ВЫШЭЙШАЯ МАТЭМАТЫКА
Ў ПЫТАННЯХ, ЗАДАЧАХ
І ПРАКТЫКАВАННЯХ.
ЛІНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Метадычны дапаможнік
для студэнтаў І курса ўсіх спецыяльнасцей

Мінск БДТУ 2006

Установа адукацыі
«БЕЛАРУСКІ ДЗЯРЖАЎНЫ ТЭХНАЛАГІЧНЫ УНІВЕРСІТЭТ»

ВЫШЭЙШАЯ МАТЭМАТЫКА Ў ПЫТАННЯХ, ЗАДАЧАХ І ПРАКТЫКАВАННЯХ. ЛІНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

**Метадычны дапаможнік
для студэнтаў I курса ўсіх спецыяльнасцей**

Мінск 2006

УДК 512.64+514.742
ББК 22.1
В 95

Разгледжаны і рэкамендаваны да выдання рэдакцыйна-выдавецкай радай універсітэта

Складальнікі: *Л. Ф. Звяровіч,*
В. М. Пыжкова, Н. А. Рысюк

Навуковы рэдактар дац. *Ж. М. Гарбатовіч*
Рэцэнзенты: дац. кафедры вылічальнай тэхнікі БДТУ *Н. М. Пуставалава*; дац. кафедры прыродазнаўча-навуковых дысцыплін БНТУ *Л. І. Бародзіч*

В 95 Вышэйшая матэматыка ў пытаннях, задачах і практыкаваннях. Лінейная алгебра : метад. дапаможнік для студэнтаў І курса ўсіх спецыяльнасцей / склад. Л. Ф. Звяровіч, В. М. Пыжкова, Н. А. Рысюк. − Мн. : БДТУ, 2006. − 78 с.

ISBN 985-434.

Дапаможнік змяшчае кантрольныя пытанні і практыкаванні, стандартныя і нестандартныя задачы. Ён можа быць выкарыстаны пры правядзенні практычных заняткаў і для самастойнай работы студэнтаў.

Прызначаны для студэнтаў І курса ўсіх спецыяльнасцей.

ISBN 985-434

ПРАДМОВА

Метадычны дапаможнік змяшчае практычныя і тэарэтычныя заданні па раздзелах праграмы курса «Вышэйшая матэматыка» — «Лінейная алгебра», «Вектарная алгебра».

Гэтыя тэмы нараўне з другімі складаюць фундамент сучаснай матэматычнай адукацыі студэнтаў любой спецыяльнасці. Яны шырока выкарыстоўваюцца пры вывучэнні іншых тэм курса «Вышэйшая матэматыка», а таксама пры вывучэнні агульных і спецыяльных дысцыплін (фізіка, хімія і іншыя), пры пабудове матэматычных мадэлей эканамічных і тэхналагічных працэсаў.

Мэта дапаможніка — забеспячэнне студэнтаў усіх спецыяльнасцей матэматычнай літаратурай і метадычнымі распрацоўкамі, каб дасягнуць большай эфектыўнасці практычных заняткаў і стымуляваць самастойную работу студэнтаў.

Дапаможнік складаецца з дзвюх глаў. Кожная глава змяшчае тэарэтычныя пытанні, задачы і практыкаванні двух ўзроўняў складанасці для аўдыторнай і самастойнай работы, а таксама пытанні для самакантролю.

Задачы і практыкаванні, пазначаныя літарай А (першы ўзровень складанасці), адпавядаюць абавязковаму мінімуму, які павінен засвоіць кожны студэнт. Літарай Б пазначаны задачы і практыкаванні другога ўзроўню складанасці, што дазваляе студэнтам атрымаць больш глыбокія веды па тэме. Наяўнасць пытанняў для самакантролю зробіць самастойную работу студэнта больш асэнсаванай і шматбаковай.

У кожнай тэме прыведзены прыклады рашэнняў тыповых задач, што дазваляе студэнтам самастойна засвоіць тэму.

Для большасці задач дадзены адказы.

Метадычны дапаможнік прызначаны для студэнтаў I курса ўсіх спецыяльнасцей дзённага навучання, ён можа быць таксама выкарыстаны студэнтамі завочнага факультэта пры вывучэнні гэтых тэм і выкананні кантрольных работ.

Глава 1. ЛІНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Матрыцы. Асноўныя аперацыі над матрыцамі

Тэарэтычныя пытанні

1. Даць азначэнне матрыцы, яе памеру, прывесці прыклады матрыц розных памераў.

2. Ахарактарызаваць нуль-матрыцу, матрыцу-радок, матрыцу-слупок, прывесці прыклады.

3. Ахарактарызаваць квадратную матрыцу n-га парадку, дыяганальную матрыцу.

4. Даць азначэнне роўных матрыц.

5. Даць азначэнне і сфармуляваць уласцівасці 1) сумы матрыц, 2) рознасці матрыц, 3) здабытку матрыцы на лік.

6. Даць азначэнне і сфармуляваць уласцівасці здабытку дзвюх матрыц.

7. Сфармуляваць умовы існавання і алгарытм знаходжання здабытку матрыц.

8. Даць азначэнне адзінкавай матрыцы.

9. Даць азначэнне транспанаванай матрыцы, сфармуляваць яе ўласцівасці.

Заданні для аўдыторнай работы

А

1. Азначыць памеры матрыц:

1) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \\ -6 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Азначыць 1) матрыцу-радок; 2) матрыцу-слупок; 3) квадратную; 4) адзінкавую; 5) нулявую матрыцы:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Дадзены матрыцы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 73 \end{pmatrix}$. Знайсці: 1) A^T, C^T, D^T; 2) азначыць, для якіх з матрыц A, B, C, C^T не існуюць сума або рознасць; 3) знайсці: $3A$, $-4C$, $A+B$, $A-B$, $3A+C^T$, $2A^T-4C$.

4. Знайсці $2A+3B-5C$, калі

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 3 \\ 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

5. Знайсці матрыцу X, калі $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -10 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Дадзены матрыцы: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Азначыць, якія з названых ніжэй здабыткаў існуюць: $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot C$, $C \cdot A$, $A \cdot D$, $D \cdot A$, C^2, $B \cdot D$, $D \cdot B$, A^2. Для тых здабыткаў, якія існуюць, знайсці іх памеры.

7. Знайсці здабыткі: $A \cdot D$, $B \cdot A$, $A \cdot C$, C^2 для матрыц з задання 6.

8. Знайсці тыя са здабыткаў $A \cdot B$ ці $B \cdot A$, якія існуюць:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 5 & 0 & 4\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 3 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\\ 6 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2 & 5\\ -1 & 3 & 1 & 1\\ -6 & 0 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

9. Знайсці памеры матрыцы X, калі
1) $A_{2\times3}\cdot X=B_{2\times4}$; 2) $X\cdot B_{3\times1}=C_{2\times1}$.

10. Знайсці здабытак матрыц: $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$.

11. Дадзены матрыцы $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$.
Знайсці матрыцу $D=A\cdot B-C^2$.

12. Праверыць, што матрыца $X=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\end{pmatrix}$ задавальняе раўнанню $X\cdot\begin{pmatrix}5 & 3 & 4\\ 6 & -3 & 5\\ 4 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 13 & -2\end{pmatrix}$.

Б

13. Знайсці значэнне мнагаскладу $f(x)$ ад матрыцы A, калі $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $f(x)=x^3-3x+2$.

14. Знайсці ўсе матрыцы, перастаноўчыя з матрыцай $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

15. Знайсці ўсе матрыцы A, якія задавальняюць умове $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

16. Паказаць, што $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Заданні для самастойнай работы

А

17. Азначыць 1) памеры матрыц 1) і 5); 2)матрыцу-радок; 3) матрыцу-слупок; 4) адзінкавую; 5) нулявую; 6) квадратную матрыцы:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 9 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

18. Дадзены матрыцы $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \\ -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Знайсці 1) A^T, B^T; 2) $4A$, $-2B$; 3) $A+C$, $2A-3C$; 4) для матрыц A, B, C, B^T знайсці суму ўсіх тых, якія можна скласці.

19. Знайсці $5A-3B+2C$, калі

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $A^T=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B^T=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C^T=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

20. Знайсці тыя са здабыткаў $A\cdot B$ ці $B\cdot A$, якія існуюць:

1) $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&3\\4&1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1\\2&-2\\-3&3\end{pmatrix}$;2) $A=\begin{pmatrix}5&1&-1\\-1&2&0\\3&2&2\\1&-1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&2&3\\4&-1&3&5\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}-4&2&3\\1&-1&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2\\3&1\\4&7\end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix}2&4&6\end{pmatrix}$, $B^T=\begin{pmatrix}-1&2&3\end{pmatrix}$.

21. Знайсці здабытак матрыц: $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&5\\-1&0&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\-1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

22. Знайсці A^2, калі $A=\begin{pmatrix}2&-1&4\\0&2&3\\-3&1&1\end{pmatrix}$.

Б

23. Знайсці ўсе матрыцы другога парадку, квадрат якіх роўны адзінкавай матрыцы.

24. Знайсці ўсе матрыцы, перастаноўчыя з матрыцай $\begin{pmatrix}7&-3\\5&-2\end{pmatrix}$.

25. Знайсці $\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}^n$.

26. Знайсці значэнне мнагаскладу $f(x)$ ад матрыцы A, калі $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $f(x)=x^3-2x^2+1$.

27. Азначыць памеры матрыц A і B, пры якіх існуюць абодва здабыткі $A\cdot B$ і $B\cdot A$.

Пытанні для самакантролю

1. Ці можна для матрыц $A_{2\times3}$ і $B_{3\times5}$ знайсці 1) іх суму, 2) іх здабытак?

2. У якіх выпадках існуюць 1) сума $A+A^T$; 2) здабытак $A\cdot A^T$?

3. Калі сума дзвюх матрыц з’яўляецца нулявой матрыцай?

4. Як называюць матрыцы A і B, калі $A \cdot B = B \cdot A$?

5. Якім будзе памер матрыцы X, калі $A_{3\times 1} \cdot X = B_{3\times 2}$?

6. Як зменіцца здабытвк матрыц $A \cdot B$, калі першы і другі радкі матрыцы A памяняць месцамі?

Рашэнне тыповых задач

<u>Задача 1.</u> Дадзены матрыцы: $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 8 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$. Знайсці $A + B$, A^T, D^T, $3A$, $3A - B$.

<u>Рашэнне.</u> $A + B = \begin{pmatrix} 4+2 & -1+1 & 2+6 \\ 3+8 & 0-3 & -5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 11 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, $D^T = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $3A = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 6 \\ 9 & 0 & -15 \end{pmatrix}$.

$3A - B = \begin{pmatrix} 12-2 & -3-1 & 6-6 \\ 9-8 & 0+3 & -15-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & -19 \end{pmatrix}$.

<u>Задача 2.</u> Для матрыц A, B, D з задачы 1 і матрыцы $C = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ даследаваць, ці існуюць здабыткі $A \cdot C$, $C \cdot A$, $A \cdot B$, $B \cdot A$, $D \cdot A$, C^2. Знайсці памеры тых здабыткаў, якія існуюць.

<u>Рашэнне.</u> Здабытак матрыц існуе толькі ў тым выпадку, калі колькасць слупкоў першага множніка роўна колькасці радкоў другога множніка: $\quad A \quad \cdot \quad B \quad = \quad C$ (матрыцы)

$m \times s \quad s \times n \quad m \times n$ (іх памеры).

Скарыстоўваючы гэтае правіла, атрымліваем:

$A_{2\times 3} \cdot C_{3\times 3} = (AC)_{2\times 3}$, $\qquad C_{3\times 3} \cdot A_{2\times 3}$ — не існуе,

$A_{2\times 3} \cdot B_{2\times 3}$ — не існуе, $\qquad B_{2\times 3} \cdot A_{2\times 3}$ — не існуе,

$D_{1\times 2} \cdot A_{2\times 3} = (DA)_{1\times 3}$, $\qquad C_{3\times 3} \cdot C_{3\times 3} = (C^2)_{3\times 3}$.

<u>Задача 3.</u> Знайсці здабыткі матрыц $D \cdot A$, $A \cdot C$ з задач 1,2.

Рашэнне. У задачы 2 ужо ўстанавілі, што гэтыя здабыткі існуюць. Правіла знаходжання здабытку дзвюх матрыц заключаецца ў наступным: каб знайсці элемент c_{ik} матрыцы-здабытку, неабходна элементы i-га радка першага множніка памножыць на элементы k-га слупка другога множніка і вынікі скласці.

Калі зафіксаваць i-й радок першага множніка і паслядоўна браць (1-й, 2-й, …) слупкі другога множніка, то атрымаем элементы i-га радка матрыцы-здабытку. Паколькі матрыца D мае толькі адзін радок, матрыца-здабытак $D \cdot A$ таксама будзе мець толькі адзін радок. Маем

$$D \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -2 & 9 \end{pmatrix},$$

такім чынам, $D \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 9 \end{pmatrix}$.

Аналагічна находзім здабытак $(A \cdot C)_{2\times 3}$:

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot (-3) - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 4 \cdot 4 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 2 - 5 \cdot 1 & 3 \cdot 4 + 0 \cdot 0 - 5 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 22 & 9 \\ -14 & -3 & -7 \end{pmatrix},$$

такім чынам $A \cdot C = \begin{pmatrix} -12 & 22 & 9 \\ -14 & -3 & -7 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Прадпрыемства выпускае прадукцыю чатырох тыпаў і выкарыстоўвае сыравіну двух тыпаў. Нормы затрат сыравіны на адзінку прадукцыі кожнага тыпу заданы матрыцай $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
Кошт адзінкі сыравіны кожнага тыпу задаецца матрыцай $B = \begin{pmatrix} 10 & 15 \end{pmatrix}$.
Знайсці агульныя затраты прадпрыемства на выпуск 100 адзінак прадукцыі першага тыпу, 200 — другога, 150 — трэцяга і 300 — чацвёртага тыпаў.

Рашэнне. Уводзім матрыцу P неабходнага выпуска прадукцыі ўсіх тыпаў: $P=\begin{pmatrix}100\\200\\150\\300\end{pmatrix}$. Тады затраты сыравіны на выпуск усёй запланаванай прадукцыі будзе роўны $A\cdot P$:

$$A\cdot P=\begin{pmatrix}2&1&3&2\\3&3&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\200\\150\\300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1450\\2400\end{pmatrix}.$$

Агульны кошт сыравіны неабходнай для выпуску запланаванай прадукцыі, атрымаем, калі знойдзем здабытак матрыцы B на $A\cdot P$:

$$B\cdot\left(A\cdot P\right)=\begin{pmatrix}10&15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1450\\2400\end{pmatrix}=\left(14500+36000\right)=\left(40500\right).$$

Адказ: 40500 грашовых адзінак.

1.2. Дэтэрмінанты

Тэарэтычныя пытанні

1. Даць азначэнне дэтэрмінанта квадратнай матрыцы другога парадку.
2. Даць азначэнне дэтэрмінанта квадратнай матрыцы трэцяга парадку.
3. Даць азначэнне мінору элемента a_{ik} дэтэрмінанта.
4. Даць азначэнне алгебраічнага дапаўнення элемента a_{ik} дэтэрмінанта.
5. Сфармуляваць галоўныя ўласцівасці дэтэрмінантаў.
6. Ахарактарызаваць метады вылічэння дэтэрмінантаў трэцяга і вышэйшых парадкаў.

Заданні для аўдыторнай работы

А

28. Вылічыць дэтэрмінанты другога парадку:

1) $\begin{vmatrix}4&5\\5&9\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}2&6\\3&9\end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix}7&5\\0&-2\end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix}9&2\\a&a\end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} -8 & -64 \\ 9 & 27 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 2 & 63 \\ 25 & 675 \end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} \log_a b & 1 \\ 1 & \log_b a \end{vmatrix}$.

29. Вылічыць дэтэрмінанты:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 10 & 4 & -7 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 6 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 6 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -\sin\alpha & \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 10 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & 7 \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & -6 \\ 4 & -2 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

10) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$; 11) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

30. Знайсці рашэння раўнанні або няроўнасці:

1) $\begin{vmatrix} x-3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} x & 2x-3 \\ -3x & 1 \end{vmatrix} = -2$; 3) $\begin{vmatrix} 3x & 5x \\ 2x & 10 \end{vmatrix} \geq 0$;

4) $\begin{vmatrix} 1-2x & -3 \\ 5 & 2x+1 \end{vmatrix} < 0$; 5) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -x & 3 & 2x \\ -2 & x & 4 \end{vmatrix} = 0$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & x & 4x \\ x & -2 & 1 \end{vmatrix} > 5$.

31. Як зменіцца дэтэрмінант n-га парадку, калі ва ўсіх яго элементах змяніць знак на процілеглы?

32. Як зменіцца дэтэрмінант n-га парадку, калі з кожнага яго радка, акрамя першага, адняць папярэдні радок?

Б

33. Вылічыць дэтэрмінанты:

1) $\begin{vmatrix} 1+a & 1+b & 1+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & \sin^2\alpha & -\cos^2\alpha \\ 2 & \sin^2\beta & -\cos^2\beta \\ 2 & \sin^2\gamma & -\cos^2\gamma \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 5 & 62 & -79 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 183 & 201 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \\ 7 & 10 & 12 & 13 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 1 & -12 & 2 & 3 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ -1 & 7 & 3 & -6 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} -6 & -8 & 9 & 12 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/2 & 1 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/2 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0.1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0.1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0.1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 6 \end{vmatrix}$.

34. Як зменіцца дэтэрмінант n-га парадку, калі кожны яго элемент a_{ik} памножыць на λ^{i-k} $(\lambda \neq 0)$?

35. Як зменіцца дэтэрмінант n-га парадку, калі яго радкі запісаць ў адваротным парадку?

36. Знайсці рашэнні раўнання або няроўнасці:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5-x & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5-x & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \geq 0$; 2) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 2 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix} = 0$.

Заданні для самастойнай работы

А

37. Вылічыць дэтэрмінанты:

1) $\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 11 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 125 & 675 \\ 32 & 128 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & -\mathrm{tg}\alpha \\ \mathrm{tg}\alpha & 1 \end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & -3 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; 10) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; 11) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 7 & 3 & 4 \\ 11 & 9 & -15 \end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 5 & 10 & 20 \\ -9 & 3 & -9 \end{vmatrix}$;

13) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; 14) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$; 15) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

38. Знайсці рашэнні раўнання або няроўнасці:

1) $\begin{vmatrix} 2x-1 & 5 \\ x-3 & 2x \end{vmatrix} = 17$; 2) $\begin{vmatrix} 5x & 7x \\ 10 & 2x \end{vmatrix} \le 0$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & x-5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$;

4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & 5 & x \\ x+2 & 2 & -1 \end{vmatrix} > 0$.

