Установа адукацыі
«Беларускі дзяржаўны тэхналагічны універсітэт»

Г.М. ХВЯСЬКО

ТЭАРЭТЫЧНАЯ МЕХАНІКА

Практыкум

У 2-х частках

Частка 2

Дапушчана Міністэрствам адукацыі Рэспублікі Беларусь
у якасці вучэбнага дапаможніка
для студэнтаў тэхнічных спецыяльнасцей устаноў,
якія забяспечваюць атрыманне вышэйшай адукацыі

Мінск 2005

УДК 531
ББК 22.21
Х 30

Р э ц э н з е н т ы :
кафедра тэарэтычнай механікі Полацкага
дзяржаўнага універсітэта (загадчык кафедры дацэнт,
кандыдат тэхнічных навук *У.Э. Завістоўскі*);

прафесар кафедры інжынернай графікі Беларускага дзяржаўнага
універсітэта інфарматыкі і радыёэлектронікі,
доктар тэхнічных навук *В.М. Сурын*

Хвясько, Г.М.

Х 30 Тэарэтычная механіка. Практыкум. У 2 ч. Ч. 2 : вучэб. дапаможнік для студэнтаў тэхнічных спецыяльнасцей / Г.М. Хвясько. — Мн. : БДТУ, 2005. — 200 с.

ISBN 985-434-373-1

Практыкум змяшчае дваццаць заданняў па дынаміцы. Па кожнаму заданню прыведзены прыклады рашэнняў, дадзены неабходныя парады па прымяненню тэорыі ў канкрэтных задачах. Распрацаваная колькасць варыянтаў заданняў дазваляе фарміраваць разліковыя работы па дынаміцы для студэнтаў вочнай і завочнай форм навучання вышэйшых тэхнічных навучальных устаноў.

УДК 531
ББК 22.21

ISBN 985-434-373-1(ч. 2)
ISBN 985-434-272-7

ПРАДМОВА

Матэрыял другой часткі практыкуму па зместу і паслядоўнасці выкладання адпавядае тыпавой праграме па тэарэтычнай механіцы. Ён з'яўляецца працягам першай часткі практыкуму, якая выдадзена ў пачатку 2004 года. У першую частку ўвайшлі заданні па статыцы і кінематыцы.

Другая частка практыкуму змяшчае дваццаць заданняў па дынаміцы, кожнае з іх мáе трыццаць варыянтаў.

Заданні дазваляюць фарміраваць разліковыя работы па дынаміцы для студэнтаў розных спецыяльнасцей вочнай і завочнай форм навучання.

Прыклады выканання заданняў і неабходныя парады па рашэнню задач даюць магчымасць студэнтам працаваць над выкананнем заданняў самастойна.

Наборы варыянтаў заданняў для разліковых работ прыведзены адпаведна шыфрам студэнтаў у табліцы, размешчанай у канцы дапаможніка.

Ва ўсіх заданнях, акрамя Д-7, кожнаму варыянту даных у табліцы адпавядае такі ж варыянт рысунка. У заданні Д-7 нумар рысунка для кожнага варыянта даных прыведзены ў табліцы.

У тэксце і на рысунках абазначэнні вектарных велічынь адрозніваюцца ад скалярных больш тлустым шрыфтам.

Аўтар выказвае шчырую падзяку рэктару БДТУ прафесару І.М. Жарскаму за дзейсную падтрымку, а таксама загадчыку кафедры тэарэтычнай механікі БДТУ прафесару В.С. Віхрэнку і загадчыку кафедры паліграфіі БДТУ прафесару М.І. Кулаку за вялікую дапамогу ў падрыхтоўцы рукапісу дапаможніка да выдання.

ДЫНАМІКА

1. Дынаміка матэрыяльнага пункта

Заданне Д-1

Дыферэнцыяльныя ўраўненні руху матэрыяльнага пункта

Матэрыяльны пункт, маса якога m, рухаецца ў выбранай сістэме адліку пад уздзеяннем сілы $\boldsymbol{F}$ і сілы цяжару $\boldsymbol{G}$, накірунак якой супадае з дадатным накірункам восі Oz. Атрымаць ураўненні руху матэрыяльнага пункта адносна восей каардынат. Зрабіць ацэнку характару руху пункта адносна кожнай восі. Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 1.

Табліца 1

Варыянт	m, кг	x_0, м	y_0, м	z_0, м	v_{0x}, м/с	v_{0y}, м/с	v_{0z}, м/с	$\boldsymbol{F}$, Н
1	3,0	0	1	0	–1	1	2	$t\boldsymbol{i} - 2t^2\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}$
2	2,8	1	0	0	1	0	1	$-2\dot{x}\boldsymbol{i} + 3\sin\pi t\boldsymbol{j}$
3	2,6	0	0	1	0	2	1	$2\boldsymbol{i} - \cos\pi t\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$
4	2,4	–1	0	0	–2	2	3	$2\sin\pi t\boldsymbol{i} - \dot{y}\boldsymbol{j}$
5	2,2	–1	0	1	2	–1	–1	$\cos 0{,}5\pi t\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j}$
6	2,0	0	–1	0	3	–2	2	$e^t\boldsymbol{i} - (y+1)\boldsymbol{j}$
7	3,2	0	0	–1	–3	–3	–2	$x\boldsymbol{i} + e^t\boldsymbol{k}$
8	3,4	1	–1	0	0	–1	3	$2x\boldsymbol{i} - \sin\pi t\boldsymbol{k}$
9	3,6	0	1	–1	–2	1	0	$3x\boldsymbol{i} + (t^2+1)\boldsymbol{k}$
10	3,8	–2	0	1	1	2	–2	$y\boldsymbol{j} - 2t\boldsymbol{k}$
11	4,0	1	–2	0	2	–1	3	$2y\boldsymbol{j} + \cos 0{,}5\pi t\boldsymbol{k}$
12	4,2	0	1	–2	–1	3	2	$(y-1)\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}$
13	4,4	1	0	1	0	0	2	$(3-x)\boldsymbol{i} + (2t-1)\boldsymbol{j}$
14	4,6	0	1	1	0	–1	1	$(x-1)\boldsymbol{i} - \sin\pi t\boldsymbol{j}$
15	4,8	1	1	0	–1	0	–1	$-\dot{x}\boldsymbol{i} + \cos 0{,}5\pi t\boldsymbol{j}$
16	5,0	0	–2	1	–2	1	–3	$(e^t+1)\boldsymbol{i} - \sin\pi t\boldsymbol{k}$
17	1,0	1	0	–2	2	3	0	$3t^2\boldsymbol{i} - 2\dot{y}\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$

Вары-янт	m, кг	x_0, м	y_0, м	z_0, м	v_{0x}, м/с	v_{0y}, м/с	v_{0z}, м/с	F, Н
18	1,2	−2	1	0	0	−3	0	$\sin 0,5\pi t\boldsymbol{j} - 3\dot{z}\boldsymbol{k}$
19	1,4	1	−1	1	1	−2	1	$(x-3)\boldsymbol{i} - \dot{z}\boldsymbol{k}$
20	1,6	1	1	−1	1	−1	−1	$(t+2)\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j}$
✓21	1,8	−1	1	1	0	−1	2	$t^2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\dot{z}\boldsymbol{k}$
22	2,0	1	2	−1	2	0	3	$t\boldsymbol{i} - \dot{y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$
23	2,5	−1	1	2	−2	1	0	$3x\boldsymbol{i} + (t^2-1)\boldsymbol{j}$
24	3,0	2	−1	1	−3	0	1	$x\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} - 2\dot{z}\boldsymbol{k}$
25	3,5	1	2	3	0	1	2	$-x\boldsymbol{i} - \dot{y}\boldsymbol{j}$
26	4,0	3	2	1	1	2	3	$-2x\boldsymbol{i} - \sin \pi t\boldsymbol{j}$
27	4,5	2	1	3	2	3	1	$-\dot{x}\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$
28	5,0	−2	1	3	3	−1	0	$4y\boldsymbol{j} - 2\dot{z}\boldsymbol{k}$
29	1,5	3	−2	1	0	−1	−2	$3x\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$
30	2,0	1	3	−2	−1	−2	1	$t^2\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

Прыклад рашэння задання Д-1

Матэрыяльны пункт (m = 1 кг) рухаецца пад уздзеяннем сілы $\boldsymbol{F} = t\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - 2\dot{z}\boldsymbol{k}$ і сілы цяжару G = 9,8 Н (рыс. 1). Дадатны накірунак восі 0z супадае з накірункам сілы $\boldsymbol{G}$. Пачатковыя ўмовы руху пункта: $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ м, $z_0 = 0$, $v_{0x} = 1$ м/с, $v_{0y} = 0$, $v_{0z} = 2$ м/с. Атрымаць ураўненні руху пункта адносна восей каардынат і зрабіць ацэнку характару руху пункта адносна кожнай восі.

Р а ш э н н е. Дыферэнцыяльныя ўраўненні руху пункта M маюць выгляд

$$m\ddot{x} = t\ ,$$

$$m\ddot{y} = y\ ,$$

$$m\ddot{z} = -2\dot{z} + 9{,}8\ .$$

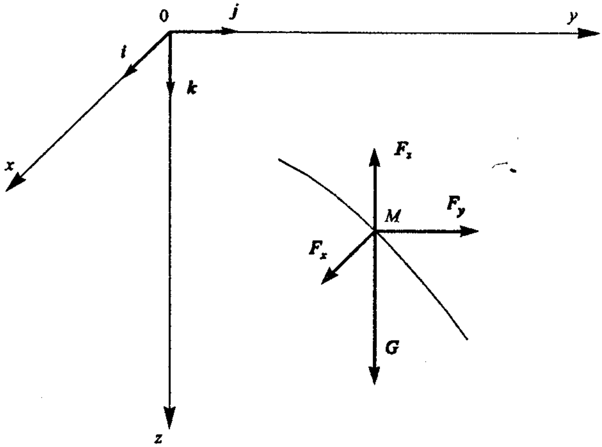
Пасля падстаноўкі значэння масы атрымаем

$$\ddot{x} = t\ ,$$

$$\ddot{y} - y = 0\ ,$$

$$\ddot{z} + 2\dot{z} = 9{,}8\ .$$

1. Хвясько Г. М.*



Рыс. 1

Рашаем паасобку кожнае з трох дыферэнцыяльных ураўненняў.

$$\ddot{x} = t\ , \qquad \dot{x} = 0{,}5t^2 + C_1\ , \qquad x = \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2\ .$$

Пачатковыя ўмовы руху $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $v_{0x} = 1$ м/с дазваляюць знайсці канстанты інтэгравання C_1 і C_2.

$$1 = C_1, \quad 0 = C_2\ .$$

Канчаткова атрымліваем ураўненне руху пункта адносна восі Ox.

$$x = \frac{t^3}{6} + t(\text{м})\ .$$

Рашаем другое дыферэнцыяльнае ўраўненне.

$$\ddot{y} - y = 0\ .$$

Гэта лінейнае дыферэнцыяльнае ўраўненне другога парадку з пастаяннымі каэфіцыентамі, аднароднае.

Характарыстычнае ўраўненне $r^2 - 1 = 0$.

Карані характарыстычнага ўраўнення $r_1 = 1$, $r_2 = -1$. Яны сапраўдныя, розныя. Таму агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага ўраўнення будзе мець выгляд

$$y = C_3e^t + C_4e^{-t}.$$

Канстанты інтэгравання C_3 і C_4 знаходзім з улікам пачатковых умоў: $t_0 = 0$, $y_0 = 1$ м, $v_{0y} = 0$.

Запісваем дадаткова выраз праекцыі скорасці пункта на вось Oy.

$$\dot{y} = C_3e^t - C_4e^{-t}.$$

Цяпер падстаўляем у $y = f_1(t)$ і $\dot{y} = f_2(t)$ пачатковыя ўмовы руху.

$$\begin{cases} 1 = C_3 + C_4 \\ 0 = C_3 - C_4 \end{cases} \qquad C_3 = C_4 = 0{,}5.$$

Канчаткова атрымліваем ураўненне руху пункта адносна восі Oy.

$$y = 0{,}5e^t + 0{,}5e^{-t}\,(\text{м}).$$

Рашаем трэцяе дыферэнцыяльнае ўраўненне.

$$\ddot{z} + 2\dot{z} = 9{,}8.$$

Гэта лінейнае дыферэнцыяльнае ўраўненне другога парадку з пастаяннымі каэфіцыентамі, неаднароднае. Яго агульнае рашэнне складаецца з дзвюх частак:

$$z = \bar{z} + z^*,$$

дзе $\bar{z}$ — агульнае рашэнне аднароднага ўраўнення $\ddot{z} + 2\dot{z} = 0$;

z^* — прыватнае рашэнне ўраўнення $\ddot{z} + 2\dot{z} = 9{,}8$ з улікам выгляду яго правай часткі.

