага ланцуга, а таксама з прычыны змены параметраў сістэмы пры эксплуатацыі практычна забяспечваецца поўная або частковая інварыянтнасць толькі з дакладнасцю да ϵ .

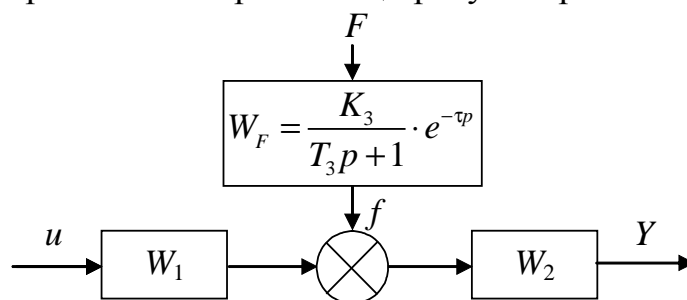
Кампенсавальны ланцуг мэтазгодна ўключаць у замкнуты контур сістэмы так, каб участак контуру з перадатачнай функцыяй W_R утрымоўваў узмацняльнік і карэктавальную прыладу. Пры гэтым не ўзнікае неабходнасці мець узмацняльнік у кампенсавальным ланцугу і лягчэй выканаць яе элемент дыферэнцавання.

Пры досыць эфектыўным кампенсавальным ланцугу з'яўляецца магчымасць мець меншы перадатачны каэфіцыент разамкнутага контуру і, такім чынам, лягчэй забяспечыць устойлівасць сістэмы.

Пасля сінтэзу сістэмы варта ацаніць якасць рэгулявання. Акрамя вызначэння паказчыкаў якасці, якія характарызуюць уласцівасці замкнутага контуру рэгулявання адносна задавальнага ўздзеяння, трэба высветліць, наколькі эфектыўна кампенсуецца

ўплыў узрушэння.

Заданне. Для структурнай схемы, прыведзенай на мал. 8.2, на аснове даных табліцы дадзенай лабараторнай і табліцы лабараторнай работы № 5 разлічыць рэгулятар і кампенсатар.



Мал. 8.2. Структурная схема сістэмы

Табліца

Зыходныя даныя да задання

Варыянт	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K_3	0,9	1,5	1,3	0,85	0,65	6	3,5	4,9	1	5,4
T_3	10	12	15	9	7,5	11	13	8	9,5	10
τ	0,6	0,64	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,77	0,66	0,73

Змест справаздачы: графікі пераходных працэсаў зыходнай сістэмы і сістэмы з кампенсатарам.

Лабараторная работа № 9 ТЫПАВЫЯ НЕЛІНЕЙНАСЦІ

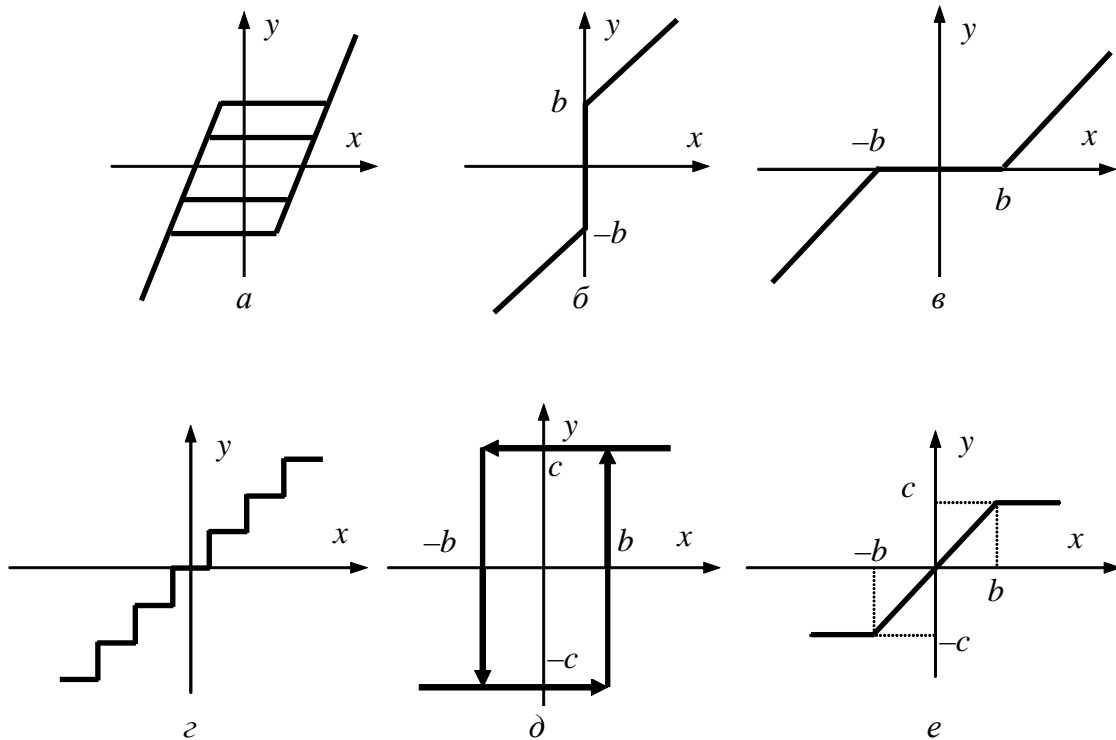
Мэта работы: азнаёміцца з тыпавымі нелінейнасцямі, іх статычнымі і дынамічнымі характарыстыкамі.

Сістэмы, якія прынята лічыць лінейнымі, з'яўляюцца такімі толькі ў пэўным дыяпазоне змены ўваходных сігналаў і пры змене ўмоў работы могуць стаць нелінейнымі.

Узмацненне жорсткасці патрабаванняў да якасці работы фізічных сістэм аўтаматыкі прыводзіць да з'яўлення ўсё больш складаных матэматычных мадэлей, якія ўсё ж такі ніколі не будуць цалкам адэкватныя рэальнаму аб'екту. Акрамя таго, характарыстыкі некаторых элементаў маюць настолькі істотны нелінейны характар, што наогул не могуць быць лінеарызаваны. Такім чынам, у шэрагу сітуацый найболей дакладным аказваецца апісанне сістэмы з дапамогай нелінейных матэматычных мадэлей.

Разгледзім асноўныя тыпы нелінейнасцей і іх змяняныя параметры, прадстаўленыя ў дадатку Simulink пакета Matlab:

- 1) Backlash – люфт (мал. 9.1, *a*).
 - a) Deadband width – шырыня зоны неадчувальнасці.
 - b) Initial output – пачатковае значэнне выхаду.
- 2) Coulomb & Viscous Friction – сухое шраванне (мал. 9.1, *b*).
 - a) Coulomb friction value (Offset) – зона неадчувальнасці.
 - b) Gain – узмацняльнік $y = \text{sign}(x) \cdot (\text{Gain} \cdot \text{abs}|x| + \text{Offset})$
- 3) Dead Zone – зона неадчувальнасці (мал. 9.1, *в*).
 - a) Start of dead zone – пачатак зоны неадчувальнасці.
 - b) End of dead zone – канец зоны неадчувальнасці.
- 4) Quantizer – квантавальнік (мал. 9.1, *г*).
Quantization interval – крок квантавання.
- 5) Relay – рэле (мал. 9.1, *д*).
 - a) Switch on point – пункт ўключэння.
 - b) Switch off point – пункт выключэння.
 - c) Output when on – выхад, калі ўключана.
 - d) Output when off – выхад, калі выключана.
- 6) Saturation – насычэнне (мал. 9.1, *е*).
 - a) Upper limit – верхняя мяжа.
 - b) Lower limit – ніжняя мяжа.



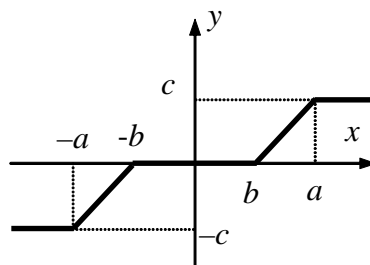
Мал. 9.1. Асноўныя тыпы нелінейнасцей

Заданне. Прамадэляваць статычную і дынамічную характарыстыкі паказаных звёнаў з параметрамі, прыведзенымі ў табліцы. Змадэляваць нелінейную характарыстыку звяна з зонай неадчувальнасці і насычэннем (мал. 9.2).

Табліца

Зыходныя даныя да задання

Варыянт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	0,8	0,9	0,85	0,9	0,93	0,95	0,7	0,64	0,66	0,55
b	0,6	0,64	0,7	0,75	0,8	0,85	0,5	0,47	0,36	0,23
c	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	2,1



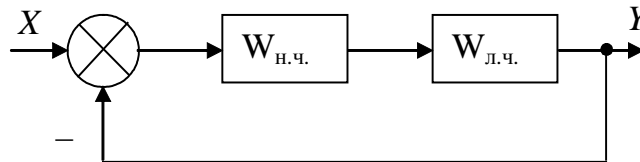
Мал. 9.2. Нелінейная характарыстыка звяна з зонай

Змест справаздачы: графікі статычных і дынамічных характарыстык нелінейных элементаў.

Лабараторная работа № 10 ГАРМАНІЧНАЯ ЛІНЕАРЫЗАЦЫЯ

Мэта работы: вызначыць параметры аўтаваганняў у нелінейнай сістэме двума метадамі: аналітычным і графічным (па дынамічнай характарыстыцы, атрыманай шляхам мадэлявання нелінейнай сістэмы ў дадатку матэматычнага пакета MatLab – Simulink); параўнаць параметры аўтаваганняў у нелінейнай сістэме, атрыманыя аналітычным і графічным метадам.

Разгледзім нелінейную сістэму, прыведзеную на малюнку.



Малюнак. Структура нелінейнай сістэмы

Перадатачная функцыя нелінейнай часткі сістэмы мае выгляд

$$W_{н.ч.}(S) = q(a) + q'(a) \frac{S}{\omega} = [s = j\omega] = q(a) + jq'(a).$$

У выпадку, калі нелінейнасць адназначнага тыпу, маем $q'(a) = 0$; інакш – $q'(a) \neq 0$.

Прымем $W_{н.ч.}$ – ідэальнае рэле: $q(a) = \frac{4 \cdot \tilde{n}}{\pi \cdot a}$, $q'(a) = 0$, дзе $c = \text{const}$ (значэнне, на якое ідзе скок рэле), a – амплітуда аўтаваганняў. Значэнні a і ω неабходна знайсці.

$$\text{Прымем } W_{л.ч.} = \frac{4}{s(s+1)^2}.$$

Рэалізуем знаходжанне параметраў аўтаваганняў у пакеце MathCAD:

$$c := 1$$

$$W_{л.ч.}(\omega) := \frac{4}{i \cdot \omega \cdot (i \cdot \omega + 1)^2} \quad W_{н.ч.}(a) := \frac{4 \cdot \tilde{n}}{\pi \cdot a}$$

$$F(a, \omega) := W_{i..}(a) \cdot W_{e..}(\omega) \left. \begin{array}{l} a := 2 \\ \omega := 1 \end{array} \right\} - \text{ï à:àðêî âû ÿ çì î âû}$$

Given

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re}(F(a, \omega)) = -1 \\ \operatorname{Im}(F(a, \omega)) = 0 \end{array} \right\} - \text{çãî äí à êðû òýðû þ Í àéêâ³ñòà}$$

$$\operatorname{Find}(a, \omega) = \begin{pmatrix} 2.546 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким чином, атрмліваем, што даследаваная сістэма будзе вагацца ў адпаведнасці з наступнай формулай:

$$y = a \cdot \sin(\omega t) = 2,546 \sin(1t).$$

Прамадэляваўшы нелінейную сістэму ў пакеце MatLab па дынамічнай характарыстыцы, вызначым параметры аўтаваганняў:

амплітуда аўтаваганняў: $A \approx 2,627$;

частата аўтаваганняў:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = [T = 27 - 20,58 = 6,42] = \frac{2 \cdot 3,14}{6,42} \approx 0,98.$$

Вызначыўшы параметры аўтаваганняў нелінейнай сістэмы аналітычным і графічным метадамі, устанавілі, што абодва метады даюць прыблізна аднолькавы вынік.

