# ПРАДМОВА

Метадычны дапаможнік складаецца з практычных і тэарэтычных заданняў па раздзелах праграмы курса «Вышэйшая матэматыка» — «Лікавыя і ступеневыя шэрагі», «Кратныя і крываліненйныя інтэгралы».

Мэта дапаможніка — забеспячэнне студэнтаў усіх спецыяльнасцей матэматычнай літаратурай, каб дасягнуць большай эфектыўнасці практычных заняткаў і стымуляваць самастойную работу студэнтаў.

Дапаможнік складаецца з чатырох глаў. Кожная глава змяшчае тэарэтычныя пытанні, задачы і практыкаванні двух ўзроўняў складанасці для аўдыторнай і самастойнай работы, а таксама пытанні для самаправеркі.

Задачы і практыкаванні, пазначаныя літарай А (першы ўзровень складанасці), адпавядаюць абавязковаму мінімуму, які павінен засвоіць кожны студэнт. Літарай Б пазначаны задачы і практыкаванні другога ўзроўню складанасці, што дазваляе студэнтам атрымаць больш глыбокія веды па тэме. Наяўнасць пытанняў для самакантролю зробіць самастойную работу студэнта больш асэнсаванай і шматбаковай.

Дадзены метадычны дапаможнік змяшчае ў сабе вельмі важныя тэмы курса «Вышэйшая матэматыка», якія з’яўляюцца вельмі складанымі для засваення іх студэнтамі. У сувязі з гэтым у кожнай тэме прыведзены прыклады рашэнняў тыповых задач, што дазваляе студэнтам самастойна асвоіць тэму.

Для большасці задач дадзены адказы.

Метадычны дапаможнік прызначаны для студэнтаў I і II курсаў усіх спецыяльнасцей дзённага навучання, ён можа быць таксама выкарыстаны студэнтамі завочнага факультэта пры вывучэнні гэтых тэм і выкананні кантрольных работ.

# Глава 1. ЛІКАВЫЯ ШЭРАГІ

## 1.1. Азначэнне шэрагу, яго сумы, збежнасці. Неабходная прымета збежнасці шэрагу

*Тэарэтычныя пытанні*

1. Даць азначэнне лікавага шэрагу, прывесці прыклад.
2. Даць азначэнне частковай сумы шэрагу і яго астачы, сумы шэрагу.
3. Даць азначэнне збежнага (разбежнага) шэрагу, прывесці прыклады.
4. Запісаць формулу сумы шэрагу, члены якога выяўляюць бясконца спадальную геаметрычную прагрэсію.
5. Сфармуляваць неабходную прымету збежнасці шэрагу.
6. Сфармуляваць дастатковую прымету разбежнасці шэрагу.
7. Сфармуляваць асноўныя ўласцівасці збежных лікавых шэрагаў.
8. Ахарактарызаваць лінейныя аперацыі над шэрагамі.

*Заданні для аўдыторнай работы*

**А**

1. Запісаць першыя чатыры члены лікавага шэрагу, агульны член якога мае выгляд:

1) $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$; 2) $u_n = \dfrac{2n-1}{5^n}$;

3) $u_n = (-1)^n \dfrac{n}{\ln(n+1)}$; 4) $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

2. Знайсці агульны член шэрагу і запісаць шэраг з дапамогай сімвала $\sum$:

1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\ldots$; 2) $1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{8}+\ldots$;

3) $\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{\ln 3}+\dfrac{1}{\ln 4}+\ldots$; 4) $1-\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 9}-\dfrac{1}{4\cdot 27}+\ldots$;

5) $-4+4-4+4-4+\ldots$.

3. Даказаць збежнасць шэрагу і знайсці яго суму:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5}{2^{n-1}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n(n+2)}$.

4. Даказаць разбежнасць шэрагу:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+7}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2n+1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\ln(n+1)}$.

5. З дадзеных шэрагаў вызначыць тыя, для якіх выканана неабходная прымета збежнасці. Ці можна сцвярджаць, што вызначаныя шэрагі з’яўляюцца збежнымі, а ўсе астатнія — разбежнымі?

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2n^5+7n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+6}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3n+1}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{\pi}{n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

**Б**

6. Даказаць збежнасць шэрагу і знайсці яго суму:

1) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 16}+\frac{1}{\ln 256}+\ldots$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}+2^{n+1}}{6^n}$.

7. Даказаць разбежнасць шэрагу:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-4}{3n+2}\right)^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^3}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^2}$.

*Заданні для самастойнай работы*

**А**

8. Запісаць першыя тры-чатыры члены лікавага шэрагу, агульны член якога мае выгляд:

1) $u_n=\frac{\ln(n+1)}{n^2}$; 2) $u_n=\frac{3^n}{\sqrt{n(n+1)}}$; 3) $u_n=(-10)^{n-1}$.

9. Знайсці агульны член шэрагу і запісаць шэраг з дапамогай сімвала $\sum$:

1) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\ldots$; 2) $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$;

3) $-1+\frac{1}{9}-\frac{1}{25}+\frac{1}{49}-\ldots$; 4) $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{27}+\frac{16}{81}+\ldots$;

5) $5-\frac{5}{3}+\frac{5}{9}-\frac{5}{27}+\dots$.

10. Даказаць збежнасць шэрагу і знайсці яго суму:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{3^{n-1}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

11. Даказаць разбежнасць шэрагу:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{n^2+8}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{3^n}$.

**Б**

12. Даказаць збежнасць шэрагу і знайсці яго суму:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^{n+2}}{5^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

13. Даказаць разбежнасць шэрагу:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2005)^n}{n}$.

*Пытанні для самакантролю*

1. Ці застаецца збежным шэраг, калі адкінуць яго першыя 1) 5 членаў, 2) 2005 членаў?

2. У разбежным шэрагу адкінулі першыя 100 членаў. Ці можа атрыманы шэраг быць збежным?

3. Ці можа сума двух разбежных шэрагаў быць збежным шэрагам?

4. Ці можа быць разбежным шэраг, калі яго агульны член $u_n\to 0$ пры $n\to\infty$?

5. Ці можа быць збежным шэраг, калі яго агульны член задавальняе ўмове $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0{,}001$?

*Рашэнне тыповых задач*

<u>Задача 1.</u> Даказаць збежнасць і знайсці суму шэрагу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Рашэнне. Шэраг з’яўляецца збежным, калі існуе канечны ліміт яго частковай сумы $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, дзе $S$ — сума шэрагу. Запішам агульны член шэрагу $u_n = \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ у выглядзе сумы прасцейшых дробаў:

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1} = \frac{A(3n+1)+B(3n-2)}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Знойдзем $A$ і $B$: $1 = 3(A+B)n + (A-2B)$;

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow A = 1/3;\ B = -1/3.$$

Тады шэраг можна запісаць у выглядзе $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2} - \dfrac{1}{3n+1}\right)$, а яго частковыя сумы будуць роўныя:

$S_1 = u_1 = \dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4}\right)$;

$S_2 = u_1 + u_2 = S_1 + u_2 = \dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}\right) = \dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{7}\right)$;

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = S_2 + u_3 = \dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{7}\right) + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}\right) = \dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{10}\right)$;

. . .

$S_n = \dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right)$.

Паколькі $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right) = \dfrac{1}{3}$, дадзены шэраг з’яўляецца збежным, а яго сума $S = \dfrac{1}{3}$.

Адказ: $\dfrac{1}{3}$.

Задача 2. Знайсці суму шэрагу $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^{n+1}}{6^n}$.

Рашэнне. Запішам агульны член шэрагу ў выглядзе $u_n = \frac{5^{n+1}}{6^n} = 5\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Тады члены шэрагу выяўляюць бясконцую геаметрычную прагрэсію з назоўнікам $q = \frac{5}{6}$ і першым членам $u_1 = \frac{5^2}{6} = \frac{25}{6}$.

Паколькі выканана ўмова $|q| = \frac{5}{6} < 1$, гэты шэраг з’яўляецца збежным, а яго сума роўна $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{25/6}{1-5/6} = 25$.

Адказ: $25$.

## 1.2. Шэрагі з неадмоўнымі членамі

*Тэарэтычныя пытанні*

1. Сфармуляваць інтэгральную прымету Кашы.
2. Сфармуляваць прымету Даламбера.
3. Сфармуляваць прымету параўнання шэрагаў.
4. Сфармуляваць лімітавую прымету параўнання шэрагаў.
5. Сфармуляваць алгебраічную прымету Кашы.
6. Запісаць шэраг Дырыхле і ўмовы яго збежнасці.
7. Сфармуляваць правіла даследавання шэрагу з неадмоўнымі членамі на збежнасць.

*Заданні для аўдыторнай работы*

**А**

14. Даследаваць збежнасць шэрагаў па інтэгральнай прымеце Кашы:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{9+n^2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+10}$.

15. Даследаваць збежнасць шэрагаў па прымеце Даламбера:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{9^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{3n+1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{n3^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$.

16. Даследаваць збежнасць шэрагаў па прымеце параўнання:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5+3n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-3}{n^4+n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n^2}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3+10}}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n\alpha|}{n^2}$.

17. Даследаваць збежнасць шэрагаў па алгебраічнай прымеце Кашы:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{5n+1}\right)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+5}{3n-4}\right)^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

18. Даследаваць збежнасць шэрагаў:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(7n+1)^2}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^{n+1}}{(2n)!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+8n}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sin\frac{\pi}{4n}\right)^n$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5^n+11}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3^n}$; 9) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{n^2}$;

10) $\frac{7^2}{2^2}+\frac{7^3}{3^2}+\frac{7^4}{4^2}+\ldots$; 11) $\frac{11}{5}+\frac{21}{25}+\frac{31}{125}+\ldots$;

12) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 8}+\ldots$; 13) $\frac{1}{99}+\frac{2}{199}+\frac{3}{299}+\ldots$ .

**Б**

19. Даследаваць, пры якіх дадатных $a$ з’яўляецца збежным шэраг:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{(n+1)^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ .

20. Даследаваць збежнасць шэрагаў:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n n!}{(2n+1)!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}}{n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\operatorname{arctg}3n}}{1+9n^2}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{\frac{5n^2-n}{100+2n^4}}$;

7) $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}+\ldots$;

8) $\dfrac{1}{2^{\alpha}(\ln 2)^{\beta}}+\dfrac{1}{3^{\alpha}(\ln 3)^{\beta}}+\ldots,\ \alpha>1.$

## *Заданні для самастойнай работы*

**A**

21. Даследаваць збежнасць шэрагаў па інтэгральнай прымеце Кашы:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+4}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{9+5n}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$.

22. Даследаваць збежнасць шэрагаў па прымеце Даламбера:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{7^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6^n}{(n+1)!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{n^2 4^n}$.

23. Даследаваць збежнасць шэрагаў па прымеце параўнання:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^4+16}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+6n}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{n^2+1}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+4}{n^2}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin n\alpha|}{n^4}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{2n+1}$.

24. Даследаваць збежнасць шэрагаў па алгебраічнай прымеце Кашы:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{8n+1}\right)^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5n+3}{n+1}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}\right)^{2n}$.

25. Даследаваць збежнасць шэрагаў:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+3)(3n+4)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}\,\mathrm{e}^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln^4(n+1)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{4^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)$;

7) $3+\dfrac{9}{1\cdot 2}+\dfrac{27}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{81}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$; 8) $\ln 2+\dfrac{\ln 3}{2}+\dfrac{\ln 4}{3}+\ldots$;

9) $\dfrac{1}{2\sqrt[5]{\ln 2}}+\dfrac{1}{3\sqrt[5]{\ln 3}}+\dfrac{1}{4\sqrt[5]{\ln 4}}+\ldots$; 10) $\dfrac{\mathrm{e}}{2}+\dfrac{\mathrm{e}^2}{5}+\dfrac{\mathrm{e}^3}{10}+\ldots$.

## Б

26. Даследаваць збежнасць шэрагаў:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{(n+1)^4}}$;

4) $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{24}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(n+1)!}+\ldots$

*Пытанні для самакантролю*

1. Агульны член шэрагу — правільны рацыянальны дроб. Па якіх прыметах: 1) трэба; 2) не трэба даследаваць гэты шэраг на збежнасць?

2. Агульны член шэрагу выражаны праз паказчыкавую функцыю або фактарыялы. Па якіх прыметах трэба даследаваць гэты шэраг на збежнасць?

3. Што можна сказаць пра збежнасць шэрагаў, калі іх агульныя члены задавальняюць умове:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1/2$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = 1/2$?

4. Няхай $D=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Што можна сказаць пра збежнасць шэрагу з неадмоўнымі членамі, калі: 1) $D=1/3$; 2) $D=1$; 3) $D=5$. Ці можа $D=-2$?

*Рашэнне тыповых задач*

Задача 1. Даследаваць на збежнасць шэраг $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+13}$.

Рашэнне. Агульны член шэрагу роўны $u_n=\frac{1}{n^2+4n+13}$.

Паколькі $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+4n+13}=0$, неабходная прымета збежнасці выканана, і дадзены шэраг можа быць збежным. З дастатковых прымет збежнасці можна выкарыстаць інтэгральную прымету Кашы:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+13}=\lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_1^{\beta}\frac{dx}{(x+2)^2+3^2}=\lim_{\beta\to+\infty}\frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}\right)\Bigg|_1^{\beta}=$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty} \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\beta+2}{3} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}1 = \frac{1}{3}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

Значыць, няўласны інтэграл збежны, шэраг таксама будзе збежным.

Заўвага. Гэты шэраг можна параўнаць з шэрагам Дырыхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, для якога выканана ўмова збежнасці $p = 2 > 1$.

Паколькі мае месца няроўнасць $u_n = \frac{1}{n^2+4n+13} < \frac{1}{n^2}$, члены зыходнага шэрагу менш членаў збежнага шэрагу. Тады па прымеце параўнання зыходны шэраг таксама будзе збежным.

Адказ: збежны.

Задача 2. Даследаваць збежнасць шэрагу $\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{16} + \sin\frac{\pi}{64} + \ldots$.

Рашэнне. Запішам агульны член шэрагу $u_n = \sin\frac{\pi}{4^n}$. Гэты шэраг можна запісаць у выглядзе $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{4^n}$. Паколькі неабходная прымета збежнасці выканана $\lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{4^n} = 0$, шэраг можа быць збежным. Агульны член шэрагу выражаны праз паказчыкавую функцыю. Будзем даследаваць шэраг па прымеце Даламбера:

$$u_n = \sin\frac{\pi}{4^n};\; u_{n+1} = \sin\frac{\pi}{4^{n+1}};\;\; D = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{4^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{4^n}} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

З улікам таго, што пры $n \to +\infty$ $\frac{\pi}{4^{n+1}} \to 0,\ \frac{\pi}{4^n} \to 0$ і выкарыстоўваючы першы цудоўны ліміт $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, атрымліваем $D = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{4^{n+1}}}{\frac{\pi}{4^{n+1}}}\;\frac{\frac{\pi}{4^n}\frac{1}{4}}{\sin\frac{\pi}{4^n}} = \frac{1}{4} < 1$. Значыць, па прымеце Даламбера шэраг збежны.

Заўвага. Гэты шэраг можна параўнаць з шэрагам $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$, які з’яўляецца збежным, бо яго члены выяўляюць геаметрычную прагрэсію з назоўнікам $q=\frac{1}{4}<1$. Маем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{4^n}}{\frac{1}{4^n}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{4^n}}{\frac{\pi}{4^n}}\pi=\pi\neq 0,$$

значыць, па лімітавай прымеце параўнання зыходны шэраг таксама збежны.

Адказ: збежны.

## 1.3. Знаказменныя шэрагі

*Тэарэтычныя пытанні*

1. Даць азначэнне знаказменнага шэрагу, прывесці прыклады.
2. Даць азначэнне знакачаргавальнага шэрагу, прывесці прыклады.
3. Сфармуляваць прымету Лейбніца.
4. Даць азначэнне абсалютна збежнага і ўмоўна збежнага шэрагаў.
5. Сфармуляваць дастатковую прымету збежнасці знаказменнага шэрагу.
6. Сфармуляваць уласцівасці абсалютна збежных шэрагаў.
7. Запісаць няроўнасць, якая выконваецца для астачы знакачаргавальнага шэрагу.

*Заданні для аўдыторнай работы*

**А**

27. Вызначыць знаказменныя, знакачаргавальныя і нязменназнакавыя шэрагі:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4^{n+1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{2n+1}}{2n+1}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cos\frac{\pi n}{3}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{2n}$, $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2^n}$.

28. Вызначыць абсалютна збежныя і ўмоўна збежныя шэрагі:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{6n+7}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{5^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+4}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln^5 n}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{2n+1}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3}$.

29. Вызначыць ацэнку астачы $r_n = S - S_n$ шэрагаў:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2n^3+3}$.

30. Колькі членаў шэрагу $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$ неабходна ўзяць, каб вылічыць яго суму з дакладнасцю да 0,01.

**Б**

31. Даследаваць шэрагі на абсалютную і ўмоўную збежнасць:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2n^3}{n^4+5}}$.

*Заданні для самастойнай работы*

**А**

32. Вызначыць абсалютна збежныя і ўмоўна збежныя шэрагі:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[5]{n}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} n}{10n+1}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+3)!}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2005n+3}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3n^2+7}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5n+1}{7n-1}\right)^n$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^3}$.

33. Ацаніць астачы $r_n = S - S_n$ шэрагаў:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+5}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n7^{n+1}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$.

34. Вызначыць, колькі членаў шэрагу $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}$ неабходна ўзяць, каб вылічыць яго суму з дакладнасцю да 0,02.

**Б**

35. Даследаваць шэрагі на абсалютную і ўмоўную збежнасць:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2^{n!}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln^3 n}{n}$.