39. Чаму роўны дэтэрмінант, у якога сума радкоў з цотнымі нумарамі роўна суме радкоў з няцотнымі нумарамі?

40. Як зменіцца дэтэрмінант, калі ўсе яго элементы памножыць на λ $(\lambda \ne 0)$?

Б

41. Вылічыць дэтэрмінанты:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ -5 & 2 & -4 & -8 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2\sin\alpha & \sin 2\alpha & 4 \\ \mathrm{tg}\alpha & \sin\alpha & 9 \\ 1 & \cos\alpha & 7 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & \mathrm{ctg}\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin\alpha \\ \mathrm{ctg}\alpha & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -5 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 9 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 213 & 186 & 162 & 137 \\ 344 & 157 & 295 & 106 \\ 419 & 418 & 419 & 418 \\ 417 & 416 & 417 & 416 \end{vmatrix}$.

42. Знайсці рашэнні раўнання або няроўнасці:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x+1 & 2 & x+3 & 4 \\ 1 & x+3 & x+4 & x+5 \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & x & 4 \end{vmatrix} < 0$.

43. Як зменіцца дэтэрмінант, калі з кожнага яго радка, акрамя апошняга, адняць наступны радок, а з апошняга адняць ізыходны першы радок?

Пытанні для самакантролю

1. Для якіх з дадзенных матрыц існуе дэтэрмінант: $A_{2\times 3}$, $B_{3\times 3}$, E (адзінкавая матрыца)?

2. Ці зменіцца дэтэрмінант матрыцы, калі яе транспанаваць?

3. Як зменіцца дэтэрмінант, калі элементы яго адзінкавага радка (або слупка) памножыць на 3?

4. Як зменіцца дэтэрмінант, калі ўсе яго элементы памножыць на 3?

5. Як зменіцца дэтэрмінант, калі яго два слупка памяняць мясцамі?

6. Калі $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$?

7. Чаму роўны здабытак элементаў апошняга слупка дэтэрмінанта на іх алгебраічныя дапаўненні?

8. Чаму роўны здабытак элементаў апошняга слупка дэтэрмінанта на алгебраічныя дапаўненні якога-небудь другога слупка, або радка?

Рашэнне тыповых задач

Задача 1. Вылічыць дэтэрмінант $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

Рашэнне. Вылічым дэтэрмінант па формуле

$$D = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13},$$

дзе a_{11}, a_{12}, a_{13} — элементы першага радка дэтэрміната, а A_{11}, A_{12}, A_{13} — алгебраічныя дапаўненні гэтых элементаў.

Мы атрымаем мінор M_{11} элемента $a_{11} = 2$, калі выкраслім з D першы радок і першы слупок, на перасячэнні якіх знаходзіцца a_{11}:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 10 - 6 = 4.$$

Паколькі $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$, алгебраічнае дапаўненне A_{11} элемента a_{11} будзе роўна $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 4$.

Аналагічна знойдзем A_{12} і A_{13}:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(8+1) = -9;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 24 + 5 = 29.$$

Тады $D = 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-9) - 3 \cdot 29 = -88$.

Адказ: $D = -88$.

Задача 2. Вылічыць дэтэрмінант $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & -2 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & -1 & -7 & 5 \end{vmatrix}$.

Рашэнне. Перш чым раскласці гэты дэтэрмінант па элементах якога-небудзь радка (або слупка), пераўтварым яго, выкарыстоўваючы ўласцівасці дэтэрмінантаў.

Вядома, што дэтэрмінант не зменіцца, калі да элементаў яго слупка прыбавіць элементы другога слупка, памножаныя на адзін і той жа лік. Памножым элементы першага слупка на 2 і прыбавім да другога слупка, потым на (-3) і прыбавім да трэцяга слупка, потым — на 4 і прыбавім да чацвёртага слупка. Тады ўсе элементы трэцяга радка, акрамя першага элемента, стануць роўны нулю. Калі раскласці Δ па элементах трэцяга радка, атрымаем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & -1 & -7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 & 14 \\ 5 & 14 & -9 & 23 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 4 & -5 & 14 \\ 14 & -9 & 23 \\ -5 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Каб вылічыць дэтэрмінант 3-га парадку, які атрымалі, пераўтварым яго такім чынам: спачатку памножым другі слупок на (-5) і прыбавім да першага слупка, а потым памножым яго на (-3) і прыбавім да трэцяга слупка. Тады ўсе элементы трэцяга радка, акрамя другога элемента, стануць роўны нулю. Атрымаем

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 4 & -5 & 14 \\ 14 & -9 & 23 \\ -5 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 29 & -5 & 29 \\ 59 & -9 & 50 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 29 & 29 \\ 59 & 50 \end{vmatrix} = 261.$$

<u>Адказ:</u> 261.

1.3. Адваротная матрыца. Ранг матрыцы

Тэарэтычныя пытанні

1. Даць азначэнне адваротнай матрыцы.
2. Сфармуляваць крытэрый існавання адваротнай матрыцы.
3. Сфармуляваць алгарытм атрымання адваротнай матрыцы.
4. Даць азначэнне мінору k -га парадку матрыцы.
5. Даць азначэнне рангу матрыцы.
6. Сфармуляваць метад абдымных мінораў атрымання рангу матрыцы.
7. Сфармуляваць метад элементарных пераўтварэнняў для атрымання рангу матрыцы.

Заданні для аўдыторнай работы

А

44. Азначыць, для якіх матрыц існуюць адваротныя:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

45. Знайсці адваротныя матрыцы, калі яны існуюць:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -10 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

46. Знайсці ранг матрыцы:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \\ -5 & 5 & -4 & -9 \end{pmatrix}$.

47. Знайсці A^{-1}, калі $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$.

Б

48. Паказаць, што $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$.

49. Паказаць, што калі $A \cdot B = B \cdot A$, тады $A \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A$; $A^{-1} \cdot B = B \cdot A^{-1}$; $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

50. Устанавіць, як зменіцца адваротная матрыца A^{-1}, калі ў матрыцы A i-й радок памножыць на $\lambda \neq 0$.

51. Рашыць матрычныя раўнанні:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; 2) $X \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 10 & 5 & 13 \\ 10 & 11 & -15 \end{pmatrix}$.

52. Знайсці ранг матрыцы пры розных значэннях λ:

1) $\begin{pmatrix} 7-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-7 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

Заданні для самастойнай работы

А

53. Азначыць, для якіх матрыц існуюць адваротныя:

$$A=\begin{pmatrix}2&4\\3&7\\0&2\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}4&2&6\\0&5&7\\0&0&3\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}6&8&9\\0&0&2\\3&4&0\end{pmatrix}.$$

54. Знайсці адваротныя матрыцы, калі яны існуюць:

1) $\begin{pmatrix}4&3\\7&8\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}\log_a b&1\\1&\log_b a\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}\mathrm{tg}\alpha&1\\-1&\mathrm{tg}\alpha\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&4\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}2&5&7\\6&3&4\\5&-2&-3\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{pmatrix}$.

55. Знайсці ранг матрыцы:

1) $\begin{pmatrix}2&3&7&9\\-4&5&6&3\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}5&-6&7\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}5&0&7\\2&4&-9\\0&0&3\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}6&1&6\\2&0&-3\\4&-5&0\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}2&0&1&5\\1&2&3&4\\4&0&5&1\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}1&0&2&-1&3\\2&1&3&4&5\\1&2&0&11&1\end{pmatrix}$

Б

56. Устанавіць, як зменіцца адваротная матрыца A^{-1}, калі ў матрыцы A памяняць месцамі i-й і j-й радкі.

57. Знайсці матрыцу X:

1) $\begin{pmatrix}3&-1\\5&-1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\12&16\end{pmatrix}$; 2) $X\cdot\begin{pmatrix}5&3&1\\1&-3&-2\\-5&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&3&0\\-5&9&0\\-2&15&0\end{pmatrix}$.

58. Знайсці ранг матрыцы пры розных значэннях λ:

$$\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0&0\\0&1-\lambda&0&0\\0&0&2-\lambda&3\\0&0&0&3-\lambda\end{pmatrix}.$$

59. Знайсці пры якіх значэннях λ матрыцы A мае адваротную:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Пытанні для самакантролю

1. Ці існуе A^{-1}, калі матрыца A 1) мае памеры 3×4; 2) $\det A = -10$; 3) $\det A = 0$; 4) A — адзінкавая матрыца; 5) A — нулявая матрыца n-га парадку?

2. Чаму роўны $\det A^{-1}$, калі $\det A = 5$?

3. Матрыца A мае памеры 3×5. Вызначыць, якія з указаных суадносін магчымы: 1) $\mathrm{rang}A = 2$; 2) $\mathrm{rang}A = 3$; 3) $\mathrm{rang}A = 4$; 4) $\mathrm{rang}A = 5$?

4. Ці можа ранг матрыцы быць роўны нулю?

5. Чаму роўны ранг адзінкавай матрыцы n-га парадку?

6. Матрыца B атрымана з матрыцы A дабаўленнем слупка. Якія з суадносін магчымы: 1) $\mathrm{rang}A < \mathrm{rang}B$; 2) $\mathrm{rang}A > \mathrm{rang}B$; 3) $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}B$?

7. Ці зменіцца ранг матрыцы A, калі: 1) элементы i-га радка памножыць на $\lambda \neq 0$; 2) памяняць месцамі якія-небудзь радкі або слупкі; 3) да якога-небудзь радка прыбавіць другі радок, памножаны на λ?

Рашэнне тыповых задач

<u>Задача 1.</u> Знайсці адваротную матрыцу A^{-1}, калі $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

<u>Рашэнне.</u> Адваротная матрыца A^{-1} існуе, калі $\det A \neq 0$.

Дадзеная матрыца з’яўляецца квадратнай і яе дэтэрмінант роўны $D = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 20 = -2 \neq 0$, значыць A^{-1} існуе.

Знойдзем A^{-1} па формуле $A^{-1} = \frac{1}{D}\cdot S_A^T$, дзе $D = \det A$, S_A — матрыца, элементамі якой з’яўляюцца алгебраічныя дадаткі элементаў матрыцы A, S_A^T — матрыца, транспанаваная да S_A.

Знойдзем алгебраічныя дадаткі элементаў матрыцы A (гл. рашэнне задачы 1 з пункта 1.2):

$$A_{11} = 6; \quad A_{12} = -5; \quad A_{21} = -4; \quad A_{22} = 3.$$

Тады $S_A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $S_A^T = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$,

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Адказ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{pmatrix}$.

Заўвага. Каб быць упэўненым, што не памыліліся пры атрыманні A^{-1}, можна зрабіць праверку ўмовы $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Маем $A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, значыць, умова выканана і адваротная матрыца A^{-1} знойдзена без памылак.

Задача 2. Знайсці матрыцы, адваротныя к дадзеным, калі яны існуюць: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -9 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Рашэнне. 1) Вылічым $\det A$:

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & -10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -10 \end{vmatrix} = 0$, значыць A^{-1} не існуе.

2) Вылічым $\det B$:

$$D = \det B = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 + 6 = 12 \neq 0,$$

значыць, матрыца B мае адваротную B^{-1}.

Знойдзем алгебраічныя дадаткі элементаў матрыцы B:

$B_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 8$; $\quad B_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 12$; $\quad B_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8$;

$B_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -10$; $B_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 15$; $B_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 13$;

$B_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2$; $B_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3$; $B_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$.

Значыць, $S_B = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -8 \\ -10 & 15 & 13 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $S_B^T = \begin{pmatrix} 8 & -10 & 2 \\ 12 & 15 & -3 \\ -8 & 13 & 1 \end{pmatrix}$, а матрыца B^{-1} будзе роўна:

$$B^{-1} = \frac{1}{D} \cdot S_B^T = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -10 & 2 \\ 12 & 15 & -3 \\ -8 & 13 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -5/6 & 1/6 \\ 1 & 5/4 & -1/4 \\ -1/3 & 13/3 & 1/12 \end{pmatrix}$$

Адказ: A^{-1} не існуе; $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -5/6 & 1/6 \\ 1 & 5/4 & -1/4 \\ -1/3 & 13/3 & 1/12 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Знайсці рангі дадзеных матрыц: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Рашэнне. 1) Па азначэнню $\operatorname{rang} A$ — гэта найвышэйшы парадак не роўных нулю мінораў матрыцы A, значыць, $\operatorname{rang} A \le \min(m;n)$, дзе $m \times n$ — памеры матрыцы.

У нашым выпадку A мае памеры 2×4, значыць, $\operatorname{rang} A \le \min(2;4)$, т.ч. $\operatorname{rang} A \le 2$.

Паколькі мінор $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -20 \ne 0$ і яго парадак роўны 2, значыць, $\operatorname{rang} A = 2$.

2) Матрыца B мае памеры 2×3, значыць, $\mathrm{rang}B\le\min(2;3)$, т.ч. $\mathrm{rang}B\le 2$.

Паколькі першы і другі радкі матрыцы B прапарцыянальны, усе міноры другога парадку роўны нулю: $\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -6 & 2\end{vmatrix}=0$.

Сярод мінораў першага парадку ёсць не роўныя нулю: $B_{11}=2\ne 0$, значыць $\mathrm{rang}B=1$.

3) Матрыца C мае памеры 3×5, значыць, $\mathrm{rang}C\le\min(3;5)$, т.ч. $\mathrm{rang}C\le 3$.

Вылічым мінор трэцяга парадку

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & -3 & 0\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2 & 5\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2+12=14\ne 0.$$

Паколькі $\mathrm{rang}C\le 3$ і матрыца C мае мінор трэцяга парадку не роўны нулю, $\mathrm{rang}C=3$.

<u>Адказ:</u> $\mathrm{rang}A=2$, $\mathrm{rang}B=1$, $\mathrm{rang}C=3$.

<u>Задача 4.</u> Выкарыстоўваючы элементарныя пераўтварэння матрыц, знайсці $\mathrm{rang}A$, калі $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 1 & 5 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2\\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0\\ 2 & -1 & -8 & 5 & -3\end{pmatrix}$.

<u>Рашэнне.</u> Выканаем наступныя элементарныя пераўтварэнні: 1) памножым першы радок на 2 і прыбавім да трэцяга радка; 2) памножым першы радок на (-1) і прыбавім да чацвёртага радка. Тады ўсе элементы першага слупка, акрамя першага, стануць роўны нулю. Затым прыбавім да трэцяга радка другі радок, памножаны на (-3), а да чацвёртага — другі радок, памножаны на 3. Атрымаем:

$$\begin{pmatrix}2 & -4 & 1 & 5 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2\\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0\\ 2 & -1 & -8 & 5 & -3\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}2 & -4 & 1 & 5 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2\\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6\\ 0 & 3 & -9 & 0 & -6\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}2 & -4 & 1 & 5 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Матрыца, якую мы атрымалі, мае ранг роўны 2, паколькі змяшчае мінор другога парадку $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, а ўсе міноры вышэйшых парадкаў роўны нулю. (Усе элементы трэцяга і чацвёртага радкоў гэтай матрыцы роўны нулю). Паколькі элементарныя пераўтварэння не змяняюць рангу матрыцы, то ранг матрыцы A таксама будзе роўны 2.

Адказ: $\mathrm{rang} A = 2$.

1.4. Сістэмы лінейных алгебраічных раўнанняў

Тэарэтычныя пытанні

1. Даць азначэнне сітэмы лінейных алгебраічных раўнанняў (сістэмы ЛАР) і яе рашэння.
2. Запісаць аднародную і неаднародную сістэмы ЛАР у агульным выглядзе.
3. Запісаць сістэму ЛАР у матрычнай форме.
4. Сфармуляваць алгарытм рашэння сістэмы ЛАР матрычным метадам.
5. Сфармуляваць тэарэму Крамера і асноўныя вынікі з яе.
6. Сфармуляваць алгарытм рашэння сістэмы ЛАР метадам Крамера.
7. Ахарактарызаваць метад Гауса рашэння сістэм ЛАР.
8. Пералічыць галоўныя годнасці метада Гауса.
9. Сфармуляваць тэарэму Кранэкера-Капэлі.
10. Сфармуляваць алгарытм даследавання і рашэння сістэм ЛАР.
11. Запісаць якім лікам абмежавана колькасць базісных рашэнняў сістэмы m лінейных алгебраічных раўнанняў з n невядомымі.
12. Даць азначэнне фундаментальнай сістэмы рашэнняў і паказаць залежнасць колькасці яе рашэнняў ад матрыцы сістэмы.

Заданні для аўдыторнай работы

А

60. Знайсці рашэнні або ўстанавіць несумяшчальнасць сістэмы, даць геаметрычную інтэрпрэтацыю результатам:

1) $\begin{cases} 5x+3y=3 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 5x-2y=4 \\ 4y-10x=1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 4x-2y=-3 \\ -6x+3y=4.5 \end{cases}$.

61. Рашыць па формулам Крамера або матрычным метадам тыя сістэмы, для якіх выкананы ўмовы прымянення гэтых метадаў:

1) $\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 5x+2y=-5 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x-5y=1 \\ ax+5y=-2a-5 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+2x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3=10 \\ 3x_1+7x_2+4x_3=3 \\ x_1+2x_2+2x_3=3 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2 \\ 3x_1+3x_2+2x_3=2 \\ 2x_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 3x-y+4z=10 \\ -x+5y-z=-3 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3=-7 \\ x_1+2x_2-x_3=0 \\ 2x_3-3x_1-x_2=0 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} 3x-2y+5z=0 \\ 4x+3y-2z=0 \\ 7x+y-3z=0 \end{cases}$.

62. Знайсці рашэнні сістэм метадам Гауса:

1) $\begin{cases} x-2y+4z=9 \\ 2x+3y-z=0 \\ y+z=2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x-2y-3z=1 \\ 5x-3y-z=12 \\ 7x-4y-5z=9 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3=5 \\ x_1+x_2+x_3=6 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x+5y+2z=0 \\ 3x+4y-6z=0 \\ 2x-y-8z=0 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=9 \\ 3x_1-5x_2+x_3=-4 \\ 4x_1-7x_2+x_3=5 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+x_4=4 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=3 \\ 3x_1+4x_2-x_3-x_4=2 \\ 5x_1-3x_2+6x_3+3x_4=5 \end{cases}$.