Атрымаем рашэнне $\bar{z}$.

$$\ddot{z} + 2\dot{z} = 0.$$

Характарыстычнае ўраўненне гэтага аднароднага лінейнага дыферэнцыяльнага ўраўнення мае выгляд

$$r^2+2r=0 .$$

Яго карані: $r_1=0$, $r_2=-2$. Яны розныя, сапраўдныя. Таму агульнае рашэнне аднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення запісваем у выглядзе

$$\bar{z}=C_5+C_6e^{-2t} .$$

Далей атрымаем прыватнае рашэнне z^*. Ураўненне $\ddot{z}+2\dot{z}=9{,}8$ можна запісаць у наступным выглядзе:

$$\ddot{z}+2\dot{z}=9{,}8e^{kt} ,$$

дзе $k=0$.

Улічваючы, што k з'яўляецца адным з каранёў ($r_1=0$) характарыстычнага ўраўнення, прыватнае рашэнне неаднароднага ўраўнення запішам у выглядзе

$$z^*=C_7t .$$

Падставім атрыманае прыватнае рашэнне ў неаднароднае дыферэнцыяльнае ўраўненне.

$$\dot{z}^*=C_7, \quad \ddot{z}^*=0 .$$

$$2C_7=9{,}8, \quad C_7=4{,}9 .$$

Атрымалі прыватнае рашэнне: $z^*=4{,}9t$.

Агульнае рашэнне трэцяга дыферэнцыяльнага ўраўнення атрымліваем як суму двух рашэнняў:

$$z=\bar{z}+z^* .$$

$$z=C_5+C_6e^{-2t}+4{,}9t .$$

Каб вызначыць канстанты інтэгравання C_5 і C_6, аднаго ўраўнення недастаткова. Запішам дадаткова выраз праекцыі скорасці пункта на вось Oz.

$$\dot{z}=-2C_6e^{-2t}+4{,}9 .$$

Цяпер падставім у атрыманыя дзве роўнасці пачатковыя ўмовы руху пункта $t_0=0$, $z_0=0$, $v_{0z}=2$ м/с і падлічым канстанты C_5 і C_6.

$$\begin{cases} 0 = C_5 + C_6 \\ 2 = -2C_6 + 4{,}9 \end{cases} \qquad C_6 = 1{,}45,\ C_5 = -1{,}45\,.$$

Канчаткова маем ураўненне руху пункта адносна восі Oz:

$$z = 1{,}45(e^{-2t} - 1) + 4{,}9t(\text{м})\,.$$

З дыферэнцыяльных ураўненняў руху матэрыяльнага пункта вынікае, што праекцыі паскарэння пункта на восі каардынат з'яўляюцца пераменнымі велічынямі. Таму адносна кожнай з трох восей каардынат матэрыяльны пункт рухаецца пераменна.

Заданне Д-2

Ваганні матэрыяльнага пункта

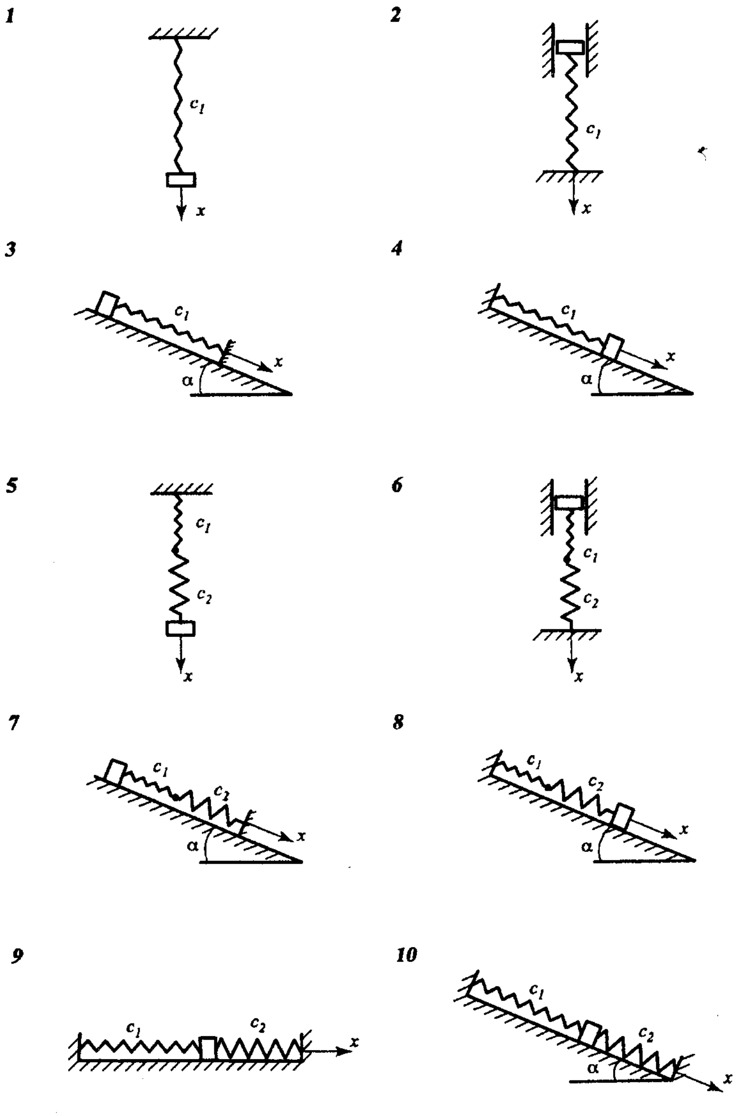
Варыянты 1–10 (рыс. 2, табл. 2)

Атрымаць ураўненне руху грузу, маса якога m, адносна восі Ox. Пачатак адліку O сумясціць з месцам знаходжання грузу ў стане раўнавагі.

Варыянты 1, 2. Груз прымацаваны да спружыны, натуральная даўжыня якой l_0, каэфіцыент жорсткасці c_1. У пачатку руху даўжыня спружыны была l, а груз штуршком атрымаў скорасць v_0 у дадатным накірунку восі Ox. Супраціўленне руху грузу прапарцыянальна скорасці: $R = \mu v$.

Варыянты 3, 4. Груз прымацаваны да спружыны, натуральная даўжыня якой l_0, каэфіцыент жорсткасці c_1. У пачатку руху даўжыня спружыны была l, а груз штуршком атрымаў скорасць v_0 у адмоўным накірунку восі Ox. Гладкая паверхня, па якой рухаецца груз, складае з гарызонтам вугал α. Супраціўленне руху грузу прапарцыянальна скорасці: $R = \mu v$.

Варыянты 5, 6. Груз прымацаваны да спружыны, якая паслядоўна злучана з другою спружынаю. Каэфіцыенты жорсткасці спружын c_1 і c_2. Груз, які знаходзіўся ў стане раўнавагі, штуршком атрымаў скорасць v_0 у адмоўным накірунку восі Ox. Супраціўленне руху грузу прапарцыянальна скорасці: $R = \mu v$.



Рыс. 2

Табліца 2

Варыянт	m, кг	l_0, м	l, м	c_1, Н/м	c_2, Н/м	α, град	v_0, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$	h, s, м	μ, $\frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$	$x_1 = f(t)$, м
1	0,8	0,5	0,52	150			1,2		16	
2	1,0	0,6	0,57	180			1,5		10	
3	1,2	0,4	0,43	200		30	1,0		8	
4	1,4	0,5	0,46	220		40	1,3		12	
5	0,9			120	200		1,6		20	
6	0,7			150	240		1,4		18	
7	0,6	1,4	1,52	160	210	35	1,1		7	
8	0,5	1,6	1,52	170	220	25	1,3		9	
9	0,9	0,8	0,75	200	240		1,5		10	
10	1,0			210	250	30	1,7		14	
11	1,1	0,6	0,58	240			1,0			0,05 sin 15t
12	1,3	0,7	0,73	260			0,8			0,06 sin 20t
13	1,4	0,8	0,74	280		40	1,2			0,04 sin 10t
14	1,2	0,9	0,92	300		35	1,3			0,05 sin 15t
15	0,7	0,4	0,36	180	210		1,4			0,06 sin 16t
16	0,8	0,5	0,53	200	240		1,5			0,07 sin 14t
17	0,9			190	220	25	1,6			0,06 sin 15t
18	1,0			220	250	30	1,7			0,05 sin 18t
19	1,1	0,6	0,54	230	260		0,8			0,04 sin 20t
20	1,2			200	250		0,7			0,03 sin 17t
21	1,3			210				0,3	6	
22	1,4			240				0,2	10	
23	1,5			250	300		0,2	0,2	12	
24	0,5			160	200		0,4	0,3	14	
25	0,6			170		30		0,4	16	
26	0,7			180		40		0,5	18	
27	0,8			150	220	25		0,4	15	
28	0,9			190	250	35		0,3	20	
29	1,0			200				0,2		0,04 sin 15t
30	1,2			260				0,3		0,05 sin 20t

Варыянты 7, 8. Груз прымацаваны да спружыны, якая паслядоўна злучана з другою спружынаю. Каэфіцыенты жорсткасці спружын c_1, c_2. Натуральная агульная даўжыня спружын l_0. У пачатку руху іх даўжыня была l, а груз штуршком атрымаў скорасць v_0 у дадатным накірунку восі Ox і падоўжыў рух уздоўж гладкай паверхні, нахіленай да гарызонту пад вуглом α. Супраціўленне руху грузу прапарцыянальна скорасці: $R = \mu v$.

В а р ы я н т 9. Груз прымацаваны да дзвюх спружын, каэфіцыенты жорсткасці якіх c_1 і c_2. У стане спакою грузу спружыны маюць аднолькавую натуральную даўжыню l_0. Груз абапіраецца на гладкую гарызантальную паверхню. У пачатку руху спружына, каэфіцыент жорсткасці якой c_1, мела даўжыню l, а грузу штуршком надалі скорасць v_0 у дадатным накірунку восі Ox. Супраціўленне руху грузу прапарцыянальна скорасці: $R = \mu v$.

В а р ы я н т 10. Груз прымацаваны да дзвюх спружын, каэфіцыенты жорсткасці якіх c_1 і c_2. Спружыны пры гэтым маюць натуральную даўжыню. З гэтага становішча грузу штуршком надаецца скорасць v_0 уздоўж гладкай паверхні, нахіленай пад вуглом α да гарызонту, у бок адмоўнага накірунку восі Ox. Супраціўленне руху грузу прапарцыянальна скорасці: $R = \mu v$.

Варыянты 11–20 (рыс. 3, табл. 2)

Атрымаць ураўненне руху адносна восі Ox грузу масаю m, прымацаванага да канца спружыны (сістэмы спружын), калі другі канец спружыны (сістэмы спружын) рухаецца па вядомаму закону. Пачатак адліку 0 сумясціць з месцам знаходжання грузу ў стане раўнавагі, пры гэтым $x_1 = 0$.

В а р ы я н т ы 11, 12. Груз прымацаваны да спружыны, натуральная даўжыня якой l_0, каэфіцыент жорсткасці c_1. У некаторы момант спружыну дэфармуюць да даўжыні l і грузу надаюць скорасць v_0 у дадатным накірунку восі Ox. Адначасова другі канец спружыны пачынае рухацца па закону $x_1 = f(t)$.

В а р ы я н т ы 13, 14. Груз прымацаваны да спружыны, натуральная даўжыня якой l_0, каэфіцыент жорсткасці c_1. У пачатку руху спружына мела даўжыню l, а грузу штуршком надалі скорасць v_0 у адмоўным накірунку восі Ox. Адначасова другі канец спружыны пачынае рухацца па закону $x_1 = f(t)$. Груз рухаецца па гладкай паверхні, нахіленай пад вуглом α да гарызонту.