36. Вылічыць суму шэрагу $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} n}{(2n-1)5^{n-1}}$ з дакладнасцю да 0,005.

*Рашэнне тыповых задач*

Задача 1. Даследаваць збежнасць шэрагу $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{7^n}$.

Рашэнне. Саставім шэраг з модуляў членаў дадзенага шэрагу $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7^n}$ і даследуем яго па прымеце Даламбера:

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{7^{n+1}}:\frac{n}{7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{1}{7}=\frac{1}{7}<1,$$

значыць, шэраг з модуляў збежны, а зыходны шэраг абсалютна збежны.

Адказ: абсалютна збежны.

Задача 2. Даследаваць збежнасць шэрагу $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{3n+2}{n^2-1}$.

Рашэнне. Саставім шэраг з модуляў членаў дадзенага шэрагу $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n+2}{n^2-1}$ і параўнаем яго з шэрагам $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$, які з'яўляецца разбежным.

Маем $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{n^2-1}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{n^2-1}=3\neq 0$, значыць, па лімітавай прымеце параўнання шэраг з модуляў таксама разбежны.

Зыходны шэраг з'яўляецца знакачаргавальным. Даследуем яго па прымеце Лейбніца: $c_n=\frac{3n+2}{n^2-1}$; $c_{n+1}=\frac{3n+5}{(n+1)^2-1}=\frac{3n+5}{n^2+2n}$;

1) $\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n^2-1}=0$;

2) $c_n>c_{n+1}$; $\frac{3n+2}{n^2-1}>\frac{3n+5}{n^2+2n}$.

Праверым выкананне гэтай няроўнасці.

$$(3n+2)(n^2+2n) > (3n+5)(n^2-1)$$

$$3n^3+2n^2+6n^2+4n > 3n^3+5n^2-3n-5$$

$3n^2+7n+5>0$, для $n \in N$,

значыць, па прымеце Лейбніца зыходны шэраг збежны. Паколькі шэраг з модуляў яго членаў разбежны, зыходны шэраг умоўна збежны.

<u>Заўвага.</u> Выкананне няроўнасці $c_n > c_{n+1}$ можна даказаць па-іншаму.

Няхай $f(x)=\dfrac{3x+2}{x^2-1}$, тады $f(n)=c_n$, $f(n+1)=c_{n+1}$.

Паколькі $f'(x)=\dfrac{3(x^2-1)-2x(3x+2)}{(x^2-1)^2}=-\dfrac{3x^2+4x+3}{(x^2-1)^2}<0$, $f(x)$— спадальная функцыя і $f(n)>f(n+1)$, значыць $\dfrac{3n+2}{n^2-1}>\dfrac{3n+5}{n^2+2n}$.

<u>Адказ:</u> умоўна збежны.

*Пытанні для самакантролю*

1. Ці зменіцца сума ўмоўна збежнага шэрагу, калі яго першыя 1000 членаў пераставіць месцамі?

2. Збежным ці разбежным будзе шэраг, атрыманы рознасцю разбежных шэрагаў $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}$?

3. Ці з'яўляецца шэрагам Лейбніца шэраг

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\ldots?$$

4. Якая будзе зроблена памылка, калі за суму шэрагу $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}$ узяць суму сямі яго членаў?

# Глава 2. СТУПЕНЕВЫЯ ШЭРАГІ

## 2.1. Функцыянальныя шэрагі. Ступеневыя шэрагі, іх уласцівасці

*Тэарэтычныя пытанні*

1. Даць азначэнне функцыянальнага шэрагу, прывесці прыклад.
2. Даць азначэнне пункта збежнасці і абсягу збежнасці функцыянальнага шэрагу.
3. Даць азначэнне ступеневага шэрагу, прывесці прыклад.
4. Сфармуляваць тэарэму Абеля.
5. Даць азначэнне інтэрвала і радыуса збежнасці ступеневага шэрагу.
6. Сфармуляваць правілы вызначэння радыуса, інтэрвала і абсягу збежнасці ступеневага шэрагу.
7. Сфармуляваць асноўныя ўласцівасці ступеневых шэрагаў.

*Заданні для аўдыторнай работы*

**А**

1. Знайсці абсяг збежнасці ступеневых шэрагаў:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{7^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n^2+5}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{\sqrt{n}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+1}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^n$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{9^n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{8^n n}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

2. Знайсці абсяг збежнасці ступеневых шэрагаў:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{5^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{2^n(n+1)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9^n(x+1)^{2n}}{2n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n!}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!(x+3)^n$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^{2n}}{16^n n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-10)^n}{n^n}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{n^2}$.

**Б**

3. Знайсці абсяг збежнасці функцыянальных шэрагаў:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+x^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(x+5)^n}$.

4. Знайсці абсяг збежнасці ступеневых шэрагаў:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\ln(n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(nx)^n}{\mathrm{e}^n n!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n$.

5. Даказаць, што шэрагі з'яўляюцца збежнымі для дадзеных $x$:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$, $x\in[-1;1]$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$, $x\in R$.

6. Выкарыстоўваючы дыферэнцаванне або інтэграванне шэрагу, знайсці яго суму:

1) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$;

2) $1-3x^2+5x^4-\ldots+(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}+\ldots$.

*Заданні для самастойнай работы*

**А**

7. Знайсці абсяг збежнасці ступеневых шэрагаў:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^n(n+4)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{n!}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^4}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^n}{\sqrt{n+1}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x+10)^n$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)9^n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-5)^n}{\sqrt[4]{n^3}}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!(x+7)^n$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{2n}}{2^n n}$; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+4)^n}{(n+1)\ln^6(n+1)}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$.

**Б**

8. Знайсці абсяг збежнасці шэрагаў:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x-1)^n}{(2n)!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{e}x)^n}{\ln(n+2)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(5x-4)^{3n+1}}{(3n+1)8^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\left(x+6\right)^n}{n^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^6}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\lg x\right)^n$.

9. Выкарыстоўваючы дыферэнцаванне або інтэграванне шэрагу, знайсці яго суму:

1) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$; 2) $1+2x+3x^2+\ldots+\left(n+1\right)x^n+\ldots$.

*Пытанні для самакантролю*

1. Ці існуе ступеневы шэраг, абсяг збежнасці якога — пустое мноства?
2. Якія значэнні можа мець радыус збежнасці ступеневага шэрагу?
3. Ці зменіцца радыус збежнасці ступеневага шэрагу пасля яго дыферэнцавання або інтэгравання?
4. Колькі разоў можна дыферэнцаваць ступеневы шэраг у яго інтэрвале збежнасці?

*Рашэнне тыповых задач*

Задача 1. Знайсці абсяг збежнасці шэрагу $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-9\right)^n}{2^n\sqrt{n}}$.

Рашэнне. Па формуле $r=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ знаходзім радыус збежнасці шэрагу: $a_n=\frac{1}{2^n\sqrt{n}}$, $a_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{n+1}}$, $r=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\sqrt{n+1}}{2^n\sqrt{n}}=2\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=2$, $r=2$.

Знаходзім інтэрвал збежнасці:

$$\left|x-9\right|<2 \;\Rightarrow\; -2<x-9<2 \;\Rightarrow\; 7<x<11,$$

значыць, інтэрвал збежнасці дадзенага шэрагу $\left(7;11\right)$.

Заўвага. Інтэрвал збежнасці можна знайсці, выкарыстоўваючы прымету Даламбера да шэрагу з модуляў членаў зыходнага шэрагу:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(x-9\right)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{n+1}}:\frac{\left(x-9\right)^n}{2^n\sqrt{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|x-9\right|}{2}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\frac{\left|x-9\right|}{2}<1$$

$$\left|x-9\right|<2 \;\Rightarrow\; 7<x<11.$$

Каб знайсці абсяг збежнасці шэрагу, даследуем яго збежнасць на канцах інтэрвала.

При $x=7$ маем лікавы шэраг $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(7-9)^n}{2^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, які з'яўляецца збежным па прымеце Лейбніца.

При $x=11$ маем лікавы шэраг $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(11-9)^n}{2^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Ён разбежны, як шэраг Дырыхле пры $p=\frac{1}{2}<1$.

Значыць, абсяг збежнасці дадзенага шэрагу мае выгляд $[7;11)$.

Адказ: $[7;11)$.

## 2.2. Шэрагі Тэйлара і Макларэна. Скарыстанне ступеневых шэрагаў

*Тэарэтычныя пытанні*

1. Запісаць шэраг Тэйлара для функцыі $f(x)$ у пункце $x_0$.
2. Запісаць шэраг Макларэна для функцыі $f(x)$.
3. Даць азначэнне функцыі, раскладальнай у ступеневы шэраг.
4. Сфармуляваць тэарэму пра раскладанне ў ступеневы шэраг элементарнай функцыі.
5. Сфармуляваць тэарэму пра адзінасць раскладання функцыі ў ступеневы шэраг.
6. Ахарактарызаваць асноўныя метады раскладання функцыі ў ступеневы шэраг.
7. Сфармуляваць правілы прыблізнага вылічэння значэння функцыі з дапамогай ступеневага шэрагу.
8. Сфармуляваць правілы прыблізнага вылічэння інтэгралаў з дапамогай ступеневага шэрагу.
9. Сфармуляваць правілы інтэгравання дыферэнцыяльных раўнанняў з дапамогай ступеневага шэрагу.

*Заданні для аўдыторнай работы*

**А**

10. Раскласці функцыю $f(x)$ у шэраг Тэйлара ў пункце $x_0$ і знайсці, пры якіх $x$ гэты расклад мае месца:

1) $f(x)=e^x$, $x_0=1$;
2) $f(x)=\frac{1}{x+3}$, $x_0=-2$;

3) $f(x)=\ln(5x+3),\quad x_0=0{,}4$;  4) $f(x)=\sqrt{x},\quad x_0=4$.

11. Раскласці функцыю $f(x)$ у шэраг Макларэна і знайсці, пры якіх $x$ гэты расклад мае месца:

1) $f(x)=2^x$;  2) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$;  3) $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}$;

4) $f(x)=\cos x^2$;  5) $f(x)=x\sin x$;  6) $f(x)=\mathrm{sh}x$;

7) $f(x)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$;  8) $f(x)=\cos^2 x$;  9) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

12. Прадставіць у выглядзе шэрагаў інтэгралы:

1) $\int\limits_0^x \mathrm{e}^{x^2}dx$;  2) $\int\limits_0^x \sin x^2 dx$;  3) $\int\limits_0^x \dfrac{dx}{1-x^5}$.

13. Вылічыць з дакладнасцю да $\varepsilon$ велічыні:

1) $\mathrm{e}^{-0{,}2},\ \varepsilon=0{,}0005$;  2) $\cos 1,\ \varepsilon=0{,}002$;  3) $\ln\dfrac{3}{2},\ \varepsilon=0{,}001$.

14. Вылічыць з дакладнасцю да $\varepsilon$ інтэгралы:

1) $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{x}dx,\ \varepsilon=0{,}0002$;  2) $\int\limits_0^{0{,}8} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}dx,\ \varepsilon=0{,}001$;

3) $\int\limits_0^{0{,}6} \sqrt[3]{1+x^2}dx,\ \varepsilon=0{,}001$;  4) $\int\limits_{0{,}1}^1 \dfrac{\cos x}{x}dx,\ \varepsilon=0{,}0005$.

15. Знайсці $k$ першыя, не роўныя нулю члены ступеневага шэрагу рашэнняў дыферэнцыяльных раўнанняў:

1) $y'=\mathrm{e}^y+xy,\ y(0)=0,\ k=3$;  2) $y'=2x^2+y^3,\ y(1)=1,\ k=3$;

3) $y''=-2xy,\ y(0)=1,\ y'(0)=1,\ k=5$.

**Б**

16. Знайсці тры першыя, не роўныя нулю члены раскладу $f(x)$ у шэраг па ступенях $x$:

1) $f(x)=\ln\cos x$;  2) $f(x)=\mathrm{e}^x\sin x$.

17. Выкарыстоўваючы дыферэнцаванне і далейшае інтэграванне, раскласці $f(x)$ у шэраг Макларэна і знайсці, пры якіх $x$ гэты расклад мае месца:

1) $f(x)=\mathrm{arctg}\,x$;  2) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

18. Вызначыць, колькі членаў шэрагу $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x}{2!} + \ldots$ патрэбна ўзяць, каб вылічыць e з дакладнасцю да $0{,}0001$.

19. Знайсці чатыры першыя, не роўныя нулю члены ступеневага шэрагу рашэння задачы Кашы для раўнання $xy'' + y' + xy = 0$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

20. Знайсці, пры якіх значэннях $x$ прыблізная формула $\sin x \approx x$ дае памылку, што не перавышае: 1) 0,01; 2) 0,001.

*Заданні для самастойнай работы*

**А**

21. Раскласці функцыю $f(x)$ у шэраг Макларэна і знайсці, пры якіх $x$ гэты расклад мае месца:

1) $f(x) = 3^x$; 2) $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$; 3) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$;

4) $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$; 5) $f(x) = x\cos x$; 6) $f(x) = \frac{\ln\left(1 + x^2\right)}{x}$.

22. Раскласці функцыю $f(x)$ у шэраг Тэйлара ў пункце $x_0$ і знайсці, пры якіх $x$ гэты расклад мае месца:

1) $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1$; 2) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 4$;

3) $f(x) = \mathrm{e}^x, \quad x_0 = -2$.

23. Прадставіць у выглядзе шэрагаў інтэгралы:

1) $\int\limits_0^x \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx$; 2) $\int\limits_0^x \frac{\ln\left(1 + x^3\right)}{x} dx$; 3) $\int\limits_0^x \frac{\sin x^2}{x} dx$.

24. Вылічыць з дакладнасцю да $\varepsilon = 0{,}001$ велічыні:

1) $\frac{1}{\mathrm{e}}$; 2) $\sin 12^\circ$; 3) $\sqrt[3]{10}$.

25. Вылічыць з дакладнасцю да $\varepsilon = 0{,}001$ інтэгралы:

1) $\int\limits_0^{0{,}5} \mathrm{e}^{-x^2} dx$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{1 - \cos x}{x} dx$; 3) $\int\limits_0^{0{,}5} \sqrt{1 + x^3} dx$.

26. Інтэгральны сінус $\mathrm{Si}(x)=\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx$ запісаць у выглядзе ступеневага шэрагу, знайсці абсяг яго збежнасці і вылічыць $\mathrm{Si}\left(1/2\right)$ з дакладнасцю да $\varepsilon=0{,}001$.

27. Знайсці $k$ першыя, не роўныя нулю члены ступеневага шэрагу рашэнняў дыферэнцыяльных раўнанняў:

1) $y''=xyy',\ \ y(0)=1,\ \ \ y'(0)=1,\ k=4;$

2) $y'=2\cos x-xy^2,\ \ y(0)=1,\ \ k=4;$

3) $y''=\frac{y'}{y}-\frac{1}{x},\ \ y(1)=1,\ \ \ y'(1)=0,\ k=3.$

**Б**

28. Знайсці чатыры першыя, не роўныя нулю члены шэрагу Тэйлара для функцыі $f(x)$ у пункце $x_0$:

1) $f(x)=\cos^2 x,\ \ \ x_0=\frac{\pi}{4};$ 2) $f(x)=\sqrt{8+x},\ \ x_0=1.$

29. Знайсці тры першыя, не роўныя нулю члены шэрагу Макларэна для функцыі $f(x)$:

1) $f(x)=\mathrm{tg}\,x;$ 2) $f(x)=\ln\big((1-x)(1+2x)\big).$

30. Знайсці шэраг Макларэна для функцыі $f(x)$ і абсяг збежнасці гэтага шэрагу:

1) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x};$ 2) $f(x)=\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}.$

31. Вылічыць інтэгралы з дакладнасцю да $\varepsilon=0{,}001$:

1) $\int_1^4 \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}dx;$ 2) $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx.$

32. Вылічыць, пры якіх $x$ мнагасклад $x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ дае значэнне функцыі $\sin x$ з дакладнасцю да $0{,}0001$.

33. Вызначыць, колькі членаў шэрагу Макларэна для функцыі $\cos x$ трэба ўзяць, каб вылічыць $\cos 10°$ з дакладнасцю да $0{,}0001$.

34. Знайсці рашэнне задачы Кашы для раўнання $y'' + x\,y' + y = 1$, $y(0) = 0,\; y'(0) = 0$ у выглядзе ступеневага шэрагу, знайсці абсяг збежнасці і суму гэтага шэрагу.

*Пытанні для самакантролю*

1. Ці зменіцца радыус збежнасці шэрагу Тэйлара пасля дыферэнцавання або інтэгравання?

2. Ці існуе шэраг Макларэна для функцыі $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ?

3. Які абсяг збежнасці будзе мець сума двух ступеневых шэрагаў з рознымі абсягамі збежнасці?

4. Калі рашэнне задачы Кашы для дыферэнцыяльнага раўнання выяўляецца: 1) шэрагам Макларэна; 2) шэрагам Тэйлара?

*Рашэнне тыповых задач*

<u>Задача 1.</u> Вылічыць з дакладнасцю да $0{,}001$ інтэграл $\int\limits_0^{1/5} \dfrac{\sin 2x}{x}\,dx$ .