63. Вызначыць, пры якіх λ сістэма мае ненулявыя рашэнні і знайсці іх:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}.$$

64. Знайсці рашэнне сістэмы па формулах Крамера:

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha = \cos\beta \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha = \sin\beta \end{cases}.$$

Б

65. Даследаваць сістэмы на сумяшчальнасць па тэарэме Кранэкера-Капэлі і знайсці рашэнні сумяшчальных сістэм:

1) $\begin{cases} x - y - z = -1 \\ 2x + y - z = 5 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 = 7 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 9x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$;

6) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} 3x + 4y + z = 7 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 7x + 10y - 5z = 2 \end{cases}$;

8) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 6x_1 - x_3 - 2x_5 = 3 \\ 4x_1 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases}$.

66. Даследаваць сістэму і знайсці агульнае рашэнне пры розных значэннях λ:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}.$$

67. Знайсці ўмовы, пры якіх плоскасці $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ праходзяць 1) праз адзін пункт; 2) праз адзіную прамую; 3) не перасякаюцца.

68. Даследаваць сістэму і знайсці яе агульнае рашэнне пры розных значэннях параметраў:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ bx+ay+az=m \\ bx+by+az=n \end{cases}.$$

69. Знайсці фундаментальныя сістэмы рашэнняў і агульныя рашэнні для сістэм:

1) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0 \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0 \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+3x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-3x_5=0 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+3x_4=0 \\ 5x_1+7x_2+x_3+4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2+2x_3+5x_4=0 \\ 7x_1+10x_2+x_3+5x_4=0 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=0 \\ x_1-2x_2+x_3+x_4=0 \\ 3x_1-3x_2-7x_4=0 \\ 4x_2+2x_3+5x_4=0 \end{cases}$.

Заданні для самастойнай работы

А

70. Знайсці рашэнні або ўстанавіць несумяшчальнасць сістэмы, даць геаметрычную інтэрпрэтацыю результатам:

1) $\begin{cases} 4x-3y=18 \\ 7x+5y=11 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=6 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=9 \end{cases}$.

71. Рашыць па формулах Крамера або матрычным метадам тыя сістэмы, для якіх выкананы ўмовы прымянення гэтых метадаў:

1) $\begin{cases} 5x-2y=4 \\ -3x+4y=6 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} -x+2y=8 \\ 3x+y+z=2 \\ -2x-y=1 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+5x_3=13 \\ x_1+3x_2-x_3=-2 \\ 2x_1+4x_2+3x_3=3 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} -5x+10y+5z=1 \\ 3x-4y-z=-7 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_2 + 2x_1 - 4x_3 = 21 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 6 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ x_2 + x_3 - 2x_1 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$.

72. Знайсці рашэнні сістэм метадам Гауса:

1) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 4x + 3y + 2z = -3 \\ 2x + 4y + 5z = 5 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 25 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 9 \\ x_1 + 12x_2 - 14x_3 = -1 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0{,}8 \\ 5x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 4{,}4 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - 13y + 5z = -4 \\ 2x - 5y + z = -2 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 3x + 2y + 5z = 0 \\ 7x - 6y + z = 0 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 13 \end{cases}$.

73. Даследаваць сістэмы і знайсці іх агульныя рашэнні пры розных значэннях параметраў:

1) $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ ax + 10y = b \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + 11x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}$.

Б

74. Даследаваць сістэмы на сумяшчальнасць па тэарэме Кранэкера-Капэлі і знайсці рашэнні сумяшчальных сістэм:

1) $\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 3x - y + z = -4 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -6 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 7x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} 5x_1+8x_2+3x_3=11 \\ x_1+3x_2+2x_3=5 \\ 3x_1+2x_2-x_3=1 \\ x_1+x_2=1 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3=-3 \\ x_1+2x_2+4x_3=9 \\ 2x_1+7x_2-x_3=0 \\ 3x_1-8x_2-x_3=1 \end{cases}$.

75. Знайсці ўмовы, пры якіх прамыя $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$, $a_3x+b_3y+c_3=0$ праходзяць праз адзін пункт.

76. Даследаваць сістэму і знайсці яе агульнае рашэнне пры розных значэннях параметраў:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=-1 \\ 7x_1+6x_2+5x_3=\lambda \\ 5x_1+4x_2+3x_3=2 \end{cases}.$$

77. Знайсці фундаментальныя сістэмы рашэнняў і агульныя рашэнні сістэм:

1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+2x_3-19x_4=0 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x_1-x_3+x_5=0 \\ x_2-x_4+x_6=0 \\ x_1-x_2+x_5-x_6=0 \\ x_2-x_3+x_6=0 \\ x_1-x_4+x_5=0 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3=0 \\ 4x_1+7x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+9x_2+6x_3=0 \end{cases}$.

Пытанні для самакантролю

1. Якая сістэма ЛАР заўсёды з’яўляецца сумяшчальнай?

2. Ці можна рашыць сістэму ЛАР па формулах Крамера, калі: 1) дэтэрмінант сістэмы роўны 10; 2) дэтэрмінант сістэмы роўны нулю; 3) сістэма змяшчае чатыры раўнанні з пяццю невядомымі?

3. Ранг матрыцы сумяшчальнай сістэмы роўны 3, а лік невядомых роўны 5. Колькі свабодных невядомых змяшчае агульнае рашэнне сістэмы?

4. Колькі базісных рашэнняў можа мець сістэма трох ЛАР з чатырмя невядомымі, калі ранг яе матрыцы роўны: 1) тром; 2)двум?

5. Сістэма ЛАР змяшчае тры раўнанні і ранг яе матрыцы роўны 3. Ці можа яна быць несумяшчальнай?

6. Сістэма ЛАР змяшчае тры раўнанні з чатырмя невядомымі. Ці можа ранг яе матрыцы быць роўны: 1) 2; 2) 3; 3) 4?

7. Калі аднародная сістэма ЛАР мае толькі нулявое рашэнне?

8. Ці можа сістэма ЛАР мець адзінае рашэнне, калі яна змяшчае: 1) 3 раўнання з 5 невядомымі; 2) 5 раўнанняў з 3 невядомымі?

9. Які метад рашэння сістэмы ЛАР дае магчымасць знайсці ранг матрыцы сістэмы?

Рашэнне тыповых задач

Задача 1. Знайсці рашэнне сістэмы 1) па формулах Крамера; 2) матрычным метадам: $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=-6 \\ x_1-x_2+2x_3=7 \\ 3x_1+5x_2=-9 \end{cases}$.

Рашэнне. 1) Вылічым дэтэрмінант сістэмы:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}=-(25-15)=-10\neq 0.$$

Паколькі $D\neq 0$, сістэма мае адзінае рашэнне, якое можна знайсці па формулах Крамера: $x_1=\frac{D_{x_1}}{D}$, $x_2=\frac{D_{x_2}}{D}$, $x_3=\frac{D_{x_3}}{D}$, дзе дэтэрмінант D_{x_i} $(i=1,2,3)$ атрымаецца з дэтэрмінанта D, калі i-й слупок у D (каэфіцыенты пры x_i) змяніць слупком свабодных членаў сістэмы. Тады

$$D_{x_1}=\begin{vmatrix} -6 & 3 & -1 \\ 7 & -1 & 2 \\ -9 & 5 & 0 \end{vmatrix}=-20,\ D_{x_2}=\begin{vmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 3 & -9 & 0 \end{vmatrix}=30,\ D_{x_3}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 7 \\ 3 & 5 & -9 \end{vmatrix}=-10$$

і адзінае рашэнне сістэмы мае выгляд:

$$x_1=\frac{D_{x_1}}{D}=\frac{-20}{-10}=2,\ x_2=\frac{D_{x_2}}{D}=\frac{30}{-10}=-3,\ x_3=\frac{D_{x_3}}{D}=\frac{-10}{-10}=1.$$

2) Запішам дадзеную сістэму ў матрычнай форме: $A \cdot X = B$, дзе

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Тады $X = A^{-1} \cdot B$, дзе A^{-1}— матрыца, адваротная да A. Паколькі $\det A = D = -10 \neq 0$, матрыца A^{-1} існуе. Знойдзем A^{-1} (гл. задачу 2, п.1.3), а потым матрыцу X:

$$A^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -10 & -5 & 5 \\ 6 & 3 & -5 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = ,$$

$$= -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -10 & -5 & 5 \\ 6 & 3 & -5 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -20 \\ 30 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Такім чынам, $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$

Адказ: $(2;-3;1)$.

Задача 2. Знайсці рашэнні сістэм метадам Гауса або даказаць іх несумяшчальнасць:

1) $\begin{cases} x - 4y + z = -3 \\ x - 3y - z = 0 \\ 3x + y - 2z = 9 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x - 3y + z = -2 \\ 5x - 2y + 3z = 11; \\ x + 4y + z = 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 5y + 6z = 0 \\ 4x + y - 3z = 0 \\ 2x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$.

Рашэнне. 1) Пераўтварым сістэму 1) такім чынам: памножым першае раўнанне на (-1) і прыбавім да другога раўнання, потым памножым першае на (-3) і прыбавім к трэцяму. Каэфіцыенты пры x у другім і трэцім раўнаннях будуць роўны нулю (“зануляцца”). Аналагічна “зануляючы” каэфіцыент пры y у трэцім раўнанні, прывядзём сістэму да “трохвугольнага” выгляду:

$$\begin{cases} x - 4y + z = -3 \\ x - 3y - z = 0 \\ 3x + y - 2z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 4y + z = -3 \\ y - 2z = 3 \\ 3x + y - 2z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 4y + z = -3 \\ y - 2z = 3 \\ 13y - 5z = 18 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 4y + z = -3 \\ y - 2z = 3 \\ 21z = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 4y - z = 2 \\ y = 3 + 2z = 3 - 2 = 1. \\ z = -1 \end{cases}$$

Сістэма, якую мы атрымалі, мае адзінае рашэнне, паколькі яе дэтэрмінант $D = 21 \neq 0$. Гэта рашэнне знаходзім такім метадам: з апошняга раўнання знойдзем z, з другога раўнання — y, з першага — x (“адваротны” ход метада Гауса). Атрымаем: $x = 2$, $y = 1$, $z = -1$.

Паколькі ўсе пераўтварэнні сістэмы 1), якія мы выкарыстоўвалі, не змяняюць мноства яе рашэнняў, то $(2;1;-1)$ — адзінае рашэнне сістэмы 1).

2) Пераўтварым сістэму 2) аналагічна сістэме 1), спачатку памяняўшы месцамі раўнанні такім чынам, каб было зручна “зануляць” каэфіцыенты:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 1 \\ 2x - 3y + z = -2 \\ 5x - 2y + 3z = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y + z = 1 \\ -11y - z = -4 \\ -22y - 2z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y + z = 1 \\ 11y + z = 4 \\ 11y + z = -3 \end{cases}.$$

Апошнія два раўнанні сістэмы з’яўляюцца супярэчлівымі, значыць, сістэма несумяшчальна.

3) Сістэма 3) з’яўляецца аднароднай. Аднародная сістэма заўсёды мае нулявое рашэнне і з’яўляецца сумяшчальнай. Калі дэтэрмінант аднароднай сістэмы не роўны нулю, нулявое рашэнне з’яўляецца адзіным, у адваротным выпадку сістэма мае ненулявыя рашэнні.

Дэтэрмінант дадзенай сістэмы роўны нулю, значыць, яна мае ненулявыя рашэнні. Знойдзем іх метадам Гауса.

$$\begin{cases} x - 5y + 6z = 0 \\ 2x - 3y + 3z = 0 \\ 4x + y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 5y + 6z = 0 \\ 7y - 9z = 0 \\ 21y - 27z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 5y + 6z = 0 \\ 7y - 9z = 0 \\ 7y - 9z = 0 \end{cases}.$$

Сістэма мае толькі два незалежных раўнанні. Выразім x і y праз z:

$$\begin{cases} x - 5y + 6z = 0 \\ 7y - 9z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5y - 6z = \dfrac{3}{7}z \\ y = \dfrac{9}{7}z \end{cases}, \ z \in R.$$

Невядомая z з’яўляецца свабоднай. Рашэнне магчыма запісаць таксама ў выглядзе: $x=\dfrac{3}{7}c$, $y=\dfrac{9}{7}c$, $z=c$, $c\in R$, або $x=3c$, $y=9c$, $z=7c$, $c\in R$.

<u>Адказ:</u> 1) $(2;1;-1)$;

2) сістэма несумяшчальна;

3) $(3c;9c;7c)$, $c\in R$.

<u>Задача 3.</u> Даследаваць сістэмы на сумяшчальнасць па тэарэме Кранекера-Капелі і знайсці агульныя рашэнні сумяшчальных сістэм:

$$1)\ \begin{cases} x_1+3x_2+4x_3-2x_4=1 \\ 3x_1+7x_2-2x_3+2x_4=5 \end{cases};\quad 2)\ \begin{cases} x_1-3x_2-2x_3-3x_4=5 \\ x_1+2x_2\qquad\quad -3x_4=0 \\ 3x_1+x_2-x_3-2x_4=4 \\ 4x_1+3x_2\qquad +x_4=3 \\ x_1+2x_2+x_3+4x_4=-1 \end{cases}.$$

<u>Рашэнне.</u> 1) Запішам расшыраную матрыцу сістэмы 1):

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матрыца A^* змяшчае матрыцу сістэмы A, якая аддзеляна пункцірам.

Памеры матрыцы A^* 2×5, матрыцы A — 2×4, значыць, іх рангі задавальняюць умове: $r_A\le 2$, $r_{A^*}\le 2$.

Сярод мінораў 2-га парадку гэтых матрыц ёсць не роўныя нулю, напрыклад, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=7-9=-2\ne 0$, значыць $r_A=2$, $r_{A^*}=2$.

Паколькі $r_A=r_{A^*}$, дадзеная сістэма сумяшчальна. Ранг матрыцы сістэмы менш ліка невядомых: $n=4$, $r_A=2<4$, значыць, сістэма мае незлічонае мноства рашэнняў, лік яго свабодных невядомых будзе роўны: $n-r_A=4-2=2$.

Знойдзем агульнае рашэнне сістэмы:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3-2x_4=1 \\ 3x_1+7x_2-2x_3+2x_4=5 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3-2x_4=1 \\ \quad -2x_2-14x_3+8x_4=2 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+3x_2+4x_3-2x_4=1 \\ \quad\quad\; x_2+7x_3-4x_4=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=4+17x_3-10x_4 \\ x_2=-1-7x_3+4x_4 \end{cases}.$$

Невядомыя x_3, x_4 з'яўляюцца свабоднымі. Агульнае рашэнне сістэмы магчыма запісаць у выглядзе: $x_1=4+17c_1-10c_2$, $x_2=-1-7c_1+4c_2$, $x_3=c_1$, $x_4=c_2$, $c_1\in R$, $c_2\in R$.

2) Запішам расшыраную матрыцу сістэмы 2):

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Памеры матрыцы A^* 5×5, матрыцы A — 5×4, значыць $r_A\le4$, $r_{A^*}\le5$. Каб упрасціць вылічэнне рангаў r_A і r_{A^*}, выкарастаем элементарныя пераўтварэнні матрыц, якія не змяняюць іх рангі.

Атрымаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 10 & 5 & 7 & -11 \\ 0 & 15 & 8 & 13 & -17 \\ 0 & 5 & 3 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 13 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Паколькі элементы 5-га радка роўны нулю $r_{A^*}\le4$. Ранг матрыцы A таксама задавальняе гэтай няроўнасці (гл.вышэй). Сярод мінораў 4-га парадку ёсць не роўны нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 1\cdot(-1) = -5 \neq 0,$$

значыць, $r_A = 4$ і $r_{A^*} = 4$.

Ранг матрыцы сістэмы 2) роўны рангу расшыранай матрыцы і роўны ліку невядомых, значыць, гэта сістэма сумяшчальна і мае адзінае рашэнне. Знойдзем яго:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ \qquad 5x_2 + 2x_3 \qquad = -5 \\ \qquad\qquad x_3 + 7x_4 = -1 \\ \qquad\qquad\quad -x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = \dfrac{6}{5} \\ x_2 = \dfrac{1}{5}(-5 - 2x_3) = -\dfrac{3}{5} \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Такім чынам, адзінае рашэнне сістэмы 2) мае выгляд: $\left(\frac{6}{5}; -\frac{3}{5}; -1; 0\right)$.

<u>Адказ:</u> 1) $(4 + 17c_1 - 10c_2; -1 - 7c_1 + 4c_2; c_1; c_2)$, $c_1 \in R$, $c_2 \in R$;

2) $\left(\frac{6}{5}; -\frac{3}{5}; -1; 0\right)$.

<u>Задача 4.</u> Прадпрыемства выпускае прадукцыю трох тыпаў P_1, P_2, P_3 і выкарыстоўвае сыравіну таксама трох тыпаў S_1, S_2, S_3. Нормы затрат кожнай сыравіны на адзінку прадукцыі і затраты сыравіны на 1 дзень даюцца табліцай

Від сыравіны	Нормы расхода сыравіны на адзінку прадукцыі			Затраты сыравіны на 1 дзень
	P_1	P_2	P_3	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	900
S_3	3	2	2	1600

Знайсці штодзенны аб’ём выпуска кожнага віда прадукцыі.

<u>Рашэнне.</u> Няхай x_1 — штодзенны выпуск прадукцыі P_1, x_2 — прадукцыі P_2, x_3 —прадукцыі P_3.

Тады, улічваючы затраты сыравіны кожнага тыпу, атрымаем сістэму

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2+4x_3=2700 \\ 2x_1+x_2+x_3=900 \\ 3x_1+2x_2+2x_3=1600 \end{cases}.$$

Знойдзем рашэнне сістэмы метадам Гауса:

$$\begin{cases} x_2+x_3+2x_1=900 \\ 3x_2+4x_3+5x_1=2700 \\ 2x_2+2x_3+3x_1=1600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2+x_3+2x_1=900 \\ x_3-x_1=0 \\ -x_1=-200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=300 \\ x_3=200 \\ x_1=200 \end{cases}.$$

<u>Адказ:</u> 200 адзінак прадукцыі P_1,
300 адзінак прадукцыі P_2,
200 адзінак прадукцыі P_3.

Глава 2. ВЕКТАРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Вектары. Лінейныя аперацыі над вектарамі. Вектарны базіс

Тэарэтычныя пытанні

1. Ахарактарызаваць і прывесці прыклады скалярных і вектарных велічынь.
2. Даць азначэнні вектара, яго даўжыні (модуля).
3. Даць азначэнні нуль-вектара, адзінкавага, калінеярных, кампланарных вектараў.
4. Даць азначэнні вектара, працілеглага вектару $\vec{a}$, роўнага вектару $\vec{a}$.
5. Даць азначэнні лінейных аперацый над вектарамі: суммы, рознасці вектараў, здабытку вектара на лік.
6. Сфармуляваць галоўныя ўласцівасці лінейных аперацый над вектарамі.