В а р ы я н т ы 15, 16. Груз прымацаваны да спружыны, якая паслядоўна злучана з другою спружынаю. Каэфіцыенты жорсткасці спружын c_1 і c_2. Агульная даўжыня спружын у натуральным стане l_0. У пачатку руху агульная даўжыня спружын была l, а грузу надалі скорасць v_0 у дадатным накірунку восі Ox. Адначасова другі канец сістэмы спружын пачаў рухацца па закону $x_1 = f(t)$.

Варыянты 17, 18. Груз прымацаваны да сістэмы спружын, паслядоўна злучаных паміж сабою. Каэфіцыенты жорсткасці спружын c_1 і c_2. Грузу, які знаходзіўся ў стане раўнавагі, штуршком надалі скорасць v_0 у адмоўным накірунку восі Ox, і ён пачаў рухацца ўздоўж гладкай паверхні, нахіленай да гарызонту пад вуглом α. Адначасова другі канец сістэмы спружын пачаў рухацца па закону $x_1 = f(t)$ уздоўж нахіленай паверхні.

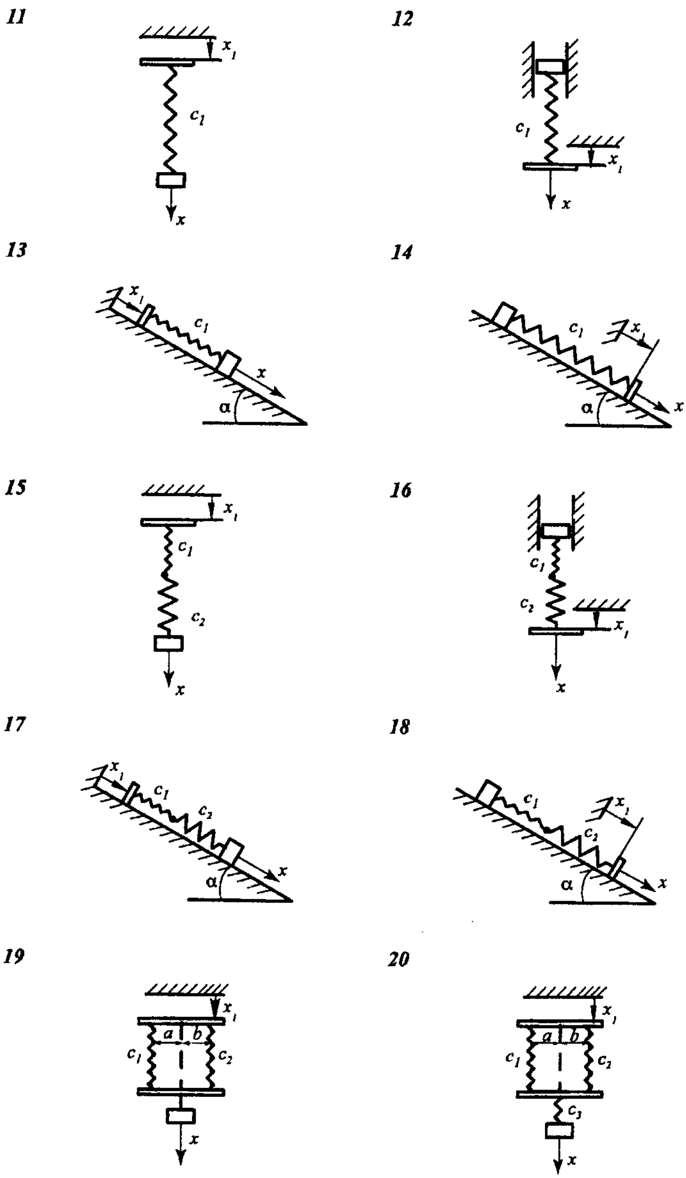
Варыянт 19. Груз прымацаваны да бязважкага гарызантальнага бруска, які вісіць на дзвюх паралельных спружынах, каэфіцыенты жорсткасці якіх c_1 і c_2. Для забеспячэння паступальнага прамалінейнага руху бруска з грузам спружыны прымацаваны такім чынам, што $c_1 : c_2 = b : a$. Натуральная даўжыня спружын l_0. У пачатку руху даўжыня спружын была l, а грузу штуршком надалі скорасць v_0 у дадатным накірунку восі Ox. Адначасова верхнія канцы спружын пачалі рухацца па закону $x_1 = f(t)$.

Варыянт 20. Дзве паралельныя спружыны, каэфіцыенты жорсткасці якіх c_1 і c_2, злучаны бязважкім бруском, да якога знізу прымацавана трэцяя спружына з каэфіцыентам жорсткасці $c_3 = c_1+c_2$. Вось трэцяй спружыны дзеліць адлегласць паміж першай і другой спружынамі так, што $a : b = c_2 : c_1$. Гэта дазваляе бруску рухацца паступальна. У момант, калі груз далучаюць да ніжняга канца трэцяй спружыны, яму надаюць скорасць v_0 у дадатным накірунку восі Ox. Адначасова верхнія канцы першай і другой спружын пачынаюць рухацца па закону $x_1 = f(t)$.

Варыянты 21–30 (рыс. 4, табл. 2)

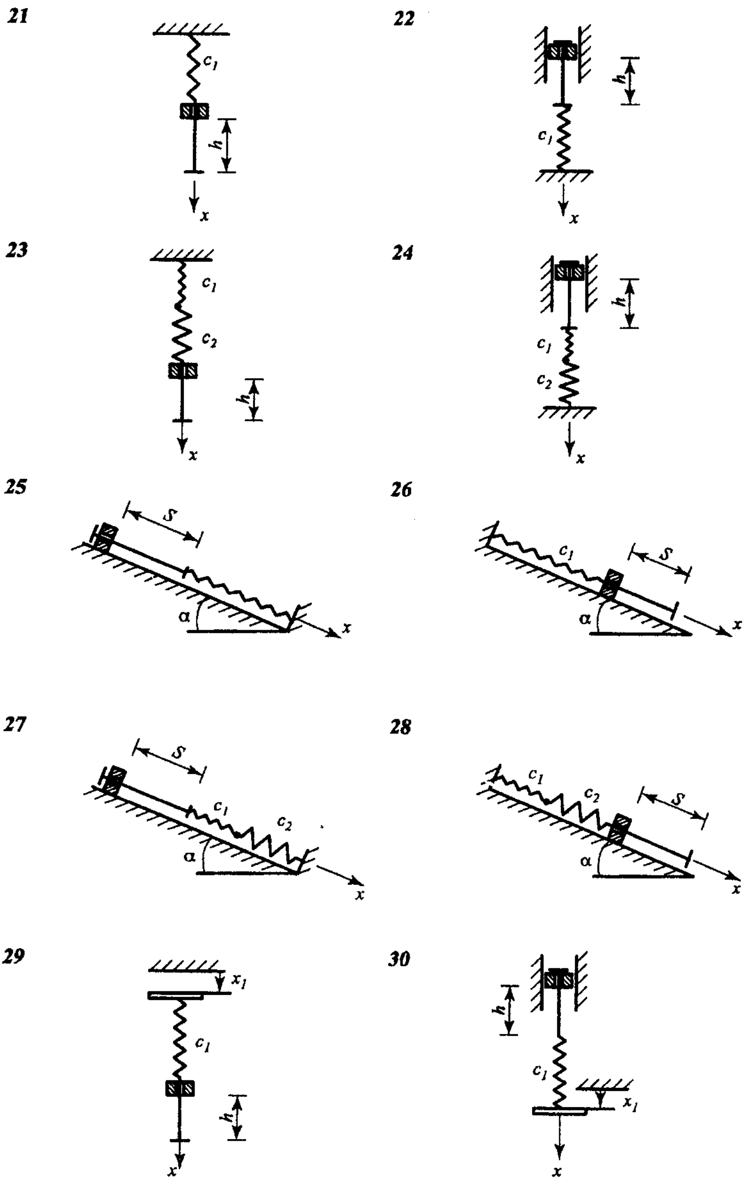
Атрымаць ураўненне руху адноса восі Ox грузу масаю m на спружыне (сістэме спружын). Пачатак адліку 0 сумясціць з месцам знаходжання грузу ў стане раўнавагі.

Варыянты 21, 22. Пасля свабоднага падзення з вышыні h уздоўж бязважкага недэфармуемага стрыжня, прымацаванага да спружыны, каэфіцыент жорсткасці якой c_1, груз далей рухаецца на спружыне, не губляючы з ёю сувязь. Супраціўленне руху грузу прапарцыянальна скорасці: $R = \mu v$.



11
x_1
c_1
x
12
c_1
x_1
x
13
x_1
c_1
x
α
14
c_1
x_1
x
α
15
x_1
c_1
c_2
x
16
c_1
c_2
x_1
x
17
x_1
c_1
c_2
x
α
18
c_1
c_2
x_1
x
α
19
x_1
a
b
c_1
c_2
x
20
x_1
a
b
c_1
c_2
c_3
x

Рыс. 3



Рыс. 4

В а р ы я н т ы 2 3 , 2 4 . Дзве спружыны, каэфіцыенты жорсткасці якіх c_1 і c_2, злучаны паслядоўна. Адзін канец пругкай сістэмы нерухомы, а да другога прымацаваны бязважкі недэфармуемы стрыжань, які рухаецца адпаведна дэфармацыі пругкай сістэмы. Грузу, надзетаму на стрыжань, у верхнім пункце стрыжня надаецца скорасць v_0 у дадатным накірунку восі Ox. У свабодным падзенні ўздоўж стрыжня груз пралятае адлегласць h, а затым рухаецца на спружынах, не губляючы з імі сувязь. Супраціўленне руху грузу прапарцыянальна скорасці: $R = \mu v$.

В а р ы я н т ы 2 5 , 2 6 . Груз, надзеты на бязважкі недэфармуемы стрыжань, які прымацаваны да спружыны з каэфіцыентам жорсткасці c_1, пачынае рухацца ўздоўж гладкай паверхні, якая нахілена пад вуглом α да гарызонту. Пасля праходжання адлегласці S груз прымацоўваецца да спружыны і рухаецца, не губляючы з ёю сувязь. Супраціўленне руху грузу прапарцыянальна скорасці: $R = \mu v$.

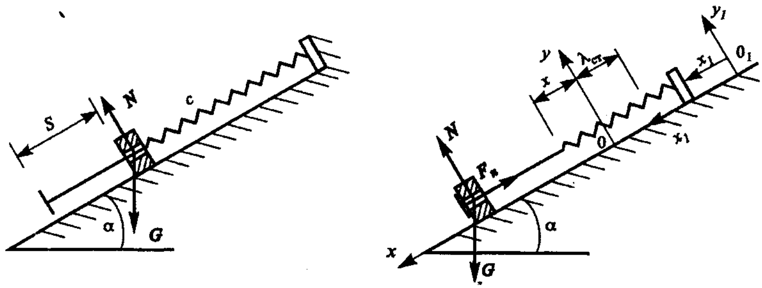
В а р ы я н т ы 2 7 , 2 8 . Груз рухаецца са стану спакою ўздоўж бязважкага недэфармуемага стрыжня, які прымацаваны да сістэмы паслядоўна злучаных дзвюх спружын з каэфіцыентамі жорсткасці c_1 і c_2. Пасля праходжання адлегласці S груз прымацоўваецца да сістэмы спружын і рухаецца, не губляючы з ёю сувязь. Нерухомая гладкая паверхня, па якой рухаецца груз, нахілена да гарызонту пад вуглом α. Супраціўленне руху грузу прапарцыянальна скорасці: $R = \mu v$.

В а р ы я н т ы 2 9 , 3 0 . Пасля свабоднага падзення з вышыні h уздоўж бязважкага недэфармуемага стрыжня, прымацаванага да спружыны з каэфіцыентам жосткасці c_1, груз далей рухаецца на спружыне, не губляючы з ёю сувязь. Адначасова з пачаткам руху грузу на спружыне яе другі канец пачынае рухацца па закону $x_1 = f(t)$. У стане раўнавагі грузу $x_1 = 0$.

Прыклад рашэння задання Д-2

Груз $m = 1$ кг, надзеты на бязважкі недэфармуемы стрыжань, пачынае рухацца ўздоўж гладкай паверхні, якая нахілена пад вуглом $\alpha = 30°$ да гарызонту, і праходзіць адлегласць $S = 0{,}5$ м. З гэтага моманту ён рухаецца на спружыне, каэфіцыент жорсткасці якой $c = 150$ н/м.