<u>Рашэнне.</u> Шэраг Макларэна для функцыі $\sin x$ мае выгляд

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots$ , тады $\sin 2x = 2x - \dfrac{(2x)^3}{3!} + \dfrac{(2x)^5}{5!} - \ldots$ .

$$\frac{\sin 2x}{x} = 2 - \frac{2^3x^2}{3!} + \frac{2^5x^4}{5!} - \ldots .$$

Падставім атрыманы расклад у інтэграл

$$\int\limits_0^{1/5} \frac{\sin 2x}{x}\,dx = \int\limits_0^{1/5}\left(2 - \frac{2^3x^2}{3!} + \frac{2^5x^4}{5!} - \ldots\right)dx = \left(2x - \frac{2^3x^3}{3\cdot 3!} + \frac{2^5x^5}{5\cdot 5!} - \ldots\right)\Bigg|_0^{1/5} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{5} - \frac{2^3}{3\cdot 3!\cdot 5^3} + \frac{2^5}{5\cdot 5!\cdot 5^5} - \ldots = \frac{2}{5} - \frac{8}{2250} + \frac{32}{600\cdot 5^5} - \ldots =$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{4}{1125} + \frac{4}{3\cdot 5^7} - \ldots .$$

Пасля інтэгравання атрымаўся шэраг Лейбніца. Каб вылічыць інтэграл з дакладнасцю да $0{,}001$, дастаткова ўзяць суму двух першых членаў атрыманага шэрагу, бо трэці член $\dfrac{4}{3\cdot 5^7} < 0{,}001$.

Тады $\int\limits_0^{1/5} \frac{\sin 2x}{x} dx \approx \frac{2}{5} - \frac{4}{1125} \approx 0,397$.

Адказ: $0,397$.

Задача 2. Знайсці чатыры першыя члены ступеневага шэрагу рашэння дыферэнцыяльнага раўнання $y' = 2x + y^3$, $y(0) = 1$.

Рашэнне. Рашэнне раўнання будзем шукаць у выглядзе шэрагу $y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$.

З пачатковай умовы і раўнання маем $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Каб вылічыць $y''(0)$, знойдзем $y'' = 2 + 3y^2 y' \Rightarrow y''(0) = 5$. Каб вылічыць $y'''(0)$, знойдзем $y''' = 6y(y')^2 + 3y^2 y'' \Rightarrow y'''(0) = 21$.

Запішам чатыры першыя члены ступеневага шэрагу рашэння дыферэнцыяльнага раўнання $y = 1 + x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{2}x^3 + \ldots$.

Адказ: $y = 1 + x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{2}x^3 + \ldots$.

# Глава 3. КРАТНЫЯ ІНТЭГРАЛЫ

## 3.1. Двайныя інтэгралы. Азначэнне, расстаноўка межаў інтэгравання, змена парадку інтэгравання, вылічэнне двайных інтэгралаў

*Тэарэтычныя пытанні*

1. Даць азначэнне цыліндрычнага цела.
2. Даць азначэнне інтэгральнай сумы функцыі $f(x, y)$ у вобласці $D$.
3. Даць азначэнне двайного інтэграла.
4. Сфармуляваць тэарэму існавання двайнога інтэграла.
5. Пералічыць уласцівасці двайнога інтэграла.
6. Вылічэнне двайнога інтэграла.
7. Расстаноўка межаў інтэгравання ў паўторных інтэгралаў.
8. Змена парадку інтэгравання.
9. Двайныя інтэгралы ў палярнай сістэме каардынат: пабудова графікаў, расстаноўка межаў інтэгравання, вылічэнне.

*Заданні для аўдыторнай работы*

**А**

1. Вылічыць паўторныя інтэгралы:

1) $\int\limits_1^3 dx \int\limits_2^{x^2+5} \frac{1}{x^2} dy$;  2) $\int\limits_3^5 dx \int\limits_0^2 (x+y) dy$;  3) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 dy \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y) dx$.

2. Вылічыць двайныя інтэгралы:

1) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$; $D: y = \frac{1}{x},\ y = x,\ x = 2$;

2) $\iint\limits_D (x-2) y dxdy$; $D: y = x,\ y = \frac{1}{2}x,\ x = 2$;

3) $\iint\limits_D (x^3 + y) dxdy$; $D: y + x = 1,\ y + x = 2,\ x \geq 0,\ x \leq 1$;

4) $\iint\limits_D \mathrm{e}^y dxdy$; $D: y = \ln x,\ y = 0,\ x = 2$.

5) $\iint\limits_D xydxdy$; $D: y = x^3,\ y = 0,\ x \leq 2$.

3. Знайсці межы двайнога інтэграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ пры дадзеных абласцях інтэгравання $D$:

1) $D$: трохвугольнік з вяршынямі ў пунктах $A(-2;-2)$, $B(-1;2)$, $C(6;2)$;

2) $D: y=x,\ \ y=x+3,\ y=-2x+1,\ y=-2x+5$;

3) $D: y^2=8x,\ \ y\le 2x,\ y+4x-24\le 0$;

4) $D: y-2x\le 0,\ 2y-x\ge 0,\ \ xy\le 2$;

5) $D: y=2x-x^2,\ \ x+y=0$;

6) $D: xy=1,\ \ xy=2,\ x-y+1=0,\ x-y-1=0,\ \ (x>0, y>0)$.

4. Змяніць парадак інтэгравання ў паўторных інтэгралах:

1) $\int\limits_0^x dx\int\limits_{x/2}^{\sqrt{2}} f(x;y)dy$; 2) $\int\limits_{-6}^{2} dy\int\limits_{y^2/4}^{2-y} f(x;y)dx$;

3) $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x;y)dy$; 4) $\int\limits_0^r dx\int\limits_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x;y)dy$;

5) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} f(x;y)dy+\int\limits_1^3 dx\int\limits_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x;y)dy$;

6) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x;y)dx+\int\limits_1^4 dy\int\limits_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x;y)dx$;

7) $\int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} dy\int\limits_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x;y)dx+\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy\int\limits_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x;y)dx$.

5. У двайным інтэграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перайсці да палярных каардынат і расставіць межы інтэгравання:

1) $D: x^2+y^2\le 2y$; 2) $D: x^2+y^2\le 3x$;

3) $D: x^2+y^2=4;\ \ y\ge -x;\ \ y\le\sqrt{3}x$; 4) $D: x^2+y^2\le x;\ \ x^2+y^2\le -y$;

5) $D: x^2+y^2\ge a^2;\ \ x^2+y^2\le 2ax$; 6) $D: x^2+y^2\le 4;\ \ x+y\le 2$.

6. Перайсці да палярных каардынат і вылічыць наступныя паўторныя інтэгралы:

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+x^2+y^2}$;  2) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}dy$;

3) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dy$;  4) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

5) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$; $D: x^2+y^2 \le Rx$;

6) $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy$; $D: x^2+y^2 \ge 1,\ \ x^2+y^2 \le 9,\ \ y \ge \frac{x}{\sqrt{3}},\ y \le x\sqrt{3}$;

7) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$; $D: x=\sqrt{2},\ \ y \ge x,\ \ x^2+y^2=8,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0$;

8) $\iint\limits_D \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi$; вобласць $D$ абмежавана лініяй $\rho = a\left(1+\cos\varphi\right)$ і палярнай воссю, калі $0 \le \varphi \le \pi$.

## Б

7. Змяніць парадак інтэгравання:

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^3} f\left(x;y\right)dy + \int\limits_2^4 dx \int\limits_0^{10-x} f\left(x;y\right)dy + \int\limits_4^7 dx \int\limits_{x-4}^{10-x} f\left(x;y\right)dy .$$

8. Вылічыць двайны інтэграл:

$\iint\limits_D x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\,dxdy$; $D: x^3+y^3=1,\ x=0,\ y=0$.

9. У двайным інтэграле $\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy$ перайсці да палярных каардынат і расставіць межы інтэгравання ў вобласці $D$:

$\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)$.

10. Вылічыць двайныя інтэгралы:

1) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dxdy$; $D: x^2+y^2 \le a^2$;

2) $\iint\limits_D xy^2dxdy$; $D:\ x^2+\left(y-1\right)^2=1,\ \ x^2+y^2=4y$;

3) $\iint\limits_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$; $D: x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$.

*Заданні для самастойнай работы*

**А**

11. Вылічыць паўторныя інтэгралы:

1) $\int\limits_1^3 dx \int\limits_4^8 \dfrac{y}{x^3} dy$; 2) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 e^{x-y}\, dx$; 3) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x^2} (2x-y)dy$.

12. Вылічыць двайныя інтэгралы:

1) $\iint\limits_D e^{x+\sin y} \cos y dxdy$; $D: 0 \le x \le \pi,\ \ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$;

2) $\iint\limits_D (3x^2-2xy+y)dxdy$; $D: y^2 = x,\ x=0,\ y=2$;

3) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{ax-x^2}}$; $D: y^2 = a^2 - ax,\ x=0$;

4) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(x+y)^2}$; $D: 3 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 2$.

13. Знайсці межы двайнога інтэграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ пры дадзеных абласцях інтэгравання $D$:

1) $D$: трапецыя з вяршынямі ў пунктах $A(-2;-2)$, $B(-1;2)$, $C(3;4)$; $D(6;2)$;

2) $D: x^2-y^2=1,\ \ y \ge -2,\ y \le 2$; 3) $D: x^2+y^2=4,\ \ y=2x-x^2,\ x=0$;

4) $D: y=x,\ y=2x,\ x=1,\ x=3$; 5) $D: x+y \le 1,\ x-y \le 1,\ x \ge 0$;

6) $D: y=x^3,\ \ x+y=10,\ x-y=4,\ y=0$.

14. Змяніць парадак інтэгравання ў паўторных інтэгралах:

1) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x;y)dy$; 2) $\int\limits_1^6 dx \int\limits_{6/x}^{7-x} f(x;y)dy$;

3) $\int\limits_{-6}^2 dx \int\limits_{x^2/4}^{2-x} f(x;y)dy$; 4) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x;y)dx$;

5) $\int\limits_{1/2}^{1} dy \int\limits_{1/y}^{2} f(x;y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{y}^{2} f(x;y)dx$;  6) $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{\ln x} f(x;y)dy$;

7) $\int\limits_{-3}^{0} dx \int\limits_{-x}^{3} f(x;y)dy + \int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{x}^{3} f(x;y)dy$;

8) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f(x;y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} f(x;y)dy$.

15. У двайным інтэграле $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ перайсці да палярных каардынат і расставіць межы інтэгравання:

1) $D: x^2 + y^2 \le -y$;  2) $D: x^2 + y^2 \le -2x$;

3) $D: x^2 + y^2 \le 3,\ y \le -x,\ y \ge \sqrt{3}x$;  4) $D: x^2 + y^2 \le 2x,\ x^2 + y^2 \le y$;

5) $D: x^2 + y^2 \ge a^2,\ x^2 + y^2 \le 2ay$;  6) $D: x^2 + y^2 \le 9,\ x + y \ge 2$.

16. Перайсці да палярных каардынат і вылічыць наступныя паўторныя інтэгралы:

1) $\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{1 + x^2 + y^2}dx$;  2) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{e}^{x^2+y^2} dy$;

3) $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\left(x^2 + y^2\right)dy$;  4) $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} dx$;

5) $\iint\limits_{D} (h - 2x - 3y)dxdy$; $D: x^2 + y^2 \le R^2$;

6) $\iint\limits_{D} \frac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$; $D: x^2 + y^2 \ge \frac{\pi^2}{9},\ \ x^2 + y^2 \le \pi^2$;

7) $\iint\limits_{D} \left(x^2 + y^2\right)dxdy$; $D: x = \sqrt{2},\ \ y \le x,\ \ x^2 + y^2 = 8,\ \ x \ge 0, y \ge 0$;

8) $\iint\limits_{D} \rho^2 d\rho\, d\varphi$; вобласць $D$ — першы віток спіралі $\rho = a\varphi$, абмежаваны палярнай воссю.

**Б**

17. Змяніць парадак інтэгравання:

1) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{y^2/2}^{2} f(x;y)dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x;y)dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x;y)dx$;

2) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^{2/3}} f(x;y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x;y)dy$.

18. Вылічыць двайны інтэграл

$\iint\limits_D \ln\left(1+x^2+y^2\right)dxdy$; $D: x^2+y^2 \le R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0$.

19. У паўторным інтэграле перайсці да палярных каардынат і расставіць межы інтэгравання:

$$\int\limits_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} dx \int\limits_0^{Rx} f\left(\frac{y}{x}\right)dy + \int\limits_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f\left(\frac{y}{x}\right)dy.$$

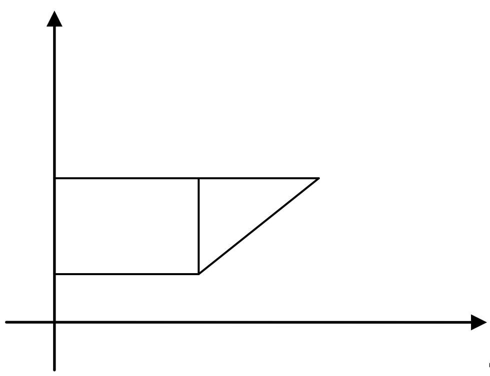
20. У двайным інтэграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перайсці да палярных каардынат і расставіць межы інтэгравання ў вобласці $D$: $\left(x^2+y^2\right)^3 \le 4a^2x^2y^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0$.

*Рашэнне тыповых задач*

Задача 1. Змяніць парадак інтэгравання ў паўторным інтэграле

$\int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{2y} f(x;y)dx$.

Рашэнне. Пабудуем графік зададзенай вобласці $D$, абмежаванай прамымі $y=1,\ y=3,\ x=0,\ x=2y$.



На чарцяжы вобласць $D$, прадстае ў выглядзе трапецыі ABCD. Пры інтэграванні ў іншым парадку неабходна разбіць вобласць ABCD прамой BH, якая пройдзе паралельна восі $Oy$, на дзве часткі. Ніжэйшая лінія мяжы складаецца з дзвюх частак AB і BC, якія маюць розныя раўнанні $y=1$ і $y=\frac{x}{2}$. Значыць, інтэграл пры змене парадку інтэгравання будзе складацца з сумы двух інтэгралаў $\int\limits_0^2 dx\int\limits_1^3 f(x;y)dy+\int\limits_2^6 dx\int\limits_{x/2}^3 f(x;y)dy$.

<u>Задача 2.</u> Вылічыць двухкратны інтэграл $\int\limits_2^4 dy\int\limits_0^y \frac{y^3}{x^2+y^2}dx$.

<u>Рашэнне.</u> Праінтэгруем спачатку па $x$, палічыўшы $y$ нязменным, потым па $y$:

$$\int\limits_0^y \frac{y^3}{x^2+y^2}dx=y^3\int\limits_0^y \frac{dx}{x^2+y^2}=y^2\text{arctg}\frac{x}{y}\Bigg|_0^y=\frac{\pi y^2}{4},$$

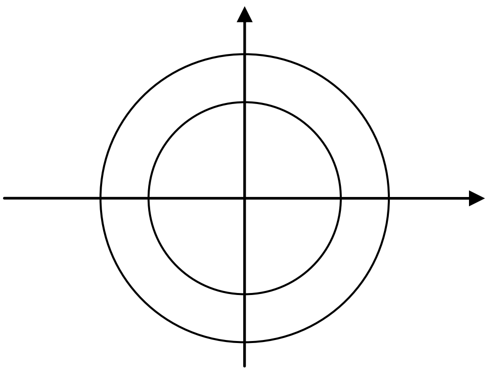
тады $\int\limits_2^4 \frac{\pi y^2}{4}dy=\frac{\pi}{12}y^3\Big|_2^4=\frac{14}{3}\pi.$

Вылічэнне можна правесці карацей:

$$\int\limits_2^4 dy\int\limits_0^y \frac{y^3}{x^2+y^2}dx=\int\limits_2^4\left(y^2\text{arctg}\frac{x}{y}\Bigg|_0^y\right)dy=\frac{\pi}{4}\int\limits_2^4 y^2dy=\frac{\pi}{12}y^3\Big|_2^4=\frac{14}{3}\pi.$$

<u>Адказ:</u> $\frac{14}{3}\pi$.

<u>Задача 3.</u> Перайсці да палярных каардынат, расставіць межы інтэгравання і вылічыць двайны інтэграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, дзе $D$ — кругавое кальцо, якое знаходзіцца паміж акружнасцямі $x^2+y^2=1$ і $x^2+y^2=4$.



<u>Рашэнне.</u> Пабудуем чарцёж. Формулы пераходу ад дэкартавых каардынат да палярных маюць выгляд $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.

Перавёўшы раўнанні ў палярныя каардынаты, атрымаем палярныя раўнанні дадзеных акружнасцей $\rho=1$ і $\rho=2$. Вылічым

$$\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\iint\limits_{1\le\rho\le2}\frac{\rho d\varphi d\rho}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}}=\iint\limits_{1\le\rho\le2}d\varphi d\rho=\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{1}^{2}d\rho=$$

$$=\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\rho\Big|_{1}^{2}\right)d\varphi=\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi=2\pi$$

<u>Адказ:</u> $2\pi$.

*Заданні для самакантролю*

1. Пры сціранні з дошкі на ёй засталося ад рашэння задачы толькі $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{2x}^{3x}$. Па якой зменнай вылічаўся ўнутрані інтэграл? Якая вобласць інтэгравання была спачатку?

2. Пасля сцірання з дошкі застаўся нясцёртым выраз $\int\limits_{-y}^{\sqrt{y}}$: які гэта будзе інтэграл: унутраны ці знешні? Па якой зменнай ён узяты? Што можна сказаць пра вобласць інтэгравання $D$?

3. На прыкладзе функцыі $f\left(x;y\right)=\dfrac{y^2-x^2}{\left(y^2+x^2\right)^2}$, якая разгледжана ў вобласці $0\le x\le1,\ 0\le y\le1$, паказаць, што тэарэма пра змену парадку інтэгравання, што выражана з дапамогай формулы $\int\limits_{a}^{b}dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}f\left(x;y\right)dy=\int\limits_{c}^{d}dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)}f\left(x;y\right)dx$, можа быць несправядлівай. Чым гэта растлумачыць?

4. Растлумачыць, калі пры вылічэнні двайных інтэгралаў абавязкова трэба пераходзіць да палярных каардынат, а калі не.