7. Даць азначэнне линейна незалежных вектараў.

8. Сфармуляваць крытэрыі лінейнай незалежнасці вектараў.

9. Даць азначэнне вектарнага базіса мноства геаметрычных вектараў.

10. Ахарактарызаваць ортанармаваны базіс.

11. Даць азначэнне каардынат вектара. Сфармуляваць правілы знаходжання каардынат сумы, рознасці вектараў, здабытку вектара на лік.

12. Сфармуляваць умову калінеярнасці двух вектараў, выражаную праз іх каардынаты.

13. Сфармуляваць правіла вылічэння каардынат вектара па каардынатам яго пачатковага і канечнага пунктаў.

Заданні для аўдыторнай работы

А

1. Пабудаваць вектары $2\vec{a}$, $\frac{1}{3}\vec{b}$, $-\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $2\vec{a}+3\vec{b}$, $\frac{1}{4}\vec{a}-2\vec{b}$, калі $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вядомыя.

2. Пабудаваць $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$, калі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ вядомыя.

3. Вядома, што $|\vec{a}|=5$. Выразіць праз $\vec{a}$ адзінкавыя вектары $\vec{e_1}\uparrow\uparrow\vec{a}$, $\vec{e_2}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

4. У паралелаграме $ABCD$ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, M — пункт перасячэння дыяганалей паралелаграма. Выразіць вектары $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}$ праз $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

5. На плоскасці задан ортанармаваны базіс $(\vec{i};\vec{j})$. 1) Пабудаваць вектары $\vec{a}=4\vec{i}$, $\vec{b}=3\vec{j}$, $\vec{c}=4\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{p}=-\vec{i}+\vec{j}$; $\vec{q}=-\vec{i}-\vec{j}$, знайсці каардынаты гэтых вектараў у базісе $(i;j)$. 2) Вызначыць, якія з пар вектараў $(\vec{a};\vec{b})$, $(\vec{a};\vec{i})$, $(\vec{a};\vec{c})$, $(\vec{p};\vec{q})$, $(\vec{b};\vec{c})$, $(\vec{b};\vec{j})$ ствараюць базіс і ахарактарызаваць гэтыя базісы. 3) Указаць каардынаты вектараў $\vec{i}$, $\vec{j}$ у базісе $(\vec{i};\vec{j})$, у базісе $(\vec{p};\vec{q})$.

6. У прасторы зададзен ортанармаваны базіс $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. Пабудаваць вектары $-2\vec{i}$, $6\vec{j}$, $4\vec{k}$, $\vec{a}=-2\vec{i}+6\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{j}-\vec{k}$. Указаць каардынаты вектараў $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ у базісе $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. Устанавіць, якія з трояк вектараў $\left(\vec{i};\vec{b};\vec{k}\right)$, $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{b}\right)$, $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{c}\right)$ ствараюць базіс у прасторы.

7. На плоскасці дадзены вектары каардынатамі ў базісе $\left(\vec{i};\vec{j}\right)$: $\vec{a}=\{3;-2\}$, $\vec{b}=\{0;5\}$, $\vec{c}=\{6;4\}$, $\vec{p}=\{0;2\}$, $\vec{q}=\{-6;4\}$. 1) Указаць, якія з гэтых вектараў калінеярныя і знайсці каардынаты вектараў $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{c}$, $2\vec{p}+3\vec{q}$. 2) Раскласці вектар $\vec{c}$ па $\vec{p}$ і $\vec{q}$. 3) Устанавіць, што пара $\left(\vec{a};\vec{c}\right)$ стварае базіс на плоскасці і знайсці каардынаты вектара $\vec{p}$ у базісе $\left(\vec{a};\vec{c}\right)$, зрабіць рысунак.

8. Зададзены вектары каардынатамі ў базісе $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$: $\vec{a}=\{-2;3;4\}$, $\vec{b}=\{1;-2;3\}$, $\vec{c}=\{4;-6;-8\}$. Устанавіць, якія з гэтых вектараў калінеярныя, знайсці каардынаты вектараў $5\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+4\vec{c}$.

9. Знайсці α і β, пры якіх вектары $\vec{p}$ і $\vec{q}$ калінеярныя і выразіць $\vec{p}$ праз $\vec{q}$:

1) $\vec{p}=\{-1;\alpha;-2\}$, $\vec{q}=\{\beta;-6;4\}$; 2) $\vec{p}=\{-6;3;\beta\}$, $\vec{q}=\{\alpha;1;2\}$.

10. Паказаць, што чатырохвугольнік $ABCD$ трапецыя, калі $A(6,-8)$, $B(4;10)$, $C(8;2)$, $D(8;-12)$.

11. Азначыць пачатак вектара $\vec{a}=\{2;-3;7\}$, калі яго канец знаходзіцца ў пункце $B(4;6;5)$.

12. Паралелаграм пабудован на вектарах $\overrightarrow{OA}=\{1;1;0\}$, $\overrightarrow{OB}=\{0;-3;1\}$. 1) Знайсці каардынаты яго дыяганаляў $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{AB}$. 2) Указаць каардынаты яго вяршынь A і B, знайсці радыус-вектар пункта O_1 перасячэння дыяганалей, калі $O(0;0;0)$.

13. Знайсці, для якіх вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$ маюць месца суадносіны

1) $\vec{a}+\vec{b}=\alpha\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$; 2) $\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\dfrac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$.

14. Даказаць, што $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$.

Б

15. У чатырохвугольніку $ABCD$ $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{n}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{p}$, пункты E і F — сярэдзіны дыяганалей AC і BD. Знайсці расклад вектара $\overrightarrow{EF}$ праз $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$.

16. Цэнтр мас аднароднага стрыжня знаходзіцца ў пункце $A(1;-1)$, адзін з яго канцоў — у пункце $B(4;5)$. Знайсці каардынаты пункта C — другога конца стрыжня.

17. Тры вяршыні паралелаграма $ABCD$ знаходзяцца ў пунктах $A(-3;1;0)$, $B(0;-2;-4)$, $C(9;7;4)$. Знайсці каардынаты чацвертай вяршыні D.

18. Вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ заданы каардынатамі ў базісе $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. Паказаць, што $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ствараюць базіс у прасторы, калі дэтэрмінант з іх каардынат не роўны нулю.

19. Заданы вектары каардынатамі ў базісе $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$: $\vec{a}=\{3;0;1\}$, $\vec{b}=\{2;-1;2\}$, $\vec{c}=\{1;1;1\}$, $\vec{r}=\{4;-2;6\}$. Паказаць, што вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ствараюць базіс у прасторы (гл. задачу 18) і знайсці каардынаты вектара $\vec{r}$ у гэтым базісе.

20. Вяршыні трохвугольніка знаходзяцца ў пунктах $A(3;-2;1)$, $B(3;1;5)$, $C(4;0;3)$. Знайсці радыус-вектар пункта перасячэння яго медыян.

21. У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ вядомы вектары $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$. Знайсці вектар $\overrightarrow{SO_1}$, калі пункт O_1 з’яўляецца цэнтрам мас аднароднага трохвугольніка ABC.

Заданні для самастойнай работы

А

22. Вектары $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ з’яўляюцца старанамі трохвугольніка ABC, AA_1, BB_1, CC_1 — яго медыяны. Выразіць вектары AA_1, BB_1, CC_1 праз $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

23. На плоскасці задан ортанармаваны базіс $\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ і вектары $\vec{m}=4\vec{i}-3\vec{j}$, $\vec{n}=2\vec{i}+5\vec{j}$, $\vec{p}=-8\vec{i}+6\vec{j}$. 1) Знайсці каардынаты вектараў $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$, $2\vec{m}$, $-3\vec{n}$, $\vec{m}+\vec{n}$, $4\vec{n}-2\vec{p}$. 2) Указаць, якія вектары калінеарныя. 3) Устанавіць, якія з пар $\left(\vec{m};\vec{n}\right)$, $\left(\vec{n},\vec{p}\right)$, $\left(\vec{m},\vec{p}\right)$ ствараюць базіс на плоскасці. 4) Знайсці каардынаты вектара $\vec{d}=\{10;-1\}$ у базісе $\left(\vec{m};\vec{n}\right)$, зрабіць рысунак.

24. У прасторы задан ортанармаваны базіс $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. 1) Пабудаваць вектары $5\vec{i}$, $-2\vec{j}$, $3\vec{k}$, $\vec{a}=5\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ і ўказаць іх каардынаты. 2) Устанавіць, якія з вектароў $\vec{a}$, $\vec{b}=7\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=-10\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{k}$ калінеарныя. 3) Знайсці каардынаты вектараў $\vec{a}+\vec{b}$, $2\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$, $\overrightarrow{3b}+\vec{c}$.

25. Знайсці α і β, пры якіх вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ калінеарныя і выразіць $\vec{b}$ праз $\vec{a}$:

1) $\vec{a}=\{-4;\alpha;3\}$, $\vec{b}=\{\beta;8;6\}$; 2) $\vec{a}=\{\alpha;-1;2\}$, $\vec{b}=\{2;3;\beta\}$.

26. Паказаць, што чатырохвугольнік з вяршынямі $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(-7,5;4)$, $D(-5;2;7)$ з’яўляецца паралелаграмам.

Б

27. Устанавіць, для якіх вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$ маюць месца суадносіны:

1) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$; 2) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$; 3) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|$.

28. Заданы вектары каардынатамі ў базісе $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$: $\vec{a}=\{1;5;3\}$, $\vec{b}=\{6;-4;-2\}$, $\vec{c}=\{0;-5;7\}$, $\vec{d}=\{-20;27;-35\}$. Знайсці такія $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, каб вектары $\alpha\vec{a},\ \beta\vec{b},\ \gamma\vec{c},\ \vec{d}$ стварали замкнёную ломаную лінію, калі пачатак кожнага наступнага вектара сумясціць з канцом папярэдняга.

29. Заданы тры вяршыні паралелаграма $A(3;-4;7)$, $B(-5;3;-2)$, $C(1;2;-3)$. Знайсці яго чацвертую вяршыню D, супрацілеглую B.

30. Заданы вектары каардынатамі ў базісе $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$: $\vec{a}=\{2;2;-1\}$, $\vec{b}=\{0;4;8\}$, $\vec{c}=\{-1;-1;3\}$, $\vec{d}=\{5;9;-2\}$. Паказаць, што вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ствараюць базіс у прасторы (гл. зад. 18) і знайсці каардынаты вектара $\vec{d}$ у гэтым базісе.

31. Знайсці каардынаты канцоў адрэзка AB, які пунктамі $C(2;0;2)$ і $D(5;-2;0)$ раздзеляны на тры роўныя часткі.

32. Пункт $C(x;y;z)$ дзеліць адрэзак AB у адносінах $\lambda=\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|}$, калі $C\in AB$. Паказаць, што каардынаты пункта C роўны $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$, дзе $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$.

Пытанні для самакантролю

1. Ці можна ставіць паміж вектарамі знакі $<$, $\geq$, $=, <, \leq$?

2. Ці можа сума ненулявых вектараў быць нулявым вектарам?

3. У якіх выпадках здабытак вектара на лік будзе нулявым вектарам?

4. Якая сувязь існуе паміж каардынатамі вектараў 1) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$; 2) $\vec{a}\,//\,\vec{b}$?

5. У якіх выпадках вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ствараюць базіс на плоскасці: 1) $\vec{a}\perp\vec{b}$, 2) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; 3) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$; 4) вугал паміж $\vec{a}$ і $\vec{b}$ роўны 120°?

6. У якіх выпадках вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ствараюць базіс у прасторы: 1) $\vec{a}\,//\,\vec{b}$, $\vec{c}$ — адвольны вектар; 2) $\vec{a}\perp\vec{b}\perp\vec{c}$; 3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не кампланарны?

7. На вектарах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ пабудован прамавугольнік. Чаму роўны $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$, калі $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$?

8. Чаму роўны сумы $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$, калі A, B, C — вяршыні трохвугольніка?

Рашэнне тыповых задач

Задача. Дадзены вектары $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{c}=-3\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$. 1) Знайсці каардынаты вектараў $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ у базісе $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. 2) Установіць, што тройка вектараў $\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)$ стварае базіс у прасторы і знайсці каардынаты вектара $\overrightarrow{AB}$ у гэтым базісе, калі $A(5;6;-3)$, $B(0;7;4)$.

Рашэнне. 1) Каардынаты вектара роўны каэфіцыентам яго раскладу па базісным вектарам, значыць, $\vec{a}=\{1;-2;4\}$, $\vec{b}=\{2;1;3\}$, $\vec{c}=\{-3;4;-1\}$. Каб знайсці каардынаты вектара $2\vec{a}$, трэба каардынаты вектара $\vec{a}$ памножыць на 2: $2\vec{a}=\{2;-4;8\}$.

Каардынаты сумы (рознасці) вектараў роўны суме (рознасці) адпаведных каардынат вектараў складнікаў, значыць,

$$2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\{2+2+3;-4+1-4;8+3+1\}=\{7;-7;12\}.$$

2) Вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ствараюць базіс у прасторы, калі дэтэрмінант з іх каардынат не роўны нулю.

Маем

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2 & 4\\ 2 & 1 & 3\\ -3 & 4 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 5 & -5\\ -3 & -2 & 11\end{vmatrix}=45\neq 0.$$

Значыць, $\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)$ ствараюць базіс у прасторы. Няхай $\{x;y;z\}$ нявядомыя каардынаты вектара $\overrightarrow{AB}$ у гэтым базісе, тады $\overrightarrow{AB}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$. Знойдзем каардынаты вектараў $\left(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\right)$ і $\overrightarrow{AB}$ у базісе $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ і прыраўняем іх.

Маем $x\vec{a}=\{x;-2x;4x\}$, $y\vec{b}=\{2y;y;3y\}$, $z\vec{c}=\{-3z;4z;-z\}$, $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\{x+2y-3z;-2x+y+4z;4x+3y-z\}$.

Каардынаты вектара $\overrightarrow{AB}$ роўны рознасці адпаведных каардынат яго канечнага і пачатковага пунктаў B і A:
$\overrightarrow{AB}=\{0-5;7-6;4+3\}=\{-5;1;7\}$.

Прыраўняем каардынаты вектараў $\left(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\right)$ і $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{cases} x+2y-3z=-5 \\ -2x+y+4z=1 \\ 4x+3y-z=7 \end{cases}.$$

Мы атрымалі сістэму лінейных алгебраічных раўнанняў. Матрыца гэтай сістэмы з’яўляецца транспанаванай да матрыцы, дэтэрмінант якой $\Delta = 45$, значыць, дэтэрмінант гэтай сістэмы $D = 45 \neq 0$ і сістэма мае адзінае рашэнне. Знойдзем гэта рашэнне метадам Гауса.

$$\begin{cases} x+2y-3z=-5 \\ -2x+y+4z=1 \\ 4x+3y-z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-5 \\ 5y-2z=-9 \\ -5y+11z=27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-5 \\ 5y-2z=-9 \\ 9z=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1. \\ z=2 \end{cases}$$

Такім чынам, $\overrightarrow{AB} = \{3;-1;2\}$ у базісе $\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)$.

Адказ: 1) $2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\{7;-7;12\}$;

2) $\overrightarrow{AB} = \{3;-1;2\}$.

2.2. Скалярны здабытак вектараў. Праекцыя вектара на вось

Тэарэтычныя пытанні

1. Даць азначэнне скалярнага здабытку вектараў.
2. Сфармуляваць галоўныя ўласцівасці скалярнага здабытку вектараў.
3. Запісаць формулу для вылічэння скалярнага здабытку вектараў, заданых каардынатамі ў артанармаваным базісе.
4. Сфармуляваць механічны і эканамічны сэнс скалярнага здабытку вектараў.
5. Запісаць умову артаганальнасці вектараў.
6. Запісаць формулы для вылічэння даўжыні вектара, вугла паміж вектарамі.
7. Даць азначэнне праекцыі вектара на вось.
8. Сфармуляваць галоўныя ўласцівасці праекцый.
9. Даць азначэнне і сфармуляваць галоўныя ўласцівасці кіроўных косінусаў вектара.

Заданні для аўдыторнай работы

А

33. Знайсці $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$, $\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)$, калі $\left|\vec{a}\right|=2\sqrt{2}$, $\left|\vec{b}\right|=4$, вугал паміж вектарамі $\vec{a}$ і $\vec{b}$ роўны 135°.

34. Вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ствараюць вугал $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$, іх даўжыні роўны $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3}$, $\left|\vec{b}\right|=2$. Знайсці вугал паміж вектарамі $\vec{p}$ і $\vec{q}$, калі $\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$.

35. Заданы вектары каардынатамі ў базісе $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$: $\vec{a}=\{1;-2;2\}$, $\vec{b}=\{6;3;-2\}$, $\vec{c}=\{8;1;-3\}$. Знайсці $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\left|\vec{a}\right|$, $\vec{b}\cdot\left(\vec{a}+\vec{c}\right)$, $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$, вуглы паміж вектарамі $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\vec{a}$ і $\vec{c}$.

36. Знайсці, пры якіх α вектары $\vec{m}=\{1;\alpha;2\alpha\}$ і $\vec{n}=\{1;1;-\alpha\}$ артаганальны.

37. Знайсці адзінкавыя вектары $\vec{e_1}$ і $\vec{e_2}$ такія, што $\vec{e_1}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AB}$, $\vec{e_2}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AB}$, калі $A(2;-8;-1)$, $B(5;4;-5)$.

38. Знайсці работу сілы $\vec{F}$ пры перамяшчэнні матэрыяльнага пункта на вектар $\vec{s}$, калі $\left|\vec{F}\right|=8$, $\left|\vec{s}\right|=3$, вугал паміж $\vec{F}$ і $\vec{s}$ роўны $\dfrac{\pi}{3}$.

39. Тры сілы прыкладзены ў пункце M_1: $\vec{F_1}=\{4;-3;5\}$, $\vec{F_2}=\{6;0;1\}$, $\vec{F_3}=\{2;3;-1\}$. Вылічыць работу раўнадзейнай гэтых сіл, калі матэрыяльны пункт перамяшчаецца з пункта $M_1(7;2;3)$ у пункт $M_2(7;-1;6)$.

40. Знайсці вугал паміж дыяганалямі паралелаграма, пабудаванага на вектарах $\vec{a}=\{2;1;0\}$ і $\vec{b}=\{0;-2;1\}$.