Адначасова з пачаткам руху грузу на спружыне другі яе канец пачынае рухацца па закону $x_1 = 0{,}04\ \sin 15t$ (м). Атрымаць ураўненне руху грузу ў сістэме восей каардынат, пачатак якіх супадае са станам раўнавагі грузу на спружыне, пры гэтым $x_1 = 0$.



а б

Рыс. 5

Назіраем два этапы руху грузу: 1) рух уздоўж стрыжня па нахіленай паверхні (рыс. 5, а); 2) рух грузу пасля замацавання на канцы стрыжня (рыс. 5, б).

Разгледзім першы этап руху грузу. На груз дзейнічаюць дзве нязменныя сілы $\boldsymbol{G}$ і $\boldsymbol{N}$, якія вызначаюць нязменнае паскарэнне грузу ў дадатным накірунку восі Ox.

$$ma = G \sin \alpha,\ a = g \sin \alpha,\ a = 9{,}8 \cdot 0{,}5 = 4{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Пры роўнапаскораным руху са стану спакою $v = at,\ \ S = 0{,}5at^2$, адкуль знаходзім скорасць у канцы перамяшчэння:

$$v = \sqrt{2aS} = \sqrt{2 \cdot 4{,}9 \cdot 0{,}5} = 2{,}2 \text{ м/с}.$$

Атрыманая скорасць з'яўляецца пачатковаю на наступным этапе руху грузу.

Разгледзім другі этап руху грузу.

Пачатак нерухомых восей каардынат сумяшчаем з месцам знаходжання канца спружыны пры раўнавазе грузу на спружыне пры ўмове, што у гэтым становішчы $x_1 = 0$. Восі Ox і O_1x_1 накіроўваем у бок павелічэння дэфармацыі спружыны.

У адвольны момант часу на груз, які рухаецца ў дадатным накірунку восі Ox, дзейнічаюць сілы: $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{F}_п$. Пругкая сіла спружыны з'яўляецца пераменнаю сілаю, якая залежыць ад дэфармацыі спружыны.

$$F_{\text{п}} = c\lambda = c(\lambda_{\text{ст}} + x - x_1),$$

дзе c — каэфіцыент жорсткасці спружыны;

λ — дэфармацыя спружыны ў адвольны момант часу;

$\lambda_{\text{ст}}$ — статычная дэфармацыя спружыны пры раўнавазе грузу;

x — дадатковая дэфармацыя спружыны пры руху грузу са стану раўнавагі (каардыната грузу),

x_1 — каардыната верхняга канца спружыны.

Дыферэнцыяльнае ўраўненне руху грузу

$$m\ddot{x} = G\sin\alpha - F_{\text{п}},$$

$$m\ddot{x} = G\sin\alpha - c(\lambda_{\text{ст}} + x - x_1).$$

У стане раўнавагі $G\sin\alpha = c\lambda_{\text{ст}}$, таму ўраўненне прымае выгляд

$$m\ddot{x} = -cx + cx_1.$$

Падставім лікавыя значэнні вядомых параметраў:

$$\ddot{x} + 150x = 6\sin 15t.$$

Атрымалі лінейнае дыферэнцыяльнае ўраўненне другога парадку з пастаяннымі каэфіцыентамі, неаднароднае.

Агульнае рашэнне гэтага ўраўнення складаецца з агульнага рашэння $\bar{x}$ адпаведнага аднароднага ўраўнення і прыватнага рашэння x^* дадзенага неаднароднага ўраўнення:

$$x = \bar{x} + x^*.$$

Характарыстычнае ўраўненне дыферэнцыяльнага ўраўнення $\ddot{x} + 150x = 0$ мае выгляд

$$z^2 + 150 = 0.$$

Карані атрыманага квадратнага ўраўнення

$$z_{1,2} = \sqrt{-150} = \sqrt{150}i = \pm 12{,}25i.$$

Таму агульнае рашэнне аднароднага ўраўнення мае выгляд

$$\bar{x} = C_1 \cos 12{,}25t + C_2 \sin 12{,}25t .$$

Прыватнае рашэнне неаднароднага ўраўнення з улікам выгляду правай часткі ўраўнення

$$x^* = C_3 \sin 15t + C_4 \cos 15t .$$

Запішам выраз $\ddot{x}^*$ і разам з выразам x^* падставім у неаднароднае дыферэнцыяльнае ўраўненне.

$$\ddot{x}^* = -225C_3 \sin 15t - 225C_4 \cos 15t .$$

$$-225C_3 \sin 15t - 225C_4 \cos 15t + 150C_3 \sin 15t +$$

$$+ 150C_4 \cos 15t = 6 \sin 15t.$$

Прыраўнуем каэфіцыенты пры аднолькавых трыганаметрычных функцыях, якія знаходзяцца ў левай і правай частках роўнасці, і знойдзем C_3 і C_4 .

$$\begin{cases} -225C_3 + 150C_3 = 6 \\ -225C_4 + 150C_4 = 0 \end{cases} \qquad C_3 = -0{,}08\ \text{м}, \quad C_4 = 0 .$$

Тады $x^* = -0{,}08 \sin 15t$.

Агульнае рашэнне неаднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення:

$$x = \bar{x} + x^* = C_1 \cos 12{,}25t + C_2 \sin 12{,}25t - 0{,}08 \sin 15t .$$

Канстанты інтэгравання C_1 і C_2 знойдзем па пачатковых умовах руху грузу:

$$t_0 = 0, \quad v_{0x} = 2{,}2 \ \text{м/с} ,$$

$$x_0 = -\lambda_{\text{ст}} = -\frac{G \sin\alpha}{c} = -\frac{1 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5}{150} = -0{,}03\text{м} .$$

Падставім пачатковыя ўмовы руху ў агульнае рашэнне $x = f(t)$ і ў вытворную па часу ад x: $\dot{x} = f_1(t)$.

$$\dot{x} = -12{,}25C_1 \sin 12{,}25t + 12{,}25C_2 \cos 12{,}25t - 1{,}2 \cos 15t .$$

$$\begin{cases} -0{,}03 = C_1 \\ 2{,}2 = 12{,}25C_2 - 1{,}2 \end{cases} \qquad C_1 = -0{,}03\ \text{м},\ \ C_2 = 0{,}28\ \text{м}.$$

Атрымалі ўраўненне руху грузу

$$x = -0{,}03\cos 12{,}25t + 0{,}28\sin 12{,}25t - 0{,}08\sin 15t(\text{м}).$$

Заданне Д-3

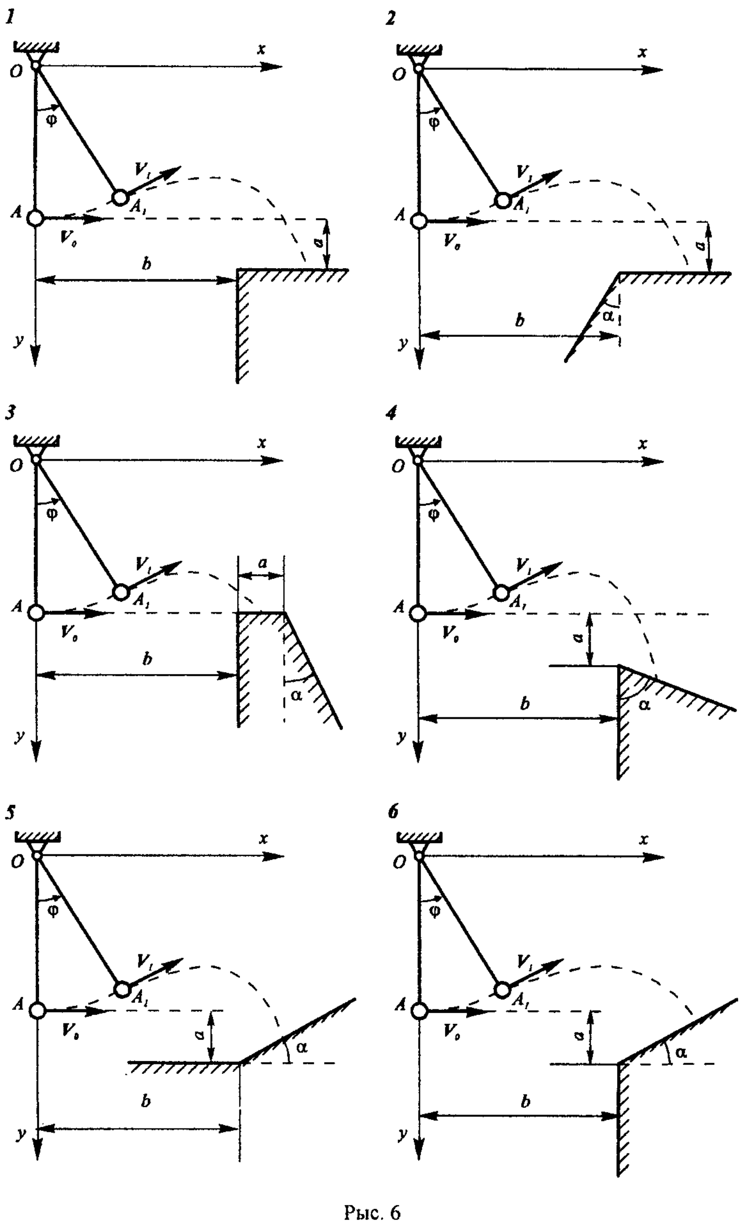
Прымяненне асноўных тэарэм дынамікі пры даследаванні руху матэрыяльнага пункта

Варыянты 1–6 (рыс. 6, табл. 3)

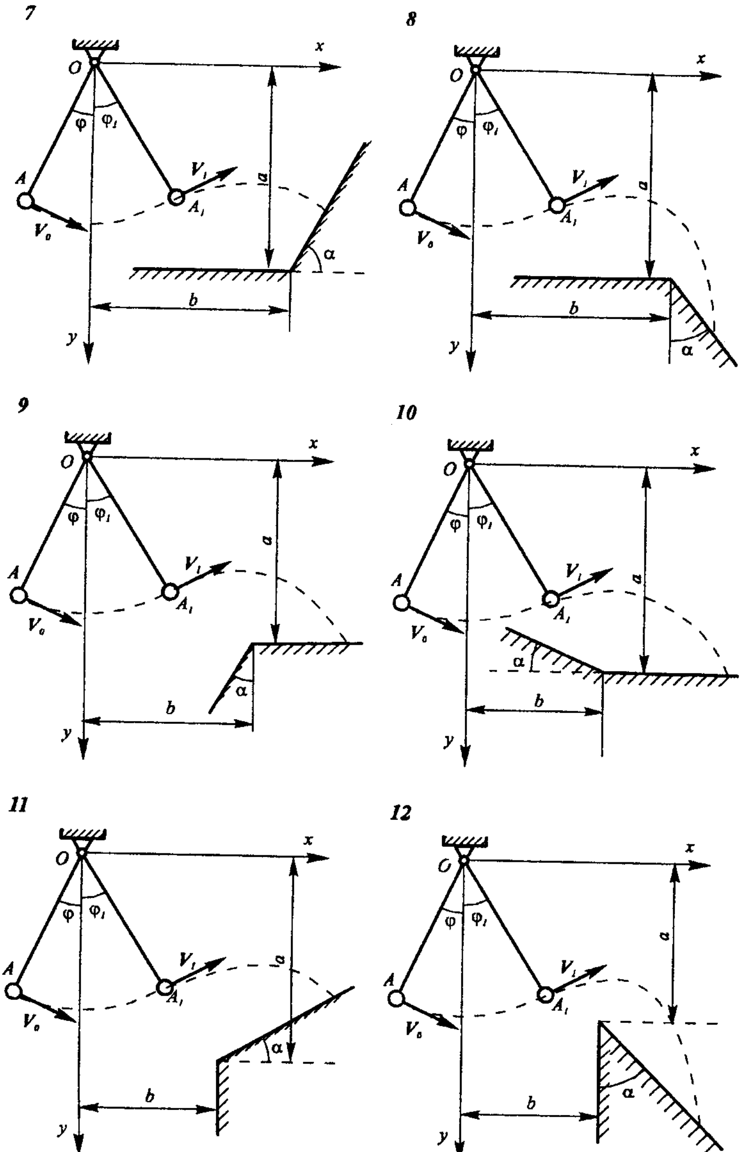
Груз A прымацаваны да троса $OA = l$. У некаторы момант штуршком грузу надаецца скорасць v_0. Пасля павароту троса ад вертыкальнага накірунку на вугал φ груз аддзяляецца ад яго, маючы ў гэты момант скорасць v_1, і рухаецца далей толькі пад уздзеяннем сілы цяжару да сутыкнення з нерухомаю паверхняю (гарызантальная або нахіленая пляцоўка; вертыкальная сценка). Вызначыць велічыні, адзначаныя ў табл. 3. x_2, y_2 — каардынаты найвышэйшага пункта траекторыі палёту грузу; v_2 — скорасць грузу ў найвышэйшым пункце траекторыі; x_3, y_3 — каардынаты месца падзення грузу; v_3 — скорасць грузу ў момант падзення на нерухомую паверхню; τ — час свабоднага палёту грузу.