Заданне. Вызначыць параметры аўтаваганняў нелінейнай сістэмы аналітычным і графічным метадамі паводле варыянта з табл. 10.1.

Табліца 10.1

Зыходныя даныя да задання

Варыянт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	1,8	2,1	1,3	0,9	1,7	1,2	2,0	0,8	1,5	1,2
T_1	3,0	3,5	3,9	3,4	3,6	3,1	3,3	3,5	3,7	3,9
T_2	2,0	1,2	2,5	1,2	1,5	2,8	1,1	1,8	2,7	1,4
Выгляд н. ч.	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
a	–	–	–	0,9	–	–	–	0,6	–	–
b	–	0,6	0,7	0,7	–	0,8	0,5	0,4	–	0,2
c	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	2,1

Табліца 10.2

Зыходныя даныя да задання

Статычныя характарыстыкі нелінейнага зв'язна	$q(a)$	$q'(a)$
1	2	3
Ідэальная рэлейная	$\frac{4c}{\pi a}$	0
Рэлейная з зонай неадчувальнасці	$\frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ пры $a \geq b$	0
Рэлейная з гістэрэзіснай заслонай	$\frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ пры $a \geq b$	$-\frac{4cb}{\pi a^2}$ пры $a \geq b$
Рэлейная агульнага выгляду	$\frac{2c}{\pi a} \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{a^2}} \right)$ пры $a \geq b$	$-\frac{2cb}{\pi a^2} (1 - m)$ пры $a \geq b$

Заканчэнне табл. 10.2

1	2	3
З насычэннем	$\frac{2k}{\pi a} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right)$ пры $a \geq b$	0
З зонай неадчувальнасці і насычэннем	$\frac{2k}{\pi a} \left(\arcsin \frac{b_2}{a} + \arcsin \frac{b_1}{a} + \frac{b_2}{a} \sqrt{1 - \frac{b_2^2}{a^2}} - \frac{b_1}{a} \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{a^2}} \right)$ пры $a \geq b$	0
З зонай неадчувальнасці без насычэння	$k - \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right)$ пры $a \geq b$	0

Тыпу люфту або зазору	$\frac{k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2b}{a} \right) + 2 \left(1 - \frac{2b}{a} \right) \sqrt{\frac{b}{a} \left(1 - \frac{b}{a} \right)} \right]$ пры $a \geq b$	$-\frac{4k}{\pi a} \left(1 - \frac{b}{a} \right)$ пры $a \geq b$
З насычэннем і гістэрезіснай заслонай	$\frac{k}{\pi a} \left(\arcsin \frac{c+kb}{ka} + \arcsin \frac{c-kb}{ka} + \frac{c+kb}{ka} \sqrt{1 - \frac{(c+kb)^2}{k^2 a^2}} - \frac{c-kb}{ka} \sqrt{1 - \frac{(c-kb)^2}{k^2 a^2}} \right)$ пры $a \geq \frac{c+kb}{k}$	$-\frac{bc}{\pi a^2}$ пры $\frac{c+kb}{k}$
Сухога шаравання	$\frac{4F}{\pi v}$, v – амплітуда хуткасці	0

Змест справаздачы: графікі пераходных працэсаў сістэмы і разлікі амплітуды і частаты аўтаваганняў.

Лабараторная работа № 11 АЦЭНКА ЎСТОЙЛІВАСЦІ РЭЖЫМАЎ АЎТАВАГАННЯЎ У НЕЛІНЕЙНЫХ СІСТЭМАХ

Мэта работы: даследаваць аўтаваганні ў нелінейнай сістэме на ўстойлівасць.

Рашэнне асноўнага раўнання метаду гарманічнага балансу $W_{i\dot{y}}(A, j\omega)W_{\ddot{e}}(j\omega) = -1$ адносна амплітуды і частаты аўтаваганняў можна атрымаць графічна.

У спосабе Гольдфарба прапануюваецца вырашыць асноўнае раўнанне наступным чынам адносна частотнай характарыстыкі лінейнай часткі сістэмы:

$$W_{\ddot{e}}(j\omega) = -\frac{1}{W_{i\dot{y}}(A, j\omega)}. \quad (11.1)$$

Затым на комплекснай плоскасці будуецца амплітудна-фазавая характарыстыка $W_{\ddot{e}}(j\omega)$ і характарыстыка, адпаведная нелінейнаму элементу:

$$-\frac{1}{W_{i\dot{y}}(A, j\omega)}. \quad (11.2)$$

Калі гэтыя дзве характарыстыкі не перасякаюцца, то

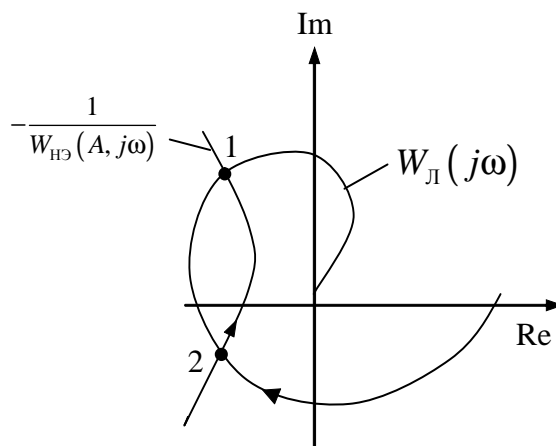
перыядычных працэсаў у нелінейнай сістэме не ўзнікае.

Пры наяўнасці скрыжаванняў частата аўтаваганняў вызначаецца па частотнай характарыстыцы лінейнай часткі сістэмы $W_{\text{Л}}(j\omega)$, а амплітуда – па характарыстыцы нелінейнага элемента ў пункце скрыжавання.

Паколькі ў агульным выпадку пунктаў скрыжавання $W_{\text{Л}}(j\omega)$ і характарыстыкі нелінейнага элемента (11.2) можа быць некалькі, у сістэме могуць узнікаць адпаведныя ім перыядычныя працэсы розных амплітуды і частаты. Прычым частка з іх будзе ўстойлівай, а частка – няўстойлівай.

Устойлівасць знойдзенага вагальнага рэжыму дазваляе ацаніць наступнае. Калі пры руху па зваротнай частотнай характарыстыцы нелінейнага элемента ў бок павелічэння амплітуды адбываецца скрыжаванне амплітудна-фазавай характарыстыкі лінейнай часткі «знутры вонкі», то гэтаму пункту скрыжавання адпавядаюць устойлівыя ваганні (аўтаваганні). У адваротным выпадку ваганні будуць няўстойлівымі.

На малюнку характарыстыкі $W_{\text{Л}}(j\omega)$ і $-W_{\text{НЭ}}(A, j\omega)^{-1}$ перасякаюцца ў двух пунктах. Гэта азначае, што ў сістэме могуць узнікаць два віды ваганняў. Прычым першаму пункту скрыжавання адпавядаюць устойлівыя ваганні (аўтаваганні) з амплітудай A_1 і частотой ω_1 , а другому пункту – няўстойлівыя.



Малюнак. Ілюстрацыя спосабу Гольдфарба

Алгарытм знаходжання параметраў устойлівых аўтаваганняў выглядае наступным чынам:

- 1) разлічваем частотную характарыстыку лінейнай часткі

$W_{\Xi}(j\omega)$;

2) различаем частотную характеристику нелинейной частки $W_{I\dot{Y}}(A, \omega)$;

3) будем АФЧХ линейной частки $W_{\Xi}(j\omega)$ и нелинейной частки $-W_{I\dot{Y}}(A, j\omega)^{-1}$ на одних осях;

4) робім аналіз пункта (або пунктаў) пераключэння.

Заданне. Вызначыць параметры аўтаваганняў метадам Гольдфарба для сістэмы з нелінейным элементам тыпу ідэальнае рэле, дзе:

1) $c = 10$, $W_{\Xi}(p) = \frac{8}{p(p^2 + 2p + 5)}$;

2) $c = 2$, $W_{\Xi}(p) = \frac{5}{(p+1)(p+2)(p+3)}$;

3) $c = 4$, $W_{\Xi}(p) = \frac{3(2p+1)}{p(p^2 + 7p + 4)}$.

Вызначыць параметры аўтаваганняў метадам Гольдфарба для сістэмы з нелінейным элементам тыпу рэальнае рэле, дзе:

4) $b = 0,5$; $\tilde{n} = 4$; $W_{\Xi}(p) = \frac{6}{p(0,25p^2 + 0,5p + 1)}$;

5) $b = 0,2$; $\tilde{n} = 2$; $W_{\Xi}(p) = \frac{5}{(p+1)(p+3)(p+7)}$;

6) $b = 0,1$; $C = 1$; $W_{\Xi}(p) = \frac{5}{p^3 + p^2 + 2p + 10}$.

Вызначыць параметры аўтаваганняў метадам Гольдфарба для сістэмы з нелінейным элементам тыпу насычэння, дзе:

7) $b = 1$; $\tilde{n} = 5$; $W_{\Xi}(p) = \frac{10(p+3)}{p(p^2 + p + 2)}$;

8) $b = 0,5$; $\tilde{n} = 2$; $W_{\Xi}(p) = \frac{12}{(p+1)(0,5p+1)(0,4p+1)}$.

Вызначыць параметры аўтаваганняў метадам Гольдфарба для сістэмы с нелінейным элементам тыпу люфт, дзе:

9) $b = 1$; $\tilde{n} = 5$; $W_{\Xi} = \frac{6}{p(5p^2 + 3p + 1)}$;

$$10) b = 0,5; \tilde{n} = 2; W_{\tilde{E}}(p) = \frac{3}{(p+1)(p+4)(0,5p+1)}.$$

Змест справаздачы: графікі пераходных працэсаў сістэмы і вынікі разлікаў.

Лабараторная работа № 12 ПАБУДОВА ФАЗАВЫХ ПАРТРЭТАЎ

Мэта работы: азнаёміцца з метадамі пабудовы фазавых партрэтаў.

У агульным выпадку нелінейную сістэму можна апісаць сістэмай нелінейных дыферэнцыяльных раўнанняў у нармальнай форме:

$$\frac{dx_i}{dt} = \phi_i(x_1, x_2, K, x_n, t, g(t)), \quad (12.1)$$

дзе x_i – каардынаты стану сістэмы; $g(t)$ – задавальнае ўздзеянне.

Для сістэм з пастаяннымі параметрамі пры адсутнасці задавальнага ўздзеяння і ненулявых пачатковых умовах раўнанне (12.1) перапішам у выглядзе

$$\frac{dx_i}{dt} = \phi_i(x_1, x_2, K, x_n). \quad (12.2)$$

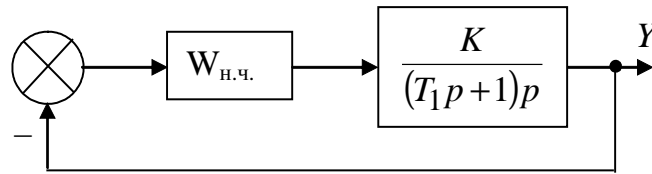
У прасторы каардынат x_1, \dots, x_n можна прадставіць графічна рашэнне ў выглядзе крывой, так званай фазавай траекторыяй. Для сістэмы другога парадку фазавыя траекторыі размяшчаюцца на плоскасці, што дазваляе атрымоўваць некаторыя адзнакі ўласцівасцей сістэмы па выглядзе траекторыі. Для сістэмы другога парадку:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \phi_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} = \phi_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (12.3)$$

можна выключыць час, і тады

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{\phi_1(x_1, x_2)}{\phi_2(x_1, x_2)}. \quad (12.4)$$

Заданне. Для сістэмы (малюнак) з зададзеным тыпам нелінейнасці паводле варыянта (табліца) пабудаваць фазавы партрэт.