5. Растлумачыць, калі трэба разбіваць паўторны інтэграл на суму інтэгралаў, а калі гэта рабіць не трэба.

## 3.2. Прымяненне двайных інтэгралаў

*Тэарэтычныя пытанні*

1. Растлумачыць геаметрычны сэнс двайных інтэгралаў.
2. Растлумачыць механічны сэнс двайных інтэгралаў.
3. Запісаць формулу вылічэння плошчы фігуры з дапамогай двайнога інтэграла.

4. Запісаць формулу вылічэння аб'ёмаў цел з дапамогай двайнога інтэграла.

5. Запісаць формулу вылічэння масы пласціны з дапамогай двайнога інтэграла.

6. Запісаць формулы вылічэння плошчы, аб'ёму і масы пласціны з дапамогай двайных інтэгралаў у палярных каардынатах.

*Заданні для аўдыторнай работы*

**А**

21. Пабудаваць вобласці, плошчы якіх выражаюцца інтэграламі. Змяніць парадак інтэгравання ў гэтых інтэгралах і вылічыць плошчы:

1) $\int\limits_a^b dx\int\limits_a^x dy$;  2) $\int\limits_0^a dy\int\limits_{\sqrt{ay}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} dx$;  3) $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{2\sqrt{x}}^{8-x} dy$.

22. З дапамогай двайнога інтэграла вылічыць плошчу вобласці $D$:

1) $D: y=\dfrac{8}{x^2+4},\ \ x^2=4y$;  2) $D: xy=1,\ \ x^2=y,\ \ y=2,\ x=0$;

3) $D: y^2+2y-3x+1=0,\ \ 3x+3y-7=0$;

4) $D: \rho=a\left(1+\cos\varphi\right)$;  5) $D: \rho\ge 2-\cos\varphi,\ \rho=2$;

6) $D: x^2+y^2=1,\ \ x^2+y^2=25,\ y=x\sqrt{3},\ x\ge 0$;

7) $D: \rho\cos\varphi=a,\ \rho=2a$ (плошча меншага сегмента);

8) $D: x^2+y^2+2ax=0,\ \ x^2+y^2+2ay=0$.

23. Пабудаваць на чарцяжы цела, аб'ём якога выражаецца інтэгралам $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left(x^2+y^2\right)dy$, і вылічыць гэты аб'ём.

24. З дапамогай двайнога інтэграла вылічыць аб'ём цела $\Omega$, абмежаванага паверхнямі:

1) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=4,\ y=4,\ \ z=x^2+y^2+1$;

2) $x=2y^2,\ z+x+2y=4,\ y=0,\ z=0$;

3) $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0$;

4) $z=4-x^2, x=0,\ y=0,\ z=0,\ 2x+y=4\ \left(x\ge 0\right)$;

5) $z=x, z=0,\ y=0,\ y=4,\ x=\sqrt{25-y^2}$;

6) $x^2+y^2=1,\ z=0,\ z+x+y=3$;

7) $4z=16-x^2-y^2,\ z=0,\ x^2+y^2\ge 4$;

8) $x^2+y^2=a^2,\ x^2+y^2-z^2=-a^2$;

9) $z=2-\sqrt{x^2+y^2},\ z=0$;

10) $x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=2y,\ z=x,\ z=0$.

25. Вылічыць масу неаднароднай пласціны $D$, абмежаванай дадзенымі лініямі, калі паверхневая шчыльнасць роўна $\rho=\rho(x;y)$:

1) $x=0,\ x+2y+2=0,\ x+y=1,\ \rho=x^2$;

2) $y=x^2-1,\ x+y=1,\ \rho=2x+5y+8$;

3) $x^2+y^2=4x,\ \rho=4-x$; 4) $x^2+y^2=1,\ \rho=2-x-y$.

**Б**

26. З дапамогай двайнога інтэграла вылічыць плошчу вобласці $D$:

1) $D: y^2=x^3,\ \ x=-y^2+2$; 2) $D:(x+y)^3=xy,\ \ (x\geq 0,\ \ y\geq 0)$;

3) $D:\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy,\ x^2+y^2=a^2$;

4) $D:\left(x^2+y^2\right)^2=2x^3$.

27. З дапамогай двайнога інтэграла вылічыць аб’ём цела $\Omega$, абмежаванага паверхнямі:

1) $y^2+z^2=4ax,\ y^2\geq ax,\ x\leq 3a$;

2) $2z=2+x^2+y^2,\ z=4-x^2-y^2$;

3) $2z=x^2+y^2+z^2,\ x^2+y^2=z$.

28. Знайсці плошчы ўказаных частак дадзеных паверхняў:

1) часткі $z^2=x^2+y^2$, якая выразана цыліндрам $z^2=2py$;

2) часткі $2z=x^2+y^2$, якая выразана цыліндрам $x^2+y^2=1$.

29. Вылічыць поўную паверхню цела, якое абмежавана сферай $x^2+y^2+z^2=3a^2$ і парабалоідам $x^2+y^2=2az\ \ (z\geq 0)$.

30. Вылічыць масу круга $x^2+y^2\leq 2Rx$, калі ў кожным пункце яго паверхневая шчыльнасць роўна адлегласці да пачатку каардынат.

31. Знайсці масу пласціны, абмежаванай лініяй $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy$, з паверхневай шчыльнасцю ў кожным пункце, прапарцыянальнай здабытку каардынат гэтага пункта.

32. Матэрыяльная пласціна мае форму раўнабедранага прамавугольнага трохвугольніка, даўжыня гіпатэнузы якога роўна $a$.

Знайсці масу пласціны, калі шчыльнасць у кожным пункце прапарцыянальна, адлегласці да гіпатэнузы.

*Заданні для самастойнай работы*

**А**

33. Змяніць парадак інтэгравання ў наступных інтэгралаў і вылічыць плошчы:

1) $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x-2} dy$;   2) $\int\limits_{0}^{\pi} dx \int\limits_{0}^{1+\cos x} dy$;   3) $\int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{y^2/4}^{y^2} dx$.

34. З дапамогай двайнога інтэграла вылічыць плошчу вобласці $D$:

1) $D: y^2 = a^2 - ax,\ \ y = a + x$;   2) $D: y = \ln x,\ \ y = x - 1,\ \ y = -1$;

3) $D: y = \sin x,\ \ y = \cos x,\ x = 0$;   4) $D: \rho = 3\cos\varphi$;

5) $D: \rho = 2(1 + \cos\varphi),\ \rho = 2\cos\varphi$;   6) $D: x^2 + y^2 = 2y,\ \ y = x,\ x \geq 0$;

7) $D: \rho = 4(1 + \cos\varphi),\ \rho\cos\varphi = 3$(справа ад прамой);

8) $D: x^2 + y^2 - 2ax = 0,\ \ x^2 + y^2 + 2ay = 0$;

9) $D: y = 2^x,\ y = 2x - x^2,\ x = 2,\ x = 0$.

35. Начарціць цела, аб'ём якога выражаецца інтэгралам $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dy$. З геаметрычных меркаванняў азначыць велічыню гэтага інтэграла.

36. З дапамогай двайнога інтэграла вылічыць аб'ём цела $\Omega$, абмежаванага паверхнямі:

1) $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ 2x + 3y - 12 = 0,\ \ z = \dfrac{y^2}{2}$;

2) $z = x^2 + y^2,\ x + y = 3,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$;

3) $3x + 2y + z - 6 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$;

4) $z = 5x,\ x^2 + y^2 = 9,\ z \geq 0$;

5) $y^2 = 4 - 3x,\ y^2 = x,\ z = 9,\ z = -9$;

6) $x^2 + y^2 = 8,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ z + x + y = 4$;

7) $x^2 + y^2 = 2x,\ 2x - z = 0,\ 4x - z = 0$;

8) $x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = z,\ z = 0$;

9) $z = 1 - x^2 - y^2,\ y = x,\ y = x\sqrt{3},\ z = 0$;

10) $x^2+y^2=az,\ x^2+y^2=ay, z=0$.

37. Вылічыць масу неаднароднай пласціны $D$, абмежаванай дадзенымі лініямі, калі паверхневая шчыльнасць роўна $\rho=\rho(x;y)$:

1) $y=0,\ y=2x,\ x+y=6,\ \rho=x^2$; 2) $y=x^2-1,\ y=1,\ \rho=3x^2+2y^2+1$;

3) $x^2+y^2=4y,\ \rho=\sqrt{4-y}$; 4) $x^2+y^2=4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ \rho=4-x^2$.

**Б**

38. З дапамогай двайнога інтэграла вылічыць плошчу вобласці $D$:

1) $D: x^2+y^2=2ax,\ \ y^2=2ax,\ x=2a$;

2) $D: \left(x^2+y^2\right)^2=a\left(x^3-3xy^2\right),\ \ a>0$;

3) $D: \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2=x^2y$; 4) $D: x^3+y^3=2xy,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.

39. З дапамогай двайнога інтэграла вылічыць аб'ём цела $\Omega$, абмежаванага паверхнямі:

1) $az=a^2-x^2-y^2,\ x^2+y^2+ax=0,\ z=0$ (унутры цыліндра);

2) $x^2+y^2+z^2=4,\ 3z=x^2+y^2$ (унутры парабалоіда);

3) $x^2+y^2+z^2=a^2,\ \left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$.

40. Знайсці плошчы ўказаных частак дадзеных паверхняў:

1) часткі $z^2=4x$, якая выразана цыліндрам $y^2=4x$ і плоскасцю $x=1$;

2) часткі $x^2+y^2+z^2=a^2$, якая выразана цыліндрам $x^2+y^2=R^2\left(R\le a\right)$.

41. Вылічыць плошчу часткі паверхні конуса $y^2+z^2=x^2$, які размяшчаецца ў сярэдзіне цыліндра $x^2+y^2=a^2$.

42. Вылічыць масу пласціны, абмежаванай лініяй $\left(x^2+y^2\right)^2=8xy$, паверхневая шчыльнасць якой у кожным пункце роўна квадрату адлегласці да пачатку каардынат.

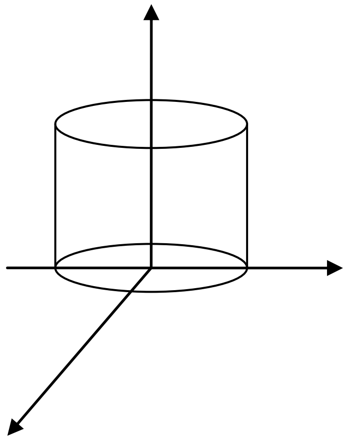
43. Вылічыць масу квадратнай пласціны са стараной $a$, шчыльнасць якой у любым пункце прапарцыянальна квадрату адлегласці ад гэтага пункта да адной з вяршынь квадрата.

44. На фігуры, абмежаванай эліпсам $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, маса размеркавана такім чынам, што шчыльнасць яе ў кожным пункце

прапарцыянальна адлегласці яго да восі абсцыс, прычым пры $y=1$ яна роўна $\gamma$. Знайсці масу ўсёй фігуры.

*Рашэнне тыповых задач*

Задача 1. Вылічыць аб'ём цела, якое абмежавана зверху паверхняй $z=x^2+y^2+9$, знізу — плоскасцю $Oxy$ і з бакоў — кругавым цыліндрам $x^2+y^2=1$.



Рашэнне. Пабудуем графік. Аб'ём дадзенага цела будзе вылічацца па формуле $V=\iint\limits_D\left(x^2+y^2+9\right)dxdy$, дзе $D$ — круг $x^2+y^2\le 1$, які выразае цыліндр на плоскасці $\mathrm{Oxy}$.

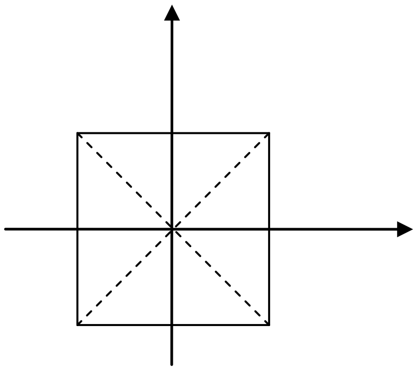
Трэба перайсці да палярных каардынат па формулах $\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ і вылічыць інтэграл.

$$V=\iint\limits_D\left(x^2+y^2+9\right)dxdy=\iint\limits_D\left(r^2+9\right)rdrd\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(r^3+9r\right)dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}+\frac{9r^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{2}\right)d\varphi=\frac{19}{4}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{19}{4}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{19}{2}\pi\ \left(\text{ед}^3\right).$$

Адказ: $V=\dfrac{19}{2}\pi$ ед$^3$.

Задача 2. Знайсці масу квадратнай пласціны са стараной $2a$, калі шчыльнасць $\rho(x,y)$ матэрыялу ў кожным пункце прапарцыянальна квадрату адлегласці яго да пункта перасячэння дыяганалей і на вуглах квадрата $\rho(x,y)=1$.



Рашэнне. Няхай пункт перасячэння дыяганалей квадрата знаходзіцца ў пачатку каардынат. Пункт $M(x,y)$ змесцім у квадраце, дзе $\{|x|\le a, |y|\le a\}$. Тады квадрат адлегласці любога пункта да пункта перасячэння дыяганалей будзе роўны $x^2 + y^2$, адкуль шчыльнасць у пункце $M$ прыме выгляд $\rho(M) = \rho(x, y) = k(x^2 + y^2)$, дзе $k$ — каэфіцыент прапарцыянальнасці.

Вядома, што шчыльнасць на вуглах квадрата $\rho(x, y) = 1$, таму атрымаем $1 = k(x^2 + y^2)$, адкуль $k = \dfrac{1}{2a^2}$.

Атрыманае значэнне $k$ падставім у выраз функцыі шчыльнасці $\rho(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2a^2}$. Застанецца вылічыць двайны інтэграл $m = \dfrac{1}{2a^2}\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dxdy$. Падынтэгральная функцыя цотная адносна $x$ і $y$ (бо шчыльнасць сіметрычна адносна пачатку каардынат), таму можам абмежавацца вылічэннем інтэграла толькі па адной чацвертай часткы вобласці $D$, якая знаходзіцца ў першай чвэрці.

$$m = \frac{2}{a^2}\int_0^a dx \int_0^a (x^2 + y^2)\,dy = \frac{2}{a^2}\int_0^a \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^a dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a \left( ax^2 + \frac{a^3}{3} \right) dx =$$

$$= \frac{2}{a^2}\left( \frac{ax^3}{3} + \frac{a^3 x}{3} \right)\Bigg|_0^a = \frac{2}{a^2}\,\frac{2a^4}{3} = \frac{4}{3}a^2$$

<u>Адказ:</u> $\dfrac{4}{3}a^2$.

*Пытанні для самакантролю*

1. Ацаніць двайны інтэграл $\iint\limits_D \sin\dfrac{x^2 - y + 1}{x^2 + y^2 + 1}\,dxdy$, дзе $D$ — круг $x^2 + y^2 \le 9$.

2. Пасля сцірання з дошкі ад задання засталося толькі: 1) $\int\limits_3^5 \int\limits_{2x}^{3x}$, 2) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^y$. Па якой зменнай вылічаўся ўнутраны інтэграл? Якая была вобласць інтэгравання?

3. Пасля сцірання з дошкі ад задання засталося нясцёртым: 1) $\int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{y}}$, 2) $\int\limits_{x^2}^{4-x}$. Які гэта інтэграл: унутраны ці знешні? Па якой зменнай ён вылічаны? Што можна сказаць пра вобласць інтэгравання $D$?

4. Як лепей вылічаць двайныя інтэгралы: калі знешні інтэграл залежыць ад $x$ або ад $y$?

5. У якіх выпадках вобласць разбіваюць на часткі, а ў якіх не разбіваюць?

6. У якіх выпадках атрымліваецца адзін паўторны інтэграл, а ў якіх — сума паўторных інтэгралаў?

## 3.3. Азначэнне, пабудова графікаў, вылічэнне трайных інтэгралаў

*Тэарэтычныя пытанні*

1. Азначэнне інтэгральнай сумы функцыі $f(x, y, z)$ у вобласці $G$.
2. Даць азначэнне трайнога інтэграла.
3. Геаметрычны сэнс трайнога інтэграла.
4. Механічны сэнс трайнога інтэграла.
5. Пералічыць уласцівасці трайных інтэгралаў.
6. Вылічэнне трайных інтэгралаў.
7. Расстаноўка межаў інтэгравання ў трохкратных інтэгралах.
8. Трайныя інтэгралы ў цыліндрычнай сістэме каардынат.

*Заданні для аўдыторнай работы*

**А**

45. Вылічыць наступныя трохкратныя інтэгралы:

1) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^4 (x+y+z)dz$; 2) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^1 dy \int\limits_0^2 (z+4)dz$;

3) $\int\limits_0^{1/2} dx \int\limits_x^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz$.

46. Вылічыць трайныя інтэгралы па абласцях, абмежаваных дадзенымі паверхнямі:

1) $\iiint\limits_G ydxdydz,\ x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1-y$;

2) $\iiint\limits_G xz^2dxdydz,\ x=\sqrt{2y-y^2},\ x=0,\ y=0,\ y=2,\ z=0,\ z=3;$

3) $\iiint\limits_G \dfrac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3},\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ z+x=3,\ y=2.$

47. Расставіць межы інтэгравання, калі яно праводзіцца ў паслядоўнасці а) $x,\ y,\ z$; б) $y,\ x,\ z$; в) $z,\ x,\ y$:

1) $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$, дзе вобласць $G$ абмежавана паверхнямі $x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=1,(x\geq 0,\ y\geq 0)$;

2) $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$, дзе вобласць $G$ абмежавана паверхнямі $x^2+y^2=z^2,\ z=3$.

48. Запісаць і пабудаваць вобласці інтэгравання:

1) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)dz$;  2) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$.