Варыянты 7–12 (рыс. 7, табл. 3)

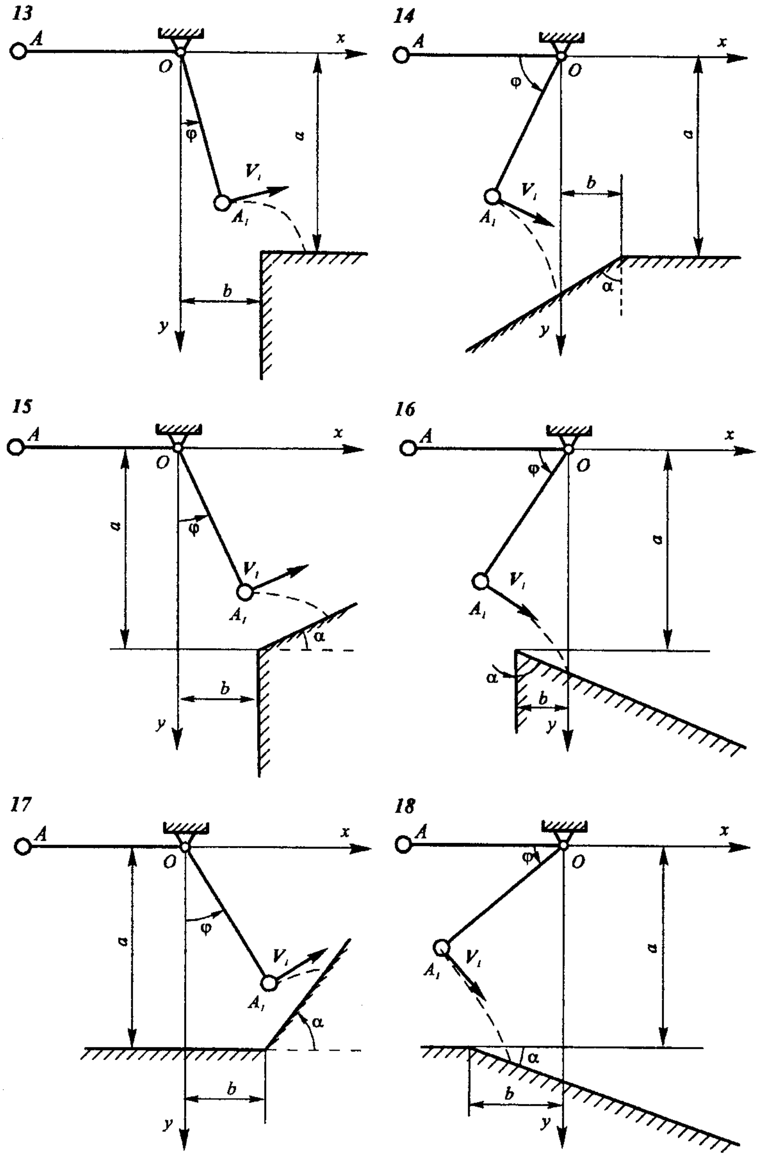
Груз A прымацаваны да троса $OA = l$. У некаторы момант трос адхіляюць ад вертыкалі на вугал φ і штуршком надаюць грузу скорасць v_0. Пасля павароту троса на вугал $\varphi + \varphi_1$ груз аддзяляецца ад яго, маючы скорасць v_1, і рухаецца далей толькі пад уздзеяннем сілы цяжару да сутыкнення з нерухомаю паверхняю (гарызантальная або нахіленая пляцоўка; вертыкальная сценка). Вызначыць велічыні, адзначаныя ў табл. 3. Назвы велічынь прыведзены ў варыянтах 1–6.



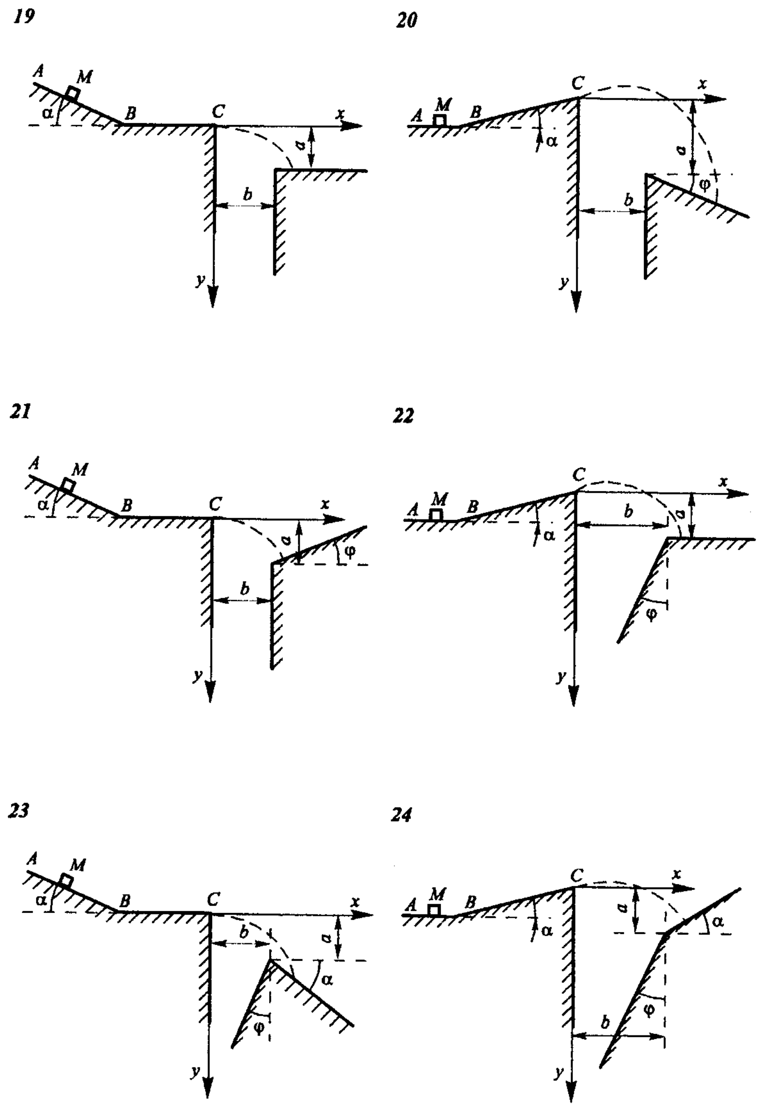
Рыс. 6



Рыс. 7

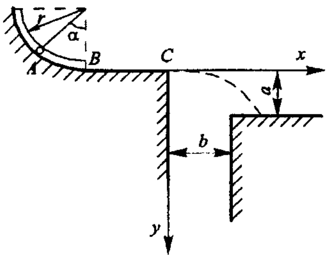


Рыс. 8

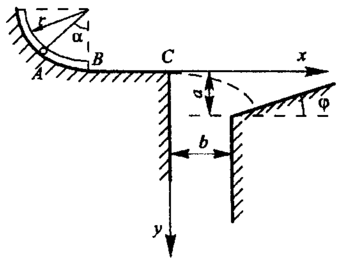

19
A
M
α
B
C
x
a
b
y
20
A
M
B
C
x
α
a
φ
b
y
21
A
M
α
B
C
x
a
φ
b
y
22
A
M
B
C
x
α
b
a
φ
y
23
A
M
α
B
C
x
b
a
α
φ
y
24
A
M
B
C
x
α
a
α
φ
b
y

Рыс. 9

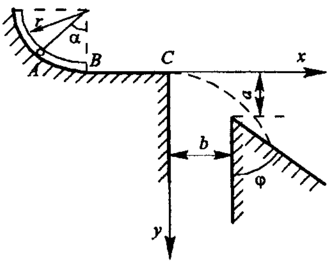
25



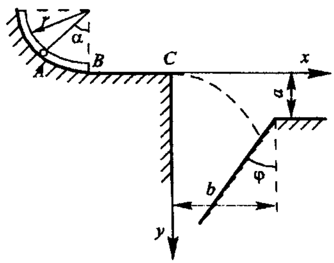
26



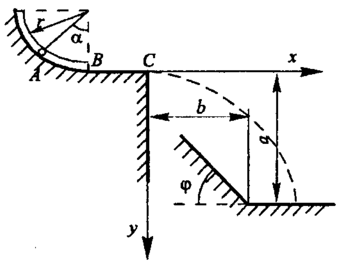
27



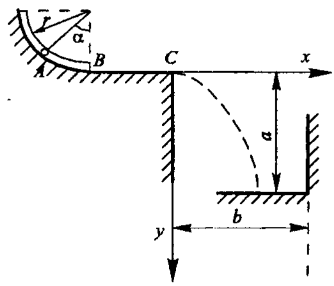
28



29



30



Рыс. 10

Табліца 3

Варыянт	l, м	v_0, м/с	φ, град	v_1, м/с	a, м	b, м	α, град	r, м	t_1, с	f	φ_1, град	Вызначыць
1	1,2	2,0	30		0,2	1,3						v_1, x_2, v_3
2	1,3	2,1		1,2	0,3	1,5	40					φ, y_2, x_3
3	1,0		40	1,3	0,2	1,2	25					v_0, v_2, τ
4	1,1	2,8	35		0,4	1,0	70					v_1, x_2, y_3
5	1,5	2,6	25		0,5	1,4	30					v_1, y_2, v_3
6	1,4	2,4		1,6	0,6	1,1	20					φ, v_2, τ
7	1,2	2,0	30		1,4	1,6	60				25	v_1, x_2, y_3
8	1,6	2,2	20		1,9	1,2	45				28	v_1, y_2, v_3
9	1,4		25	2,0	1,2	1,5	40				30	v_0, v_2, x_3
10	1,1	1,8	15		2,0	1,6	25				20	v_1, τ, y_3
11	1,3		26	1,8	1,4	1,8	30				32	v_0, y_2, v_3
12	1,5	2,1	32		1,6	1,7	65				35	v_1, v_2, x_3
13	1,0		10		1,2	1,4						v_1, x_2, y_3
14	1,1		75		1,3	0,8	70					v_1, τ, v_3
15	1,2		30		1,5	1,0	20					v_1, y_2, x_3
16	1,3		60		1,4	0,6	75					v_1, τ, y_3
17	1,4		35		1,6	0,9	60					v_1, v_2, v_3
18	1,5		40		1,7	1,1	30					v_1, τ, x_3
19	1,0	0,2			0,4	1,6	25		2	0,3		v_c, τ, x_3
20	0,6	4,4	20		0,8	0,9	22		3	0,1		x_2, τ, v_3
21	2,0	0,3	34		0,6	0,4	30		1	0,2		v_c, y_3, v_3
22	0,5	4,0	40		1,0	1,4	20		2	0,1		y_2, τ, v_3
23	1,5	0,4	38		1,2	2,0	35		2	0,3		v_c, τ, x_3
24	0,6	5,0	25		0,9	1,2	30		1	0,2		v_2, y_3, v_3
25		6,5			1,4	1,8	80	0,5	3	0,1		v_c, τ, v_3
26		6,2	20		1,2	1,3	70	0,6	2	0,2		v_c, x_3, v_3
27		6,0	60		1,6	1,0	60	0,7	1	0,3		v_c, τ, y_3
28		5,8	40		0,8	2,0	75	0,8	3	0,1		v_c, y_3, v_3
29		5,6	35		2,0	1,6	65	0,9	2	0,2		v_c, τ, x_3
30		5,4			2,4	2,5	50	1,0	1	0,3		v_c, τ, v_3

Варыянты 13–18 (рыс. 8, табл. 3)

Груз A прымацаваны да троса $OA = l$. У некаторы момант трос адхіляюць да гарызантальнага становішча і груз адпускаюць. Пасля павароту троса на некаторы вугал φ (або $90° + \varphi$) груз аддзяляецца ад яго, маючы скорасць v_1, і рухаецца далей толькі пад уздзеяннем сілы цяжару да сутыкнення з нерухомаю паверхняю (гарызантальная або нахіленая пляцоўка; вертыкальная сценка). Вызначыць велічыні, адзначаныя ў табл. 3. Назвы велічынь прыведзены ў варыянтах 1–6.