Малюнак. Структура нелінейнай сістэмы

Табліца

Зыходныя даныя да задання

Варыянт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	1,8	2,1	1,3	0,9	1,7	1,2	2,0	0,8	1,5	1,2
T_1	3,0	3,5	3,9	3,4	3,6	2,0	1,2	2,5	1,2	1,5
Выгляд н. ч.	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
a	–	–	–	0,64	–	–	–	0,9	–	–
b	–	0,64	0,7	0,75	–	0,85	0,5	0,47	–	0,23
c	1,7	1,8	1,9	2	2,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6

Выгляд нелінейнай часткі: 1) ідэальнае рэле; 2) рэальнае рэле; 3) насычэнне; 4) насычэнне з зонай неадчувальнасці.

Змест справаздачы: графікі пераходных працэсаў сістэмы, графікі фазавых партрэтаў і вынікі разлікаў.

**Лабараторная работа № 13
МАДЭЛЯВАННЕ ДЫСКРЭТНЫХ СІСТЭМ**

Мэта работы: асвоіць методыку пераходу ад бесперапыннай мадэлі да дыскрэтнай; пабудова часавых і частотных характарысатык дыскрэтных сістэм.

У Matlab існуе функцыя `c2d`, якая адказвае за пераўтварэнне зададзенай бесперапыннай сістэмы ў дыскрэтную сістэму. У якасці мадэлей могуць быць паказаныя TF-, SS- або ZPK-мадэлі. Функцыя `d2c` здзяйсняе зваротнае пераўтварэнне. Каманда падтрымлівае некалькі метадаў дыскрэтызацыі, уключаючы экстрапалятар нулявога парадку (`zoh`), экстрапалятар першага парадку (`foh`), набліжэнне Тасціна, а таксама набліжэнне з адпаведнасцю нулёў і полюсаў. Сінтаксіс:

```
Sysd = c2d (sysc, Ts);% Ts – перыяд выбаркі
Sysc = d2c (sysd).
```

У такім выглядзе команда выконвае `zoh`-пераўтварэнне па

змаўчанні. Zoh-прылада генеруе бесперапынны ўваходны сігнал $u(t)$, падтрымліваючы кожную велічыню $u[k]$ пастаяннай на працягу аднаго перыяду:

$$u(t) = u[k], \text{ і } \delta t \ kT \leq t \leq (k+1)T. \quad (13.1)$$

Каб выкарыстаць альтэрнатыўныя канверсійныя схемы, варта вызначыць жаданы метадад як дадатковы параметр:

Sysd = c2d(sysc, Ts, 'foh'); % экстрапалятар першага парадку

Sysd = c2d(sysc, Ts, 'tustin'); % набліжэнне Тасціна

Экстрапалятар першага парадку foh адрозніваецца ад zoh механізмам экстрапаляцыі. Для перакладу ўваходнай паслядоўнасці $u[k]$ у бесперапынны ўваход $u(t)$ foh выкарыстае лінейную інтэрпаляцыю:

$$u(t) = u[k] + \frac{(t - kT) \cdot (u[k+1] - u[k])}{T}.$$

Дадзены метадад з'яўляецца больш дакладным, чым zoh, для сістэм, кіраваных гладкімі ўваходамі. Гэтая опцыя дастасавальная толькі да c2d-пераўтварэння.

Пераўтварэнне Тасціна, або білінейнае пераўтварэнне, апісваецца раўнаннем

$$z = e^{T \cdot s} \approx \frac{1 + \frac{T \cdot s}{2}}{1 - \frac{T \cdot s}{2}} \quad (13.2)$$

і выкарыстоўваецца для суадносін перадатчных функцый у абласцях z і s . z -пераўтварэнні простых функцый часу прыведзены ў табл. Д 3.

Заданне. Прамадэляваць сістэмы з лабараторнай работы № 3 з рознымі значэннямі часу квантавання. Крокі квантавання прыняць роўным мінімальнаму значэнню пастаяннай часу, 10% і кратным яму. Зыходныя даныя выбіраюцца згодна з варыянтам табліцы лабараторнай работы № 3.

Змест справаздачы: перадатчныя функцыі даследуемых звёнаў і графікі пераходных характарыстык.

Лабараторная работа № 14 АНАЛІЗ УСТОЙЛІВАСЦІ ЛІНЕЙНАЙ ДЫСКРЭТНАЙ СІСТЭМЫ

Мэта работы: азнаёміцца з метадамі вызначэння ўстойлівасці дыскрэтных сістэм.

Разгледзім дыскрэтнае раўнанне руху ў тэрмінах прасторы станаў (магчыма нелінейнае і нестацыянарнае):

$$x(k+1) = f[x(k), k]. \quad (14.1)$$

$x^0(k)$ і $x(k)$ рашэнні (14.1) пры пачатковых умовах $x^0(k_0)$ і $x(k_0)$ адпаведна. У далейшым праз $\|\bullet\|$ будзем пазначаць норму.

Азначэнне ўстойлівасці. Рашэнне $x^0(k)$ раўнання (14.1) устойлівае, калі для зададзенага $\varepsilon > 0$ існуе $\delta(\varepsilon, k_0)$, такое, што для ўсіх рашэнняў, якія задавальняюць умовы $\|x(k_0) - x^0(k_0)\| < \delta$, $\|x(k) - x^0(k)\| < \varepsilon$ пры $k \geq k_0$.

Азначэнне асімптатычнай устойлівасці. Рашэнне $x^0(k)$ раўнання (14.1) асімптатычна ўстойлівае, калі яно ўстойлівае і калі $\|x(k) - x^0(k)\| \rightarrow 0$ пры $k \rightarrow \infty$, пры ўмове, што $\|x(k_0) - x^0(k_0)\|$ досыць малая.

З азначэння вынікае, што ўстойлівасць вызначаецца для пэўнага рашэння, а не для сістэмы ў цэлым.

Для вызначэння ўстойлівасці дыскрэтных сістэм існуюць розныя метады, у тым ліку:

непасрэднае вылічэнне ўласных значэнняў матрыцы Φ ;

метады, заснаваныя на ўласцівасцях характарыстычнага палінома;

метад каранёвага гадографа;

крытэрыі Найквіста;

метад Ляпунова.

З тэрэмы асімптатычнай устойлівасці лінейнай сістэмы верагодна, што непасрэдна праверку ўстойлівасці дадзенай сістэмы можна ажыццявіць шляхам вылічэння ўласных значэнняў матрыцы Φ . Для гэтага існуюць добрыя лікавыя алгарытмы. Яны рэалізаваныя ў пакеце EISPACK, MatLab, які маецца ў шматлікіх вылічальных цэнтрах. Аднак вылічваць уручную ўласныя значэнні для сістэм парадку больш за два нязручна; акрамя таго, гэты метад нельга прымяняць, калі матрыца мае параметры ў сваіх каэфіцыентах.

У шэрагу выпадкаў прасцей вылічыць характарыстычны паліном

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (14.2)$$

і даследаваць характарыстычнае раўнанне

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (14.3)$$

Крытэрыў Джурэ – гэта алгебраічны крытэрыў (аналагічны крытэрыў Гурвіца) даследавання на ўстойлівасць, які заключаецца ў наступным. Каб вызначыць, ці ўсе карані палінома (14.3) знаходзяцца ўсярэдзіне адзінкавага круга, складаюць наступную табліцу.

Табліца

a_0	a_0	...	a_{n-1}	a_n	$a_n = \frac{a_n}{a_0}$
a_n	a_n	...	a_1	a_0	
a_0^{n-1}	a_0^{n-1}	...	a_{n-1}^{n-1}		$a_{n-1} = \frac{a_{n-1}^{n-1}}{a_0^{n-1}}$
a_{n-1}^{n-1}	a_{n-1}^{n-1}	...	a_0^{n-1}		
...					
a_0^0					

У табліцы $a_i^{k-1} = a_i^k - a_k a_{k-i}^k$, $a_k = a_k^k / a_0^k$.

Першы і другі радкі – гэта каэфіцыенты з (14.3) у прамым і зваротным парадку. Трэці радок атрымоўваецца множаннем другога радка на $a_n = a_n/a_0$ і адыхаваннем здабытку з першага радка; такім чынам, апошні элемент у трэцім радку роўны нулю. Чацвёрты радок – гэта трэці, запісаны ў зваротным парадку. Схэма паўтараецца да $(2n + 1)$ -га радка. Апошні радок складаецца толькі з аднаго элемента. Калі каэфіцыенты больш за нуль, то сістэма ўстойлівая, у іншых выпадках – няўстойлівая.

Рэалізуем дадзеную метадку ў матэматычным пакеце MatLab:

```
clear all, clc, clf, echo off
% задаём перадачныя функцыі сістэмы
W1=tf([5],[12 2 1])
W2=tf([0.3],[10 1 1])
W3=W1*W2+W1
W4=c2d(W3,1)
% параўноўваем пераходныя функцыі
figure(1), step(W3,W4), grid on
% выяўленне каэфіцыентаў лічніка і назоўніка
[num,den]=tfdata(W4,'w')
L=length(den) % азначальная ступень палінома назоўніка
% заданне першых двух радкоў табліцы Джурэ
for i=1:L
```

```

a(1,i)=den(i);
a(2,i)=den(L-i+1);
end
for k=3:2:(L-1)*2 % запаўненне 3–4, 5–6 і г. д. радкоў
n=(k-1)/2; % нумар ітэрацыі (колькасць элементаў у цотным
радку)
alpha=a(k-2,L-n+1)/a(k-1,L-n+1); % каэфіцыент пералічэння
for j=1:L
a(k,j)=a(k-2,j)-alpha*a(k-1,j); % правіла запаўнення няцотных
радкоў крытэрыю Джуры
end
for j=1:L-n
a(k+1,j)=a(k,L-j+1-n); % запаўненне цотных радкоў (люстраное
адлюстрананне за вылікам нулёў)
end
end

```

Заданне. Вызначыць устойлівасць сістэмы з папярэдняй лабараторнай работы зыходзячы з крытэрыяў Найквіста і Джуры.

Змест справаздачы: праграмы для разліку ўстойлівасці, графікі пераходных працэсаў для разлічаных сістэм.

Лабараторная работа № 15 **СІНТЭЗ ДЫСКРЭТНАГА РЭГУЛЯТАРА, ЯКІ ЗАБЯСПЕЧВАЕ** **МІНІМАЛЬНЫ ЧАС ПЕРАХОДНАГА ПРАЦЭСУ**

Мэта работы: азнаёміцца з метадамі сінтэзу дыскрэтнага рэгулятара, які забяспечвае мінімальны час пераходнага працэсу.

Міжтактавыя ваганні, што з’яўляюцца ў сістэме, якая ўключае ў сябе рэгулятары, можна прадухіліць, задаючы канчатковы час усталявання кіравальнай і рэгуляванай пераменных. Джуры назваў такі характар працякання працэсаў «апэрыядычным». Пры ступеньчатай змене задавальнай пераменнай уваходны і выходны сігналы аб’екта павінны прымаць новае ўстаноўленае значэнне пасля пэўнага канчатковага інтэрвалу часу.