49. Перайсці ў трайным інтэграле $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$ да цыліндрычных каардынат $r,\varphi,\ z$ $(x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z)$ і расставіць межы інтэгравання:

1) вобласць $G$ абмежавана цыліндрам $x^2+y^2=4$ і плоскасцямі $z=0,\ z=3$;

2) вобласць $G$ абмежавана цыліндрам $x^2+y^2=2y$, парабалоідам $z=x^2+y^2$ і плоскасцю $z=0$;

3) вобласць $G$ абмежавана цыліндрам $x^2+y^2=R^2$ і плоскасцямі $z=0,\ z=1,\ y\geq x,\ \ y\leq x\sqrt{3}$.

50. З дапамогай пераходу да цыліндрычных каардынат вылічыць наступныя інтэгралы:

1) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int\limits_0^a dz$;

2) $\iiint\limits_G zdxdydz$, вобласць $G$ абмежавана конусам $z^2=x^2+y^2$ і плоскасцю $z=2$;

3) $\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, вобласць $G$ абмежавана цыліндрам $x^2+y^2=2x$ і плоскасцямі $z=0, z=3$.

**Б**

51. Трайны інтэграл $\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz$ звесці да трохкратнага:

1) вобласць $G$: $x^2+y^2+z^2=4$, $z=0$, $x^2+y^2=2x$;

2) вобласць $G$: $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $2z=8-x^2-y^2$;

3) вобласць $G$: $x^2+y^2+z^2\le R^2$ і $x^2+y^2+(z-R)^2\le R^2$ (агульная частка).

52. Вылічыць трайныя інтэгралы:

1) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz$ (перайсці да сферычных каардынат);

2) $\iiint\limits_G y\cos(z+x)\,dxdydz$, вобласць $G$ абмежавана паверхнямі $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $x+z=\dfrac{\pi}{2}$;

3) $\iiint\limits_G \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, вобласць $G$ абмежавана паверхнямі $x^2+y^2+z^2=9$ і $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

4) $\iiint\limits_G \dfrac{dxdydz}{(4x+3y+z+2)^6}$, вобласць $G$ абмежавана паверхнямі $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z+1=0$;

5) $\iiint\limits_G \left(x^2+y^2+z\right)^3 dxdydz$, вобласць $G$ абмежавана паверхнямі $x^2+y^2=z$, $z=c$.

*Заданні для самастойнай работы*

**А**

53. Вылічыць наступныя трохкратныя інтэгралы:

1) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^y xyz\,dz$;

2) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{1-x-y}\dfrac{dz}{(3x+2y+z-4)^4}$;

3) $\int\limits_0^{1/2} dx \int\limits_0^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz$.

54. Вылічыць трайныя інтэгралы па абласцях, абмежаваных дадзенымі паверхнямі:

1) $\iiint\limits_G (2x+3y+z)dxdydz,\ x=0,\ y=0,\ y+x=3,\ z=0,\ z=4$;

2) $\iiint\limits_G xy^2z^3dxdydz,\ x=1,\ y=x,\ z=0,\ z=xy$;

3) $\iiint\limits_G xydxdydz,\ x^2+y^2=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z=0,\ z=1$.

55. Расставіць межы інтэгравання, калі яно праводзіцца ў паслядоўнасці а) $x,\ y,\ z$; б) $y,\ x,\ z$; в) $z,\ x,\ y$:

1) $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$, дзе вобласць $G$ абмежавана паверхнямі $x=0$, $y=0,\ z=0,\ x+y=1, x+y-z=0$;

2) $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$, дзе вобласць $G$ абмежавана паверхнямі $x=0$, $y=0, z=0,\ x=1, y=1,\ x^2+y^2=z$.

56. Запісаць і пабудаваць вобласці інтэгравання:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy \int\limits_0^{\pi/2-x} f(x,y,z)dz$; 2) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)dz$.

57. Перайсці ў трайным інтэграле $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$ да цыліндрычных каардынат $r, \varphi, z$ $(x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z)$ і расставіць межы інтэгравання:

1) вобласць $G$ абмежавана парабалоідам $4z=5-x^2-y^2$ і плоскасцю $z=0$;

2) вобласць $G$ — частка прасторы, якая заключана паміж сферамі $x^2+y^2+z^2=9$ і $x^2+y^2+z^2=16$;

3) вобласць $G$ абмежавана конусам $x^2+y^2=2x$ і плоскасцю $z=0$.

58. З дапамогай пераходу да цыліндрычных каардынат вылічыць наступныя інтэгралы:

1) $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2\right) dz$;

2) $\iiint\limits_{G} \left(x^2+y^2\right) dxdydz$, вобласць $G$ абмежавана парабалоідам $2z = x^2+y^2$ і плоскасцю $z = 2$;

3) $\iiint\limits_{G} z\sqrt{x^2+y^2} dxdydz$, вобласць $G$ абмежавана паверхняй $x^2+y^2 = 2y$ і плоскасцямі $z = -2, z = 3$.

## Б

59. Трайны інтэграл $\iiint\limits_{G} f\left(x, y, z\right) dxdydz$ звесці да трохкратнага:

1) вобласць $G$: $x^2+y^2+z^2 = 16$, $x^2+y^2 = 6z$;

2) вобласць $G$: $x^2+y^2+z^2 = 2z$, $x^2+y^2 = z^2$;

3) вобласць $G$: $x^2+y^2+z^2 = 1$, $x^2+y^2+z^2 = 16$, $x^2+y^2 = z^2$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

60. Вылічыць трайныя інтэгралы:

1) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_{0}^{a} z\sqrt{x^2+y^2} dz$;

2) $\iiint\limits_{G} \left(x^2+y+z^2\right)^3 dxdydz$, вобласць $G$ абмежавана паверхнямі $x^2+z^2 = 1$, $y = 0$, $y = 1$;

3) $\iiint\limits_{G} \dfrac{dxdydz}{\left(4x+3y+z-2\right)^5}$, вобласць $G$ абмежавана паверхнямі $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x+y+z-1 = 0$;

4) $\iiint\limits_{G} \left(x+y+z\right) dxdydz$, $G$— агульная частка вобласці, абмежаванай паверхнямі $z \geq \dfrac{x^2+y^2}{2a}$ і $x^2+y^2+z^2 \leq 3a^2$;

5) $\iiint\limits_{G} zdxdydz$, вобласць $G$ абмежавана паверхнямі $9x^2+9y^2+4z^2 = 36$, $z = 0$.

61. Вылічыць трохкратны інтэграл $\int\limits_a^A dx\int\limits_b^B dy\int\limits_c^C f\left(x,y,z\right)dz$, калі $f\left(x,y,z\right)=F'''_{xyz}\left(x,y,z\right)$.

## 3.4. Прыкладанне трайных інтэгралаў

*Тэарэтычныя пытанні*

1. Растлумачыць геаметрычны сэнс трайнога інтэграла.
2. Растлумачыць механічны сэнс трайнога інтэграла.
3. Запісаць формулу вылічэння аб’ёму цела з дапамогай трайнога інтэграла.
4. Запісаць формулу вылічэння масы цела з дапамогай трайнога інтэграла.

*Заданні для аўдыторнай работы*

**А**

62. Вылічыць з дапамогай трайнога інтэграла аб’ём цела, абмежаванага дадзенымі паверхнямі:

1) $z=x^2,\ z\geq 0,\ x-2y+2=0,\ x+y=7$;

2) $z=4-x,\ z\geq 0,\ x=2\sqrt{y},\ y=2\sqrt{x}$; 3) $z=x^2+y^2-2,\ z=0$;

4) $z=4-y,\ z=0,\ x^2+y^2=4x$;

5) $z=0,\ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9-2z$ (знешняя частка цыліндра).

63. Вылічыць масу цела, абмежаванага дадзенымі паверхнямі, калі паверхневая шчыльнасць роўна $\rho=\rho\left(x,y,z\right)$:

1) $2x+z=2a,\ x+z=a,\ y^2=ax,\ y\geq 0,\ \rho\left(x,y,z\right)=y$;

2) $x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=2,\ \rho\left(x,y,z\right)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$.

**Б**

64. З дапамогай трайнога інтэграла вылічыць аб’ём цела, абмежаванага дадзенымі паверхнямі:

1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1,\ y=0,\ z=\dfrac{x}{2},\ z=x$;

2) $z=x^2+y^2,\ z=x^2+2y^2,\ y=x,\ y=2x,\ x=1$;

3) $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2+z^2=9,\ x^2+z^2=y^2$;

4) $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=3z$ (унутраная частка парабалоіда);

5) $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x^2+y^2=R\left(R-2z\right), z\geq 0$.

65. Знайсці масу цела, абмежаванага паверхнямі $z=h,$ $x^2+y^2-z^2=0$, калі шчыльнасць у кожным пункце прапарцыянальна аплікаце гэтага пункта.

66. Вылічыць масу цела, абмежаванага прамым кругавым цыліндрам з радыусам $R$, вышынёй $H$, калі шчыльнасць у любым пункце прапарцыянальна квадрату адлегласці ад гэтага пункта да цэнтра асновы цыліндра.

*Заданні для самастойнай работы*

**А**

67. З дапамогай трайнога інтэграла вылічыць аб'ём цела, абмежаванага дадзенымі паверхнямі:

1) $z=y^2,\ z\geq 0,\ y=2x,\ x=3,\ y\geq 0$;

2) $z=x^2+y^2,\ z\geq 0,\ x+y=2,\ x\geq 0,\ y\geq 0$;

3) $z=2-y,\ z\geq 0,\ x^2+y^2=4$;

4) $z=4-x,\ z\geq 0,\ x^2+y^2=4y$;

5) $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x^2+y^2=Rx$ (цела выразаецца цыліндрам са сферы).

68. Вылічыць масу цела, абмежаванага дадзенымі паверхнямі, калі паверхневая шчыльнасць роўна $\rho=\rho\left(x,y,z\right)$:

1) $x^2=2y,\ y+z=1,\ 2y+z=2,\quad \rho\left(x,y,z\right)=y$;

2) $x^2+y^2=z,\ z=C,\ \rho\left(x,y,z\right)=\left(x^2+y^2+z\right)^2$.

**Б**

69. З дапамогай трайнога інтэграла вылічыць аб'ём цела, абмежаванага дадзенымі паверхнямі:

1) $z=4y^2,\ z=9y^2,(y>0),\ z=4x,\ z=5x,\ z=25$;

2) $z=x^2+y^2,\ z=2x^2+2y^2,\ y=x,\ y=x^2$;

3) $y=12-x^2-z^2,\ y=\sqrt{x^2+z^2}$;

4) $x^2+y^2+z^2=2z,\ z^2=x^2+y^2$.

70. Знайсці масу шара з радыусам $R$, калі шчыльнасць у кожным пункце прапарцыянальна квадрату адлегласці да восі $Oz$.

71. Знайсці масу піраміды, абмежаванай плоскасцямі $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, калі шчыльнасць у кожным пункце прапарцыянальна аплікаце гэтага пункта.

*Рашэнне тыповых задач*

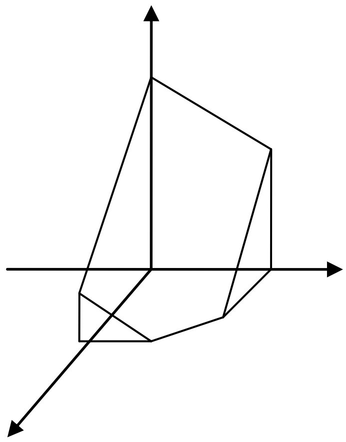
Задача 1. Вылічыць трохкратны інтэграл у цыліндрычнай сістэме каардынат $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r dr \int\limits_R^{R+\sqrt{R^2-r^2}} dz$.

Рашэнне.

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r dr \int\limits_R^{R+\sqrt{R^2-r^2}} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r\left( z\Big|_R^{R+\sqrt{R^2-r^2}} \right) dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\,dr =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \sqrt{R^2-r^2}\,d\left(R^2-r^2\right) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{2}{3}\sqrt{\left(R^2-r^2\right)^3}\Bigg|_0^R d\varphi =$$

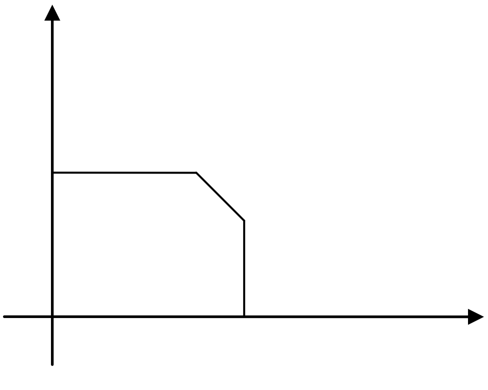
$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} R^3 d\varphi = \frac{R^3}{3}\varphi\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{2\pi R^3}{3}.$$



Адказ: $\frac{2\pi R^3}{3}$.

Задача 2. Знайсці аб'ём цела, абмежаванага дадзенымі паверхнямі $x+y+z=4,\ x=3,\ y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

Рашэнне. Дадзеныя плоскасці абмяжоўваюць шасціграннік, начэрцім яго. Вылічым аб'ём па формуле $V=\iiint\limits_G dxdydz$.



Для расстаноўкі межаў інтэгравання спраектуем атрыманую вобласць на плоскасць $Oxy$.

$$D:\begin{cases} x+y=4,\ x=3,\ y=2 \\ x=0,\ y=0. \end{cases}$$

Вобласць $D$ трэба разбіваць на дзве вобласці. Атрымаем:

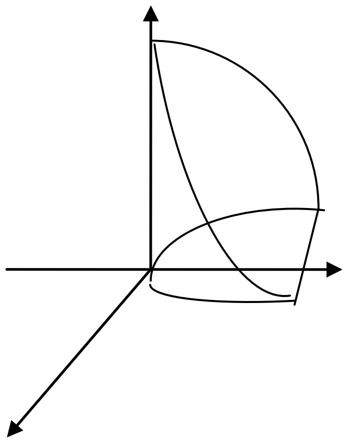
$$V=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{4-x-y} dz + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{4-y} dx \int\limits_0^{4-x-y} dz =$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^3 (4-x-y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{4-y}(4-x-y)dx=\int_0^1\left(\left.\left((4-y)x-\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^3\right)dy+$$

$$+\int_1^2\left(\left.\left((4-y)x-\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^{4-y}\right)dy==\int_0^1\left(\frac{15}{2}-3y\right)dy+\frac{1}{2}\int_1^2(4-y)^2dy=$$

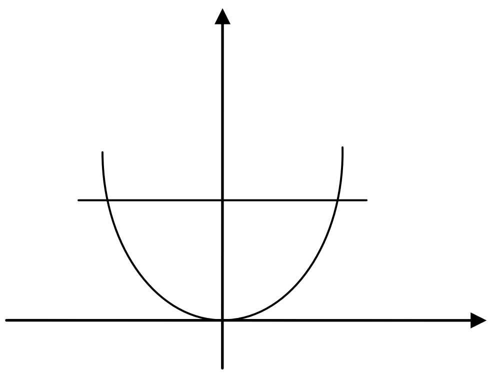
$$=\left.\left(\frac{15}{2}y-\frac{3}{2}y^2\right)\right|_0^1+\left.\frac{1}{6}(y-4)^3\right|_1^2==\frac{55}{6}\left(\text{ед}^3\right).$$

<u>Адказ:</u> $V=\frac{55}{6}$ åä$^3$.



<u>Задача 3.</u> Знайсці масу цела, абмежаванага цыліндрычнай паверхняй $x^2=2y$ і плоскасцямі $y+z=1,\ 2y+z=2$, калі ў кожным яго пункце шчыльнасць прапарцыянальна ардынаце гэтага пункта.

<u>Рашэнне.</u> Пабудуем чарцёж атрыманага цела. Па дадзенных умовах шчыльнасць $\rho(x;y;z)=ky$, дзе $k$ — каэфіцыент прапарцыянальнасці. Па формуле маса цела мае выгляд $m=\iiint\limits_G \rho(x;y;z)dV$.



Для расстаноўкі межаў інтэгравання спраектуем атрыманую вобласць на плоскасць $Oxy$.

$$D:\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2},\\ y=1.\end{cases}$$

Атрымаем

$$m=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}}dx\int_{1-y}^{2(1-y)}kydz=k\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}}y(1-y)dx=$$

$$=k\int_0^1\left(y-y^2\right)2\sqrt{2y}dy=2\sqrt{2}k\left.\left(\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\right)\right|_0^1=2\sqrt{2}k\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{7}\right)=\frac{8\sqrt{2}k}{35}.$$

Адказ: $m = \frac{8\sqrt{2}k}{35}$.

*Пытанні для самакантролю*

1. Што агульнае маюць двайныя і трайныя інтэгралы?

2. Як перайсці ад двайнога інтэграла да трайнога і наадварот?

3. Пасля сцірання з дошкі ад задання засталося толькі $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int$. Прыдумайце, як яго закончыць. Намалюйце вобласць інтэгравання.

4. Пасля сцірання з дошкі ад задання засталося нясцёртым $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x^2+y^2} f\left(x, y\right) dz$. Якога інтэграла не хапае ў гэтым выразе?

5. Якія аднолькавыя геаметрычныя і механічныя велічыні можна знайсці з дапамогай двайнога і трайнога інтэграла?

6. Пасля сцірання з дошкі ад задання засталося нясцёртым $\int\limits_0^1 \int\limits_x^{2x}$. Якая была вобласць інтэгравання? Пабудуйце з гэтага выраза трайны інтэграл. Намалюйце яго вобласць інтэгравання.

7. У якіх выпадках трэба пераходзіць да цыліндрычнай сістэмы каардынат, а ў якіх гэтага рабіць не трэба?