Варыянты 19–24 (рыс. 9, табл. 3)

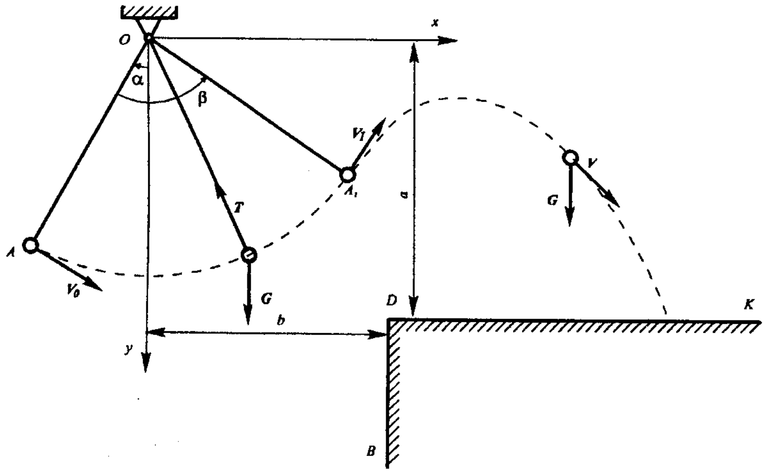
Груз M, атрымаўшы пачатковую скорасць v_0, рухаецца t_1 секунд па нягладкай паверхні AB да пункта B. Без змены велічыні скорасці ў пункце B груз рухаецца далей па нягладкай паверхні $BC = l$. Каэфіцыент трэння слізгання на ўсіх паверхнях роўны f. Пасля сходу з паверхні ў пункце C груз знаходзіцца ў свабодным палёце да сутыкнення з нерухомаю паверхняю (гарызантальная, вертыкальная або нахіленая пляцоўка). Вызначыць велічыні, адзначаныя ў табл. 3. Назвы велічынь прыведзены ў варыянтах 1–6.

Варыянты 25–30 (рыс. 10, табл. 3)

Шарык A знаходзіцца ў трубцы, якая выгнута ў выглядзе дугі акружнасці радыуса r. У пачатковы момант, вызначаны вуглом α, шарыку надаецца скорасць v_0 і ён рухаецца па гладкай унутранай паверхні трубкі ў вертыкальнай плоскасці да пункта B. Далей шарык рухаецца на працягу t_1 секунд па гарызантальнай шурпатай паверхні (каэфіцыент трэння слізгання f) да пункта C, пасля чаго свабодна ляціць да сутыкнення з нерухомаю паверхняю (гарызантальная, вертыкальная або нахіленая пляцоўка). Вызначыць велічыні, адзначаныя ў табл. 3. Назвы велічынь прыведзены ў варыянтах 1–6.

Прыклад рашэння задання Д-3

Груз A прымацаваны да троса $OA = l = 1{,}5$ м (рыс. 11). У некаторы момант трос адхіляюць ад вертыкалі на вугал $\alpha = 30°$ і штуршком надаюць грузу скорасць $v_0 = 3{,}5$ м/с. Пасля павароту троса на вугал $\beta = 90°$ груз аддзяляецца ад яго, маючы скорасць v_1, і рухаецца далей у свабодным палёце да сутыкнення з пляцоўкаю $ДК$ або сцяною $ВД$. Вызначыць каардынаты найвышэйшага пункта траекторыі, месца падзення грузу і яго скорасць у гэты момант, калі вядома, што $a = 2{,}0$ м, $b = 1{,}6$ м.



Рыс. 11

Рашэнне. Разглядаем рух грузу па дузе акружнасці AA_1. На груз дзейнічаюць дзве сілы: сіла цяжару $\boldsymbol{G}$ і рэакцыя троса $\boldsymbol{T}$. Для вызначэння скорасці v_1 прыменім тэарэму аб змяненні кінетычнай энергіі матэрыяльнага пункта.

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=A_G+A_T\,.$$

Работа сілы цяжару

$$A_G=-G\cdot h=-Gl(\cos\alpha-\cos(\beta-\alpha))\,.$$

Работа рэакцыі троса роўна нулю, таму што сіла $\boldsymbol{T}$ у кожным пункце траекторыі перпендыкулярная вектару скорасці.

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=-mgl(\cos\alpha-\cos(\beta-\alpha))\,.$$

$$v_1^2=v_0^2-2gl(\cos\alpha-\cos(\beta-\alpha))\,.$$

$$v_1^2=12{,}25-2\cdot 9{,}8\cdot 1{,}5(0{,}866-0{,}5)=1{,}49\text{м}^2/\text{с}^2\,.$$

$$v_1 = 1{,}22 \text{ м/с}.$$

Разглядаем рух грузу пасля аддзялення яго ад троса. На яго дзейнічае толькі сіла $\boldsymbol{G}$.

Прыменім тэарэму аб змяненні колькасці руху матэрыяльнага пункта за час яго пад'ёму ад пункта A_1 да найвышэйшага пункта траекторыі, у якім вектар скорасці v_2 накіраваны па гарызанталі.

$$m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{s}\ .$$

У праекцыях на восі каардынат маем:

$$mv_{2x} - mv_{1x} = s_x,\ \ mv_{2y} - mv_{1y} = s_y\ ;$$

$$v_{2x} = v_2\ ;\ \ v_{2y} = 0\ ;\ \ v_{1x} = v_1\cos 60° = 1{,}22 \cdot 0{,}5 = 0{,}61 \text{ м/с};$$

$$v_{1y} = -v_1 \sin 60° = -1{,}22 \cdot 0{,}866 = -1{,}06 \text{ м/с}.$$

$$s_x = 0 \ \text{(праекцыя } G_x = 0\text{)};\ \ s_y = G \cdot t_2 = mg \cdot t_2\,.$$

Тады

$$mv_2 - m \cdot 0{,}61 = 0\ ;\ \ v_2 = 0{,}61 \text{ м/с}.$$

$$0 - m(-1{,}06) = mg \cdot t_2\ ;\ \ \ t_2 = \frac{1{,}06}{9{,}8} = 0{,}1 \text{ с}.$$

Вызначылі час палёту да найвышэйшага пункта траекторыі і скорасць грузу ў гэты момант.

Для знаходжання скорасці пункта ў месцы падзення прыменім тэарэму аб змяненні кінетычнай энергіі за час палёту грузу ад пункта A_1 да сутыкнення з нерухомаю паверхняю. Будзем лічыць, што сутыкненне адбылося з гарызантальным участкам *ДК*.

$$\frac{mv_3^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_G\,.$$

$$\frac{mv_3^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = mg(a - l\cos(\beta - \alpha))\,.$$

$$v_3^2 = v_1^2 + 2g(a - l\cos 60°) = 1{,}49 + 2 \cdot 9{,}8(2 - 1{,}5 \cdot 0{,}5) = 25{,}99.$$

$$v_3 = 5{,}1 \text{ м/с}.$$

Вызначым час свабоднага палёту грузу па тэарэме аб змяненні колькасці руху пункта.

$$mv_3 - mv_1 = s.$$

У праекцыях на восі каардынат маем:

$$mv_{3x} - mv_{1x} = s_x\,;\quad mv_{3y} - mv_{1y} = s_y\,;$$

$$s_x = 0 \text{ (праекцыя } G_x = 0\text{)};\quad v_{3x} = v_{1x} = 0{,}61 \text{ м/с}.$$

$$v_3 = \sqrt{v_{3x}^2 + v_{3y}^2}\,;\quad v_{3y} = \sqrt{v_3^2 - v_{3x}^2} =$$

$$= \sqrt{25{,}99 - 0{,}37} = \sqrt{25{,}62} = 5{,}06 \text{ м/с}.$$

$$v_{1y} = -1{,}06 \text{ м/с}. \qquad s_y = G \cdot t_3 = mgt_3\,.$$

$$m \cdot 5{,}06 - m(-1{,}06) = m \cdot 9{,}8 \cdot t_3\,.\quad t_3 = \frac{6{,}12}{9{,}8} = 0{,}62 \text{ с}.$$

З улікам таго, што $G_x = 0$, груз на працягу свабоднага палёту рухаецца адносна восі Ox раўнамерна. Ураўненне яго руху мае выгляд:

$$x = x_1 + \mathrm{v}_{1x} \cdot t\,.$$

Тады ў момант падзення на пляцоўку $ДК$ яго каардыната

$$x_3 = x_1 + v_{1x} \cdot t_3 = l \sin(\beta - \alpha) + v_1 \cos(\beta - \alpha) \cdot t_3\,.$$

$$x_3 = 1{,}5 \cdot 0{,}866 + 1{,}22 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}62 = 1{,}30 + 0{,}38 = 1{,}68 \text{ м}.$$

Атрымалі $x_3 > b$. Гэта азначае, што нашае першапачатковае меркаванне аб падзенні грузу на пляцоўку $ДК$ пацвердзілася.

Таму каардынаты месца падзення грузу

$$x_3 = 1{,}68 \text{ м},\ y_3 = a = 2 \text{ м}.$$

Па тэарэме аб змяненні кінетычнай энергіі грузу пры падзенні з найвышэйшага месца траекторыі на пляцоўку $ДК$ атрымаем вышыню падзення.

$$\frac{mv_3^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = mgh\,.$$

$$h = \frac{v_3^2 - v_2^2}{2g} = \frac{25{,}99 - 0{,}37}{2 \cdot 9{,}8} = 1{,}3 \text{ м}.$$

Падлічым каардынаты найвышэйшага пункта траекторыі грузу.

$$x_2 = x_1 + v_{1x} \cdot t_2 = 1{,}3 + 0{,}61 \cdot 0{,}1 = 1{,}36 \text{ м.}$$

$$y_2 = a - h = 2 - 1{,}3 = 0{,}7 \text{ м.}$$

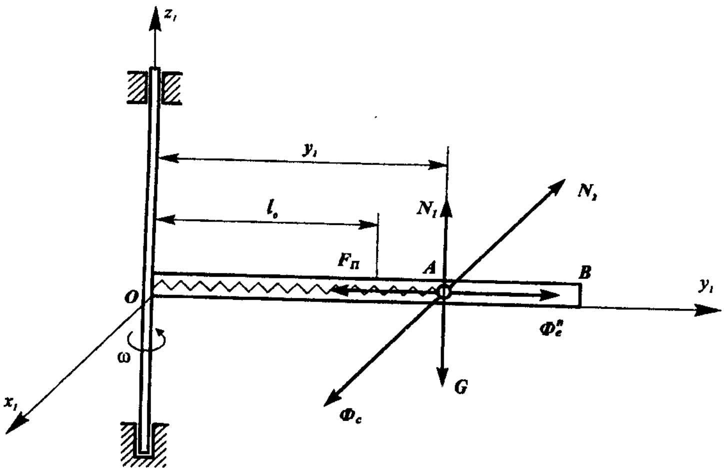
Заданне Д-4

Даследаванне адноснага руху матэрыяльнага пункта

Шарык A, маса якога m , перамяшчаецца па цыліндрычным канале цела B (рыс. 13–15), якое, у сваю чаргу, удзельнічае ў пастушальным або вярчальным руху. Атрымаць ураўненне $x_1 = O_1A = f(t)$ адноснага руху шарыка, а таксама вызначыць яго ціск на сценку канала ў момант t_1 (канал знаходзіцца ў вертыкальнай плоскасці Oyz). Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 4, дзе ω = const; c — каэфіцыент жорсткасці спружыны, да якой прымацаваны шарык; l_0 — даўжыня недэфармаванай спружыны; f — каэфіцыент трэння слізгання шарыка па сценцы канала; O_1A_0 — адлегласць ад пункта O да шарыка у пачатку руху; v_0 — пачатковая адносная скорасць шарыка A, накіраваная ў бок павелічэння каардынаты x_1 (плюс) або памяншэння каардынаты x_1 (мінус).