Мяркуюцца, што ступеньчатая змена задавальнай пераменнай адбываецца ў момант часу $k = 0$, т. ч.

$$\omega(k) = 1 \text{ для } k = 0, 1, 2, \dots \quad (15.1)$$

Калі час запазнення $d = 0$, то патрабаванні для мінімальнага канчатковага часу ўстанаўлення пераходнага працэсу запісваюцца

наступным чынам:

$$\begin{aligned} y(k) &= \omega(k) = 1 \quad \text{для } k \geq m, \\ u(k) &= u(m) \quad \text{для } k \geq m. \end{aligned} \quad (15.2)$$

Для выпадку $b_0 = 0$ z -пераўтварэнне задавальнай, рэгуляванай і кіравальнай пераменных маюць наступны выгляд:

$$\omega(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})}, \quad (15.3)$$

$$y(z) = y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots + 1[z^{-m} + z^{-(m+1)} + \dots], \quad (15.4)$$

$$u(z) = u(0) + u(1)z^{-1} + \dots + u(m)[z^{-m} + z^{-(m+1)} + \dots]. \quad (15.5)$$

Падзяліўшы раўнанні (15.4) і (15.5) на (15.3), атрымаем

$$\frac{y(z)}{\omega(z)} = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_m z^{-m} = P(z),$$

$$\begin{aligned} p_1 &= y(1), \\ p_2 &= y(2) - y(1), \end{aligned} \quad (15.6)$$

...

$$p_m = 1 - y(m - 1).$$

$$\frac{u(z)}{\omega(z)} = q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m} = Q(z),$$

$$\begin{aligned} q_0 &= u(0), \\ q_1 &= u(1) - u(0), \end{aligned} \quad (15.7)$$

...

$$q_m = u(m) - u(m - 1).$$

Варта ўлічыць, што

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1, \quad (15.8)$$

$$q_0 + q_1 + \dots + q_m = u(m). \quad (15.9)$$

Перадатачная функцыя замкнутага сістэмы будзе роўная

$$W_\omega(z) = \frac{y(z)}{w(z)} = \frac{W_p(z)W_{\text{аа}}(z)}{1 + W_p(z)W_{\text{аа}}(z)}. \quad (15.10)$$

Такім чынам, перадатачная функцыя кампенсацыйнага рэгулятара мае выгляд

$$W_p(z) = \frac{1}{W_{\text{аа}}(z)} \cdot \frac{W_\omega(z)}{1 - W_\omega(z)}. \quad (15.11)$$

Параўноўваючы раўнанні (15.6) і (15.10), атрымаем

$$W_{\omega}(z) = P(z). \quad (15.12)$$

Яшчэ больш, з раўнанняў (15.6) і (15.7) вынікае, што

$$W_{\text{аа}}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (15.13)$$

і з улікам (15.11) перадатачная функцыя рэгулятара прымае выгляд

$$W_p(z) = \frac{Q(z)}{1-P(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - \dots - p_m z^{-m}}. \quad (15.14)$$

Параметры гэтага рэгулятара можна атрымаць, выкарыстаючы раўнанні (15.13), (15.8) і (15.9):

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{b_1 + b_2 + \dots + b_m}, \\ q_1 &= a_1 q_0, \quad p_1 = b_1 q_0, \\ q_2 &= a_2 q_0, \quad p_2 = b_2 q_0, \\ &\dots \quad \dots \\ q_m &= a_m q_0, \quad p_m = b_m q_0. \end{aligned} \quad (15.15)$$

Такі аперыядычны рэгуляртар можна лічыць кампенсцыйным. Выніковая перадатачная функцыя замкнутаі сістэмы з улікам раўнанняў (15.12) і (15.6) прымае выгляд

$$W_{\omega}(z) = P(z) = p_1 z^{-1} + \dots + p_m z^{-m} = \frac{p_1 z^{m-1} + \dots + p_m}{z^m}.$$

Яе характарыстычнае раўнанне роўнае $1 + W_p(z)W_{\text{аа}}(z) = z^m = 0$.

Такім чынам, контур кіравання з аперыядычным рэгулятарам мае m полюсаў у пачатку каардынат плоскасці z .

Калі $d \neq 0$, то перадатачная функцыя аперыядычнага рэгулятара $W_p(z)$:

$$W_{\delta}(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{q_0 A(z^{-1})}{1 - q_0 B(z^{-1})z^{-d}}. \quad (15.16)$$

Адсюль вынікае, што перадатачная функцыя па задавальным сігнале пры выкарыстанні дакладнай мадэлі аб'екта будзе роўная

$$W_{\omega}(z) = \frac{q_0 B(z^{-1})z^{-d}}{1} = \frac{q_0 B'(z)}{z^{(m+d)}}, \quad (15.17)$$

а яе характарыстычнае раўнанне

$$z^{(m+d)} = 0, \quad (15.18)$$

што сведчыць пра аперыядычны характар пераходнага працэсу. Ужыванне аперыядычнага рэгулятара прыводзіць да скарачэння полюсаў аб'екта кіравання.

```
Складзём праграму на мове Matlab:  
clear, clc, clf;  
T=0.1; % перыяд квантавання  
Wo=tf([1], [0.1 2 0.5 1]); % перадатачная функцыя  
бесперапыннага аб'екта  
WWo=c2d(Wo, T, 'zoh')  
[b a]=tfdata(WWo, 'r');% каэфіцыенты лічніка і назоўніка  
перадатачнай функцыі дыскрэтнага аб'екта  
m=length(b); b1=b(2:m); a1=a(2:m); q0=1/sum(b1);  
for i=1:(m-1)  
q(i)=q0*a1(i); p(i)=q0*b1(i);  
end  
Q=[q0 q]; P=[1-p];  
Wr=tf(Q, P, T); % перадатачная функцыя рэгулятара  
W=feedback(WWo*Wr, 1); % перадатачная функцыя замкнутай  
сістэмы  
figure(1); step(W);
```

Заданне. Для сістэмы (малюнак лабараторнай работы № 5) па даных табліцы (гэтай жа лабараторнай) разлічыць аперыядычны дыскрэtnы рэгулятар пры розных перыядах квантавання. У першым выпадку прыняць аб'ект без запазнення, у другім выпадку – з запазненнем.

Змест справаздачы: праграмы для разліку рэгулятараў, графікі пераходных працэсаў для разлічаных сістэм.

Лабараторная работа № 16 **СІНТЭЗ ДЫСКРЭТНАГА РЭГУЛЯТАРА З УЛІКАМ** **АБМЕЖАВАННЯ ПА КІРУЮЧЫМ УЗДЗЕЯННІ**

Мэта работы: азнаёміцца з метадамі сінтэзу дыскрэтнага рэгулятара з улікам абмежавання па кіравальным уздзеянні.

Калі павялічыць канчатковы час усталявання на адзін такт з m да $m + 1$, то можна загадзя вызначыць пачатковае значэнне кіравальнай пераменнай $u(0)$. Паколькі гэты сігнал звычайна мае максімальную велічыню, яго можна абмежаваць, задаўшы дапушчальнае значэнне $u(0)$ пры сінтэзе рэгулятара.

Дададзім яшчэ адзін член у раўнанні (15.4) і (15.5), тады

раўнанні (15.6) і (15.7) прымуць выгляд

$$P(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_{m+1} z^{-(m+1)}, \quad (16.1)$$

$$Q(z) = q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_{m+1} z^{-(m+1)}. \quad (16.2)$$

Прыраўноўваючы каэфіцыенты гэтых паліномаў да каэфіцыентаў з раўнання (15.13), атрымаем

$$\frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} = \frac{p_1 z^{-1} + \dots + p_{m+1} z^{-(m+1)}}{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_{m+1} z^{-(m+1)}}. \quad (16.3)$$

Гэтая роўнасць справядлівая толькі ў тым выпадку, калі яго правая частка мае агульны корань у лічніку і назоўніку.

Такім чынам,

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{(p'_1 z^{-1} + \dots + p'_m z^{-m})(\alpha - z^{-1})}{(q'_0 + \dots + q'_m z^{-m})(\alpha - z^{-1})}. \quad (16.4)$$

Пасля дзялення на q'_0 атрымаем сувязь паміж каэфіцыентамі раўнанняў (16.4) і (16.3):

$$\begin{aligned} q'_1 &= a_1 q'_0, & p'_1 &= b_1 q'_0, \\ q'_2 &= a_2 q'_0, & p'_2 &= b_2 q'_0, \\ &\dots & &\dots \end{aligned} \quad (16.5)$$

$$q'_{m-1} = a_{m-1} q'_0, \quad p'_{m-1} = b_{m-1} q'_0,$$

$$q'_m = a_m q'_0, \quad p'_m = b_m q'_0.$$

Выпішам параметры поўных паліномаў лічніка і назоўніка раўнання (16.4) і, прыраўнаваўшы каэфіцыенты ў правых частках раўнанняў (16.3) і (16.4), атрымаем наступныя суадносіны:

$$\begin{aligned} q_0 &= \alpha q'_0, & p_1 &= \alpha p'_1, \\ q_1 &= (\alpha q'_1 - q'_0), & p_2 &= (\alpha p'_2 - p'_1), \\ &\dots & &\dots \end{aligned} \quad (16.6)$$

$$q_m = (\alpha q'_m - q'_{m-1}), \quad p_m = (\alpha p'_m - p'_{m-1}),$$

$$q_{m+1} = -q'_m, \quad p_{m+1} = -p'_m.$$

З раўнання (15.7) маем

$$q_0 = \alpha q'_0 = u(0), \quad (16.7)$$

а з раўнання (16.1) атрымаем $p_1 + \dots + p_{m+1} = 1$.

З раўнанняў (16.6) і (16.5) вынікае, што

$$q'_0 = q_0 - \frac{1}{b_1 + b_2 + \dots + b_m} = q_0 - \frac{1}{\sum b_i}. \quad (16.8)$$

На падставе раўнанняў (16.7) і (16.8) можна запісаць суадносіны для вызначэння параметраў рэгулятара:

$$q_0 = u(0), q_1 = q_0(a_1 - 1) + \frac{1}{\sum b_i}, q_2 = q_0(a_2 - a_1) + \frac{a_1}{\sum b_i}, \dots, \quad (16.9)$$

$$q_m = q_0(q_m - a_{m-1}) + \frac{a_{m-1}}{\sum b_i}, q_{m+1} = a_m \left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i} \right).$$

$$p_1 = q_0 b_1, p_2 = q_0(b_2 - b_1) + \frac{b_1}{\sum b_i}, \dots, \quad (16.10)$$

$$p_m = q_0(b_m - b_{m-1}) + \frac{b_{m-1}}{\sum b_i}, p_{m+1} = -b_m \left(q_0 - \frac{1}{\sum b_i} \right).$$

Па аналогіі з раўнаннем (15.14) запішам перадатачную функцыю рэгулятара

$$W_{\delta}(z) = \frac{Q(z)}{1 - P(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_{m+1} z^{-(m+1)}}{1 - p_1 z^{-1} - \dots - p_{m+1} z^{-(m+1)}}. \quad (16.11)$$

У адрозненне ад рэгулятара, апісваемага выразам (15.14), у дадзеным выпадку пачатковае значэнне кіравальнай пераменнай $u(0)$ зададзенае. Другое значэнне кіравальнай пераменнай у адпаведнасці з раўнаннямі (15.7) і (16.9) будзе роўнае

$$u(1) = q_1 + q_0 = a_1 u(0) + \frac{1}{\sum b_i}. \quad (16.12)$$

Значэнне $u(0)$ не варта задаваць занадта малым, бо пры гэтым $u(1) > u(0)$, што ў большасці выпадкаў непажадана.

Для выканання ўмовы $u(1) \leq u(0)$ неабходна, каб задавальняліся суадносіны

$$u(0) = q_0 \geq 1/(1 - a_1) \sum b_i. \quad (16.13)$$

Выкананне ўмовы $u(1) \leq u(0)$ зусім не гарантуе, што $|u(k)| \ll |u(0)|$ для $k \geq 2$. Паколькі разлік параметраў рэгулятара досыць просты, значэнне $u(0)$ звычайна змяняюць датуль, пакуль не будзе атрыманая жаданая паслядоўнасць кіраўнікоў сігналаў. Часта ўмова $u(1) = u(0)$ прыводзіць да добрых вынікаў.