# Глава 4. КРЫВАЛІНЕЙНЫЯ ІНТЭГРАЛЫ

## 4.1. Крывалінейныя інтэгралы першага тыпу

*Тэарэтычныя пытанні*

1. Даць азначэнне інтэгральнай сумы функцыі $f(M)$ па дузе $AB$.

2. Даць азначэнне крывалінейнага інтэграла ад функцыі $f(M)$ па даўжыні дугі $AB$, або крывалінейнага інтэграла першага тыпу.

3. Пералічыць асноўныя ўласцівасці крывалінейных інтэгралаў першага тыпу.

4. Пералічыць, як выглядае крывалінейны інтэграл пры розных заданнях крывой $L$: а) у дэкартавай сістэме каардынат; б) у палярнай сістэме каардынат; в) у параметрычным выглядзе.

5. Механічны сэнс крывалінейнага інтэграла першага тыпу.

6. Расказаць, як выконваецца вылічэнне крывалінейных інтэгралаў першага тыпу.

7. Геаметрычны сэнс крывалінейнага інтэграла першага тыпу.

*Заданні для аўдыторнай работы*

**А**

1. Вылічыць крывалінейныя інтэгралы першага тыпу:

1) $\int\limits_L y\,dl$, $L$ — адрэзак прамой $y = x$ паміж пунктамі $A(0,0)$, $B(1,1)$;

2) $\int\limits_L x\,dl$, $L$ — дуга лініі $2y = x^2$ паміж пунктамі $A(0,1)$, $B\left(1,\frac{1}{2}\right)$;

3) $\int\limits_L \frac{x^3}{y^2}\,dl$, $L$ — дуга лініі $xy = 1$ паміж пунктамі $A(1,1)$, $B\left(2,\frac{1}{2}\right)$;

4) $\int\limits_L \frac{dl}{x+y}$, $L$ — адрэзак прамой $y = x + 2$ паміж пунктамі $A(2,4)$, $B(1,3)$;

5) $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, $L$ — адрэзак прамой $y = \frac{x}{2} - 2$ паміж пунктамі $A(0,-2)$, $B(4,0)$;

6) $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, $L$ — крывая $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$;

7) $\int\limits_L xydl$, $L$— прамавугольнік, абмежаваны прамымі $x=0,\ x=4$, $y=0,\ y=2$.

**Б**

2. Вылічыць крывалінейныя інтэгралы першага тыпу:

1) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $L$ — адрэзак прамой $y=\frac{1}{2}x-2$ паміж пунктамі $A(0,-2)$, $B(4,0)$;

2) $\int\limits_L \frac{\cos^2 xdl}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$, $L$ — дуга сінусоіды $y=\sin x$, $(0\le x\le \pi)$;

3) $\int\limits_L \sqrt{1+\cos^4 x}dl$, $L$ — дуга тангенсоіды $y=\mathrm{tg}x$, $\left(0\le x\le \frac{\pi}{4}\right)$;

4) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, $L$ — верхняя палова кардыёіды $r=a(1+\cos\varphi)$;

5) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2+a^2}dl$, $L$ — дуга спіралі Архімеда $r=a\varphi$ $(a>0)$ паміж пунктамі $A(0,0)$, $B\left(a^2,a\right)$.

*Заданні для самастойнай работы*

**А**

3. Вылічыць крывалінейныя інтэгралы першага тыпу:

1) $\int\limits_L \frac{x}{y}dl$, $L$— дуга парабалы $y^2=2x$, якая знаходзіцца паміж пунктамі $A\left(1,\sqrt{2}\right)$, $B(2,2)$;

2) $\int\limits_L \left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)dl$, $L$— адрэзак прамой $AB$, дзе $A(-1,0)$, $B(0,1)$;

3) $\int\limits_L y^2dl$, $L$— дуга лініі $x=\ln y$ паміж пунктамі $A(0,1)$, $B(1,e)$;

4) $\int\limits_L y^2dl$, $L$— верхняя палова акружнасці $x^2+y^2=R^2$ $(y\ge 0)$;

5) $\int\limits_L y^3dl$, $L$— арка цыклоіды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$;

6) $\int\limits_L ydl$, $L$ — дуга парабалы $y^2 = 2x$, якая знаходзіцца паміж пунктамі $O(0,0)$ і $A\left(1,\sqrt{2}\right)$;

7) $\int\limits_L x^2dl$, $L$ — верхняя палова акружнасці $x^2 + y^2 = a^2$.

**Б**

4. Вылічыць крываліне́йныя інтэгралы першага тыпу:

1) $\int\limits_L \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dl$, $L$ — дуга касінусоіды $y = \cos x$, $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$;

2) $\int\limits_L \sin^4 x\cos xdl$, $L$ — дуга лініі $y = \ln\sin x$, $\left(\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3}\right)$;

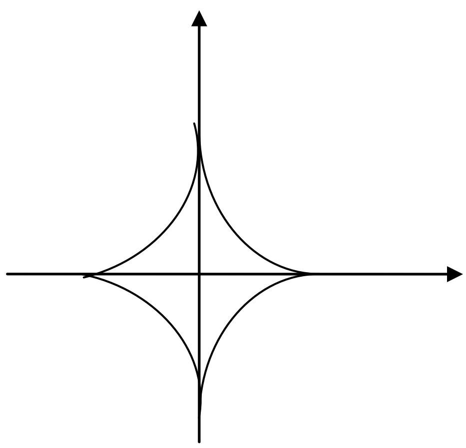
3) $\int\limits_L x^2ydl$, $L$ — дуга астроіды $x = a\sin^3 t, y = a\cos^3 t$, $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$;

4) $\int\limits_L (x+y)dl$, $L$ — правы пялёстак лемніскаты $r^2 = a^2\cos 2\varphi$;

5) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, $L$ — адрэзак прамой паміж пунктамі $O(0,0)$ і $A(1,2)$.

*Рашэнне тыповых задач*

Задача 1. Вылічыць крываліне́йны інтэграл $\int\limits_L \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right)dl$ па дуге астроіды $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ паміж пунктамі $A(-1,0)$, $B(0,1)$.



Рашэнне. Вядома, што $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$. Вылічым іх дыферэнцыялы $dx = -3\cos^2 t\sin tdt$, $dy = -3\sin^2 t\cos tdt$. Па азначэнні

$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 3\left|\sin t\cos t\right|dt =$

$= -3\sin t\cos tdt$, дзе $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$.

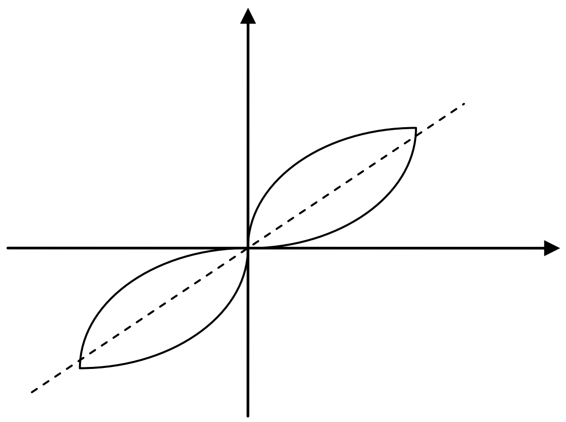
$$\int_L \left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)dl=\int_{\pi}^{\pi/2}\left(4\cos t-3\sqrt{\sin^3 t}\right)3\sin t\cos t dt=$$

$$=-12\int_{\pi}^{\pi/2}\cos^2 t d\left(\cos t\right)-9\int_{\pi}^{\pi/2}\sin^{5/2} t d\left(\sin t\right)=$$

$$\left(-4\cos^3 t-\frac{18}{7}\sin^{7/2} t\right)\Bigg|_{\pi}^{\pi/2}=-\frac{46}{7}.$$

<u>Адказ:</u> $-\dfrac{46}{7}$.

<u>Задача 2.</u> Вылічыць $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{arctg}^2\dfrac{y}{x}dl$, дзе $L$ — дуга лініі $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy$, якая знаходзіцца ў першым квадранте.



<u>Рашэнне.</u> Пяройдзем да палярнай сістэмы каардынат па формулах $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

Тады $\sqrt{x^2+y^2}=r$, $\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}=\varphi$.

Раўнанне зададзенай дугі атрымае выгляд $r=a\sqrt{\sin 2\varphi}$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

Знойдзем вытворную $r'=\dfrac{a\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$.

$$dl=\sqrt{r_{\varphi}^{2}+\left(r'_{\varphi}\right)^2}d\varphi=\sqrt{a^2\sin 2\varphi+a^2\frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}d\varphi=\frac{ad\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}.$$

Вылічым дадзены крывалінейны інтэграл

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{arctg}^2\frac{y}{x}dl=\int_0^{\pi/2} r\varphi^2\frac{ad\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}=\int_0^{\pi/2} a\varphi^2\sqrt{\sin 2\varphi}\frac{ad\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}=$$

$$a^2\int_0^{\pi/2}\varphi^2 d\varphi=a^2\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{a^2\pi^3}{24}.$$

<u>Адказ:</u> $\dfrac{a^2\pi^3}{24}$.

## 4.2. Крывалінейныя інтэгралы другога тыпу

*Тэарэтычныя пытанні*

1. Даць азначэнне інтэгральнай сумы па каардынатах для функцый $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$.

2. Даць азначэнне крывалінейных інтэгралаў па каардынатах, або крывалінейных інтэгралаў другога тыпу.

3. Пералічыць асноўныя ўласцівасці крывалінейных інтэгралаў другога тыпу.

4. Механічны сэнс крывалінейных інтэгралаў другога тыпу.

5. Расказаць, як выконваецца вылічэнне крывалінейных інтэгралаў другога тыпу.

6. У якіх выпадках крывалінейны інтэграл не залежыць ад шляху інтэгравання?

*Заданні для аўдыторнай работы*

**А**

5. Вылічыць крывалінейныя інтэгралы другога тыпу:

1) $\int\limits_L \sin^2 x dx + y^2 dy$, $L$ — дуга лініі $y = \cos x$, $o \le x \le \pi$;

2) $\int\limits_L \sqrt{x^2 + 3y} dy + (x - y) dx$, $L$ — дуга лініі $y = x^2$ паміж пунктамі $A(0,0)$, $B(1,1)$;

3) $\int\limits_L \frac{xdx + ydy}{x^3 + y^3}$, $L$ — адрэзак прамой паміж пунктамі $A(1,1)$, $B(2,2)$;

4) $\int\limits_L xydx + y^2 dy$, $L$ — дуга крывой $x = t^2$, $y = t$, $(0 \le t \le 2)$;

5) $\int\limits_L y(x - y) dx + xdy$, $L$ — дуга парабалы $y = 2x^2$, якая знаходзіцца паміж пунктамі $O(0,0)$ і $A(1,2)$;

6) $\int\limits_L (xy - 1) dx + x^2 ydy$, $L$ — дуга парабалы $4x + y^2 = 4$, якая знаходзіцца паміж пунктамі $A(1,0)$, $B(0,2)$.

**Б**

6. Вылічыць крывалінейныя інтэгралы другога тыпу:

1) $\int\limits_L ydx + xdy$, $L$ — чвэрць акружнасці $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$;

2) $\int\limits_L (2a - y)dx + xdy$, $L$ — арка цыклоіды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$;

3) $\int\limits_L \frac{xy(ydx - xdy)}{x^2 + y^2}$, $L$ — правы пялёстак лемніскаты $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ у дадатным накіраванні.

7. Вылічыць дадзеныя інтэгралы, але спачатку пераканацца, што яны не залежаць ад шляху інтэгравання:

1) $\int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} xdy + ydx$; 2) $\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} \left(x^4 + 4xy^2\right)dx + \left(6x^2y^2 - 5y^4\right)dy$.

8. Вылічыць крывалінейныя інтэгралы другога тыпу:

1) $\int\limits_L ydx + x^2dy + zdz$, $L$ — дуга крывой $x = t,\ y = t^3,\ z = t^5, (0 \le t \le 1)$;

2) $\int\limits_L \left(x^2 + y + z\right)dx + z^2dy + \left(x + y^2\right)dz$, $L$ — адрэзак прамой паміж пунктамі $A(2,1,0)$, $B(4,3,1)$.

*Заданні для самастойнай работы*

**A**

9. Вылічыць крывалінейныя інтэгралы другога тыпу:

1) $\int\limits_L \cos^2 xdx + \frac{dy}{y^3}$, $L$ — дуга лініі $y = \mathrm{tg}x$, $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3}$;

2) $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)dx + xydy$, $L$ — дуга крывой $y = \mathrm{e}^x$ паміж пунктамі $A(0,1)$, $B(1,e)$;

3) $\int\limits_L xydx$, $L$ — дуга сінусоіды $y = \sin x$, $(0 \le x \le \pi)$;

4) $\int\limits_L \left(x^2 - y^2\right)dx$, $L$ — дуга парабалы $y = x^2$, якая знаходзіцца паміж пунктамі $O(0,0)$ і $B(2,4)$;

5) $\int\limits_L y(x-y)dx+xdy$, $L$— дуга парабалы $y^2=4x$, якая знаходзіцца паміж пунктамі $O(0,0)$ і $A(1,2)$;

6) $\int\limits_L (xy-1)dx+x^2ydy$, $L$— адрэзак прамой $2x+y=2$ паміж пунктамі $A(1,0)$, $B(0,2)$.

**Б**

10. Вылічыць крывалінейныя інтэгралы другога тыпу:

1) $\int\limits_L \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$, $L$ — акружнасць $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ у дадатным накіраванні;

2) $\int\limits_L xdy$, $L$— контур трохвугольніка, абмежаванага восямі каардынат і прамой $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ у дадатным накіраванні;

3) $\int\limits_L \sin^2 xdx+\frac{dy}{y^2}$, $L$— дуга лініі $y=\text{ctg}x$, $0\le x\le\frac{\pi}{3}$.

11. Вылічыць дадзеныя інтэгралы, але спачатку пераканацца, што яны не залежаць ад шляху інтэгравання:

1) $\int\limits_{(0;1)}^{(1;2)} \frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy$;  2) $\int\limits_{(2;1)}^{(1;2)} \frac{ydx-xdy}{x^2}$.

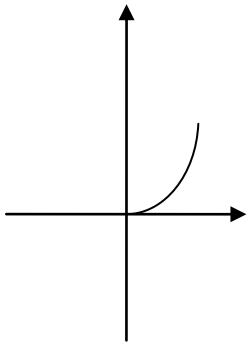
12. Вылічыць крывалінейныя інтэгралы другога тыпу:

1) $\int\limits_L (y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz$, $L$— дуга крывой $x=t^2$, $y=t^4$, $z=t^6$,$(0\le t\le 1)$;

2) $\int\limits_L yzdx+z^2dy+(x-y)dz$, $L$ — адрэзак прамой паміж пунктамі $A(1,0,2)$, $B(2,-1,0)$.

*Рашэнне тыповых задач*

Задача 1. Вылічыць крывалінейны інтэграл другога тыпу $\int\limits_L (xy-y^2)dx+xdy$, $L$— дуга парабалы $y=2x^2$, якая знаходзіцца паміж пунктамі $O(0,0)$ і $A(1,2)$.



<u>Рашэнне.</u> Для дадзенай парабалы $y = 2x^2$ дыферэнцыял мае выгляд $dy = 4xdx$. Вылічым

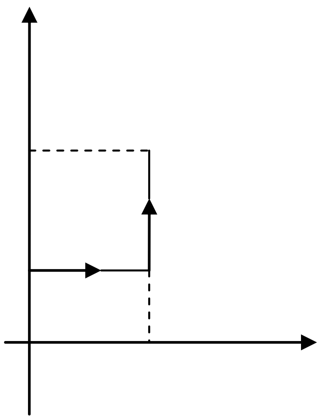
$$\int\limits_L \left(xy - y^2\right)dx + xdy = \int\limits_0^1 \left(x2x^2 - 4x^4 + x4x\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(2x^3 - 4x^4 + 4x^2\right)dx = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{4x^5}{5} + \frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{4}{3} = \frac{31}{30}.$$

<u>Адказ:</u> $\frac{31}{30}$.

<u>Задача 2.</u> Вылічыць інтэграл $\int\limits_{(0;1)}^{(2;3)} (x+y)dx + (x-y)dy$, але спачатку пераканацца, што ён не залежыць ад шляху інтэгравання.



<u>Рашэнне.</u> Функцыі $P(x,y) = x + y$, $Q(x,y) = x - y$ са сваімі частковымі вытворнымі $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ і $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ непарыўныя на ўсёй плоскасці, прычым $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Такім чынам, дадзены інтэграл не залежыць ад шляху інтэгравання, і для яго вылічэння мы можам выбраць любы шлях, які злучае пункты $A(0,1)$, $B(2,3)$. Лягчэй усяго вылічаць крывалінейны інтэграл па адрэзках, паралельных восям каардынат, таму возьмем шлях ломанай, якая складаецца з двух адрэзкаў прамых, паралельных восям каардынат.Вяршыняй будзе пункт $C(2,1)$.

Тады $$\int\limits_{(0;1)}^{(2;3)} (x+y)dx + (x-y)dy = \int\limits_{(0;1)}^{(2;1)} (x+y)dx + (x-y)dy +$$

$$+ \int\limits_{(2;1)}^{(2;3)} (x+y)dx + (x-y)dy.$$

Пункты $A(0,1)$ і $C(2,1)$ злучае прамая $y = 1 \Rightarrow dy = 0$.

$$\int\limits_{(0;1)}^{(2;1)} (x+y)dx+(x-y)dy = \int\limits_0^2 (x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^2 = 2+2=4.$$

Пункты $B(2,3)$ і $C(2,1)$ злучае прамая $x=2 \Rightarrow dx=0$.

$$\int\limits_{(2;1)}^{(2;3)} (x+y)dx+(x-y)dy = \int\limits_1^3 (2-y)dy = 0.$$

Такім чынам, $\int\limits_{(0;1)}^{(2;3)} (x+y)dx+(x-y)dy = 4+0=4$.