Прыклад рашэння задання Д-4

Гарызантальная трубка OB прымацавана да вертыкальнай восі ў пункце O і раўнамерна верціцца вакол яе з вуглавой скорасцю ω = 3 рад/с (рыс. 12). У трубцы знаходзіцца шарык масаю 0,6 кг. Да шарыка прымацавана спружына (c = 20 Н/см), другі канец якой замацаваны ў пункце O. Натуральная даўжыня спружыны l_0 = 0,4 м. У пачатковы момант шарык знаходзіўся ад восі на адлегласці l = 0,45 м і рухаўся ўздоўж трубкі ад восі вярчэння са скорасцю v_0 = 0,2 м/с. Атрымаць закон руху шарыка ў трубцы і яго ціск на гладкую ўнутраную паверхню трубкі ў момант t_1 = 2 с.



Рыс. 12

Р а ш э н н е . Замацоўваем на трубцы OB рухомую сістэму восей каардынат $Ox_1y_1z_1$. Вярчэнне гэтых восей разам з трубкаю вакол нерухомай вертыкальнай восі — пераносны рух шарыка A. Рух шарыка ўздоўж трубкі — адносны рух.

Паказваем сілы, якія дзейнічаюць на шарык у адвольны момант часу, калі ён мае некаторую каардынату y_1 у рухомай сістэме адліку. Гэта актыўная сіла цяжару $\boldsymbol{G}$, рэакцыя трубкі ў выглядзе дзвюх складовых $\boldsymbol{N}_1$ і $\boldsymbol{N}_2$, рэакцыя спружыны ў выглядзе пругкай сілы $\boldsymbol{F}_п$. З улікам таго, што разглядаем рух шарыка ў рухомай сістэме каардынат (адносны рух), паказваем дадаткова пераносную сілу інерцыі $\boldsymbol{\Phi}_e^n$ і сілу інерцыі Карыёліса $\boldsymbol{\Phi}_c$, якія накіроўваем у адваротны бок адпаведным паскарэнням. Пры гэтым лічым, што адносная скорасць шарыка накіравана ад восі Oz_1.

Ураўненне адноснага руху шарыка ў вектарнай форме

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{F}_п + \boldsymbol{\Phi}_e^n + \boldsymbol{\Phi}_c .$$

У праекцыях на восі $Ox_1y_1z_1$ атрымаем:

$$\begin{cases} 0 = -N_2 + \Phi_c, \\ m\ddot{y}_1 = -F_п + \Phi_e^n, \\ 0 = -G + N_1. \end{cases}$$

З трэцяга ўраўнення атрымаем велічыню вертыкальнай складовай рэакцыі трубкі.

$$N_1 = G = mg = 0,6 \cdot 9,8 = 5,88 \text{ Н}.$$

Для рашэння астатніх ураўненняў запішам выразы сіл, якія ўваходзяць у гэтыя ўраўненні.

$$\Phi_e^n = ma_e^n = m\omega_e^2 y_1 = 0,6 \cdot 9 \cdot y_1 = 5,4y_1,$$

$$F_п = c\lambda = c(y_1 - l_0) = 2000(y_1 - 0,4) = 2000y_1 - 800,$$

$$\Phi_c = m \cdot a_c = m \cdot 2\omega_e \cdot v_r \sin(\omega_e, v_r) = 0,6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dot{y}_1 = 3,6\dot{y}_1.$$

З улікам атрыманых выразаў пераменных сіл ураўненні маюць выгляд

$$\begin{cases} 0 = -N_2 + 3,6\dot{y}_1, & (а) \\ 0,6\ddot{y}_1 = -2000y_1 + 800 + 5,4y_1. & (б) \end{cases}$$

Рашаем лінейнае дыферэнцыяльнае ўраўненне (*б*).

$$0,6\ddot{y}_1 + 1994,6y_1 = 800.$$

$$\ddot{y}_1 + 3324,3y_1 = 1333,3.$$

Агульнае рашэнне атрыманага лінейнага неаднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення

$$y_1 = \overline{y}_1 + y_1^*,$$

дзе $\overline{y}_1$ — агульнае рашэнне адпаведнага аднароднага ўраўнення;

y_1^* — прыватнае рашэнне ўраўнення (*б*).

Характарыстычнае ўраўненне аднароднага лінейнага ўраўнення $\ddot{y}_1 + 3324,3y_1 = 0$ мае выгляд

$$z^2 + 3324,3 = 0.$$

Яго карані: $z_1 = 57{,}66i, \quad z_2 = -57{,}66i.$

Тады агульнае рашэнне аднароднага ўраўнення

$$\bar{y}_1 = C_1 \cos 57{,}66t + C_2 \sin 57{,}66t.$$

Прыватнае рашэнне неаднароднага ўраўнення (*б*) шукаем у форме

$$y_1^* = C_3 .$$

Пасля падстаноўкі y_1^* ва ўраўненне (*б*) маем:

$$3324{,}3 \cdot C_3 = 1333{,}3.$$

Адкуль $C_3 = 0{,}4$.

Агульнае рашэнне ўраўнення (*б*) атрымаем у выглядзе

$$y_1 = C_1 \cos 57{,}66t + C_2 \sin 57{,}66t + 0{,}4(\text{м}).$$

Канстанты інтэгравання C_1 і C_2 знойдзем з дапамогаю пачатковых умоў руху шарыка ў трубцы:

$$t_0 = 0, \quad y_1 = 0{,}45 \text{ м}, \quad v_1 = 0{,}2 \text{ м/с}.$$

Скорасць руху шарыка ў трубцы

$$\dot{y}_1 = -57{,}66C_1 \sin 57{,}66t + 57{,}66C_2 \cos 57{,}66t \text{ (м/с)}.$$

Падставім пачатковыя ўмовы ў $y_1 = f(t)$ і $\dot{y}_1 = f_1(t)$.

$$0{,}45 = C_1 + 0{,}4;$$

$$0{,}2 = 57{,}66C_2.$$

Адкуль $C_1 = 0{,}05$; $C_2 = 0{,}0035$.

Ураўненне адноснага руху шарыка цяпер мае выгляд

$$y_1 = 0{,}05 \cos 57{,}66t + 0{,}0035 \sin 57{,}66t + 0{,}4 \text{ (м)}.$$

Скорасць адноснага руху шарыка

$$v_r = \dot{y}_1 = -2{,}883 \sin 57{,}66t + 0{,}2 \cos 57{,}66t \text{ (м/с)}.$$

У момант $t_1 = 2$ с адносная скорасць

$$v_r = -2{,}883 \cdot 0{,}795 + 0{,}2 \cdot (-0{,}607) = -2{,}29 - 0{,}12 = -2{,}41 \text{ (м/с)}.$$

Тады з ураўнення (a) знаходзім N_2.

$$N_2 = 3{,}6\,(-2{,}41) = -8{,}68 \text{ Н}.$$

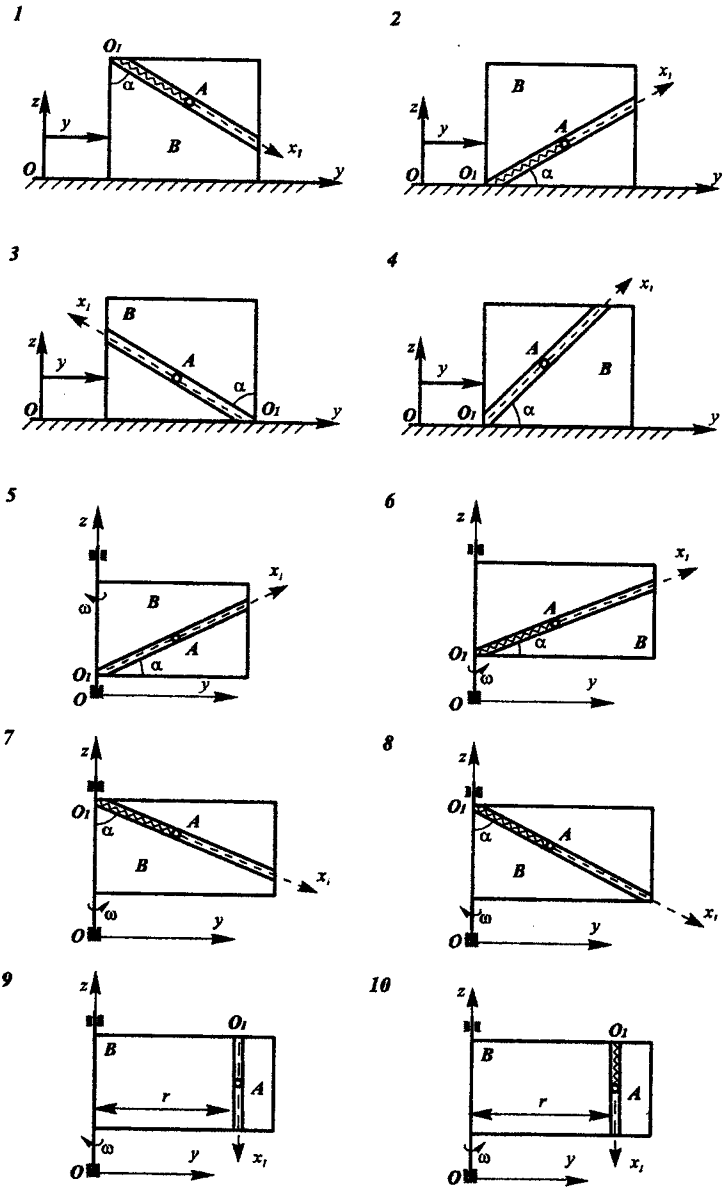
Рэакцыя сценкі трубкі

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \sqrt{5{,}88^2 + 8{,}68^2} = \sqrt{109{,}91} = 10{,}48 \text{ Н}.$$

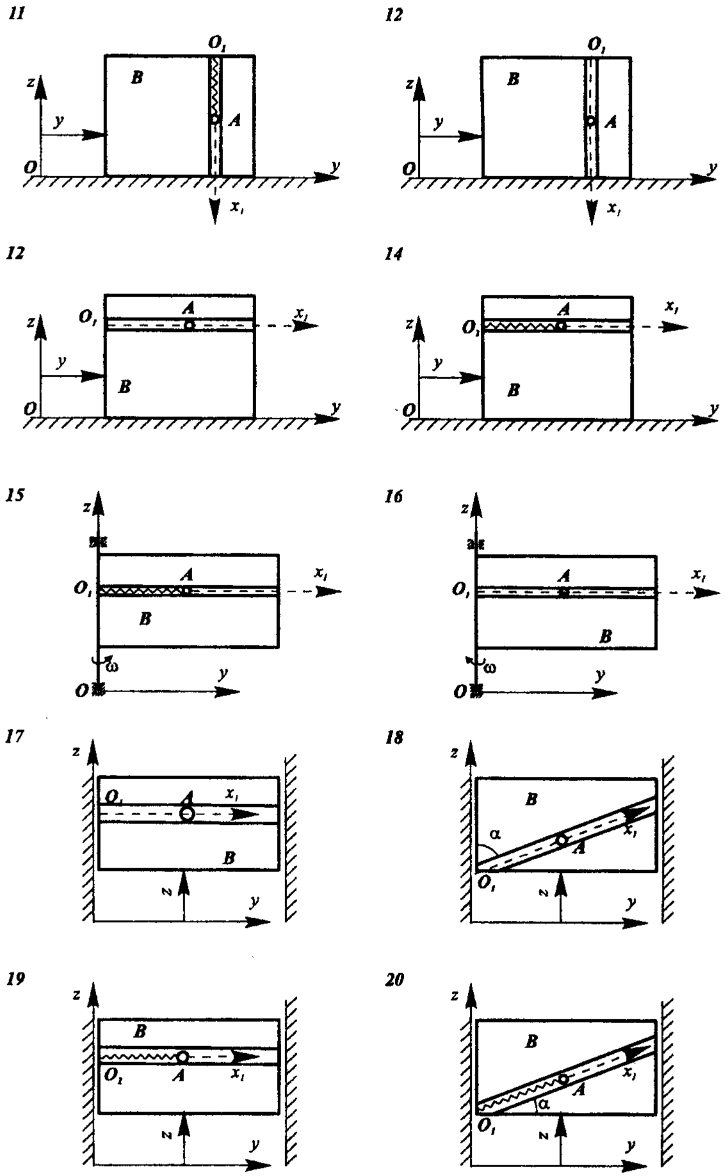
Ціск шарыка на ўнутраную паверхню трубкі роўны па велічыні N.