Для аб'ектаў з запазненнем перадатачная функцыя аперыядычнага рэгулятара прымае выгляд

$$W_{\delta}(z) = \frac{q_0 A(z^{-1}) [1 - z^{-1} / \alpha]}{1 - q_0 B(z^{-1}) z^{-d} [1 - z^{-1} / \alpha]}, \quad (16.14)$$

дзе

$$1/\alpha = 1 - 1/q_0 \sum b_i. \quad (16.15)$$

Характарыстычнае раўнанне рэгулятара запісваецца наступным чынам:

$$z^{m+d+1} = 0. \quad (16.16)$$

Заданне. Для сістэмы (малюнак лабараторнай работы № 5) па даных з табліцы (гэтай жа лабараторнай) разлічыць дыскрэтны рэгулятар з улікам абмежавання па кіравальным уздзеянні пры розных перыядах квантавання. У першым выпадку прыняць аб'ект без запазнення, у другім выпадку – з запазненнем.

Змест справаздачы: праграмы для разліку рэгулятараў, графікі пераходных працэсаў для разлічаных сістэм.

Лабараторная работа № 17 **ДАСЛЕДАВАННЕ МАГЧЫМАСЦІ ВЫКАРЫСТАННЯ** **ВАРЫЯЦЫЙНАГА ВЫЛІЧЭННЯ ДЛЯ ПОШУКУ** **АПТЫМАЛЬНАЙ ТРАЕКТОРЫІ РУХУ**

Мэта работы: вывучыць магчымасці пакета Matlab для рашэння задач варыяцыйнага вылічэння.

Варыяцыйнае вылічэнне разглядаецца ў выпадку даследавання на экстрэмум функцыяналаў. Функцыяналам называецца правіла, па якім кожнай функцыі з некаторага класа ставіцца ў адпаведнасць лік. Разгледзім функцыянал, які залежыць ад функцыі адной пераменнай і яе вытворнай:

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \rightarrow \text{extr} \quad (17.1)$$

з зададзенымі межавымі ўмовамі:

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1, \\ y(x_2) = y_2, \end{cases} \quad (17.2)$$

дзе $F(x, y, y')$ – бесперапынная функцыя трох пераменных і дыферэнцаваная функцыя двух апошніх аргументаў.

Неабходнай умовай экстрэмуму функцыянала з'яўляецца роўнасць нулю яго варыяцыі, вылічанай на экстрэмальнай функцыі $y_0(x)$:

$$\delta J(y) = 0. \quad (17.3)$$

Варыяцыя функцыянала δJ – гэта галоўная, лінейная адносна варыяцыі функцыі δy частка яго прырашчэння ΔJ . У нашым выпадку $\delta J(y)$ выклікаецца варыяцыяй незалежнай пераменнай – функцыі $y(x)$ і яе вытворнай $y'(x)$: $y(x) = y_0(x) + \delta y(x)$; $y'(x) = y'_0(x) + \delta y'(x)$; прычым у сілу межавых умоў на канцах інтэрвалу $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$. Вылічым варыяцыю функцыянала як лінейную частку яго прырашчэння. Для гэтага раскладзём $F(x, y_0 + \delta y, y'_0 + \delta y')$ у шэраг Тэйлара ў асяроддзі экстрэмальнай функцыі з утрыманнем толькі лінейных членаў, а затым праінтэгруем па частках:

$$\begin{aligned} \delta J(y_0) &= \int_{x_1}^{x_2} (F(x, y_0 + \delta y, y'_0 + \delta y') - F(x, y_0, y'_0)) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx = \int_{x_1}^{x_2} F_y \delta y dx + (F_{y'} \delta y) \Big|_{x_1}^{x_2} - \\ &- \int_{x_1}^{x_2} \frac{dF_{y'}}{dx} \delta y dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} \right) \delta y dx = 0. \end{aligned} \quad (17.4)$$

З улікам таго, што варыяцыя функцыі $\delta y(x)$ – адвольная, то па прычыне асноўнай лемы варыяцыйнага вылічэння першы сумножнік пад інтэгралам павінен прыраўноўвацца да нуля. Такім чынам, функцыя, на якой дасягаецца экстрэмум, павінна задавальняць дыферэнцыяльнае раўнанне

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} = 0. \quad (17.5)$$

Дадзенае раўнанне называецца дыферэнцыяльным раўнаннем Эйлера. Яно з'яўляецца ў агульным выпадку раўнаннем другога парадку і дапаўняецца дзвюма межавымі ўмовамі (17.2). Любое яго рашэнне называецца экстрэмаллю. Гэта крывая, на якой можа дасягацца экстрэмум.

У сувязі з тым, што раўнанне Эйлера дапаўняецца не пачатковымі, а межавымі ўмовамі, тэарэма Кашы аб існаванні і адзінасці рашэння дыферэнцыяльнага раўнання тут непрыстасавальная. Інакш кажучы, экстрэмаль не абавязкова існуе, а калі існуе, то не абавязкова адзіная. Усё залежыць ад віду раўнання Эйлера (17.5) і вырашальнасці сістэмы раўнанняў для межавых умоў (17.2).

Каб праверыць, ці сапраўды дасягаецца экстрэмум на

знойдзенай экстрэмалі, трэба выкарыстаць дастатковыя ўмовы экстрэмуму. Найпростая з іх – гэта ўмова Лежандра. Для яго ўжывання трэба вылічыць $F_{y'y'}$ і праверыць знак гэтага выразу на крывых, блізкіх да экстрэмалі. Калі $F_{y'y'} > 0$ для ўсіх $y(x)$, блізкіх да экстрэмалі, і для любых $y'(x)$, то на дадзенай экстрэмалі дасягаецца моцны мінімум. Калі ж няроўнасць $F_{y'y'} > 0$ выконваецца не для ўсіх $y(x)$, блізкіх да экстрэмалі, а толькі для $y'(x)$, блізкіх да экстрэмалі, то дасягаецца слабы мінімум. Пры $F_{y'y'} < 0$ дасягаецца максімум (адпаведна моцны або слабы).

У якасці прыкладу разгледзім задачу знаходжання экстрэмалі функцыянала

$$J(y) = \int_{-1}^1 (x^2 + y^2 + y'^2) dx \quad (17.6)$$

з межавымі ўмовамі

$$\begin{cases} y(-1) = 1, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

У гэтым прыкладзе падынтэгральная функцыя $F(x, y, y')$ з'яўляецца функцыяй агульнага выгляду, таму складзём раўнанне Эйлера ў выглядзе (17.5) і рэшым яго. Затым пабудуем графік рашэння. Адначасова даследуем на выкананне дастатковых умоў экстрэмуму.

Складзём праграму на мове Matlab:

```
syms x y Dy D2y % апішам сімвалічныя пераменныя
F = x^2+y^2+Dy^2; % уводзім падынтэгральную функцыю
x1 = -1; % уводзім межавыя ўмовы
y1 = 1; x2 = 1; y2 = 2;
```

Знойдзем частковыя вытворныя F_y і $F_{y'}$.

```
dFdy = diff(F,y) % вылічваем частковую вытворную Fy
```

```
dFdy1 = diff(F,Dy) % вылічваем частковую вытворную Fy'
```

У раўнанне Эйлера ўваходзіць поўная вытворная $dF_{y'}/dx$. Вылічваем яе па формуле

$$\frac{dF_{y'}}{dx} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y} y' + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'} y'' \quad (17.7)$$

Вылічым частковыя вытворныя $\partial F_{y'}/\partial x$, $\partial F_{y'}/\partial y$ і $\partial F_{y'}/\partial y'$, а затым знойдзем поўную вытворную $dF_{y'}/dx$ па (17.7).

```

d_dFdy1_dx = diff(dFdy1,x) % ∂(Fy')/∂x
d_dFdy1_dy = diff(dFdy1,y) % ∂(Fy')/∂y
d_dFdy1_dy1 = diff(dFdy1,Dy) % ∂(Fy')/∂y' = Fy'y' – умова Лежандра
dFy1dx = d_dFdy1_dx+d_dFdy1_dy*Dy+d_dFdy1_dy1*D2y % d(Fy')/dx

```

Складзём левую частку дыферэнцыяльнага раўнання Эйлера і спросцім яе. Для рашэння дыферэнцыяльнага раўнання трэба паказаць яго ў выглядзе радковай пераменнай. Пераўтворым сімвалічную пераменную Euler у радок і прыраўнуем да нуля.

```

Euler = simple(dFdy-dFy1dx) % левая частка раўнання Эйлера
deqEuler = [char(Euler) ' = 0']; % склалі раўнанне
fprintf('Раўнанне Эйлера: %s\n',deqEuler)

```

Каманда dsolve дазваляе знаходзіць як агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання, так і яго частковае рашэнне, якое задавальняе зададзеныя пачатковыя або межавыя ўмовы. Таму знойдзем спачатку агульнае рашэнне, а потым падставім у яго межавыя ўмовы. Разлічым раўнанне Эйлера і праверым, ці з'яўляецца рашэнне адзіным. Калі не – спыняем працу праграмы.

```

Sol = dsolve(deqEuler,'x') % разлічым раўнанне Эйлера
if length(Sol)~= 1 % рашэнняў няма або больш за адно
error('Няма рашэнняў або больш за адно рашэнне!');
end

```

Сфарміруем зараз раўнанні для межавых умоў. Падставім у знойдзенае аналітычнае рашэнне Sol межавыя пункты x1 і x2, пераўтвораныя ў сімвалічныя пераменныя. Затым пераўтворым гэтыя сімвалічныя выразы ў радкі і прыраўнуем іх адпаведна y1 і y2.

```

SolLeft = subs(Sol,x,sym(x1)); % падстаўляем x1
SolRight = subs(Sol,x,sym(x2)); % падстаўляем x2
EqLeft = [char(SolLeft) ' = ' char(sym(y1))] % прыраўнавалі y1
EqRight = [char(SolRight) ' = ' char(sym(y2))] % прыраўнавалі y2

```

Разлічым атрыманую сістэму раўнанняў – знойдзем значэнні адвольных пастаянных C1 і C2. Падставім знойдзеныя канстанты ў аналітычнае рашэнне Sol. Абмяжуем атрыманае рашэнне 14 знакамі – гэтага цалкам досыць для пабудовы графіка рашэння.

```

Con = solve(EqLeft,EqRight); % разлічваем сістэму раўнанняў
C1 = Con.C1 % прысвойваем атрыманыя рашэнні
C2 = Con.C2 % сімвалічным канстантам C1 і C2
Sol1a = vpa(eval(Sol),14); % падстаўляем C1, C2, вылічваем з 14 знакамі
fprintf('Раўнанне экстрэмалі:\n%s\n',char(Sol1a))

```

xpl = linspace(x1,x2); % задаём масіў абсцыс
 y1a = subs(Sol1a,x,xpl); % вылічваем ардынаты
 plot (xpl, y1a, '-r') % малюем графік

Заданне.

1. Для функцыяналаў, зададзеных у адпаведнасці з табліцай, знайсці экстрэмалі і пабудаваць іх графікі.
2. Даследаваць вынік на выкананне дастатковых умоў экстрэмуму.

Табліца

Варыянты функцыяналаў

Вары-янт	Функцыянал	Межавыя ўмовы
1	$J(y) = \int_0^2 (y'^2 - 4y'e^{2x} + \sin^2 x) dx$	$y(0) = 1; y(2) = -2$
2	$J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 - 4y^2 + 2xy - x^2) dx$	$y(-1) = 2; y(1) = 4$
3	$J(y) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$	$y(0) = 2; y(1) = 1$
4	$J(y) = \int_0^2 (y'^2 - 4y' \cos 2x + 5 \sin 3x) dx$	$y(0) = 2; y(2) = -3$
5	$J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + y^2 + 4ye^x - x \sin x) dx$	$y(-1) = 1; y(1) = 3$
6	$J(y) = \int_0^2 (2y'^2 - 2y^2 + y \cos x + xe^{2x}) dx$	$y(0) = 1; y(2) = 2$

Заканчэнне табліцы

Вары-янт	Функцыянал	Межавыя ўмовы
7	$J(y) = \int_{-1}^1 (2y'^2 + 2y^2 + ye^x + 4xe^{2x}) dx$	$y(-1) = 1; y(1) = 2$
8	$J(y) = \int_0^2 (y' + y'^2 + x^2 y'^2) dx$	$y(0) = 1; y(2) = -2$

9	$J(y) = \int_0^2 \left(y'^2 - \frac{2y'}{\sqrt{1+x^2}} + \sin 3x \right) dx$	$y(0) = -1; y(2) = -3$
10	$J(y) = \int_0^3 \left(y'^2 - \frac{2y'}{\sqrt{1+x^2}} + \sin 3x \right) dx$	$y(0) = -1; y(3) = 2$

Змест справаздачы: праграма і вынікі разліку экстрэмалі.