41. Вяршыні трохвугольніка ABC знаходзяцца ў пунктах $A(-1;2;4)$, $B(-4;2;0)$, $C(1;6;0)$. Знайсці даўжыню стараны AB, медыяны BD, унутраны вугал α пры вяршыне A, знешні вугал β пры вяршыні B.

42. Знайсці праекцыю вектара $\vec{a}$ на вось l, якая стварае з вектарам $\vec{a}$ вугал φ:

1) $\vec{a}=4\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k},\ \varphi=\dfrac{2\pi}{3}$; 2) $\vec{a}=6\vec{i}+2\vec{k},\ \varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

43. Дадзен вектар $\vec{a}=2\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}$. Знайсці кіроўныя косінусы $\vec{a}$, яго праекцыі на восі каардынат $Ox,\ Oy,\ Oz$; адзінкавы вектар $\vec{e}\uparrow\uparrow\vec{a}$.

44. Знайсці праекцыю вектара $\overrightarrow{AB}$ на вось l, якая стварае вуглы $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ з восямі каардынат:

1) $\overrightarrow{AB}=\{8;-7;4\}$, $\alpha=\beta=\gamma$ — вострые вуглы;

2) $A(4;-5;8)$, $B(7;2;6)$, $\alpha=60^\circ$, $\gamma=120^\circ$, β — тупы вугал.

45. Дадзены вектары $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$. Знайсці $Пр_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, $Пр_{\vec{j}}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$, $Пр_{\vec{b}+2\vec{c}}\vec{a}$ праверыць, што $Пр_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=Пр_{\vec{c}}\vec{a}+Пр_{\vec{c}}\vec{b}$.

46. Знайсці праекцыю вектара $\vec{a}=\vec{m}-4\vec{n}$ на вектар $\vec{b}=3\vec{m}+2\vec{n}$, калі $\left|\vec{m}\right|=2$, $\left|\vec{n}\right|=\sqrt{3}$, вугал паміж вектарамі $\vec{m}$ і $\vec{n}$ роўны $\dfrac{\pi}{6}$.

47. Знайсці вектар $\vec{b}$, такі што $\vec{b}\perp Oz$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$, дзе $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}$.

48. Знайсці вектар $\vec{x}$, які задавальняе ўмовам: $\vec{x}\,//\,\vec{a}=\{12;-16;15\}$, $\left|\vec{x}\right|=50$, $\vec{x}$ стварае востры вугал с восьсю Ox.

Б

49. Вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ роўныя па даўжыні і ствараюць парамі роўныя вуглы. Знайсці каардынаты вектара $\vec{c}$, калі $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{j}+\vec{k}$.

50. Вяршыні трохвугольніка ABC знаходзяцца ў пунктах $A(1;-2)$, $B(3;4)$, $C(-2;3)$ і AD, BM, CN яго вышыні. Знайсці каардынаты вектараў $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CN}$.

51. Вядома, што $\left|\vec{a}\right|=3,\ \left|\vec{b}\right|=1,\ \left|\vec{c}\right|=4$ і $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Вылічыць $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

52. Вылічыць, пры якіх значэннях параметра α трохвугольнік ABC будзе раўнабедраным, калі $\overrightarrow{AB}=6\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$, $\overrightarrow{AC}=\alpha\vec{i}$.

53. На вектарах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ пабудаваны паралелаграм. Выразіць праз $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектар яго вышыні, якая перпендыкулярна $\vec{a}$.

54. Вядома, што вектары $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$, $\vec{e_4}$, $\vec{e_5}$ ствараюць артанармаваны базіс у пяцімернай прасторы. Знайсці скалярны здабытак і даўжыні вектараў $\vec{a} = \vec{e_1} - 2\vec{e_2} + \vec{e_5}$ і $\vec{b} = 3\vec{e_2} + \vec{e_3} + \vec{e_4} + 2\vec{e_5}$.

Заданні для самастойнай работы

А

55. Дадзены $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вугал паміж вектарамі $\vec{a}$ і $\vec{b}$ роўны $\dfrac{\pi}{3}$. Знайсці $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2$, $\left(2\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - 4\vec{b}\right)$, вугал φ паміж вектарамі $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ і $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$.

56. Заданы вектары каардынатамі ў базісе $\left(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$: $\vec{m} = \{4; -2; 4\}$, $\vec{n} = \{6; -3; 2\}$, $\vec{p} = \{0; 2; 1\}$. Знайсці $\vec{m} \cdot \vec{n}$, $\vec{m} \cdot \vec{p}$, $|\vec{m}|$, $\left(\vec{m} + \vec{p}\right)^2$, $\left(2\vec{m} + 3\vec{p}\right) \cdot \left(\vec{m} - \vec{n}\right)$, вугал α паміж вектарамі $\vec{m}$ і $\vec{n}$, вугал β паміж $\vec{m}$ і $\vec{p}$.

57. Знайсці, пры якіх α вектары $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ артаганальны, калі $\vec{a} = \{2; \alpha; -\alpha\}$ і $\vec{b} = \{\alpha; -3; 3\}$.

58. Даказаць, што чатырохвугольнік з вяршынямі $A(-3; 5; 6)$, $B(1; -5; 7)$, $C(8; -3; -1)$, $D(4; 7; -2)$ квадрат.

59. Знайсці каардынаты вектара $\vec{b}$, калінеярнага вектару $\vec{a} = \{2; 1; -1\}$ пры ўмове $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$.

60. Заданы тры сілы $\vec{F_1} = \{9; 3; 4\}$, $\vec{F_2} = \{-5; 6; 2\}$, $\vec{F_3} = \{1; -5; -3\}$. Знайсці работу раўнадзейнай $\vec{R}$ гэтых сіл па перамяшчэнню матэрыяльнага пункта ад $A(-5; 4; 2)$ да $B(-3; 5; 0)$ і вугал α паміж $\vec{R}$ і вектарам перамяшчэння.

61. Вяршыні трохвугольніка ABC знаходзяцца ў пунктах $A(0; 2; 6)$, $B(3; 4; 5)$, $C(-3; 2; 2)$. Знайсці даўжыню стараны AC, медыяны AD, унутраны вугал α пры вяршыні C, знешні вугал β пры вяршыні B.

62. Заданы вектары $\vec{a}=\{4;-2;4\}$, $\vec{b}=\{2;0;-1\}$. Знайсці кіроўныя косінусы вектара $\vec{a}+\vec{b}$, $Пр_{\vec{j}}\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$, праекцыю вектара $\vec{a}$ на вось l, якая стварае с $\vec{a}$ вугал $\dfrac{2\pi}{3}$.

63. Знайсці праекцыю вектара $\overrightarrow{AB}$ на вось l, якая стварае вуглы $\alpha,\ \beta,\ \gamma$:

1) $\overrightarrow{AB}=\{4;-5;-3\}$, $\alpha=45^\circ\ \gamma=60^\circ$, β — востры вугал.;

2) $A(4;-1;5)$, $B(2;0;-3)$, $\alpha=\beta=\gamma$— тупыя вуглы.

64. Заданы пункты $A(4;3;-2)$, $B(6;-1;2)$, $C(2;2;1)$. Знайсці $Пр_{\overrightarrow{AB}}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)$, $Пр_{\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$.

65. Аб'ём тавараў фірмы можна выразіць вектарам $\vec{a}=\{510;230;340\}$, а цены за адзінку тавара — вектарам $\vec{b}=\{20;15;13\}$. Знайсці агульную цану тавара фірмы.

66. На восі абсцісс знайсці такі пункт M , каб у трохвугольніку AMB вугал пры вяршыні M быў роўным $\dfrac{\pi}{2}$, калі $A(2;2)$, $B(5;-2)$.

Б

67. Заданы вектары $\vec{a}=\{1;1\}$, $\vec{b}=\{1;-1\}$. Знайсці косінус вугла паміж вектарамі $\vec{c}$ і $\vec{d}$, задавальняючымі ўмовамі $2\vec{c}+\vec{d}=\vec{a}$, $\vec{c}+2\vec{d}=\vec{b}$.

68. Знайсці састаўляючую вектара $\vec{F}=\{2;3;5\}$ у напрамку вектара $\vec{a}=\{4;0;3\}$.

69. Знайсці каардынаты вектара $\vec{x}$, які задавальняе ўмовам $\vec{x}\perp\vec{a}$, $\vec{x}\perp\vec{b}$, $\vec{x}\cdot\vec{c}=-6$, калі $\vec{a}=\{2;3;-1\}$, $\vec{b}=\{1;-2;3\}$, $\vec{c}=\{2;-1;1\}$.

70. Да вяршыні куба прыложаны тры сілы, велічыні якіх роўны 1,2,3. Сілы накіраваны па дыяганалям граняў куба, праходзячых праз гэту вяршыню. Знайсці велічыню раўнадзейнай гэтых сіл.

71. У трохвугольніку з вяршынямі $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-1;2)$, $C(-5;6;4)$ праведзена вышыня BD. Знайсці каардынаты пункта D.

Пытанні для самакантролю

1. Скалярны здабытак вектараў — гэта велічыня вектарная, ці скалярная?

2. Калі скалярны здабытак $\vec{a}\cdot\vec{b}$ роўны нулю?

3. Ці можа праекцыя вектара на вось быць роўнай нулю?

4. Які вугал (востры, ці тупы) ствараюць ненулявыя вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$, калі 1) $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, 2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, 3) $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$?

5. Якія вуглы (вострыя, ці тупыя) стварае вектар $\vec{a}=\{-3;4;-5\}$ з восямі каардынат? Чаму роўна $Пр_{Ox}\vec{a}$?

6. Чаму роўна $Пр_{\vec{a}}\vec{F}$, калі $\left|\vec{F}\right|=6\sqrt{2}$ і $\vec{F}$ стварае з $\vec{a}$ вугал 1) $\varphi=\frac{\pi}{4}$, 2) $\varphi=\frac{\pi}{2}$, 3) $\varphi=\frac{3\pi}{4}$?

7. Работа сілы $\vec{F}$ роўна 8. Чаму роўна велічыня сілы $\vec{F}$, калі даўжыня вектара перамяшчэння $\vec{s}$ роўна 4, а вугал паміж $\vec{F}$ і $\vec{s}$ роўны $\frac{\pi}{3}$?

8. Ці можа $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{2}$, калі $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ — вуглы, якія вектар $\vec{a}$ стварае з восямі каардынат?

9. Чаму роўны каардынаты адзінкавага вектара $\vec{e}$, калі ён стварае с Ox вугал $\alpha=135^\circ$, с Oy — вугал $\beta=45^\circ$?

Рашэнне тыповых задач

<u>Задача 1.</u> Вылічыць даўжыню вектара $\vec{a}+\vec{b}$, калі $\left|\vec{a}\right|=5$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$, вугал паміж вектарамі $\vec{a}$ і $\vec{b}$ роўны $\frac{3\pi}{4}$.

<u>Рашэнне.</u> Згодна ўласцівасці скалярнага здабытку вектараў $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)}$. Тады $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$.

Маем $\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}^2\right|=25$, $\vec{b}^2=\left|\vec{b}^2\right|=2$,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi=5\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}=5\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-5,$$

значыць, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{25+2(-5)+2}=\sqrt{17}$.

Адказ: $\sqrt{17}$.

Задача 2. Дадзен трохвугольнік з вяршынямі $A(2;-3;1)$, $B(-1;2;5)$, $C(4;6;2)$. Знайсці даўжыню медыяны BD, унутраны вугал α пры вяршыне A, знешні вугал β пры вяршыні B.

Рашэнне. Медыяна BD дзеліць старану AC трохвугольніка папалам, значыць, каардынаты пункта D, як серядзіны AC, роўны палусуме адпаведных каардынат пунктаў A і C:

$$x_D = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+4}{2} = 3;\ y_D = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-3+6}{2} = \frac{3}{2};$$

$$z_D = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}\ ,\quad D(3;\frac{3}{2};\frac{3}{2}).$$

Тады медыяна BD будзе роўна

$$\left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{(3+1)^2 + \left(\frac{3}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-5\right)^2} = \sqrt{16+\frac{1}{4}+\frac{49}{4}} = \sqrt{28{,}5} \approx 5{,}34.$$

Унутраны вугал α пры вяршыне A — гэта вугал паміж вектарамі $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, значыць, $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$.

Маем: $\overrightarrow{AB} = \{-3;5;4\}$, $\overrightarrow{AC} = \{2;9;1\}$,

$$\cos\alpha = \frac{-3\cdot 2 + 5\cdot 9 + 4\cdot 1}{\sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 4^2}\cdot\sqrt{2^2+9^2+1^2}} = \frac{43}{\sqrt{50}\sqrt{86}} = \frac{\sqrt{43}}{10} \approx 0{,}656,$$

$\alpha \approx \arccos 0{,}656 = 48^\circ 59'$.

Знешні вугал β пры вяршыні B — гэта вугал паміж вектарамі $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} = \{-3;5;4\}$, $\overrightarrow{BC} = \{5;4;-3\}$;

$$\cos\beta = \frac{-3\cdot 5 + 5\cdot 4 + 4\cdot(-3)}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{50}} = -\frac{7}{50} = -0{,}14,$$

$\beta \approx \arccos(-0{,}14) = \pi - \arccos 0{,}14 \approx 98^\circ 04'$.

Адказ: $BD \approx 5{,}34, \alpha \approx 48^\circ 59', \beta \approx 98^\circ 04'$.

Задача 3. Дадзены вектар $\vec{a} = \{-2;3;-6\}$. Знайсці 1) $Пр_{l_1}\vec{a}$, калі вось l_1 стварае з $\vec{a}$ выгал $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$; 2) $Пр_{\vec{b}}\vec{a}$, калі $\vec{b} = \{0;3;4\}$; 3) $Пр_{l_2}\vec{a}$, калі вось l_2 стварае вугал $\alpha = 60^\circ$ з Ox, вугал $\beta = 45^\circ$ з Oy і тупы вугал з Oz.

Рашэнне. 1) $Пр_{l_1}\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\varphi = \sqrt{4+9+36}\cos\frac{\pi}{3} = 3{,}5$.

2) $Пр_{\vec{b}}\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cos\varphi = \left|\vec{a}\right| \cdot \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{-2\cdot 0 + 3\cdot 3 - 6\cdot 4}{\sqrt{3^2+4^2}} = -\frac{15}{5} = -3$.

3) Знойдзем косінус вугла γ, які вось l_2 стварае з Oz:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \Rightarrow \cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = 1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$\cos^2\gamma = \frac{1}{4}$. Паколькі γ — тупы вугал, $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$.

Паколькі адзінкавы вектар $\vec{e} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\} \uparrow\uparrow l_2$, маем

$$Пр_{l_2}\vec{a} = Пр_{\vec{e}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{e}}{\left|\vec{e}\right|} = \vec{a}\cdot\vec{e} = (-2)\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Адказ: 1) 3,5; 2) -3; 3) $2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

2.3. Вектарны і змешаны здабыткі вектараў

Тэарэтычныя пытанні

1. Даць азначэнне вектарнага здабытку двух вектараў.
2. Сфармуляваць галоўныя ўласцівасці вектарнага здабытку.
3. Запісаць формулу для вылічэння вектарнага здабытку па каардынатах вектараў сумножнікаў у артанармаваным базісе.
4. Сфармуляваць геаметрычны і фізічны сэнсы вектарнага здабытку вектараў.
5. Даць азначэнне змешанага здабытку трох вектараў.
6. Сфармуляваць галоўныя ўласцівасці змешанага здабытку трох вектараў.
7. Запісаць формулу для вылічэння змешанага здабытку па каардынатах вектараў сумножнікаў у артанармаваным базісе.
8. Сфармуляваць геаметрычны сэнс змешанага здабытку трох вектараў.
9. Сфармуляваць умову лінейнай незалежнасці трох вектараў.

Заданні для аўдыторнай работы

А

72. Знайсці вектарны здабытак дадзеных вектараў па азначэнню, зрабіць рысункі:

1) $\left(5\vec{i}\right)\times\left(4\vec{j}\right)$; 2) $\left(7\vec{k}\right)\times\left(2\vec{j}\right)$; 3) $\left(3\vec{k}\right)\times\left(-4\vec{i}\right)$.

73. Вылічыць $\left|\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\right|$, калі $\left|\vec{a}\right|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$, вугал паміж вектарамі $\vec{a}$ і $\vec{b}$ роўны 120°.

74. Заданы вектары каардынатамі ў базісе $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$: $\vec{a}=\{3;-1;2\}$, $\vec{b}=\{1;2;-1\}$, $\vec{c}=\{2;5;4\}$. Знайсці каардынаты вектараў 1) $\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{a}$; 2) $\left(4\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$; 3) $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\times\vec{c}$.

75. Вылічыць плошчу трохвугольніка ABC з вяршынямі $A(1;2;0)$, $B(3;0;3)$, $C(5;0;6)$.

76. Сіла $\vec{F}=\{2;4;-5\}$ прыложана ў пункце $A(4;-2;3)$. Знайсці момант $\vec{F}$ адносна пункта $B(3;2;-1)$.

77. У трохвугольніка ABC з вяршынямі $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$ знайсці вышыню BD.

78. Знайсці вектар $\vec{x}$ такі, што $\left|\vec{x}\right|=\sqrt{54}$, $\vec{x}\perp\vec{a}=\{3;1;-1\}$, $\vec{x}\perp\vec{b}=\{0;4;2\}$.

79. Знайсці плошчу паралелаграма, дыяганалямі якога з'яўляюцца вектары $\vec{e_1}+2\vec{e_2}$ і $2\vec{e_1}+5\vec{e_2}$, дзе $\vec{e_1}$ і $\vec{e_2}$ — адзінкавыя вектары і вугал паміж імі роўны $\dfrac{\pi}{6}$.

80. Тры сілы $\vec{F_1}=\{2;3;4\}$, $\vec{F_2}=\{-5;0;2\}$, $\vec{F_3}=\{6;1;-8\}$ прыложаны ў пункце $A(-1;5;2)$. Знайсці велічыню моманту раўнадзейнай гэтых сіл адносна пункта $B(1;4;0)$.

81. Знайсці змешаны здабытак $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ вектараў $\vec{a}=\{2;-1;3\}$, $\vec{b}=\{3;4;5\}$, $\vec{c}=\{1;-1;0\}$ двума спосабамі: 1) па азначэнню; 2) па формуле для змешанага здабытку праз каардынаты сумножнікаў. Даць

геаметрычну інтэрпрэтацыю рэзультату, указаць арыентацыю тройкі вектараў $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

82. Знайсці аб’ём трохвугольнай прызмы, пабудаванай на вектарах $\vec{a} = \{2;3;6\}$, $\vec{b} = \{4;-2;1\}$, $\vec{c} = \{2;0;4\}$.