Адказ: 4.

Гэты прыклад паказвае, што спачатку трэба ўстанавіць незалежнасць інтэграла ад шляху інтэгравання, тады яго вылічэнне можна спрасціць.

## 4.3. Прыкладанне крывалінейных інтэгралаў

*Тэарэтычныя пытанні*

1. Вылічэнне даўжыні дугі з дапамогай крывалінейных інтэгралаў.
2. Вылічэнне плошчы фігуры, якая размешчана ў плоскасці $Oxy$ і абмежавана замкнутай лініяй.
3. Вылічэнне масы матэрыяльнай дугі $AB$.
4. Вылічэнне работы, якая створана сілай $\vec{F}\{P,Q,R\}$ і дзейнічае на пункт пры перамяшчэнні яго па дузе $AB$.
5. Запісаць, як выглядае формула Астраградскага—Грына. Калі яна выконваецца?
6. Знаходжанне функцыі па яе поўным дыферэнцыяле.

*Заданні для аўдыторнай работы*

**Б**

13. Знайсці даўжыню дуг наступных ліній:

1) $x=\frac{2}{3}t^3,\ y=t^2,\ z=t,\ (0\le t\le 3)$;

2) $x=6a\cos t,\ y=6a\sin t,\ z=8at,\ (0\le t\le 2\pi)$.

14. Знайсці масу матэрыяльнай дугі лініі пры дадзенай лінейнай шчыльнасці $\rho(x,y)$:

1) $y=x^3,\ 0\le x\le 1, \rho(x,y)=y$;

2) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ (0 \le t \le 2\pi),\ \rho(x, y) = x$;

3) $x = t^3,\ y = t,\ z = t^2,\ (0 \le t \le 1),\ \rho(x, y, z) = \sqrt{1 + 4z + 9xy}$.

15. Знайсці работу, якая выконваецца сілай $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$ па дадзеным шляху $L$:

1) $\vec{F} = x^2\vec{i} + xy^2\vec{j}$, дзе $L$ — адрэзак прамой ад пункта $A(0;1)$ да пункта $B(1;2)$;

2) $\vec{F} = x^2\vec{i} + \dfrac{1}{y^2}\vec{j}$, дзе $L$ — дуга лініі $xy = 1$ ад пункта $A(1;1)$ да пункта $B\left(4;\dfrac{1}{4}\right)$;

3) $\vec{F} = x^3\vec{i} + x^2\vec{j}$, дзе $L$ — дуга лініі $y = x^2$ ад пункта $A(1;1)$ да пункта $B(3;9)$.

16. Праверыць, ці з'яўляюцца дадзеныя выразы поўнымі дыферэнцыяламі функцый дзвюх зменных, і калі гэта так, знайсці гэтыя функцыі:

1) $\left(x^2 + 2xy - y^2\right)dx + \left(x^2 - 2xy - y^2\right)dy$;

2) $\left(\mathrm{e}^{2y} - 5y^3\mathrm{e}^x\right)dx + \left(2x\mathrm{e}^{2y} - 15y^2\mathrm{e}^x\right)dy$;

3) $\left(3x^2y + 1\right)dx + \left(x^3 - 1\right)dy$.

17. З дапамогай формулы Астраградскага—Грына прывесці дадзеныя крывалінейныя інтэгралы да двайных:

1) $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dx + y\left[xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\right]dy$;

2) $\int\limits_L \dfrac{\ln x}{x} y^2 dx + \left(x^2 \ln y + \ln^2 x\right)dy$;

3) $\int\limits_L \dfrac{3}{4} y^2\left(x^2 - 2\right)dx + \dfrac{x^2}{2}(1 + xy)\,dy$.

18. Праверыць, ці залежаць ад шляху інтэгравання наступныя крывалінейныя інтэгралы:

1) $\int\limits_L 2x\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,dx + 3y^2\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,dy$; 2) $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\,dx + \ln\left(x^2 + y^2 + 1\right)dy$;

3) $\int\limits_L \left(xy^3 + x^2 - 2y^2\right)dx + \left(y^5 - 3x^3y^2 + x^4\right)dy$.

19. З дапамогай формулы Астраградскага—Грына вылічыць дадзеныя крывалінейныя інтэгралы:

1) $\int_L \left(1-x^2\right) y dx + x\left(1+y^2\right) dy$, дзе $L: x^2+y^2=R^2$;

2) $\int_L (x+y)dx-(x-y)dy$, дзе $L: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

3) $\int_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, дзе $L: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

*Заданні для самастойнай работы*

**Б**

20. Знайсці дліну дуг наступных ліній:

1) $x=t,\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t^2,\ z=\dfrac{1}{3}t^2, (0\le t\le 1)$;

2) $x=2a\cos t-a\cos 2t,\ y=2a\sin t-a\sin 2t$.

21. Знайсці масу матэрыяльнай дугі лініі пры дадзенай лінейнай шчыльнасці $\rho(x,y)$:

1) $4y=x^4,\ 0\le x\le 1, \rho(x,y)=x^5+8xy$;

2) $x=\ln y, (0\le y\le 4), \rho(x,y)=y\sqrt{1+y^2}$;

3) $x=a\cos t, y=a\sin t,\ z=bt, \left(0\le t\le \dfrac{\pi}{2}\right), \rho(x,y,z)=xyz$.

22. Знайсці работу, якая выконваецца сілай $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}$ па дадзеным шляху $L$:

1) $\vec{F}=\left(x^3+y\right)\vec{i}+\left(x+y^3\right)\vec{j}$, дзе $L$ — ломаная $ABC$, прычым $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(3;5)$;

2) $\vec{F}=y\vec{i}+x\vec{j}$, дзе $L$ — дуга астроіды $x=a\cos^3 t\ \ y=a\sin^3 t$ ад пункта $M_1(t_1)$ да пункта $M_2(t_2)$, для якіх $t_1=0$, $t_2=\dfrac{\pi}{4}$;

3) $\vec{F}=\cos^3 x\vec{i}+y\vec{j}$, дзе $L$ — дуга лініі $y=\sin x, 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}$.

23. Праверыць, ці з’яўляюцца дадзеныя выразы поўнымі дыферэнцыяламі функцый дзвюх зменных, і, калі гэта так, знайсці гэтыя функцыі:

1) $\left(3x^2 - 2xy + y^2\right)dx - \left(x^2 - 2xy + 3y^2\right)dy$;

2) $\left(12x^2 y + \dfrac{1}{y^2}\right)dx + \left(4x^3 - \dfrac{2x}{y^3}\right)dy$;

3) $\dfrac{2x\left(1-\mathrm{e}^y\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx + \dfrac{\mathrm{e}^y}{1+x^2}dy$.

24. З дапамогай формулы Астраградскага—Грына прывесці дадзеныя крывалінейныя інтэгралы да двайных:

1) $\int\limits_L xy^2dy - x^2ydx$;

2) $\int\limits_L (x+y)^2 dx - \left(x^2+y^2\right)dy$;

3) $\int\limits_L \left(y - x^2\right)dx + \left(x + y^2\right)dy$.

25. Праверыць, ці залежаць ад шляху інтэгравання наступныя крывалінейныя інтэгралы:

1) $\int\limits_L 8x\sin\left(4x^2 - 5y^2\right)dx - 10y\sin\left(4x^2 - 5y^2\right)dy$;

2) $\int\limits_L \left(4x^3 - 12x^2y\right)dx + \left(5y^4 - 4x^3\right)dy$;

3) $\int\limits_L y^2z^2dx + x^2z^2dy + x^2y^2dz$.

26. З дапамогай формулы Астраградскага—Грына вылічыць дадзеныя крывалінейныя інтэгралы:

1) $\int\limits_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, дзе $L: x^2 + y^2 = ax$;

2) $\int\limits_L (x+y)^2 dx - \left(x^2+y^2\right)dy$, дзе $L$ — контур трохвугольніка з вяршынямі ў пунктах $A(1;1)$, $B(3;3)$, $C(2;5)$ у дадатным напрамку;

3) $\int\limits_L \mathrm{e}^x\left[(1-\cos y)dx - (y - \sin y)dy\right]$, дзе $L$ — контур, абмежаваны лініямі $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \sin x$.

*Рашэнне тыповых задач*

<u>Задача 1.</u> З дапамогай крывалінейнага інтэграла знайсці дліну астроіды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

Рашэнне. Будзем скарыстоўваць формулу $\ell = \int_L dl$. У нашым выпадку $x_t' = -3a\cos^2 t\sin t$, $y_t' = 3a\sin^2 t\cos t$,

$$dl = \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt = \frac{3a}{2}\sin 2tdt.$$

Вядома, што гэтая крывая сіметрычная адносна восей каардынат, тады $\ell = \int_L dl = 4\int_0^{\pi/2}\frac{3a}{2}\sin 2tdt = 6a\left(-\frac{\cos 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = 6a$.

Адказ: $6a$.

Задача 2. Знайсці масу дугі $AB$ крывой $y = \ln x$, калі ў кожным яе пункце лінейная шчыльнасць прапарцыянальная квадрату абсцысы пункта $x_A = 1,\ x_B = 3$.

Рашэнне. Будзем карыстацца формулай $m = \int_{AB}\rho(x;y)dl$, дзе $\rho(x;y)$ — лінейная шчыльнасць. Знойдзем $y'$: $y' = \frac{1}{x}$, тады $dl = \sqrt{1+(y')^2}dx = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$, $\rho(x;y) = kx^2$. Вылічым масу

$$m = \int_{AB}\rho(x;y)dl = k\int_1^3 x^2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}dx = \frac{k}{2}\int_1^3\sqrt{x^2+1}d\left(x^2+1\right) =$$

$$= \frac{k}{3}\left(x^2+1\right)^{3/2}\Big|_1^3 = \frac{k}{3}\left(10\sqrt{10} - 2\sqrt{2}\right).$$

Адказ: $\frac{k}{3}\left(10\sqrt{10} - 2\sqrt{2}\right)$.

Задача 3. Знайсці работу, якая выконваецца сілай $\vec{F} = 4x^6\vec{i} + xy\vec{j}$ уздоўж дугі крывой $y = x^3$ ад пункта $O(0;0)$ да пункта $B(1;1)$.

Рашэнне. Праекцыі сілы $P$ і $Q$ на каардынатныя восі будуць роўныя наступным выразам: $P(x;y) = 4x^6$, $Q(x;y) = xy$. Вылічым работу $A = \int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy$. У нашым выпадку

$$A = \int_L x^6dx + xydy = \int_0^1\left(4x^6 + x\,x^3 3x^2\right)dx = \int_0^1 7x^6dx = x^7\Big|_0^1 = 1.$$

Адказ: 1.

Задача 4. Праверыць, ці з’яўляецца дадзены выраз $\left(2x-3y^2+1\right)dx+\left(2-6xy\right)dy$ поўным дыферэнцыялам, і, калі гэта так, знайсці функцыю.

Рашэнне. Няхай $P\left(x;y\right)=2x-3y^2+1$, $Q\left(x;y\right)=2-6xy$. Знойдзем іх вытворныя $P'_y=-6y$, $Q'_x=-6y$. $P'_y=Q'_x$ і $P,\ Q,\ P'_y, Q'_x$ — непарыўныя функцыі, адсюль выраз з’яўляецца поўным дыферэнцыялам некаторай функцыі. Вылічым гэтую функцыю па формуле $u\left(x;y\right)=\int\limits_{AB}du+C=\int\limits_{x_0}^{x}P\left(x;y_0\right)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q\left(x;y\right)dy+C$. Пункт A змесцім у пачатку каардынат $O\left(0;0\right)$. Тады

$$u\left(x;y\right)=\int\limits_0^x\left(2x+1\right)dx+\int\limits_0^y\left(2-6xy\right)dy+C=x^2+x+2y-3xy^2+C.$$

Адказ: $u\left(x;y\right)=x^2+x+2y-3xy^2+C$.

Задача 5. З дапамогай формулы Астраградскага—Грына прывесці крывалінейны інтэграл $\int\limits_L 2xdy-ydx$, дзе $L$ — замкнуты контур, абмежаваны дугой $y=x^2$, $\left(0\le x\le 1\right)$ і адрэзкам прамой $y=x$ паміж пунктамі $O\left(0;0\right)$ і $B\left(1;1\right)$, да двайнога інтэграла і вылічыць яго.

Рашэнне. У гэтым прыкладзе $P\left(x;y\right)=-y$, $Q\left(x;y\right)=2x$. Знойдзем іх вытворныя $P'_y=-1$, $Q'_x=2$, $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=3$.

Формула Астраградскага—Грына мае выгляд $\int\limits_L P\left(x;y\right)dx+Q\left(x;y\right)dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$, дзе абход контура будуецца так, каб вобласць $D$ заставалася злева. Атрымаем

$$\int\limits_L 2xdy-ydx=\iint\limits_D 3dxdy=3\int\limits_0^1dx\int\limits_{x^2}^{x}dy=3\int\limits_0^1\left(y\Big|_{x^2}^{x}\right)dx=$$

$$=3\int\limits_0^1\left(x-x^2\right)dx=3\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}.$$

Адказ: $\frac{1}{2}$.

*Пытанні для самакантролю*

1. У якіх выпадках даўжыня дугі і маса вылічаюцца па аднолькавых формулах? Прывесці гэтыя формулы.

2. Якія аднолькавыя ўласцівасці маюць крывалінейныя інтэгралы першага роду і азначаныя інтэгралы?

3. Якія ўласцівасці крывалінейных інтэгралаў першага роду адрозніваюцца ад уласцівасцяў азначаных інтэгралаў?

4. Якое значэнне мае напрамак пры вылічэнні крывалінейных інтэгралаў другога роду?

5. Якія ўмовы трэба выконваць, каб мела месца формула Астраградскага—Грына?

6. Якія ўмовы трэба выконваць, каб крывалінейны інтэграл другога роду не залежыў ад шляху інтэгравання?

7. Якім умовам павінна здавальняць дыферэнцыяльная функцыя $F(x,y)$, каб крывалінейны інтэграл $\int\limits_L F(x,y)\left(y^2dx+x^2dy\right)$ не залежыў ад выбранага шляху інтэгравання?

8. У якіх выпадках крывалінейны інтэграл другога роду нічым не будзе адрознівацца ад азначаных інтэгралаў: 1) $\int\limits_a^b f(x)dx$; 2) $\int\limits_c^d f(y)dy$.

## АДКАЗЫ
### Глава 1

**1**. 1) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\ldots$; 2) $\frac{1}{5}+\frac{3}{25}+\frac{5}{125}+\frac{7}{625}+\ldots$; 3) $-\frac{1}{\ln 2}+\frac{2}{\ln 3}-\frac{3}{\ln 4}+\frac{4}{\ln 5}-\ldots$; 4) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots$. **2.** 1) $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$; 2) $u_n=\frac{n}{2^{n-1}}$; 3) $u_n=\frac{1}{\ln(n+1)}$; 4) $u_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{3^{n-1}n}$; 5) $u_n=(-1)^n 4$.

**3.** 1) $S=1$; 2) $S=10$; 3) $S=3$. **5.** Для 2), 3), 4) выканана неабходная прымета збежнасці; гэтыя шэрагі могуць быць збежнымі або разбежнымі, і, каб гэта вызначыць, неабходна прымяняць дадатковыя прыметы збежнасці. Шэрагі 1), 5), 6) — разбежныя. **6.** 1) $S=\frac{2}{\ln 2}$; 2) $S=\frac{11}{18}$; 3) $S=\frac{4}{3}$. **8.** 1) $\ln 2+\frac{\ln 3}{4}+\frac{\ln 4}{9}+\ldots$; 2) $\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{9}{\sqrt{6}}+\frac{27}{\sqrt{12}}+\ldots$; 3) $1-10+10^2-10^3+\ldots$. **9.** 1) $u_n=\frac{1}{3n-2}$; 2) $u_n=\frac{1}{n!}$; 3) $u_n=\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$; 4) $u_n=\frac{n^2}{3^n}$; 5) $u_n=(-1)^{n+1}\frac{5}{3^{n-1}}$. **10.** 1) $S=1/2$; 2) $S=15$; 3) $S=1/2$.

**12.** 1) $S=65{,}5$; 2) $S=1$. **14.** 1) збежны; 2) разбежны; 3) збежны. **15.** 1) збежны; 2) разбежны; 3) разбежны; 4) збежны; 5) разбежны; 6) збежны. **16.** 1) збежны; 2) збежны; 3) разбежны; 4) разбежны; 5) разбежны; 6) збежны. **17.** 1) збежны; 2) разбежны; 3) разбежны. **18.** 1) разбежны; 2) збежны; 3) збежны; 4) разбежны; 5) разбежны; 6) збежны; 7) збежны; 8) збежны; 9) збежны; 10) разбежны; 11) збежны; 12) разбежны; 13) разбежны. **19.** 1) $0<a<e$; 2) $a>e$. **20.** 1) збежны; 2) збежны; 3) разбежны; 4) збежны; 5) збежны; 6) разбежны; 7) збежны; 8) збежны. **21.** 1) збежны; 2) разбежны; 3) збежны. **22.** 1) збежны; 2) збежны; 3) разбежны. **23.** 1) збежны; 2) разбежны; 3) збежны; 4) разбежны; 5) збежны;6) разбежны. **24.** 1) збежны; 2) разбежны; 3) збежны. **25.** 1) збежны; 2) збежны; 3) разбежны; 4) збежны; 5) разбежны; 6) разбежны; 7) збежны; 8) разбежны; 9) разбежны; 10) разбежны. **26.** 1) збежны; 2) разбежны; 3) збежны; 4) разбежны. **27.** 4), 5) знаказменныя;
1), 3) знакачаргавальныя; 2), 6) нязменназнакавыя.