Лабараторная работа № 18
ДАСЛЕДВАННЕ ПРЫНЦЫПУ МАКСІМУМУ
ДЛЯ ЗНАХОДЖАННЯ АПТЫМАЛЬНАГА КІРАВАННЯ
СІСТЭМАМІ

Мэта работы: вивучыць магчымасць знаходжання аптымальнага кіравання па прынцыпу максімуму з выкарыстаннем пакета Matlab.

Прынцып максімуму Л. С. Пантрагіна ўяўляе сабою метады разліку аптымальнага кіравання.

Для разліку рэгулятара можна выкарыстаць наступную працэдуру вылічэнняў.

1. Апісанне аб'екта варта прывесці да стандартнага апісання ў форме прасторы станаў:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad |u| \leq U.$$

2. Запісаць крытэрыў аптымальнасці ў форме

$$J = \min_u \int_0^T f_0(x, u) dt.$$

3. Сфарміраваць пашыраны вектар стану z , дапоўніўшы вектар x крытэрыем аптымальнасці J :

$$Z = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \mathbf{M} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^T f_0(x, u) dt \\ x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

4. Сфарміраваць пашыраны вектар правых частак $\Phi(x, u)$ з улікам падынтэгральнай функцыі крытэрыю аптымальнасці J :

$$\varphi(x, u) = \begin{bmatrix} f_0(x, u) \\ f_1(x, u) \\ \dots \\ f_n(x, u) \end{bmatrix}.$$

5. Запісаць у агульным выглядзе вектар спалучаных каардынат:

$$\Psi = [\Psi_0 \quad \Psi_1, K, \Psi_n].$$

6. У форме скалярнага здабытку вектараў $\Psi(z)$ і $\varphi(x, u)$ запісаць гамільтаніян сістэмы:

$$H = \psi(z)\varphi(x, u).$$

7. З умовы максімуму гамільтаніяна вызначыць аптымальнае кіраванне як функцыю спалучаных каардынат:

$$\max_u H \Rightarrow u_{\text{opt}} = f(\psi).$$

8. Для знаходжання спалучаных каардынат сфарміраваць сістэму дыферэнцыяльных раўнанняў:

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial z^T}.$$

9. Разлічыць аптымальнае кіраванне ў выглядзе функцыі часу, падставіўшы знойдзеныя Ψ у u_{opt} :

$$u_{\text{opt}} = u(t).$$

10. Пры магчымасці перайсці ад сістэмы праграмнага кіравання да кіравання па зваротнай сувязі, г. зн. ажыццявіць замену пераменнай t у аптымальным кіраванні на ўнутраныя пераменныя x :

$$u_{\text{opt}} = u(x_1, x_2, K, x_n).$$

Заданне.

1. Разлічыць аптымальнае кіраванне для адпаведнага аб'екта з табліцы, якое забяспечвае пераход з зададзенага пачатковага стану ў зададзенае канчатковае за час T у адпаведнасці з варыянтам. Крытэрыў аптымальнасці роўны

$$J = \min_u \int_0^T \alpha \cdot u^2(t) dt.$$

2. Даследаваць вынік на выкананне крытэрыю аптымальнасці.

3. Пабудаваць графікі пераходнага працэсу.

Табліца

Варыянты заданняў

Вары- янт	Аб'ект	Пачатковы стан	Канчатковы стан	Інтэр- вал часу T, c	Пара- метр α
1	2	3	4	5	6
1	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 + u, \\ y = x_1 + 2x_2 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1(T) = 1, \\ x_2(T) = 0 \end{cases}$	1	1
2	$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{5}{p+4}$	$\begin{cases} y(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} y(T) = 2, \\ \dot{x}(T) = 0 \end{cases}$	1.	0,5
3	$\dot{x} + 7y = 2u$	$\begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1(T) = 5, \\ x_2(T) = 0 \end{cases}$	1	6
4	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + u, \\ y = x_1 + x_2 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1(T) = 1, \\ x_2(T) = 0 \end{cases}$	2	0,5
5	$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{7}{0,1p+1}$	$\begin{cases} y(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} y(T) = 1, \\ \dot{x}(T) = 0 \end{cases}$	1	1
6	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = -5x_1 + u, \\ y = x_1 + 3x_2 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1(T) = 3, \\ x_2(T) = 0 \end{cases}$	3	1
7	$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{7}{p+5}$	$\begin{cases} y(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} y(T) = 3, \\ \dot{x}(T) = 0 \end{cases}$	2	0,7
8	$\dot{x} + 5y = 3u$	$\begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1(T) = 4, \\ x_2(T) = 0 \end{cases}$	3	1,5

Заканчэнне табліцы

1	2	3	4	5	6
Вары- янт	Аб'ект	Пачатковы стан	Канчатковы стан	Інтэр- вал часу T, c	Пара- метр α
9	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1,5x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 + u, \\ y = x_1 + 2x_2 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1(T) = 2, \\ x_2(T) = 0 \end{cases}$	3	2,5
10	$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{3}{0,1p+1}$	$\begin{cases} y(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} y(T) = 2, \\ \dot{x}(T) = 0 \end{cases}$	1	1

		$x(0) = 0$	$x(T) = 0$		
--	--	------------	------------	--	--

Змест справаздачы: праграма і вынікі разліку, графікі пераходнага працэсу. Таксама неабходна прывесці методыку і вынікі разліку крытэрыю аптымальнасці.

Лабараторная работа № 19
ДАСЛЕДАВАННЕ ВЫКАРЫСТАННЯ КРЫТЭРЫЮ
АПТЫМАЛЬНАГА ХУТКАДЗЕЯННЯ ПРЫ РАЗЛІКУ
РЭГУЛЯТАРАЎ

Мэта работы: вывучыць магчымасць рашэння задачы аптымальнага хуткадзееяння з выкарыстаннем ЭВМ.

Задача аптымальнага хуткадзееяння мае некаторыя асаблівасці, якія спрощваюць яго рашэнне на падставе прынцыпу максімуму Л. С. Пантрагіна. Гэтыя асаблівасці звязаныя з тым, што крытэрыі аптымальнасці для дадзенага класа задач мае выгляд

$$J = \min_{u \in \Omega_u} \int_0^t dt. \quad (19.1)$$

Такім чынам, крытэрыі (19.1) адрозніваецца ад крытэрыю з папярэдняй лабараторнай работы тым, што падынтэгральная функцыя прымаецца роўнай 1.

Разгледзім агульны клас аб'ектаў кіравання

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (19.2)$$

з абмежаваным кіраваннем $|u| \leq \bar{U}$ і крытэрыем хуткадзееяння

$$J = \min_{u \in \Omega_u} \int_0^t d\tau. \quad (19.3)$$

Паводле працэдуры сінтэзу на аснове прынцыпу максімуму запішам пашыраны вектар правых частак і вектар спалучаных каардынат

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 \\ f_1(\cdot) \\ M \\ f_n(\cdot) \end{bmatrix}, \Psi = \{-1 \ \Psi_1 \ L \ \Psi_n\}, \quad (19.4)$$

а затым сфарміруем гамільтаніян у выглядзе

$$H = \Psi \cdot \Phi(\cdot) = -1 + \Psi_1 \cdot f_1(\cdot) + L + \Psi_n \cdot f_n(\cdot). \quad (19.5)$$

$$\text{У адпаведнасці з раўнаннем} \\ \max_u H(z, u) = 0 \quad (19.6)$$

максімум гамільтаніяна роўны нулю. Паколькі першы складнік у выразе (19.5) не залежыць ад кіравання, можна замест поўнага гамільтаніяна разглядаць усечаны гамільтаніян, які называецца гамільтаніянам хуткадзеяння:

$$H_{\delta} = \Psi_0 \cdot f(\cdot) = \Psi_1 \cdot f_1(\cdot) + L + \Psi_n \cdot f_n(\cdot). \quad (19.7)$$

$$\text{У гэтым выпадку раўнанне прынцыпу максімуму прымае выгляд} \\ \max_u H_{\delta} = 1. \quad (19.8)$$

Такім чынам, пры рашэнні задач аптымальнага хуткадзеяння няма неабходнасці пераходзіць да пашыранага вектара стану і пашыранага вектара правых частак. Можна сфарміраваць гамільтаніян хуткадзеяння і вызначыць кіраванне, якое забяспечвае яго максімум у адпаведнасці з (19.8).

$$\text{Для аб'ектаў з адытыўным кіраваннем выгляду} \\ \dot{x} = f(x) + B(x)u, \quad (19.9)$$

абмежаваным рэсурсам кіравання $|u| \leq \bar{U}$ і патрабаваннем у выглядзе крытэрыю хуткадзеяння кіруючае ўздзеянне мае разрыўны характар.

Сфарміруем гамільтаніян хуткадзеяння (19.7)

$$H_{\delta} = \psi_1 f_1(\cdot) + \psi_1 B_1(\cdot)u + \dots + \psi_i f_i(\cdot) + \psi_i B_i(\cdot)u + \dots + \\ + \psi_n f_n(\cdot) + \psi_n B_n(\cdot)u, \quad (19.10)$$

дзе $f_i(\cdot)$ – i -ты элемент вектара $f(x)$, а $B_i(\cdot)$ – i -ты радок матрыцы $B(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Кіраванне, якое забяспечвае максімум гамільтаніяна (19.10) з улікам абмежаванняў, мае выгляд

$$u_{\text{аг}} = \bar{U} \text{sign}[\psi B(x)]. \quad (19.11)$$

Такім чынам, для аб'ектаў класа (19.9) аптымальнае кіраванне заўсёды носіць рэлейны характар.

Заданне.

1. Разлічыць аптымальнае кіраванне зададзеным аб'ектам у адпаведнасці варыянтам табліцы, якое забяспечвае пераход з пачатковага стану ў зададзенае канчатковае за мінімальны час з улікам абмежавання на кіраванне.

2. Даследаваць вынік на выкананне крытэрыю аптымальнасці.

3. Пабудаваць графікі пераходнага працэсу.