83. Знайсці аб’ём піраміды з вяршынамі $A(1;-1;2)$, $B(3;6;0)$, $C(3;0;2)$, $S(4;5;1)$.

84. Праверыць ці кампланарны вектары $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

1) $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$;

2) $\vec{a} = \{8;3;2\}$, $\vec{b} = \{0;2;-1\}$, $\vec{c} = \{1;2;3\}$.

85. Знайсці вышыню паралелепіпеда, тры вяршыні якога знаходзяцца ў пунктах $A(2;0;2)$, $B(1;1;1)$, $C(2;2;2)$, $S(3;4;-3)$.

86. Праверыць, ці ляжаць пункты A, B, C, D у адной плоскасці:

1) $A(3;1;-2)$, $B(1;0;-1)$, $C(7;-3;-1)$, $D(7;-5;0)$;

2) $A(-5;-3;4)$, $B(1;4;6)$, $C(3;2;-2)$, $D(8;-2;4)$.

87. Вектары $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ узаемна перпендыкулярны і $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 8$. Знайсці іх змешаны здабытак, калі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ствараюць 1) правую тройку, 2) левую тройку.

Б

88. Заданы вектары каардынатамі ў базісе $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$: $\vec{a} = \{2;1;0\}$, $\vec{b} = \{1;-1;2\}$, $\vec{c} = \{6;2;1\}$, $\vec{d} = \{3;7;-7\}$, $\vec{r} = \{6;3;0\}$. Устанавіць, якія з вектараў $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$, $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{r})$ утвараюць вектарны базіс у прасторы; знайсці каардынаты вектара $\vec{c}$ у базісе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$.

89. Знайсці двайныя вектарныя здабыткі $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ і $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, калі $\vec{a} = \{1;2;2\}$, $\vec{b} = \{2;3;4\}$, $\vec{c} = \{5;1;3\}$.

90. Знайсці аб’ём і плошчу паверхні паралелепіпеда, пабудаванага на вектарах: $\vec{a} = \{2;0;1\}$, $\vec{b} = \{1;2;-2\}$, $\vec{c} = \{0;2;0\}$.

91. Праверыць, ці будуць кампланарнымі вектары $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{q} - 5\vec{r}$, $\vec{c} = 2\vec{p} + 5\vec{r}$, калі вектары $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ некампланарны.

92. Паказаць, што вектары $\vec{a}=\{7;6;-6\}$ і $\vec{b}=\{6;2;9\}$ могуць быць рабрамі куба, знайсці яго трэцяе рабро.

93. Заданы вектары $\vec{a}=\{1;4;8\}$ і $\vec{b}=\{1;-2;2\}$. Знайсці такі вектар $\vec{x}$, што $|\vec{x}|=1$, $\vec{x}\perp\vec{b}$, $\vec{x}$ стварае востры вугал з Oz, вектары $\vec{a},\vec{b},\vec{x}$ кампланарны.

94. Тры ненулявых вектара $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ звязаны суадносінамі $\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c}$, $\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}$, $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$. Знайсці іх даўжыні і вуглы паміж імі.

95. Аб'ём паралелепіпеда роўны V. Паказаць, што аб'ём паралелепіпеда, пабудаванага на дыяганалях граняў дадзенага паралелепіпеда, роўны 2V.

96. Даказаць, што $\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|$. Азначыць, у якім выпадку будзе знак роўнасці.

97. Даказаць, што $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$.

Заданні для самастойнай работы

А

98. Знайсці вектарны здабытак дадзеных вектараў па азначэнню, зрабіць рысункі:

1) $\left(2\vec{i}\right)\times\left(4\vec{k}\right)$; 2) $\left(-3\vec{j}\right)\times\left(5\vec{i}\right)$.

99. Вылічыць $\left|\vec{p}\times\vec{q}\right|$, калі $\vec{p}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}+0,5\vec{b}$, $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=4$, вугал паміж вектарамі $\vec{a}$ і $\vec{b}$ роўны $\dfrac{\pi}{6}$.

100. Заданы вектары каардынатамі ў базісе $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$: $\vec{a}=\{5;3;7\}$, $\vec{b}=\{2;4;0\}$, $\vec{c}=\{-3;1;2\}$. Знайсці каардынаты вектараў 1) $\vec{a}\times\vec{b}$; 2) $\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)\times\vec{a}$; 3) $\vec{c}\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$.

101. Вылічыць плошчу трохвугольніка з вяршынямі ў пунктах $A(2;1;0)$, $B(4;4;5)$, $C(2;3;4)$.

102. Сіла $\vec{F}=\{2;7;-5\}$ прыложана ў пункце $B(2;4;3)$. Знайсці момант гэтай сілы адносна пункта $M(2;0;3)$.

103. Знайсці вышыню CD трохвугольніка ABC, калі $A(2;3;7)$, $B(4;3;5)$, $C(2;3;0)$.

104. Знайсці плошчу паралелаграма, дыяганалямі якога з’яўляюцца вектары $\vec{e_1}+4\vec{e_2}$ і $5\vec{e_1}+6\vec{e_2}$, дзе $\vec{e_1}$ і $\vec{e_2}$ — адзінкавыя вектары і вугал паміж якімі роўны $\dfrac{\pi}{3}$.

105. Тры сілы $\vec{F_1}=\{-1;-2;3\}$, $\vec{F_2}=\{3;0;1\}$, $\vec{F_3}=\{2;-3;-4\}$ прыложаны ў пункце $A(3;2;-2)$. Знайсці велічыню і кіроўныя косінусы моманту раўнадзейнай гэтых сіл адносна пункта $B(3;6;-5)$.

106. Знайсці аб’ём трохвугольнай прызмы, пабудаванай на вектарах $\vec{a}=\{2;2;4\}$, $\vec{b}=\{3;4;0\}$, $\vec{c}=\{4;7;8\}$.

107. Знайсці вектар $\vec{x}$ такі, што $|\vec{x}|=1$, $\vec{x}\perp\vec{a}=\{3;0;1\}$, $\vec{x}\perp\vec{b}=\{9;2;2\}$ і стварае с Ox тупы вугал.

108. Знайсці аб’ём паралелепіпеда з вяршынамі ў пунктах $M_1(2;3;-1)$, $M_2(2;4;3)$, $M_3(6;6;6)$, $M_4(4;4;-2)$.

109. Праверыць, ці з’яўляюцца вектары $\vec{a}=\{-2;-1;1\}$, $\vec{b}=\{4;-4;1\}$, $\vec{c}=\{4;-6;2\}$ кампланарнымі.

110. Праверыць, ці ляжаць пункты $A(2;3;1)$, $B(2;-1;0)$, $C(-1;0;4)$, $D(1;3;3)$ у адной плоскасці.

111. Вектары $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ узаемна перпендыкулярны і ствараюць правую тройку. Ведаючы, што $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=6$, $|\vec{c}|=7$, вылічыць змешаны здабытак вектараў $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

112. Знайсці вышыню SD піраміды з вяршынямі ў пунктах $A(2;-3;0)$, $B(2;4;0)$, $C(-2;0;1)$, $S(-1;3;5)$.

113. Заданы вектары $\vec{a}=\{2;3;6\}$, $\vec{b}=\{3;4;0\}$, $\vec{c}=\{0;-1;1\}$. Знайсці змешаны здабытак $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ і арыентацыю гэтай тройкі вектараў; сінус вугла α паміж $\vec{b}$ і $\vec{c}$; косінус вугла β паміж вектарамі $\vec{a}$ і $\vec{c}$.

Б

114. Аб’ём тэтраэдра V=5, тры яго вяршыні знаходзяцца ў пунктах $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$, а чацвертая D — на восі Oy. Знайсці каардынаты D.

115. Заданы вектары каардынатамі ў базісе $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$: $\vec{a}=\{2;1;-1\}$, $\vec{b}=\{1;-1;2\}$, $\vec{c}=\{3;-2;1\}$, $\vec{d}=\{7;-1;4\}$. Устанавіць, якія з трояк вектараў $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, $(\vec{a},\vec{b},\vec{d})$ ствараюць базіс у прасторы; знайсці каардынаты вектара $\vec{d}$ у базісе $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

116. Знайсці аб’ём і плошчу паверхні паралелепіпеда, пабудаванага на вектарах: $\vec{a}=\{1;0;2\}$, $\vec{b}=\{1;1;0\}$, $\vec{c}=\{2;0;1\}$.

117. Паказаць, што вектары $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+m\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+(m+1)\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+m\vec{k}$ ні пры якім значэнні m не будуць кампланарны.

118. Заданы вектары $\vec{a}=\{8;4;1\}$ і $\vec{b}=\{2;-2;1\}$. Знайсці такі вектар $\vec{c}$, што $\vec{c}\perp\vec{a}$, $|\vec{c}|=|\vec{a}|$, $\vec{c}$ стварае з $\vec{b}$ тупы вугал, вектары $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ кампланарны.

119. Вядома, што $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$, вугал паміж вектарамі $\vec{a}$ і $\vec{b}$ роўны $\frac{\pi}{4}$. Вылічыць плошчу трохвугольніка, пабудаванага на вектарах $\vec{a}-2\vec{b}$ і $3\vec{a}+2\vec{b}$.

120. Даказаць, што калі $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}$, $\vec{a}\neq\vec{0}$, то $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{0}$.

121. Даказаць, што $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$.

122. Даказаць, што калі $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{a}^2\cdot\vec{b}$.

Пытанні для самакантролю

1. Ці можа вектарны здабытак двух ненулявых вектараў быць нулявым вектарам?

2. Ці можа $|\vec{a}\times\vec{b}|$ быць больш, чым $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$? У якім выпадку $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$?

3. Які вугал ствараюць вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$, калі $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$?

4. Чаму роўны змешаны здабытак трох вектараў, калі два з іх калінеярны?

5. Чаму роўны змешаны здабытак кампланарных вектараў?

6. З дапамогай якога здабытку вектараў можна вылічыць 1) плошчу трохвугольніка; 2) аб'ём паралелепіпеда, 3) аб'ём тэтраэдра; 4) момант сілы адносна пункта; 5) плошчу паралелаграма?

7. Вектары $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ з'яўляюцца старанамі выпуклага чатырохвугольніка. Ці можна з дапамогай вектарнага здабытку вылічыць плошчу гэтага чатырохвугольніка?

8. Ці можа $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\vec{0}$, калі вектары $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ствараюць базіс у прасторы?

Рашэнне тыповых задач

Задача 1. Сіла $\vec{F}=\{2;0;4\}$ прыложана да пункта $A(5;4;1)$. Знайсці момант гэтай сілы адносна пункта $B(2;-1;3)$ і яго вялічыню.

Рашэнне. Момант $\vec{M}$ сілы $\vec{F}$ адносна пункта B знаходзіцца па формуле $\vec{M}=\overrightarrow{BA}\times\vec{F}$.

Знойдзем каардінаты вектара $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{BA}=\{3;5;-2\}$.

Тады момант $\vec{M}$ будзе роўны

$$\vec{M}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 5 & -2\\ 2 & 0 & 4\end{vmatrix}=20\vec{i}-16\vec{j}-10\vec{k}=\{20;-16;-10\},$$

$$\left|\vec{M}\right|=\sqrt{20^2+16^2+10^2}=6\sqrt{21}.$$

Адказ: $\vec{M}=\{20;-16;-10\},\left|\vec{M}\right|=6\sqrt{21}$.

Задача 2. Трохвугольнік ABC задан вяршынямі $A(-2;0;3)$, $B(-2;2;1)$, $C(2;2;3)$. Знайсці плошчу трохвугольніка і вышыню h, праведзеную з вышыні B.

Рашэнне. Плошча трохвугольніка ABC знаходзіцца па формуле $S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Знойдзем каардынаты вектараў $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і іх вектарны здабытак: $\overrightarrow{AB}=\{0;2;-2\}$; $\overrightarrow{AC}=\{4;2;0\}$;

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 2 & -2\\ 4 & 2 & 0\end{vmatrix}=4\vec{i}-8\vec{j}-8\vec{k}=\{4;-8;-8\}.$$

Тады $S_{\Delta}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4^2+8^2+8^2}=\dfrac{1}{2}\cdot 12=6$ (ед.^{2}).

Каб знайсці вышыню трохвугольніка, выкарастаем формулу для плошчы $S_{\Delta}=\dfrac{1}{2}h\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|$. Тады $h=\dfrac{2S_{\Delta}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{2\cdot 6}{\sqrt{4^2+2^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$ (лін.ед)

<u>Адказ:</u> $S_{\Delta}=6$ (ед.^{2}), $h=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$ (лін.ед).

<u>Задача 3.</u> Знайсці аб'ём піраміды, вяршыны якой знаходзяцца ў пунктах $A(0;3;2)$, $B(2;2;-2)$, $C(2;-2;3)$, $D(3;4;-6)$.

<u>Рашэнне.</u> Аб'ём піраміды, пабудаванай на вектарах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, роўны $V=\dfrac{1}{6}\left|\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)\right|$. Знойдзем каардынаты вектараў $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ і іх змешаны здабытак: $\overrightarrow{AB}=\{2;-1;-4\}$; $\overrightarrow{AC}=\{2;-5;1\}$; $\overrightarrow{AD}=\{3;1;-8\}$;

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}2 & -1 & -4\\ 2 & -5 & 1\\ 3 & 1 & -8\end{vmatrix}=2\cdot 39-19-4\cdot 17=-9.$$

Тады $V=\dfrac{1}{6}\left|-9\right|=1{,}5$ (ед.^{3}).

<u>Адказ:</u> $V=1{,}5$ (ед.^{3}).

<u>Задача 4.</u> Паказаць, што пункты $A(1;2;0)$, $B(3;0;1)$, $C(4;3;4)$, $D(2;-3;-2)$ ляжаць у адной плоскасці.

<u>Рашэнне.</u> Пункты A,B,C,D ляжаць у адной плоскасці, калі вектары $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ кампланарны. Вектары $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ кампланарны, калі іх змешаны здабытак роўны нулю. Знойдзем каардынаты вектараў $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ і іх змешаны здабытак:

$\overrightarrow{AB}=\{2;-2;1\}$; $\overrightarrow{AC}=\{3;1;4\}$; $\overrightarrow{AD}=\{1;-5;-2\}$;

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & -5 & -2\end{vmatrix}=2\cdot 18+2\cdot(-10)-16=0.$$

Значыць, пункты A, B, C, D ляжаць у адной плоскасці.

2.4. Уласныя вектары і ўласныя лікі лінейнага аператара A (матрыцы A)

Тэарэтычныя пытанні

1. Даць азначэнне ўласнага вектара лінейнага аператара A (матрыцы A).
2. Даць азначэнне ўласнага ліку лінейнага аператара A (матрыцы A).
3. Даць азначэнне характарыстычнага мнагаскладу аператара A (матрыцы A).
4. Даць азначэнне характарыстычнага раўнання аператара A (матрыцы A).
5. Сфармуляваць алгарытм знаходжання ўласных лікаў і ўласных вектараў аператара A (матрыцы A).
6. Матэматычная мадэль якога эканамічнага працэсу прыводзіць да паняцця ўласнага вектара і ўласнага ліку матрыцы?

Заданні для аўдыторнай работы

А

123. Знайсці характарыстычны мнагасклад і характарыстычнае раўнанне лінейнага аператара, калі яго матрыца ў прамавугольным базісе мае выгляд:

1) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 3\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

124. Знайсці ўласныя лікі лінейнага аператара, матрыца якога ў прамавугольным базісе мае выгляд:

1) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}4 & -5\\ 0 & 4\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 6\end{pmatrix}$.

125. Знайсці ўласныя лікі і ўласныя вектары лінейнага аператара, матрыца якога ў прамавугольным базісе мае выгляд:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

126. Заданы матрыца лінейнага аператара і вектары. Вызначыць, якія з дадзенных вектараў з'яўляюцца ўласнымі для гэтай матрыцы:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Б

127. Знайсці ўласныя лікі і ўласныя вектары лінейнага аператара, матрыца якога мае выгляд: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

128. Даказаць што $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ з'яўляецца характарыстычным мнагаскладам лінейнага аператара, матрыца якога мае выгляд $\begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

129. Знайсці ўласныя лікі дадзенай матрыцы а) у полі рэчаісных лікаў (R); б) у полі камплексных лікаў (C)

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

130. Паказаць, што матрыца A мае ўласны лік $\lambda = a$, або $\lambda = -a$, калі A^2 мае ўласны лік $\lambda = a^2$.

Заданні для самастойнай работы

А

131. Знайсці характарыстычны мнагасклад і характарыстычнае раўнанне лінейнага аператара, калі яго матрыца мае выгляд:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

132. Знайсці ўласныя лікі лінейнага аператара, матрыца якога мае выгляд:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

133. Знайсці ўласныя лікі і ўласныя вектары лінейнага аператара, матрыца якога мае выгляд:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

134. Заданы матрыца лінейнага аператара і вектары. Вызначыць, якія з дадзенных вектараў з'яўляюцца ўласнымі для гэтай матрыцы:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Б

135. Знайсці ўласныя лікі і ўласныя вектары лінейнага аператара, матрыца якога мае выгляд: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

136. Знайсці ўласныя лікі дадзенай матрыцы а) у полі рэчаісных лікаў (R); б) у полі камплексных лікаў (C)

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

137. Паказаць, што калі лінейны аператар A нявыраджаны, A і A^{-1} маюць аднолькавыя ўласныя вектары.

138. Паказаць, што лінейны аператар у рэчаіснай вектарнай прасторы няцотнага памеру заўсёды мае хоць бы адзін уласны вектар.

Пытанні для самакантролю

1. Ці залежыць характарыстычны мнагасклад лінейнага аператара ад выбару базіса?
2. У якім базісе матрыца лінейнага аператара мае дыяганальны выгляд?
3. Якая залежнасць існуе паміж парадкам матрыцы лінейнага аператара і паказнікам ступені яго характарыстычнага мнагаскладу?
4. Ці заўсёды ўласныя лікі лінейнага аператара з’яўляюцца рэчаіснымі?
5. Вядома, што ўласныя вектары x_1, x_2, x_3 маюць розныя ўласныя лікі. Ці можна сцвярджаць, што яны лінейна незалежныя?
6. Які эканамічны сэнс маюць элементы структурнай матрыцы таргоўлі?
7. Чаму сума элементаў кожнага слупка структурнай матрыцы таргоўлі роўна 1?
8. Якія суадносіны павінны быць паміж нацыянальнымі даходамі некалькіх краін для сбалансаванай таргоўлі гэтых краін?