**28.** 1), 4), 6), 9) абсалютна збежныя; 2), 5), 7), 8) умоўна збежныя; 3) разбежны. **29.**1)$|r_n| \le \dfrac{1}{\sqrt{2n+3}}$; 2)$|r_n| \le \dfrac{1}{(n+1)5^{n+1}}$;3)$|r_n| \le \dfrac{n+1}{2(n+1)^3+3}$.
**30.** 33. **31.** 1) умоўна збежны; 2) абсалютна збежны; 3) умоўна збежны.
**32.** 1), 5), 8), 9) абсалютна збежныя; 2), 3), 6), 7) умоўна збежныя; 4) разбежны. **33.**1) $|r_n| \le \dfrac{1}{(n+1)^2+5}$; 2) $|r_n| \le \dfrac{1}{(n+1)7^{n+2}}$; 3) $|r_n| \le \dfrac{1}{(n+1)!}$.
**34.** 23. **35.** 1) абсалютна збежны; 2),3) умоўна збежныя. **36.** 0,891.

## Глава 2

**1.** 1) $(-7;7)$; 2) $\left[-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right]$; 3)$\left[-\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{5}\right)$; 4) $(-1;1]$; 5) $(-\infty;+\infty)$; 6) $\{0\}$; 7) $(-3;3)$; 8) $[-2;2)$; 9) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}};\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$. **2.** 1) $(-7;3)$; 2) $[2;6)$; 3) $(0;2]$; 4) $\left(-\dfrac{4}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$; 5) $(-\infty;+\infty)$; 6) $\{-3\}$; 7) $[-1;7]$; 8) $(-\infty;+\infty)$; 9) $[0;1]$.
**3.** 1) $x \in R$; 2) $x \in \left(e^{-1};e\right)$; 3) $x \in R \setminus \{-5\}$. **4.** 1) $[-2;0)$; 2) $(-1;1]$; 3) $\left(1-\dfrac{1}{e};1+\dfrac{1}{e}\right)$. **6.** 1) $-\ln(1-x),\ \ x \in [-1;1)$; 2) $\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2},\ \ |x|<1$.
**7.** 1) $[-4;4)$; 2) $(-2;2)$; 3) $(-\infty;+\infty)$; 4) $[-4;-2]$; 5) $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$; 6) $(-11;-9)$; 7) $(-3;3)$; 8) $[2;3)$; 9) $\{-7\}$; 10) $\left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]$; 11) $\left[-\dfrac{9}{2};-\dfrac{7}{2}\right]$; 12) $(-\infty;+\infty)$. **8.** 1) $(-\infty;+\infty)$; 2)$\left[-\dfrac{1}{e};\dfrac{1}{e}\right]$; 3) $[0,4;1,2)$; 4)$(-6-e;-6+e)$; 5) $(-\infty;+\infty)$; 6) $(0,1;10)$. **9.** 1) $\ln(1+x),\ \ x \in (-1;1]$; 2)$\dfrac{1}{(x-1)^2},\ \ x \in (-1;1)$. **10.** 1) $e\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n!}$, $x \in R$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+2)^n$,

$x\in(-3;-1)$; 3) $\ln 5+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-0,4)^n}{n}$, $x\in(-0,6;1,4]$;

4) $2+\frac{x-4}{4}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{n!}\frac{(x-4)^n}{2^{3n-1}}$, $x\in[0;8]$.

**11.** 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n 2}{n!}x^n, x\in R$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $x\in(-1;1)$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$, $x\in(-3;3)$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}, x\in R$; 5) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}, x\in R$;

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x\in R$; 7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2^n n!}, x\in R$; 8) $1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$, $x\in R$; 9) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!}\frac{x^{2n}}{2^{3n+1}}$, $x\in(-2;2)$. **12.** 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$, $x\in R$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}, x\in R$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{5n+1}}{5n+1}, x\in[-1;1)$.

**13.** 1) 0,8187; 2) 0,540; 3) 0,406. **14.** 1) 0,9461; 2) 0,664; 3) 0,622; 4) 2,0655. **15.** 1) $y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\ldots$; 2) $y=1+3(x-1)+\frac{13(x-1)^2}{2}+\ldots$;

3) $y=1+x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}+\frac{x^6}{45}+\ldots$. **16.** 1) $-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{45}+\ldots\right)$;

2) $x+x^2+\frac{x^3}{3}+\ldots$. **17.** 1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x\in[-1;1]$;

2) $x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x\in[-1;1]$. **18.** 7.

**19.** $y=1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}-\frac{x^6}{2304}+\ldots$. **20.** 1) $|x|<0,39$; 2) $|x|<0,18$.

**21.** 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n 3}{n!}x^n, x\in R$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$, $x\in(-1;1)$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{4^n(2n)!}, x\in R$;

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}x^n, x\in R$; 5) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}, x\in R$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n+1}$, $x\in[-1;1]$.

**22.** 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$, $x\in(0;2]$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-4)^n}{4^{n+1}}$, $x\in(0;8)$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{e^2 n!}$, $x\in R$. **23.** 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n(2n+1)n!}, x\in R$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{3n}}{3n^2}$,

$x\in[-1;1]$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{4n+2}}{(4n+2)(2n+1)!}, x\in R$. **24.** 1) 0,368; 2) 0,208;

3) 2,154. **25.** 1) 0,461; 2) 0,240; 3) 0,508.

**26.** $\mathrm{Si}(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$, $x\in R$, $\mathrm{Si}\left(\dfrac{1}{2}\right)\approx 0{,}493$.

**27.** 1) $y=1+x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{12}+\ldots$ ; 2) $y=1+2x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{5x^3}{3}+\ldots$;

3) $y=1-\dfrac{(x-1)^2}{2}-\dfrac{(x-1)^4}{12}+\ldots$

**28.** 1) $\cos^2 x=\dfrac{1}{2}-\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{4}{3!}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^3-\dfrac{16}{5!}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^5+\ldots$;

2) $\sqrt{8+x}=3\left(1+\dfrac{x-1}{18}-\dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{x-1}{18}\right)^2+\dfrac{1\cdot 3}{3!}\left(\dfrac{x-1}{18}\right)^3-\ldots\right)$.

**29.** 1) $\mathrm{tg}\,x=x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+\ldots$; 2) $\ln\big((1-x)(1+2x)\big)=x-\dfrac{5}{2}x^2+\dfrac{7}{3}x^3-\ldots$.

**30.** 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x\in(-1;1)$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2nx^{2n-1}$, $x\in(-1;1)$. **31.** 1) 4,855;

2) 0,621. **32.** $|x|<0{,}9067$. **33.** Два. **34.** $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n}}{2^n n!}$, $x\in R$;

$y=1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

## Глава 3

**1.** 1) 4; 2) 20; 3) 2. **2.** 1) 2,25; 2) −0,5; 3) 1,25; 4) 0,5; 5) 16. **6.** 1) $\dfrac{\pi}{4}\ln 2$;

2) $\dfrac{\pi}{8}$; 3) $\dfrac{\pi}{2}(2\sin 2+\cos 2-1)$; 4) $\pi\left(e^2-1\right)$; 5) $\dfrac{R^3}{3}\left(\pi-\dfrac{4}{3}\right)$; 6) $\dfrac{\pi^2}{6}$;

7) $\frac{3}{4}\pi-2\sqrt{3}+\frac{4}{3}$; 8) $\frac{4}{3}a^3$. **8.** $\frac{4}{135}$. **10.** 1) $\pi\left(1-e^{-a^2}\right)$, 2) 0; 3) $\frac{\pi(\pi-2)}{8}$.

**11.** 1) $\frac{104}{9}$; 2) $e+\frac{1}{e}-2$; 3) 0,9.**12.** 1) $(e-1)\left(e^{\pi}-1\right)$; 2) $\frac{244}{21}$; 3) $4a$;

4) $\ln\frac{25}{24}$. **16.** 1) $\frac{2}{3}\pi\left(5\sqrt{5}-1\right)$; 2) $\pi(e-1)$; 3) $4\pi$; 4) $\frac{\pi}{2}\sin R^2$; 5) $\pi R^2 h$;

6) $3\pi$; 7) $4\pi-\frac{4}{3}$; 8) $\frac{4}{3}\pi^4 a^3$. **18.** $\frac{\pi}{4}\left[\left(1+R^2\right)\ln\left(1+R^2\right)-R^2\right]$.

**19.** $\frac{R^2}{2}\int\limits_0^{\operatorname{arctg}R} f(\operatorname{tg}\varphi)d\varphi$. **21.** 1) $\frac{(b-a)^2}{2}$; 2) $\frac{a^2(3\pi-2)}{12}$; 3) $\frac{40}{3}$.

**22.** 1) $2\pi-\frac{4}{3}$; 2) $\frac{2}{3}+\ln 2$; 3)$\frac{343}{18}$; 4) $\frac{3\pi a^2}{2}$; 5) $4-\frac{\pi}{4}$; 6) $2\pi$;

7)$\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)a^2\approx 2{,}457a^2$; 8) $a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. **23.** $\frac{1}{6}$. **24.** 1) $186\frac{2}{3}$; 2)$\frac{17}{5}$;

3) $\frac{88}{105}$; 4) $13\frac{1}{3}$; 5) $\frac{118}{3}$; 6) $3\pi$; 7) $18\pi$; 8) $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$; 9) $\frac{8\pi}{3}$;

10) $\frac{4}{3}\pi a^3\left(2\sqrt{2}-1\right)$. **25.** 1) $\frac{32}{3}$; 2) 45; 3) $8\pi$; 4) $2\pi$. **26.** 1) $\frac{32}{15}$; 2) $\frac{1}{60}$;

3) $a^2(\pi-1)$; 4) $\frac{5\pi}{8}$. **27.** 1) $3a^3\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)$; 2) $3\pi$; 3) $\frac{\pi}{6}$. **28.** 1) $2\sqrt{2}\pi p^2$;

2) $\frac{2}{3}\pi\left(\sqrt{8}-1\right)$. **29.** $\frac{16}{3}\pi a^2$. **30.** $\frac{32}{9}R^3$. **31.** $\frac{ka^4}{6}$ ($k$ — каэф. прапарцыянальнасці). **32.** $\frac{ka^3}{24}$ ($k$ — каэф. прапарцыянальнасці).

**33.**1)$4\frac{1}{2}$; 2)$\pi$; 3) $\frac{13}{2}$. **34.** 1) $\frac{9}{2}a^2$; 2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$; 3) $\sqrt{2}-1$; 4) $\frac{9\pi}{4}$; 5) $5\pi$;

6)$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$; 7) $8\pi+9\sqrt{3}$; 8) $a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$; 9) $\frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}$. **35.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **36.** 1)16;

2)13,5; 3) 6; 4) 90; 5) 32; 6) $8\pi-{}^{32\sqrt{2}}\!/_{3}$; 7) $2\pi$; 8) $\frac{3\pi}{2}$; 9) $\frac{\pi}{24}$;

10) $\frac{3\pi a^3}{32}$. **37.** 1) 104; 2) ${}^{264\sqrt{2}}\!/_{35}$; 3) ${}^{256}\!/_{15}$; 4) $3\pi$. **38.** 1) $\frac{8}{3}a^2-\frac{\pi a^2}{2}$;

2) $\frac{\pi a^2}{4}$; 3) $27\pi$; 4) $2/3$. **39.** 1) $\frac{5\pi a^3}{64}$; 2) $\frac{19\pi}{6}$; 3) $\frac{2}{3}\pi a^3-\frac{8}{9}\left(4\sqrt{2}-5\right)a^3$.

**40.** 1) $\frac{16}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)$; 2) $4\pi a\left(a-\sqrt{a^2-R^2}\right)$. **41.** $2\pi a^2$. **42.** $2\pi$. **43.** $\frac{2}{3}a^4k$ ($k$ — каэф. прапарцыянальнасці). **44.** $\frac{4}{3}\gamma ab^2$. **45.** 1) 108; 2) $40/3$; 3) $\frac{7}{192}$.

**46.** 1) $1/3$; 2) 6; 3) $\frac{4\ln 2-1}{8}$. **50.** 1) $\frac{\pi a}{2}$; 2) $4\pi$; 3) 16. **52.** 1) $\pi/8$;

2) $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$; 3) $243\left(2-\sqrt{2}\right)\pi/5$; 4) $1/192$; 5) $\frac{3}{4}\pi c^5$. **53.** 1) $4/3$; 2) $1/144$;

3) $17/192$. **54.** 1) 126, 2) $1/364$; 3) $1/8$. **58.** 1) $\frac{4}{15}\pi R^5$; 2) $16\pi/3$; 3) $80/9$.

**60.** 1) $\frac{8}{9}a^2$; 2) $\frac{3\pi}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{5}{3}\pi a^4$; 5) $9\pi$. **62.** 1) 32; 2) $176/15$; 3) $2\pi$;

4) $16\pi$; 5) $16\pi$. **63.** 1) $a^4/12$; 2) $16\pi/3$. **64.** 1) 4; 2) $7/12$; 3) $\frac{19}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$;

4) $19\pi/6$; 5) $5/12\,\pi R^3$. **65.** $k\pi h^4/4$. **66.** $k\frac{\pi R^2 H}{6}\left(3R^2+2H^2\right)$. **67.** 1) 54;

2) $8/3$; 3) $8\pi$; 4) $16\pi$; 5) $4/3\,R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$. **68.** 1) $8\sqrt{2}/35$; 2) $7\pi C^2/12$.

**69.** 1) $125/12$; 2) $3/35$; 3) $99\pi/2$; 4) $\pi$. **70.** $8/15\,\pi R^5 k$ ($k$ — каэф. прапарцыянальнасці). **71.** $ka^4/24$.

## Глава 4

**1.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$; 3) $\frac{1}{6}\left(17\sqrt{17}-2\sqrt{2}\right)$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{2}{3}$; 5) $\sqrt{5}\ln 2$;

6) $\frac{a^2}{3}\left[\left(1+4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$; 7) 24. **2.** 1) $\ln\frac{3\sqrt{5}+7}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{1}{8}(10+\pi)$; 4) $\frac{16}{3}a^2$;

5) $a^3\left(\frac{a^2}{3}+1\right)$. **3.** 1) $\frac{1}{6}\left(5\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)$; 2) $-5\sqrt{2}$; 3) $\frac{1}{3}\left[\left(1+e^2\right)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}\right]$;

4) $\frac{\pi}{2}R^3$; 5) $\frac{256}{15}a^3$; 6) $\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)$; 7) $\frac{\pi}{2}a^3$. **4.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{5}{64}$; 3) $\frac{268}{1155}a^4$;

4) $\frac{1}{54}\left(56\sqrt{7}-1\right)$; 5) $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$. **5.** 1) $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{221}{15}$; 5) $\frac{31}{30}$; 6) $\frac{17}{15}$. **6.** 1) 0; 2) $-2\pi a^2$; 3) 0. **7.** 1) 8; 2) 64. **8.** 1) $\frac{27}{20}$; 2) $\frac{95}{3}$.

**9.** 1) $\frac{\pi}{24}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{12}$; 2) $\frac{3}{4}e^2+\frac{1}{12}$; 3) $\pi$; 4) $-\frac{56}{15}$; 5) $-\frac{8}{15}$; 6) 1. **10.** 1) $2\pi$; 2) 3; 3) $\frac{5}{24}-\sqrt{3}$. **11.** 1) $\frac{5}{8}$; 2) $-\frac{3}{2}$. **12.** 1) 3; 2) $-\frac{17}{3}$. **13.** 1) 21; 2) $20\pi a$.

**14.** 1) $\frac{1}{54}\left(10\sqrt{10}-1\right)$; 2) $8\pi a^2$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{12}$. **15.** 1) $\frac{7}{4}$; 2) 18; 3) 60.

**16.** 1) $u(x,y)=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C$; 2) $u(x,y)=x\mathrm{e}^{2y}-5y^3\mathrm{e}^x+C$; 3) $u(x,y)=x^3y+x-y+C$. **17.** 1) $\iint\limits_D y^2dxdy$; 2) $\frac{1}{2}\iint\limits_D x\ln y dxdy$; 3) $\iint\limits_D (x+y)dxdy$. **18.** 1) не залежыць; 2) залежыць; 3) залежыць.

**19.** 1) $\frac{\pi}{2}R^4$; 2) $-2\pi ab$; 3) 0. **20.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) $16a$. **21.** 1) $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$; 2) 24; 3) $\frac{\pi a^2}{4}\sqrt{a^2+b^2}$. **22.** 1) 190; 2) $\frac{a^2}{8}$; 3) $\frac{7}{6}$.

**23.** 1) $u(x,y)=x^3-x^2y+xy^2-y^3+C$; 2) $u(x,y)=4x^3y+\frac{x}{y^2}+C$; 3) $\frac{\mathrm{e}^y-1}{1+x^2}+C$. **25.** 1) не залежыць; 2) не залежыць; 3) залежыць.

**26.** 1) $-\frac{\pi a^3}{8}$; 2) $-46\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{1}{5}(\pi-1)$.

## ЛІТАРАТУРА

1. Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н. Высшая математика для экономистов. — М.: ЮНИТИ, 2000. — 471 с.

2. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике. — М.: Наука, 1973.— 640 с.

3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: В 2 т. — М.: Наука, 1985. — 855 с.

4. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: В 2 ч. — М.: Айрис-пресс, 2002. — 530 с.

5. Индивидуальные задания по высшей математике/ под общ. ред. д-ра физ.-мат.наук А. П. Рябушко— Мн.: Высш. шк., 2004. — 368 с.

6. Шипачев В. С. Высшая математика. — Мн.: Высш. шк., 1985.— 472 с.

## ЗМЕСТ