Варыянты заданняў

Вары-янт	Аб'ект	Пачатковы стан	Канчатковы стан	Абме-жаван-не на кіра-ванне
1	2	3	4	5
1	$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{3}{p^2}$	$\{y(0) = 2, \mathcal{X}(0) = 0\}$	$\{y(T) = 0, \mathcal{X}(T) = 0\}$	$ u \leq 25$
2	$\begin{cases} \mathcal{X}_1 = x_2, \\ \mathcal{X}_2 = -x_1 + 2u, \\ y = x_1 \end{cases}$	$\{x_1(0) = 2, x_2(0) = 0\}$	$\{x_1(T) = 0, x_2(T) = 0\}$	$ u \leq 10$
3	$\begin{cases} \mathcal{X}_1 = x_1 + 3x_2, \\ \mathcal{X}_2 = -x_1 - 6x_2 + u \end{cases}$	$\{x_1(0) = 5, \mathcal{X}(0) = 0\}$	$\{x_1(T) = 0, x_2(T) = 0\}$	$ u \leq 20$
4	$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{5}{p^2 + 3p}$	$\{y(0) = 3, \mathcal{X}(0) = 0\}$	$\{y(T) = 0, \mathcal{X}(T) = 0\}$	$ u \leq 30$
5	$\begin{cases} \mathcal{X}_1 = 0,1x_1 + 2x_2, \\ \mathcal{X}_2 = -2x_1 - 4x_2 + u \end{cases}$	$\{x_1(0) = 9, x_2(0) = 1\}$	$\{x_1(T) = 0, x_2(T) = 0\}$	$ u \leq 17$
6	$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{2}{p(p+4)}$	$\{y(0) = 5, \mathcal{X}(0) = 0\}$	$\{y(T) = 0, \mathcal{X}(T) = 0\}$	$ u \leq 15$
7	$\begin{cases} \mathcal{X}_1 = 3x_1 + 2x_2, \\ \mathcal{X}_2 = -4x_1 - 2x_2 + u \end{cases}$	$\{x_1(0) = 7, x_2(0) = 1\}$	$\{x_1(T) = 0, x_2(T) = 0\}$	$ u \leq 30$

Заканчэнне табліцы

1	2	3	4	5
8	$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{6}{p^2}$	$\{y(0) = 6, \mathcal{X}(0) = 0\}$	$\{y(T) = 0, \mathcal{X}(T) = 0\}$	$ u \leq 18$
9	$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{2,7}{p^2 + 9p}$	$\{y(0) = 6, \mathcal{X}(0) = 0\}$	$\{y(T) = 0, \mathcal{X}(T) = 0\}$	$ u \leq 24$

10	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0,4x_1 + 1,5x_2, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - x_2 + 2u \end{cases}$	$\{x_1(0) = 8, x_2(0) = 0\}$	$\begin{cases} x_1(T) = 0, \\ x_2(T) = 0 \end{cases}$	$ u \leq 20$
----	--	------------------------------	---	---------------

Змест справаздачы: праграма і вынікі разліку, а таксама графікі пераходнага працэсу.

Лабараторная работа № 20
ДАСЛЕДАВАННЕ МЕТАДАЎ РАЗЛІКУ СІСТЭМ КІРАВАННЯ,
ПАБУДАВАНЫХ НА АСНОВЕ АНАЛІТЫЧНАГА
КАНСТРУЯВАННЯ РЭГУЛЯТАРАЎ (АКР)

Мэта работы: вивучыць магчымасці ўжывання Matlab для разліку АКР-рэгулятара.

У метадзе АКР разліку рэгулятараў вырашаецца задача мінімізацыі крытэрыю якасці наступнага выгляду:

$$J = \int_0^{\infty} [x^T D x + u^T C^{-1} u] dt, \quad (20.1)$$

дзе D і C – вагавыя матрыцы каэфіцыентаў; x – вектар пераменных стану аб’екта; u – кіруючае ўздзеянне на аб’ект.

Пры гэтым аб’ект запісваецца ў выглядзе бесперапыннай мадэлі, зададзенай у прасторы станаў:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (20.2)$$

дзе A і B – зададзеныя матрыцы.

Аптымальнае кіраванне можа быць знойдзена з залежнасці

$$U_{\text{aito}} = -CB^T R x, \quad (20.3)$$

дзе R – матрыца невядомых каэфіцыентаў.

Для знаходжання лікавых значэнняў элементаў матрыцы R неабходна выкарыстаць раўнанне Рыкаці:

$$0 = D + RA + A^T R - RBCB^T R. \quad (20.4)$$

Сярод каранёў гэтага раўнання неабходна захаваць для шуканай матрыцы толькі тыя, якія задавальняюць умову станоўчасці матрыцы R .

Для сінтэзу АКР-рэгулятара прызначаны наступныя функцыі пакета Control System Toolbox:

$[K, S, E] = \text{lqr}(A, B, D, G)$ – сінтэз бесперапыннага АКР-рэгулятара з законам кіравання $U_{\text{aito}} = -Kx$, пры гэтым S вяртае

рашэнне бесперапыннага раўнання Рыкаці, а пераменная E – уласныя значэнні матрыцы замкнутай сістэмы $E = \text{eig}(A - B \cdot K)$. Уваходныя аргументы функцыі ўяўляюць матрыцы A і B каэфіцыентаў у прасторы станаў і матрыцы з крытэрыю якасці: $D = D, G = C^{-1}$;

$[K, S, E] = \text{dlqr}(A, B, D, G)$ – сінтэз дыскрэтнага АКР-рэгулятара, уваходныя і выходныя пераменныя, аналагічныя функцыі lqr ;

$[K, S, E] = \text{lqrd}(A, B, D, G, Ts)$ – сінтэз дыскрэтнага АКР-рэгулятара для бесперапыннай сістэмы, дадатковы параметр Ts з’яўляецца перыядам дыскрэтызацыі рэгулятара;

$[R, L, H, rr] = \text{care}(A, B, D)$ – рашэнне бесперапынных алгебраічных раўнанняў Рыкаці, выходныя аргументы адпаведна роўныя R – невядомай матрыцы R раўнання Рыкаці (20.3), L – уласным значэнням матрыцы $A - BB^T x$, H – матрыцы каэфіцыентаў зваротных сувязей $H = B^T x$, rr – адноснай нявязцы, г. зн. хібнасці падстаноўкі рашэння ў зыходнае раўнанне;

$[R, L, H, rr] = \text{dare}(A, B, D)$ – рашэнне дыскрэтных алгебраічных раўнанняў Рыкаці, усе ўваходныя аргументы аналагічныя функцыі care .

Заданне.

1. Складзі праграму для разліку АКР-рэгулятара згодна з сістэмай з табліцы.

2. Для аб’екта з зададзенай структурнай схемай разлічыць АКР-рэгуляртар для розных варыянтаў вагавых матрыц D і C з наступнага раўнання:

а) абедзве матрыцы адзінкавыя;

б) матрыца $D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}$, C – адзінкавая;

в) матрыца $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}$, C – адзінкавая;

г) матрыца D – адзінкавая, $C = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$.

3. Прамадэляваць разлічаныя сістэмы.

Варыянты заданняў

Ва- ры- янт	Структурная схема аб'екта	k_1	k_2	k_3	T_1	T_2	T_3
1		1	2	4	1	9	4
3		3	1	2	9	1	3
5		3	5	1	9	5	1
7		1	2	2	3	1	9
9		2	1	3	1	2	9
2		3	1	2	9	1	3
4		2	1	1	2	9	1
6		2	1	3	3	1	9
8		1	3	1	1	9	7
10		2	1	2	9	1	5

Змест справаздачы: праграма разліку рэгулятараў і вынікі разліку, графікі пераходных працэсаў па кожнай унутранай пераменнай x_i і вынікі, зробленыя на падставе параўнання графікаў для розных варыянтаў вагавых матрыц.

Лабараторная работа № 21 ВЫВУЧЭННЕ ФІЛЬТРА КАЛМАНА

Мэта работы: азнаёміцца з методыкай сінтэзу і мадэлявання фільтра Калмана.

Разгледзім бесперапынную мадэль аб'екта кіравання

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Gw, \\ y_v = Cx + Du + Hw + v \end{cases} \quad (21.1)$$

з вядомымі ўваходамі u і ўзрушэннямі па ўваходах w і вымярэннях v , якія з'яўляюцца «белым» шумам з наступнымі характарыстыкамі:

$$\begin{aligned}
M\{w\} &= M\{v\} = 0, \\
M\{w(t)w(\tau)^T\} &= Q\delta(t - \tau), \\
M\{v(t)v(\tau)^T\} &= R\delta(t - \tau), \\
M\{v(t)v(\tau)^T\} &= R\delta(t - \tau).
\end{aligned}
\tag{21.2}$$

Разгледзім сінтэз назіральніка для ацэнкі вектара пераменных стану аб'екта, які мінімізуе памылку ацэнкі, што ўстанавілася:

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} M\{(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T\}. \tag{21.3}$$

Аптымальным рашэннем з'яўляецца фільтр Калмана, апісваемы раўнаннямі

$$\begin{cases} \hat{\eta} = A\hat{x} + Bu + L(y_v - C\hat{x} - Du), \\ \begin{bmatrix} \hat{y}_v \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ I \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} u + Hw + v, \end{cases}
\tag{21.4}$$

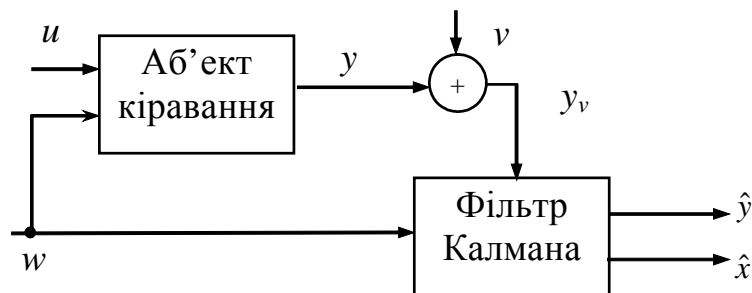
дзе матрыца каэфіцыентаў зваротных сувязей L вызначаецца на аснове рашэння алгебраічнага матрычнага раўнання Рыкаці. Напрыклад, пры $H = 0$ дысперсія P вызначаецца з раўнання

$$AP + PA^T - (PC^T + GN)R^{-1}(CP + N^T G^T) + GQG^T = 0, \tag{21.5}$$

матрыца L з раўнання

$$L = APC^T (N + CPC^T)^{-1}. \tag{21.6}$$

Назіральнік (малюнак) аб'ядноўвае фільтр Калмана і аб'ект кіравання.



Малюнак. Назіральнік Калмана

Назіральнік выкарыстоўвае вядомыя ўваходы u і вынікі вымярэнняў y_v , скажоныя выпадковымі перашкодамі, для таго каб вылічыць рознасць вектара пераменных стану \hat{x} і выхадаў \hat{y} .

Для сінтэзу фільтра Калмана прызначаны наступныя функцыі пакета Control System Toolbox:

$[kest, L, P] = kalman(sys, Qn, Rn, Nn)$ – сінтэз бесперапыннага фільтра Калмана, пры гэтым выходныя пераменныя ўяўляюць сабою $kest$ -мадэль фільтра Калмана ў прасторы станаў, L – матрыцу каэфіцыентаў зваротных сувязей, P – каварыяцыйную матрыцу памылак ацэньвання. Уваходнымі аргументамі з’яўляюцца sys – мадэль аб’екта кіравання, Qn, Rn, Nn – каварыяцыйныя матрыцы выпадковых узрушэнняў і перашкод;

$[kest, L, P] = kalman(sys, Qn, Rn, Nn, sensors, known)$ – сінтэз бесперапыннага фільтра Калмана для аб’ектаў больш агульнага выгляду, вектары $sensors$ і $known$ вызначаюць, якія выходы сістэмы вымяраюцца і якія ўваходы вядомыя, усе іншыя ўваходы мяркуюцца выпадковымі і невядомымі;

$[kest, L, P, M, Z] = kalman(sys, Qn, Rn, Nn)$ – сінтэз дыскрэтнага фільтра Калмана, выходныя аргументы M і Z адказваюць за абноўленую матрыцу зваротных сувязей і памылак ацэнкі ў рэжыме, які ўсталяваўся адпаведна;

$[kest, L, P, M, Z] = kalmd(sys, Qn, Rn, Ts)$ – сінтэз дыскрэтнага фільтра Калмана для бесперапынных сістэм, дадатковы параметр Ts з’яўляецца перыядам дыскрэтызацыі фільтра.

Прыведзеныя вышэй функцыі выконваюць сінтэз фільтраў Калмана для ацэнкі пераменных стану аб’екта кіравання на падставе да-дзеных аб выпадковых знешніх узрушэннях і памылках вымярэнняў.

На сістэму, якая апісвае аб’ект кіравання і выпадковыя ўздзеянні, накладваюцца наступныя абмежаванні:

пара матрыц (C, A) павінна быць выяўленай;

неабходна выкананне няроўнасцей

$$\bar{R} > 0, \quad \bar{Q} - \bar{N}\bar{R}^{-1}\bar{N}^T, \quad (21.7)$$

з улікам абазначэнняў

$$\bar{Q} = GQG^T, \quad \bar{R} = HN + N^T N^T + HQH^T, \quad \bar{N} = G(QH^T + N). \quad (21.8)$$

Заданне.