Рашэнне тыповых задач

<u>Задача 1.</u> Знайсці ўласныя лікі і ўласныя вектары лінейнага аператара, матрыца якога мае выгляд: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>Рашэнне.</u> Саставім характарыстычнае раўнанне

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$.

Уласныя лікі лінейнага аператара роўны $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$. Знойдзем уласны вектар $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ адпавядаючы ўласнаму ліку $\lambda_1 = -1$.

Сістэма для знаходжання каардынат вектара X_1 мае выгляд:

$$\begin{cases} (1-\lambda_1)x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + (2-\lambda_1)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2}x_2.$$

Няхай $x_2 = 2c_1,\ c_1 \neq 0$, тады $x_1 = -3c_1$ і ўласны вектар X_1 мае выгляд: $X_1 = \begin{pmatrix} -3c_1 \\ 2c_1 \end{pmatrix}$, або $X_1 = c_1\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c_1 \neq 0$.

Аналагічна знаходзім уласны вектар X_2, адпавядаючы ўласнаму ліку $\lambda_2 = 4$.

$$\begin{cases} (1-\lambda_2)x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + (2-\lambda_2)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Няхай $x_1 = x_2 = c_2,\ c_2 \neq 0$, тады ўласны вектар X_2 мае выгляд: $X_2 = c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_2 \neq 0$.

<u>Адказ:</u> $\lambda_1 = -1$, $X_1 = c_1\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c_1 \neq 0$; $\lambda_2 = 4$, $X_2 = c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_2 \neq 0$.

<u>Задача 2.</u> Структурная матрыца таргоўлі трох краін $S_1,\ S_2,\ S_3$ мае выгляд: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Знайсці нацыянальныя даходы гэтых краін для сбалансаванай таргоўлі.

<u>Рашэнне.</u> Калі $S_1,\ S_2,...,\ S_n$ краіны з нацыянальнымі даходамі $x_1,\ x_2,...,\ x_n$ адпаведна, якія таргуюць паміж сабой, тады матрыцу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

дзе a_{ij} — частка нацыянальнага даходу x_j, якую краіна S_j траціць на куплю тавару ў краіны S_i, называюць структурнай матрыцай таргоўлі.

Будзем лічыцць, што ўвесь нацыянальны даход траціцца на куплю тавараў у сваей краіне, або на імпарт з другіх краін. Тады павінны мець месца ўмовы $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=1,\ \left(j=\overline{1,n}\right)$. Такім чынам сума элементаў кожнага слупка структурнай матрыцы таргоўлі роўна 1.

Для кожнай краіны S_i выручка p_i ад унутранай і знешняй таргоўлі будзе роўна $p_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n$.

Для сбалансаванай таргоўлі кожнай краіны S_i патрэбна, каб выручка p_i была не меньшай за яе нацыянальны даход: $p_i \geq x_i$.

З другога боку выручка p_i не можа быць больш x_i, $\left(i=\overline{1,n}\right)$, паколькі ўсе краіны не могуць адначасова атрымоўваць прыбытак. Значыць, павінны выконвацца ўмовы $p_i=x_i$, $\left(i=\overline{1,n}\right)$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=x_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=x_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=x_n \end{cases}$$

Гэту сістэму магчыма запісаць у выглядзе: $A \cdot X = X$, дзе $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектар нацыянальных даходаў краін.

Такім чынам, каб знайсці вектар нацыянальных даходаў краін, трэба, знайсці ўласны вектар структурнай матрыцы таргоўлі, адпавядаючы ўласнаму ліку $\lambda = 1$.

Запішам характарыстычнае раўнанне і знойдзем уласныя лікі дадзенай матрыцы. Маем

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & -\lambda & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\lambda + \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{4}\lambda = 0 \Rightarrow \lambda^3 - \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4} = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1/2, \lambda_3 = -1/2$.

Знойдзем уласны вектар X, адпавядаючы ўласнаму ліку $\lambda = 1$. Саставім сістэму для знаходжання каардынат вектара X:

$$\begin{cases} -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ \quad -\frac{3}{4}x_2 + \frac{5}{6}x_3 = 0 \\ \quad \frac{3}{2}x_2 - \frac{5}{3}x_3 = 0 \end{cases}.$$

Тады $x_2 = \frac{10}{9}x_3$, $x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{8}{9}x_3$. Калі $x_3 = 9c$, тады $x_2 = 10c$, $x_1 = 8c$, і ўласны вектар X мае выгляд: $X = c\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$, $c \neq 0$.

Такім чынам, сбалансаванасць таргоўлі трох краін будзе тады, калі вектар нацыянальных даходаў мае выгляд $X = c\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$, $c \neq 0$.

Інакш кажучы, для сбалансаванай таргоўлі гэтых краін неабходна, каб суадносіны іх нацыянальных даходаў былі 8:10:9.

<u>Адказ:</u> 8:10:9.

АДКАЗЫ
Глава 1

1.1) $A_{3\times1}$; 2) $A_{4\times3}$; 3) $A_{3\times3}$; 4) $A_{2\times3}$; 5) $A_{1\times5}$. **2.**1) матрыца-радок—4); 2) матрыца-слупок — 6); 3) квадратная — 2),3),5),7); 4) адзінкавая — 3);5) нулявая — 4),7). **3.** 1) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, C^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, D^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$;

2)не існуюць: $A \pm C$, $B \pm C$, $C \pm C^T$; 3) $3A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 \\ 12 & 0 & 21 \end{pmatrix}$,

$-4C = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -16 & -20 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 4 \\ 12 & 2 & 10 \end{pmatrix}$, $A - B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -8 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$,

$3A + C^T = \begin{pmatrix} 1 & 13 & -9 \\ 13 & 5 & 23 \end{pmatrix}$, $2A^T - 4C = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -10 & -20 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$. **4.** 1)$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -31 & -8 \\ -2 & 20 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$;

2)$\begin{pmatrix} -8 & -3 & 10 & 3 & 43 \end{pmatrix}$. **5.** $X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. **6.** Існуюць: $(B \cdot A)_{2\times3}$,

$(A \cdot C)_{2\times3}$, $(A \cdot D)_{2\times1}, C^2_{3\times3}$. **7.** $A \cdot D = \begin{pmatrix} -9 \\ 25 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} -19 & 2 & 17 \\ 6 & -3 & -8 \end{pmatrix}$,

$A \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 17 & -8 & -3 \end{pmatrix}$, $C^2 = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 19 \\ 9 & -9 & -6 \\ 14 & 7 & 12 \end{pmatrix}$. 8. 1) $A \cdot B = (8)$,

$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 8 & -12 & 16 \\ 10 & -15 & 20 \end{pmatrix}$; 2) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 9 \\ 10 & 21 & -7 \\ -4 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 \\ 7 & 6 & 17 \\ 22 & -4 & 16 \end{pmatrix}$;

3) $B\cdot A=\begin{pmatrix}7 & 5\\ 4 & 10\\ 18 & 4\end{pmatrix}$, $A\cdot B$ — не існуе. **9.** 1) $X_{3\times4}$; 2) $X_{2\times3}$. **10.** $\begin{pmatrix}10\\ 15\\ 25\\ 35\end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix}9 & 7\\ 2 & 9\end{pmatrix}$. **13.** $\begin{pmatrix}18 & 18 & 18\\ 18 & 18 & 18\\ 18 & 18 & 18\end{pmatrix}$. **14.** $\begin{pmatrix}a & 2b\\ 3b & a+3b\end{pmatrix}$, $a,\ b\in R$. **15.** $\begin{pmatrix}a & -a^2/c\\ c & -a\end{pmatrix}$, $a,\ c\in R$. **17.** 1) $A_{3\times4}$, $A_{2\times3}$; 2) матрыца-радок — 4); 3) матрыца-слупок — 3); 4) адзінкавая матрыца — 6); 5) нулявая матрыца — 5); 6) квадратныя матрыцы — 2), 6). **18.** 1) $A^T=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & 4\\ 3 & 5 & 1 & 6\end{pmatrix}$, $B^T=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -7\\ -1 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$; 2) $4A=\begin{pmatrix}-4 & 12\\ 8 & 20\\ 0 & 4\\ 16 & 24\end{pmatrix}$,

$-2B=\begin{pmatrix}-6 & -2 & 2 & 0\\ -4 & 14 & -8 & -6\end{pmatrix}$; 3) $A+C=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 0 & 8\\ -3 & 3\\ 4 & 7\end{pmatrix}$, $2A-3C=\begin{pmatrix}-17 & 3\\ 10 & 1\\ 9 & -4\\ 8 & 9\end{pmatrix}$;

4) $A+C+B^T=\begin{pmatrix}7 & 6\\ 1 & 1\\ -4 & 7\\ 4 & 10\end{pmatrix}$. **19.** 1) $\begin{pmatrix}11 & 15\\ -15 & 3\\ 3 & 33\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-1 & 9 & 8\\ 12 & 5 & 10\\ 23 & -9 & -7\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}7\\ 5\\ 9\\ -7\end{pmatrix}$.

20. 1) $A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -9 & 11\\ -4 & 8\end{pmatrix}$, $B\cdot A$ — не існуе; 2) $B\cdot A=\begin{pmatrix}14 & 2 & 6\\ 35 & 3 & 7\end{pmatrix}$, $A\cdot B$ — не існуе; 3) $A\cdot B=\begin{pmatrix}14 & 31\\ 18 & 32\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}-6 & 4 & -7\\ -11 & 5 & 14\\ -9 & 1 & 47\end{pmatrix}$; 4) $A\cdot B=(12)$,

$B\cdot A=\begin{pmatrix}-2&-4&-6\\4&8&12\\6&12&18\end{pmatrix}$. **21.** $\begin{pmatrix}-3\\5\\6\end{pmatrix}$. **22.** $\begin{pmatrix}-8&0&3\\-9&7&9\\-9&6&-8\end{pmatrix}$. **23.** $\begin{pmatrix}1&b\\0&-1\end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix}1&0\\c&-1\end{pmatrix}$, $b,c\in R$. **24.** $\begin{pmatrix}a&3b\\-5a&a+9b\end{pmatrix}$, $a,\ b\in R$. **25.** $\begin{pmatrix}\cos n\alpha&\sin n\alpha\\-\sin n\alpha&\cos n\alpha\end{pmatrix}$.
26. $\begin{pmatrix}4&8&2\\0&1&0\\2&5&2\end{pmatrix}$. **27.** $A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$, $n,m\in N$. **28.** 1) 11; 2) 0; 3) -14; 4) $7a$; 5)360; 6) -225; 7) $-\cos 2\alpha$; 8) 0. **29.** 1) 21; 2) 136; 3)-22; 4) 1; 5) 0;6)-100; 7) 5; 8) 12; 9) -12; 10) 1; 11) $abcd$; 12) 75. **30.** 1) 5; 2) $\left\{1;\ ^1/_3\right\}$; 3) $[0;3]$; 4) $(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$; 5) $\left\{-\sqrt{6};\sqrt{6}\right\}$; 6) $\left(^1/_4;2\right)$. **31.** Памножыцца на $(-1)^n$. **32.** Дэтэрмінант не зменіцца. **33.** 1) $(a-b)(b-c)(c-a)$; 2) 0; 3)1; 4) 90; 5) -150; 6) -1; 7) $^{28}/_{81}$; 8) 1. **34.** Не зменіцца. **35.** Памножыцца на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. **36.** 1)$(-\infty;1]\cup[4;\infty)$; 2) $\left\{-\sqrt{2};1;\sqrt{2};\ ^3/_2\right\}$.
37.1) 13; 2) 32; 3) -53; 4) $\sin(\alpha-\beta)$; 5) -4000; 6) $^1/_{\cos^2\alpha}$; 7) -23; 8) 16; 9) -8; 10) 1; 11)-206; 12) 300; 13) 0; 14) -40; 15) -106. **38.** 1) $\left\{-\ ^1/_4;2\right\}$; 2)$[0;7]$; 3)$\{0;5,5\}$; 4) $(-\infty;-6)\cup(-4;\infty)$. **39.** 0. **40.** Памножыцца на λ^n.
41. 1) 8; 2) -140; 3) 0; 4) $\sin 2\alpha$; 5) -1215; 6) -400. **42.** 1) $\{-1;0\}$; 2)$\left(^3/_4;1\right)\cup(3;\infty)$. **43.** Будзе роўны нулю. **44.** $\exists B^{-1}$. **45.** 1)$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-3\\-2&1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}\cos 2\alpha&\sin 2\alpha\\-\sin 2\alpha&\cos 2\alpha\end{pmatrix}$; 3) не існуе; 4) $\begin{pmatrix}7&-1&-5\\-3&1&2\\-4&1&3\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}$; 6) не існуе; 7) $\begin{pmatrix}-8&29&-11\\-5&18&-7\\1&-3&1\end{pmatrix}$; 8) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-3&1&9\\-5&-3&8\\-4&-1&5\end{pmatrix}$;

9) $\frac{1}{48}\begin{pmatrix} -10 & 12 & -10 \\ -17 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. **46.** 1) $r=2$; 2) $r=1$; 3) $r=3$; 4) $r=2$; 5) $r=3$; 6) $r=2$. **47.** $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ -b/ac & 1/c \end{pmatrix}$. **50.** У A^{-1} і-ый слупок памножыцца на $1/\lambda$. **51.** 1) $X=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $X=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **52.** 1) $r=1$, калі $\lambda=7$; $r=2$, калі $\lambda=5$; $r=3$, калі λ іншы лік; 2) $r=2$, калі $\lambda=3$; $r=3$, калі $\lambda\neq 3$. **53.** $\exists B^{-1}$. **54.** 1) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$; 2) не існуе; 3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin 2\alpha & -\cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha & \frac{1}{2}\sin 2\alpha \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$; 6) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. **55.** 1) $r=2$; 2) $r=1$; 3) $r=3$; 4) $r=3$; 5) $r=3$; 6) $r=2$. **56.** У матрыцы A^{-1} памяняюцца месцамі і-ый і j-ый слупкі. **57.** 1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. **58.** $r=2$, калі $\lambda=1$; $r=3$, калі $\lambda=2$ і $\lambda=3$; $r=4$, калі λ іншы лік. **59.** $\lambda\neq -8$; $\lambda\neq 1$. **60.** 1) (3;-4); 2)$\varnothing$; 3)$\left(c; 2c+3/2\right)$, $c\in R$. **61.** 1) (-3;5); 2) (-2;-1) , калі $a\neq -2$; 3) (3;-1;1); 4) (3;-2;2); 5) не выкананы ўмовы прымянення метадаў; 6) (2;0;1); 7) $\left(21/8; 7/8; 35/8\right)$; 8) (0;0;0). **62.** 1) (1;0;2); 2) (1;-3;2); 3) (4;5;-3); 4)$\left(\frac{38}{11}c; -\frac{12}{11}c; c\right)$,$c\in R$; 5) $\varnothing$; 6) (1;0;-1;2). **63.** $(-c_1-c_2; c_1; c_2), c_1, c_2\in R$, калі $\lambda=1$; $(c;c;c), c\in R$, калі $\lambda=-2$. **64.** $\left(\cos(\alpha+\beta); \sin(\alpha+\beta)\right)$.

65. 1) $\left(\frac{4+2c}{3};\frac{7-c}{3};c\right), c\in R$; 2) $\left(\frac{5+5c_1-9c_2}{7};\frac{13-c_1-8c_2}{7};c_1;c_2\right)$, $c_1,c_2\in R$; 3) $(-c-1;c+1;c)$, $c\in R$; 4) $(c_1;c_2;6-15c_1+10c_2;-7+18c_1-12c_2)$, $c_1,c_2\in R$; 5) $\left(\frac{1}{2};-\frac{2}{7};\frac{3}{14}\right)$; 6) (3;2;1); 7) (-14;11,5;3); 8) $(-c_1+2c_2;-1-2c_1+4c_2;-3-6c_1+10c_2;c_1;c_2)$, $c_1,c_2\in R$. **66.** Сістэма несумяшчальна, калі $\lambda=-2$; $(1-c_1-c_2;c_1;c_2)$, $c_1,c_2\in R$, калі $\lambda=1$; $\left(\frac{1}{\lambda+2};\frac{1}{\lambda+2};\frac{1}{\lambda+2}\right)$, калі λ іншы лік. **67.** $A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$, $A^*=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$ 1) $r_A=r_{A^*}=3$; 2) $r_A=r_{A^*}=2$; 3) $r_A\neq r_{A^*}$. **68.** Сістэма несумяшчальна, калі $a=b, c\neq d$; $(1-c_1-c_2;c_1;c_2)$, $c_1,c_2\in R$, калі $a=b=c=d$; $\left(\frac{a-c}{a-b};\frac{c-d}{a-b};\frac{d-b}{a-b}\right)$, калі $a\neq b$. **69.** 1) $X(c_1,c_2)=\left(c_1;c_2;-\frac{5}{2}c_1+5c_2;\frac{7}{2}c_1-7c_2\right), c_1,c_2\in R$; $E_1=\left(1;0;-\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$, $E_2=(0;1;5;-7)$; 2) $X(c_1,c_2,c_3)=(c_1+c_2+3c_3;-2c_1-2c_2-3c_3;c_1;c_2;c_3)$, $c_1,c_2,c_3\in R$ $E_1=(1;-2;1;0;0)$, $E_2=(1;-2;0;1;0)$, $E_3=(3;-3;0;0;1)$; 3) $X(c_1,c_2)=(-3c_1-5c_2;2c_1+3c_2;c_1;c_2), c_1,c_2\in R$; $E_1=(-1;2;1;0)$, $E_2=(-5;3;0;1)$; 4) (0;0;0;0). **70.** 1) (3;-2); 2) $\left(c;\frac{c}{2}-\frac{3}{2}\right)$, $c\in R$; 3) $\varnothing$. **71.** 1) (2;3); 2) (-2;3;5); 3) (2;-1;1); 4) не выкананы ўмовы прымянення метадаў; 5) (0;3;-3); 6) (2;1;3). **72.** 1) (-2;1;1); 2) (13;0;1); 3) $\left(\frac{1}{5};1;\frac{1}{5}\right)$; 4) $\varnothing$; 5) $(c;c;-c)$, $c\in R$; 6) (0;2;1;-1). **73.** 1) $\varnothing$, калі $a=-4; b\neq-6$; $\left(\frac{3+5c}{2};c\right)$, $c\in R$, калі $a=-4; b=-6$; $\left(\frac{b+6}{a+4};\frac{2b-3a}{5a+20}\right)$, калі $a\neq-4$; 2)(0;0;0), калі $\lambda\neq3$; $(-1{,}8c;1{,}4c)$, $c\in R$, калі $\lambda=3$. **74.** 1)

$\left(-\dfrac{c+3}{7};\dfrac{4c+19}{7};c\right)$, $c\in R$; 2) $\left(7-c_1+2c_2;-6+c_1-c_2;c_1;c_2\right)$, $c_1,c_2\in R$; 3) $\varnothing$; 4) $\left(c_1;c_2;6-15c_1+10c_2;-7+18c_1-12c_2\right)$, $c_1,c_2\in R$; 5) $\left(c-1;2-c;c\right)$, $c\in R$; 6)(1;0;2). **75.** $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}=\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}=2$.