1. Зрабіць разлік фільтра Калмана для сістэмы з перадатачнай функцыяй у адпаведнасці з вылучаным варыянтам (табліца) і параметрамі «белага шуму» $Q = 1, R = 0,01$.

2. Прамадэляваць сістэму з фільтрам Калмана. Для параўнання прамадэляваць таксама сістэму без фільтра Калмана.

3. Пабудаваць графікі пераходнага працэсу.

Табліца

Варыянты заданняў

Варыянт	Аб'ект	
	Перадатачная функцыя	Параметры аб'екта
1	$W(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)}$	$k = 1; T_1 = 0,5; T_2 = 0,1$
2		$k = 2; T_1 = 0,1; T_2 = 0,9$
3	$W(p) = \frac{k}{p(T^2 p + 2T\zeta p + 1)}$	$k = 3; T_1 = 0,1; \zeta = 0,1$
4		$k = 4; T_1 = 0,08; \zeta = 0,7$
5		$k = 5; T_1 = 0,09; \zeta = 0,4$
6	$W(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}$	$k = 6; T_1 = 0,2; T_2 = 0,1;$ $T_3 = 0,2; T_4 = 0,1$
7		$k = 7; T_1 = 0,2; T_2 = 0,1;$ $T_3 = 0,2; T_4 = 0,1$
8	$W(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)(T^2 p + 2T\zeta p + 1)}$	$k = 8; T_1 = 0,2; T_2 = 0,9;$ $T = 0,4; \zeta = 0,5$
9		$k = 9; T_1 = 0,5; T_2 = 0,3;$ $T = 0,5; \zeta = 0,1$
10		$k = 10; T_1 = 0,8; T_2 = 0,2;$ $T = 1; \zeta = 0,6$

Змест справаздачы: Праграма і вынікі разліку, а таксама графікі зашумленага і адфільтраванага сігналу. У выніку параўнання графікаў зашумленага і адфільтраванага сігналу зрабіць выснову пра магчымасці выкарыстання фільтра Калмана для кіравання аб'ектамі, на якія ўздзейнічаюць узрушэнні па ўваходах і каналах вымярэнняў.

Табліца Д. 1

**Рашэнне аднародных дыферэнцыяльных раўнанняў першага,
другога і трэцяга парадкаў**

Парадак раўнання	Рэчаісныя карані	Комплексныя карані
1	$x = X_0 e^{-a_1 t}$	–
2	$x = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}$ $A_1 = \frac{a_2 X_0 + V_0}{a_2 - a_1}$ $A_2 = \frac{a_1 X_0 + V_0}{a_1 - a_2}$	$x = (B \cos \lambda t + C \sin \lambda t) e^{-\gamma t}$ $B = X_0$ $C = \frac{\gamma X_0 + V_0}{\lambda}$
3	$x = A_1 e^{-a_1 t} + A_2 e^{-a_2 t} + A_3 e^{-a_3 t}$ $A_1 = \frac{a_2 a_3 X_0 + (a_2 + a_3) V_0 + W_0}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)}$ $A_2 = \frac{a_1 a_3 X_0 + (a_1 + a_3) V_0 + W_0}{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)}$ $A_3 = \frac{a_1 a_2 X_0 + (a_1 + a_2) V_0 + W_0}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}$	$x = A e^{-a_1 t} + (B \cos \lambda t + C \sin \lambda t) e^{-\gamma t}$ $A = \frac{(\gamma^2 + \lambda^2) X_0 + 2\gamma V_0 + W_0}{(\gamma - a_1)^2 + \lambda^2}$ $B = \frac{a_1(a_1 - 2\gamma) X_0 + 2\gamma V_0 - W_0}{(\gamma - a_1)^2 + \lambda^2}$ $C = \frac{a_1(\lambda^2 - \gamma^2 + \gamma a_1) X_0 + (a_1^2 - \gamma^2 + \lambda^2) V_0 + (a_1 - \gamma) W_0}{\lambda[(\gamma - a_1)^2 + \lambda^2]}$

Табліца Д. 2

Выявы простых функцый

Арыгінал	Выява Лапласа	Выява Карсана – Хевісайда
1	2	3
$Al(t)$	$\frac{A}{p}$	A
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\frac{n!}{p^n}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{p}{p+a}$

1	2	3
$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{p+a}$
$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
$\frac{(c-a)e^{-at}-(c-b)e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{p+c}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{p+(p+c)}{(p+a)(p+b)}$
$\frac{1}{ab} + \frac{be^{-at}-ae^{-bt}}{ab(a-b)}$	$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
$\frac{c}{ab} + \frac{c-a}{a(a-b)}e^{-at} + \frac{c-b}{b(b-a)}e^{-bt}$	$\frac{p+c}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{p+c}{p(p+a)(p+b)}$
$\frac{1}{\lambda} \sin \lambda t$	$\frac{1}{p^2+\lambda^2}$	$\frac{p}{p^2+\lambda^2}$
$\frac{\sqrt{c^2+\lambda^2}}{\lambda} \sin(\lambda t + \psi), \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{c}$	$\frac{p+c}{p^2+\lambda^2}$	$\frac{p(p+c)}{p^2+\lambda^2}$
$\frac{1}{\lambda} e^{-\gamma t} \sin \lambda t$	$\frac{1}{(p+\gamma)^2+\lambda^2}$	$\frac{p}{(p+\gamma)^2+\lambda^2}$
$\frac{1}{\lambda} \sqrt{(c-\gamma)^2+\lambda^2} e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \psi),$ $\psi = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{c-\gamma}$	$\frac{p+c}{(p+\gamma)^2+\lambda^2}$	$\frac{p(p+c)}{(p+\gamma)^2+\lambda^2}$
$\frac{1}{\gamma^2+\lambda^2} + \frac{1}{\lambda\sqrt{\gamma^2+\lambda^2}} e^{-\gamma t} \sin(\lambda t - \psi),$ $\psi = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{-\lambda}$	$\frac{1}{p[(p+\gamma)^2+\lambda^2]}$	$\frac{1}{(p+\gamma)^2+\lambda^2}$
$\frac{c}{\gamma^2+\lambda^2} + \frac{1}{\lambda\sqrt{\gamma^2+\lambda^2}} \sqrt{(c-\gamma)^2+\lambda^2} e^{-\gamma t} \times$ $\times \sin(\lambda t + \psi), \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{c-\gamma} - \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{-\gamma}$	$\frac{p+c}{p[(p+\gamma)^2+\lambda^2]}$	$\frac{p+c}{(p+\gamma)^2+\lambda^2}$

z-пераўтварэнні простых функцый часу

№	$f(t)$	$F(z)$
1	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
2	t	$\frac{T_0 z}{(z-1)^2}$
3	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{T_0^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
4	e^{-at}	$\frac{z}{z-d}, d = e^{-aT_0}$
5	$1 - e^{-at}$	$\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)}, d = e^{-aT_0}$
6	$\sin \beta t$	$\frac{z \sin \beta T_0}{z^2 - 2z \cos \beta T_0 + 1}$
7	$\cos \beta t$	$\frac{z^2 - z \cos \beta T_0}{z^2 - 2z \cos \beta T_0 + 1}$
8	$e^{-at} \sin \beta t$	$\frac{zd \sin \beta T_0}{z^2 - 2z \cos \beta T_0 + d^2}$
9	$e^{-at} \cos \beta t$	$\frac{z^2 - zd \cos \beta T_0}{z^2 - 2zd \cos \beta T_0 + d^2}$

ЛІТАРАТУРА

1. Кузьмицкий, И. Ф. Теория автоматического управления: учеб. пособие / И. Ф. Кузьмицкий, Г. Т. Кулаков. – Минск: БГТУ, 2006. – 476 с.
2. Изерман, Р. Цифровые системы управления / Р. Изерман; пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 541 с.
3. Control System Toolbox. MATLAB 5 для студентов / под общ. ред. В. Г. Потемкина. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999. – 287 с.
4. Сборник задач по теории автоматического регулирования / под ред. В. А. Бесекерского. – М.: Мир, 1979. – 420 с.
5. Востриков, А. С. Теория автоматического регулирования: учеб. пособие / А.С. Востриков, Г.А. Французова. – М.: Высш. шк., 2004. – 365 с.

ЗМЕСТ

Уводзіны.....	3
Лабараторная работа № 1. Лінеарызацыя дынамічных сістэм	3
Лабараторная работа № 2. Перадатачная функцыя.	
Структурныя пераўтварэнні. Прастора станаў	6
Лабараторная работа № 3. Характарыстыкі тыпавых звёнаў.....	11
Лабараторная работа № 4. Устойлівасць лінейных сістэм	16
Лабараторная работа № 5. Паказчыкі якасці сістэм кіравання	18
Лабараторная работа № 6. Сінтэз лінейнай сістэмы кіравання на аснове жаданага паказчыка вагальнасці	21
Лабараторная работа № 7. Сінтэз лінейнай сістэмы кіравання на аснове жаданай ступені згасання.....	24
Лабараторная работа № 8. Інварыянтныя сістэмы	26
Лабараторная работа № 9. Тыпавыя нелінейнасці	29
Лабараторная работа № 10. Гарманічная лінеарызацыя.....	32
Лабараторная работа № 11. Ацэнка ўстойлівасці рэжымаў аўтаваганняў у нелінейных сістэмах.....	35
Лабараторная работа № 12. Пабудова фазавых партрэтаў	38
Лабараторная работа № 13. Мадэляванне дыскрэтных сістэм	39
Лабараторная работа № 14. Аналіз устойлівасці лінейнай дыскрэтнай сістэмы.....	40

Лабараторная работа № 15. Сінтэз дыскрэтнага рэгулятара, які забяспечвае мінімальны час пераходнага працэсу	43
Лабараторная работа № 16. Сінтэз дыскрэтнага рэгулятара з улікам абмежавання па кіруючым уздзеянні.....	46
Лабараторная работа № 17. Даследаванне магчымасці выкарыстання варыяцыйнага вылічэння для пошуку аптымальнай траекторыі руху	49
Лабараторная работа № 18. Даследаванне прынцыпу максімуму для знаходжання аптымальнага кіравання сістэмамі.....	54
Лабараторная работа № 19. Даследаванне выкарыстання крытэрыю аптымальнага хуткадзеяння пры разліку рэгулятараў	57
Лабараторная работа № 20. Даследаванне метадаў разліку сістэм кіравання, пабудаваных на аснове аналітычнага канструявання рэгулятараў (АКР).....	60
Лабараторная работа № 21. Вывучэнне фільтра Калмана.....	62
Дадатак	66
Літаратура	69

Вучэбнае выданне

Кузьміцкі Іосіф Феліцыянавіч
Карповіч Дзмітрый Сямёнавіч
Ліхавіцкі Віталій Віктаравіч

ТЭОРЫЯ АЎТАМАТЫЧНАГА КІРАВАННЯ
Лабараторны практыкум

Вучэбны дапаможнік

Рэдактар Р. М. Рабая

Падпісана да друку 20.07.2007. Фармат 60×84¹/₁₆.
Папера афсетная. Гарнітура Таймс. Друк афсетны.
Ум. друк. арк. 3,9. Ум.-выд. арк. 4,0.
Тыраж 150 экз. Заказ

Установа адукацыі

«Беларускі дзяржаўны тэхналагічны ўніверсітэт».
220050. Мінск, Свярдлова, 13а.
ЛІ № 02330/0133255 ад 30.04.2004.

Аддрукавана ў лабараторыі паліграфіі ўстановы адукацыі
«Беларускі дзяржаўны тэхналагічны ўніверсітэт».
220050. Мінск, Свярдлова, 13.
ЛП № 02330/0056739 ад 22.01.2004.