76. $\left(c-4;5,5-2c;c\right)$, $c\in R$, калі $\lambda=5$; $\varnothing$, калі $\lambda\neq 5$. **77.** 1) $X\left(c\right)=\left(2c;-3c;c\right)$, $c\in R$; $\mathrm{E}=\left(2;-3;1\right)$; 2) $X\left(c_1,c_2\right)=\left(8c_1-7c_2;-6c_1+5c_2;c_1;c_2\right)$, $c_1,c_2\in R$; $\mathrm{E}_1=\left(8;-6;1;0\right)$, $\mathrm{E}_2=\left(-7;5;0;1\right)$; 3) $X\left(c_1,c_2,c_3\right)=\left(c_1-c_2;c_1-c_3;c_1;c_1;c_2;c_3\right)$, $c_1,c_2,c_3\in R$ $\mathrm{E}_1=\left(1;1;1;1;0;0\right)$, $\mathrm{E}_2=\left(-1;0;0;0;1;0\right)$, $\mathrm{E}_3=\left(0;-1;0;0;0;1\right)$; 4) (0;0;0).

Глава 2

3. $\vec{e_1}=0,2\vec{a}$, $\vec{e_2}=-0,2\vec{a}$. **4.** $\overrightarrow{MA}=-0,5\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, $\overrightarrow{MB}=0,5\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$, $\overrightarrow{MC}=0,5\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, $\overrightarrow{MD}=0,5\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$. **5.** 1) $\vec{a}=\{4;0\}$; $\vec{b}=\{0;3\}$; $\vec{c}=\{4;3\}$; $\vec{p}=\{-1;1\}$; $\vec{q}=\{-1;-1\}$; 2) $\left(\vec{a};\vec{b}\right)$; $\left(\vec{a};\vec{c}\right)$; $\left(\vec{p};\vec{q}\right)$; $\left(\vec{b};\vec{c}\right)$ ствараюць базіс на плоскасці; 3) $\vec{i}=\{1;0\}$; $\vec{j}=\{0;1\}$ у базісе $\left(\vec{i};\vec{j}\right)$; $\vec{i}=\{-0,5;-0,5\}$; $\vec{j}=\{0,5;-0,5\}$ у базісе $\left(\vec{p};\vec{q}\right)$. **6.** $\vec{a}=\{-2;6;4\}$; $\vec{b}=\{1;2;0\}$; $\vec{c}=\{0;1;-1\}$; тройкі $\left(\vec{i};\vec{b};\vec{j}\right)$, $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{c}\right)$ ствараюць базіс у прасторы. **7.** 1) $\vec{a}\,//\,\vec{q}$, $\vec{b}\,//\,\vec{p}$, $\vec{a}+\vec{b}=\{3;3\}$, $\vec{a}-\vec{c}=\{-3;-6\}$, $2\vec{p}+3\vec{q}=\{-18;16\}$; 2) $\vec{c}=4\vec{p}-\vec{q}$; 3) $\vec{p}=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right\}$. **8.** $\vec{a}\,//\,\vec{c}$, $\vec{d}=\{9;-12;33\}$. **9.** 1) $\vec{p}=-0,5\vec{q}$; $\alpha=3$; $\beta=2$; 2) $\vec{p}=3\vec{q}$; $\alpha=-2$; $\beta=6$. **11.** $A\left(2;9;-2\right)$. **12.** 1) $\overrightarrow{OC}=\{1;-2;1\}$; $\overrightarrow{AB}=\{-1;-4;1\}$; 2) $A\left(1;1;0\right)$, $B\left(0;-3;1\right)$, $O_1\left(0,5;-1;0,5\right)$. **13.** 1) $\vec{a}\,//\,\vec{b}$; 2) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, $\left|\vec{a}\right|\neq 0$, $\left|\vec{b}\right|\neq 0$. **15.** $\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{m}+\vec{p}\right)$.**16.** $C\left(-2;-7\right)$. **17.** $D\left(6;10;8\right)$.

18. $\vec{r}=\{-1;3;1\}$. **20.** $\left\{\frac{10}{3};-\frac{1}{3};3\right\}$. **21.** $\overrightarrow{SO_1}=\dfrac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$. **22.** $\overrightarrow{AA_1}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, $\overrightarrow{BB_1}=\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{CC_1}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$. **23.** 1) $2\vec{m}=\{8;-6\}$;

$-3\vec{n}=\{-6;-15\}$; $\vec{m}+\vec{n}=\{6;2\}$; $4\vec{n}-2\vec{p}=\{24;8\}$; 3) $\vec{m}//\vec{p}$; 3) $(\vec{m};\vec{n})$; $(\vec{n};\vec{p})$; 4) $\vec{d}=\{2;1\}$. **24.** 1) $\vec{a}=\{5;-2;3\}$; 2) $\vec{a}//\vec{c}$; 3) $\vec{a}+\vec{b}=\{12;1;5\}$, $2\vec{b}=\{14;6;4\}$; $\vec{b}-\vec{c}=\{17;-1;8\}$; $3\vec{b}+\vec{c}=\{11;13;0\}$. **25.** 1) $\vec{b}=2\vec{a}$, $\alpha=4$; $\beta=-8$; 2) $\vec{b}=-3\vec{a}$, $\alpha=-2/3$; $\beta=-6$. **27.** 1) $\vec{a}\perp\vec{b}$; 2) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; 3) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, $|\vec{a}|>|\vec{b}|$. **28.** $\alpha=2$; $\beta=3$; $\gamma=5$. **29.** $D(9;-5;6)$. **30.** $\vec{d}=\{1;1;-3\}$ у базісе $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$. **31.** $A(-1;2;4)$, $B(8;-4;-2)$. **33.** $\vec{a}\cdot\vec{b}=-8$; $(\vec{a}+\vec{b})^2=8$; $(2\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+3\vec{b})=-72$. **34.** $\pi-\arccos\left(2/\sqrt{31}\right)$. **35.** $\vec{a}\cdot\vec{b}=-4$;
$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$; $|\vec{a}|=3$; $\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=53$; $(2\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}-\vec{c})=-16$; $\angle(\vec{a}\vec{b})=\pi-\arccos\left(4/21\right)$; $\angle(\vec{a}\vec{c})=\dfrac{\pi}{2}$. **36.** $\alpha=1$, $\alpha=-\dfrac{1}{2}$. **37.** $\vec{e}_1=\left\{3/13;12/13;-4/13\right\}$, $\vec{e}_2=\left\{-3/13;-12/13;4/13\right\}$. **38.** 12. **39**. 15. **40.** 90°. **41.** $AB=5$; $BD=2\sqrt{6}$; $\alpha=\arccos\left(1/3\right)$; $\beta=\pi-\arccos\left(3/\sqrt{41}\right)$. **42.**1) -3; 2) $2\sqrt{5}$. **43.** $\cos\alpha=2/7$; $\cos\beta=-6/7$; $\cos\gamma=3/7$. **44.** 1) $5/\sqrt{3}$; 2)$\sqrt{2}-2$. **45.** $Пр_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=-\sqrt{3}$; $Пр_{\vec{j}}(\vec{a}-\vec{b})=7$; $Пр_{\vec{b}+2\vec{c}}\vec{a}=0$. **46.** $-\sqrt{21}$. **47.** $\vec{b}_1=\{0;2;0\}$; $\vec{b}_2=\left\{8/5;6/5;0\right\}$. **48.**$\{24;-32;30\}$. **49.** $\vec{c}_1=\{1;0;1\}$; $\vec{c}_2=\left\{-1/3;4/3;-1/3\right\}$. **50.** $\overline{AD}=\left\{-14/13;70/13\right\}$; $\overline{BM}=\left\{-70/17;-42/17\right\}$; $\overline{CN}=\left\{21/5;-7/5\right\}$. **51.** -13. **52.** $\alpha=19/3$, $\alpha=12$, $\alpha=\pm2\sqrt{19}$. **53.**$\vec{h}=\vec{a}\cdot\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}-\vec{b}$. **54.** $\vec{a}\cdot\vec{b}=-4$; $|\vec{a}|=\sqrt{6}$; $|\vec{b}|=\sqrt{15}$. **55.** $\vec{a}\cdot\vec{b}=6$; $(\vec{a}+\vec{b})^2=37$; $(2\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-4\vec{b})=-88$; $\varphi=\pi-\arccos\left(7/\sqrt{481}\right)$. **56.** $\vec{m}\cdot\vec{n}=38$; $\vec{m}\cdot\vec{p}=0$; $|\vec{m}|=6$; $(\vec{m}+\vec{p})^2=41$; $(2\vec{m}+3\vec{p})(\vec{m}-\vec{n})=8$;

$\alpha = \arccos\left(19/21\right)$; $\beta = \dfrac{\pi}{2}$. **57.** $\alpha = \pm\sqrt{14}$. **59.** $\vec{b} = \left\{1; 1/2; -1/2\right\}$. **60.** $A = 8$; $\alpha = \arccos\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{15}\right) \approx 67^\circ 40'$. **61.** $AC = 5$; $AD = \sqrt{29}/2$; $\alpha = \arccos\left(6/7\right)$; $\beta = \pi - \arccos\left(\dfrac{19}{7\sqrt{14}}\right)$. **62.** $\cos\alpha = 6/7$; $\cos\beta = -2/7$; $\cos\gamma = 3/7$; $Пр_{\bar{i}}\left(2\vec{a} - \vec{b}\right) = 6$; $Пр_{\bar{l}}\vec{a} = -3$. **63.** 1) $2\sqrt{2} - 4$; 2) $\sqrt{3}$. **64.** 1) -2; 2) 0. **65.**18070. **66.** $M_1(1;0)$, $M_2(6;0)$. **67.** -0,8. **68.** $\{3{,}68; 0; 2{,}76\}$. **69.** $\{-3;3;3\}$. **70.** 5. **71.** $D(-2;0;4)$. **73.** $10\sqrt{3}$. **74.** 1) $\{-3;5;7\}$, $\{3;-5;-7\}$; 2)$\{-15;25;35\}$; 3) $\{12;-20;19\}$. **75.** $\sqrt{13}$. **76.** $\{4;13;12\}$. **77.** 5. **78.** $\{3;-3;6\}$, $\{-3;3;-6\}$. **79.** $S = 0{,}25$. **80.** 15. **81.** -16, левая тройка. **82.** 17. **83.** 1. **84.** 1) кампланарныя; 2) не кампланарныя. **85.** $3\sqrt{2}$. **86.** 1) так; 2)не. **87.** 1) 96; 2) -96. **88.** $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$, $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\right)$ ствараюць базіс, $\vec{c} = \{6;-3;-1\}$ у базісе $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\right)$. **89.** $\{-54;23;4\}$; $\{1;-11;2\}$. **90.** 10; $14\sqrt{5}$. **91.** кампланарныя. **92.** $\vec{c} = \pm\{6;-9;-2\}$. **93.** $\vec{x} = \left\{0; \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. **94.** $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ вуглы паміж вектарамі роўны $\dfrac{\pi}{2}$. **98.** 1) $-8\vec{j}$; 2) $15\vec{k}$. **99.** 65. **100.** 1) $\{-28;14;14\}$; 2) $\{56;-28;-28\}$; 3) $\{9;27;0\}$. **101.** $\sqrt{21}$. **102.** $\{20;0;8\}$. **103.** $\dfrac{7}{\sqrt{2}}$. **104.** $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$. **105.** 25; $\cos\alpha = 0{,}6$; $\cos\beta = 0{,}48$; $\cos\gamma = 0{,}64$. **106.** 18. **107.** $\vec{x} = \left\{-2/7; 3/7; 6/7\right\}$. **108.** 10. **109.** кампланарныя. **110.** не. **111.** 210. **112.** $\sqrt{17}$. **113.** -19, левая, $\sin\alpha = \sqrt{17}/5$, $\cos\beta = \dfrac{3\sqrt{2}}{14}$. **114.** $D_1(0;8;0)$, $D_2(0;-7;0)$. **115.** $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ стварае базіс, $\vec{d} = \{2;3;0\}$. **116.** $V = 3$, $S = 12 + 2\sqrt{6}$. **118.** $\left\{-\dfrac{5}{\sqrt{2}}; \dfrac{11}{\sqrt{2}}; -\dfrac{4}{\sqrt{2}}\right\}$. **119.** $50\sqrt{2}$. **123.** 1) $\lambda^2 - 7\lambda - 2 = 0$; 2) $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$; 3) $\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$; 4) $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0$. **124.** 1) $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 4$; 2) $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = 0$; 3) $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$; 4) $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 6$.

125. 1) $\lambda_1=-5$, $x_1=c_1\cdot(-2;3)^T, c_1\neq 0$; $\lambda_2=7$, $x_2=c_2\cdot(2;3)^T, c_2\neq 0$; 2) $\lambda_1=-2$, $x_1=c_1\cdot(-1;1)^T, c_1\neq 0$; $\lambda_2=1$, $x_2=c_2\cdot(-4;1)^T, c_2\neq 0$; 3) $\lambda_1=-3$, $x_1=c_1\cdot(6;-7;5)^T, c_1\neq 0$; $\lambda_2=1$, $x_2=c_2\cdot(-2;1;1)^T, c_2\neq 0$; $\lambda_3=3$, $x_3=c_3\cdot(0;1;1)^T$, $c_3\neq 0$; 4) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$, $x_1=c_1\cdot(1;1;-1)^T, c_1\neq 0$. **126.** 1) $x_2;x_3$; 2) $x_1;x_4$; 3) $x_2;x_4$. **127.** $\lambda_1=-3$, $x_1=c_1\cdot(1;-3;3;-1)^T, c_1\neq 0$; $\lambda_2=-1$, $x_2=c_2\cdot(1;-1;-1;1)^T, c_2\neq 0$; $\lambda_3=1$, $x_3=c_3\cdot(1;1;-1;-1)^T$, $c_3\neq 0$; $\lambda_4=3$, $x_4=c_4\cdot(1;3;3;1)^T, c_4\neq 0$. **129.** 1) а) няма ўласных лікаў $\in R$; б) $\lambda_1=1+2i$, $\lambda_2=1-2i$; 2) а) $\lambda=2$; б) $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$. **131.** 1) $\lambda^2-2\lambda-24=0$; 2) $\lambda^2-6\lambda+7=0$; 3) $\lambda^3-4\lambda^2+4\lambda-3=0$; 4) $\lambda^3-6\lambda^2-25\lambda-20=0$. **132.** 1) $\lambda_1=-1$; $\lambda_2=2$; 2) $\lambda_1=0$; $\lambda_2=7$; 3) няма ўласных лікаў $\in R$; 4) $\lambda_1=-1$; $\lambda_2=1; \lambda_3=3$. **133.** 1) $\lambda_1=-3$, $x_1=c_1\cdot(1;-5)^T, c_1\neq 0$; $\lambda_2=3$, $x_2=c_2\cdot(1;1)^T, c_2\neq 0$; 2) $\lambda_1=-1$, $x_1=c_1\cdot(1;-2)^T, c_1\neq 0$; $\lambda_2=6$, $x_2=c_2\cdot(2;3)^T, c_2\neq 0$; 3) $\lambda_1=1$, $x_1=c_1\cdot(1;1;1)^T, c_1\neq 0$; $\lambda_2=2$, $x_2=c_2\cdot(1;0;1)^T, c_2\neq 0$; $\lambda_3=3$, $x_3=c_3\cdot(1;1;0)^T$, $c_3\neq 0$; 4) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$, $x_1=c_1\cdot(3;1;1)^T, c_1\neq 0$. **134.** 1) $x_3;x_4$; 2) $x_1;x_3$; 3) $x_2;x_4$. **135.** $\lambda_1=\lambda_3=0$, $x_1=c_1\cdot(0;1;0;-1)^T, c_1\neq 0$; $\lambda_2=\lambda_4=2$, $x_2=c_2\cdot(0;1;0;1)^T, c_2\neq 0$. **136.** а) $\lambda=1$; б) $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2+3i$, $\lambda_3=2-3i$.

ЛІТАРАТУРА

1. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые её приложения. — М.: Наука, 1975. — 407 с.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Наука, 1974. — 384 с.

3. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. — М.: Наука, 1975. — 319 с.

4. Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н. Высшая математика для экономистов. — М.: ЮНИТИ, 2000. — 471 с.

5. Гурский Е.И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Высш. шк., 1982.— 271 с.

6. Индивидуальные задания по высшей математике/ под общ. ред. д-ра физ.-мат.наук А. П. Рябушко— Мн.: Высш. шк., 2004. — 368 с.

7. Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Феденко А.С. Сборник задач по линейной алгебре и геометрии. — Мн.: Изд-во БГУ, 1979.— 200 с.

ЗМЕСТ

Вучэбнае выданне

ВЫШЭЙШАЯ МАТЭМАТЫКА Ў ПЫТАННЯХ, ЗАДАЧАХ І ПРАКТЫКАВАННЯХ. ЛІНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Метадычны дапаможнік

Складальнікі: **Звяровіч** Людміла Феліксаўна
Пыжкова Вольга Мікалаеўна
Рысюк Ніна Антонаўна

Рэдактар Ю. А. Ірхіна

Падпісана да друку .2006. Фармат 60×84 1/16.
Папера афсетная. Гарнітура Таймс. Друк афсетны.

Ум. друк. арк. 4,5. Ул.-выд. арк. 4,7
Тыраж экз. Заказ .

Установа адукацыі
«Беларускі дзяржаўны тэхналагічны універсітэт».
220050. Мінск, Свярдлова, 13а.
ЛИ № 02330/0133255 ад 30.04.2004.

Аддрукавана ў лабараторыі паліграфіі ўстановы адукацыі
«Беларускі дзяржаўны тэхналагічны універсітэт».
220050. Мінск, Свярдлова, 13.
ЛП № 02330/0056739 ад 22.01.2004.