Табліца 4

Вары-янт	m, кг	c, Н/см	l_0, м	ω, рад/с	f	O_1A_0, м	v_0, м/с	t_1, с	α, град	r, м	$y=f(t)$, $z=f(t)$, м
1	0,20	0,6	0,4		0	0,45	−0,25	2,0	70		$1{,}2t^3+t$
2	0,18	0,7	0,3		0	0,32	0,36	1,4	30		$0{,}4t^3$
3	0,16				0,12	0,40	0,86	1,5	60		$0{,}2\sin 1{,}5t$
4	0,14				0,11	0,36	0,94	0,6	70		$t^2-0{,}6t$
5	0,12			4,5	0,10	0,60	−0,40	1,2	25		
6	0,10	0,9	0,5	5,0	0	0,46	−0,10	0,8	20		
7	0,08	1,0	0,6	3,5	0	0,62	−0,15	1,0	65		
8	0,06			3,0	0	0,35	0,80	0,6	60		
9	0,04			6,0	0,18	0,20	0,10	0,8		0,35	
10	0,02	0,8	0,4	4,0	0	0,38	−0,55	1,1		0,40	
11	0,02	0,9	0,3		0	0,27	0,18	1,4			$0{,}3\cos 2t$
12	0,04				0,20	0,25	0,15	1,5			$0{,}4\sin t$
13	0,06				0,22	0,30	0,20	1,6			$0{,}5t+t^3$
14	0,08	1,0	0,5		0	0,53	−0,20	1,8			$0{,}2t^2+0{,}3t^3$
15	0,10	1,2	0,7	2,5	0	0,66	0,24	2,0			
16	0,12			2,0	0,16	0,43	−0,12	0,4			
17	0,14				0,14	0,45	0,14	0,5			$0{,}6t^2-t$
18	0,16				0,12	0,38	0,16	0,6	70		$0{,}3\sin 2{,}5t$
19	0,18	1,4	0,6		0	0,64	−0,18	0,8			$t^3-0{,}2t$
20	0,20	1,3	0,4		0	0,39	0,20	1,0	30		$0{,}1t^3+0{,}3t^2$
21	0,20				0	0,30	0,45	1,2			$0{,}2t-t^2$
22	0,18				0,10	0,25	0,50	1,4	60		$0{,}4\cos 2t$
23	0,16	1,5	0,5		0	0,54	−0,20	1,6			$0{,}6t+0{,}4t^2$
24	0,14	1,6	0,6		0	0,55	0,65	1,7	65		$0{,}3t^2-t^3$
25	0,12	1,7	0,7	3,5	0	0,66	−0,25	1,8	25		
26	0,10	1,4	0,6	3,0	0	0,56	−0,30	2,0		0,85	
27	0,08			4,0	0,20	0,60	0,80	0,8		0,50	
28	0,06			4,5	0,15	0,45	0,75	0,9		0,45	
29	0,04	1,3	0,5	5,0	0	0,52	−0,40	1,0		0,40	
30	0,02	0,5	0,4		0	0,47	0,60	1,2			$0{,}5t^3+0{,}7t$

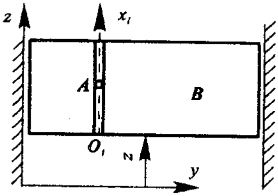


Рыс. 13

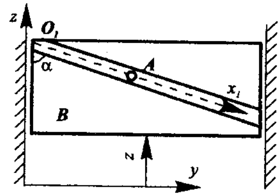


Рыс. 14

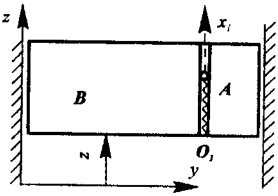
21



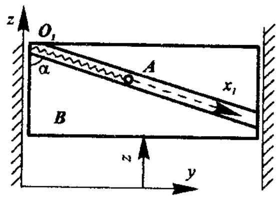
22



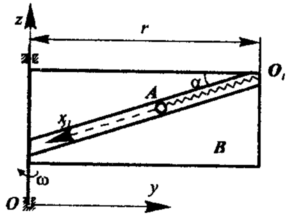
23



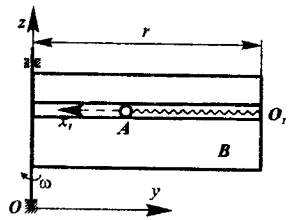
24



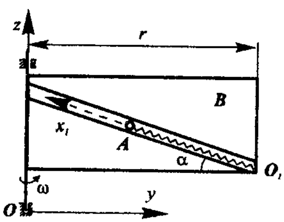
25



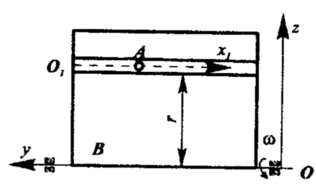
26



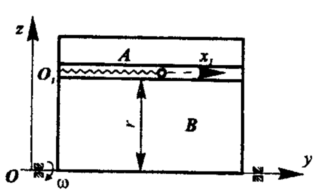
27



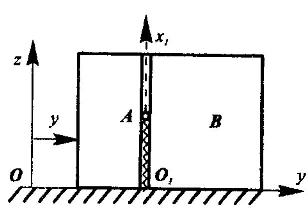
28



29



30



Рыс. 15

2. Дынаміка механічнай сістэмы

Заданне Д-5

Прымяненне тэарэмы аб руху цэнтра мас пры даследаванні руху механічнай сістэмы

Платформа 1 механічнай сістэмы (рыс. 16–18) абапіраецца на гладкую гарызантальную паверхню. Цела 2 мае самастойны прывад і рухаецца адносна цела 1 са стану спакою з вуглавой скорасцю $\omega = f(t)$. Качэнне каткоў па платформе ажыццяўляецца без праслізгвання. Вызначыць паскарэнне платформы і яе ціск на гарызантальную паверхню ў момант t_1. Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 5.

Табліца 5

Варыянт	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	r_2, см	R_2, см	r_3, см	R_3, см	r_4, см	R_4, см	α, град	t_1, с	$\omega = f(t)$, рад/с
1	10	8	4	2		16						1	t^3+2t
2	11	7	5	6		17			8	20		2	t^2+t
3	12	9	6	3	10	12					75	3	$0{,}3t^2$
4	13	4	5	6		10			10	14		1	$0{,}2t+t^2$
5	14	5	7	4		8	6	9			80	2	$0{,}4t^2$
6	15	6	3	4		9					65	3	$2t+t^2$
7	16	8	6	7		6			8	12	60	1	$0{,}2t^3$
8	17	3	5	6		7			11	14	70	2	$0{,}1e^t$
9	18	4	7	8		8	7	12	10	16	67	3	$0{,}5t^2$
10	19	7	6	9		6			10	12	70	2	t^2+2t
11	20	9	4	3	5	7					40	1	$t^3+0{,}1t$
12	10	7	5	4	6	9					35	2	$t^3+0{,}2t$
13	11	6	4	2	7	9					30	3	t^2+t
14	12	8	9	3	8	10	7	11			36	1	$t^2+0{,}1t$
15	13	5	4	6		6			6	8		2	$t^2-0{,}2t$
16	14	4	3	5		9			7	9		3	$t+0{,}1e^t$
17	15	10	3	4	9	12						1	$0{,}6t+t^2$
18	16	9	4	5	8	10						2	$0{,}7t+t^2$

Закнчэнне табл. 5

Вары-янт	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	r_2, см	R_2, см	r_3, см	R_3, см	r_4, см	R_4, см	α, град	t_1, с	$\omega = f(t)$, рад/с
19	18	8	5	6	4	6			8	10		3	$0{,}4t+t^2$
20	20	7	6	5	5	7					25	1	$0{,}6t+t^2$
21	10	6	4	7	6	10			10	14	28	2	$0{,}2e^t$
22	12	8	5	4	7	11					20	3	$0{,}1t^2+t$
23	14	9	8	7		8	8	10			22	1	$0{,}2t+t^2$
24	16	7	6	8		7	7	9	10	13	30	2	$0{,}1t+t^2$
25	18	6	5	4		10	6	9			24	3	$0{,}1t^2$
26	20	5	7	6		9	4	7			22	1	$0{,}3e^t$
27	11	7	6	5	5	10	6	10			25	2	$0{,}4t+ t^2$
28	13	9	10	4	8	10	5	8			35	3	$0{,}5t^2$
29	15	8	12	6	7	11	8	14			30	1	$0{,}7t^3$
30	17	7	9	8	6	10	7	12	8	11	32	2	$0{,}6t+t^2$

Прыклад рашэння задання Д-5

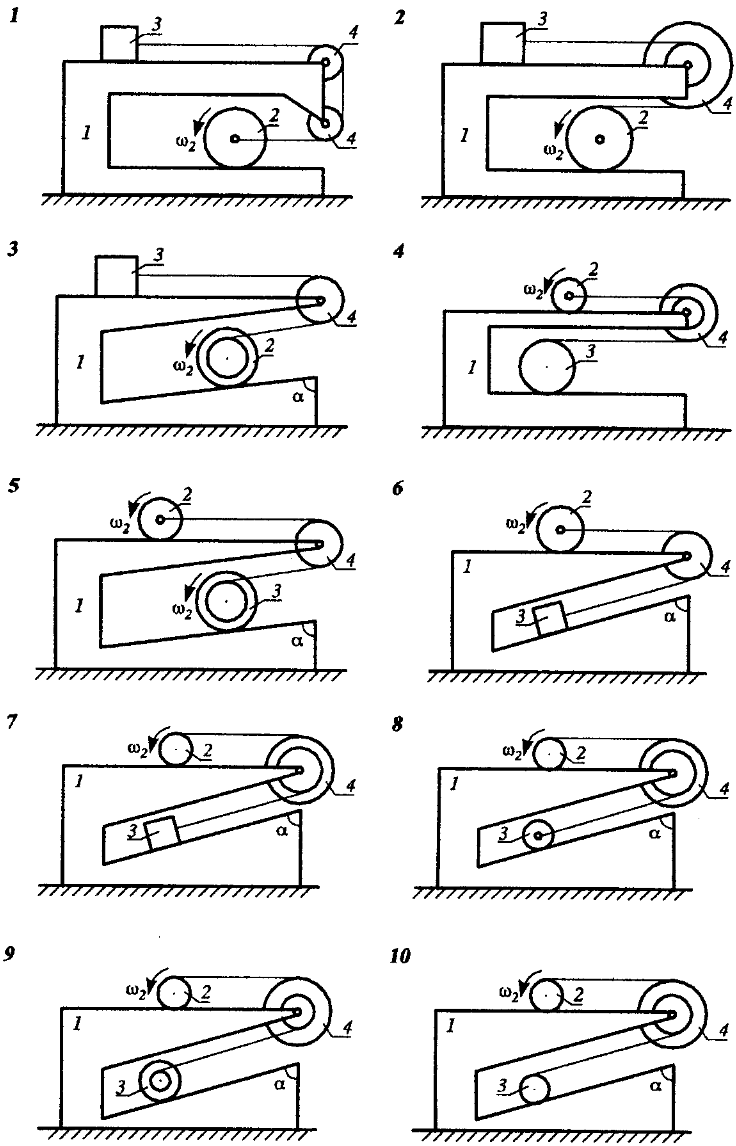
Трохвугольная прызма 1 абапіраецца на гладкую гарызантальную паверхню (рыс. 19). Аўтаномны прывад надае вярчальны рух блоку 2, вось якога замацавана на прызме. Ад блока праз нерасцяжныя тросы рух перадаецца грузу 3 і катку 4, які па прызме не праслізгвае. Вызначыць паскарэнне прызмы і яе ціск на гарызантальную паверхню ў момант t_1. Вядома, што m_1 = 10 кг, m_2 = 2 кг, m_3 = 4 кг, m_4 = 5 кг, r_2 = 0,1 м, R_2 = 0,2 м, α = 40°, $\omega_2 = 3t^2$ рад/с, t_1 = 1 с.

Рашэнне. З дапамогай тэарэмы аб руху цэнтра мас апішам рух механічнай сістэмы адносна нерухомых восей каардынат Oxy.

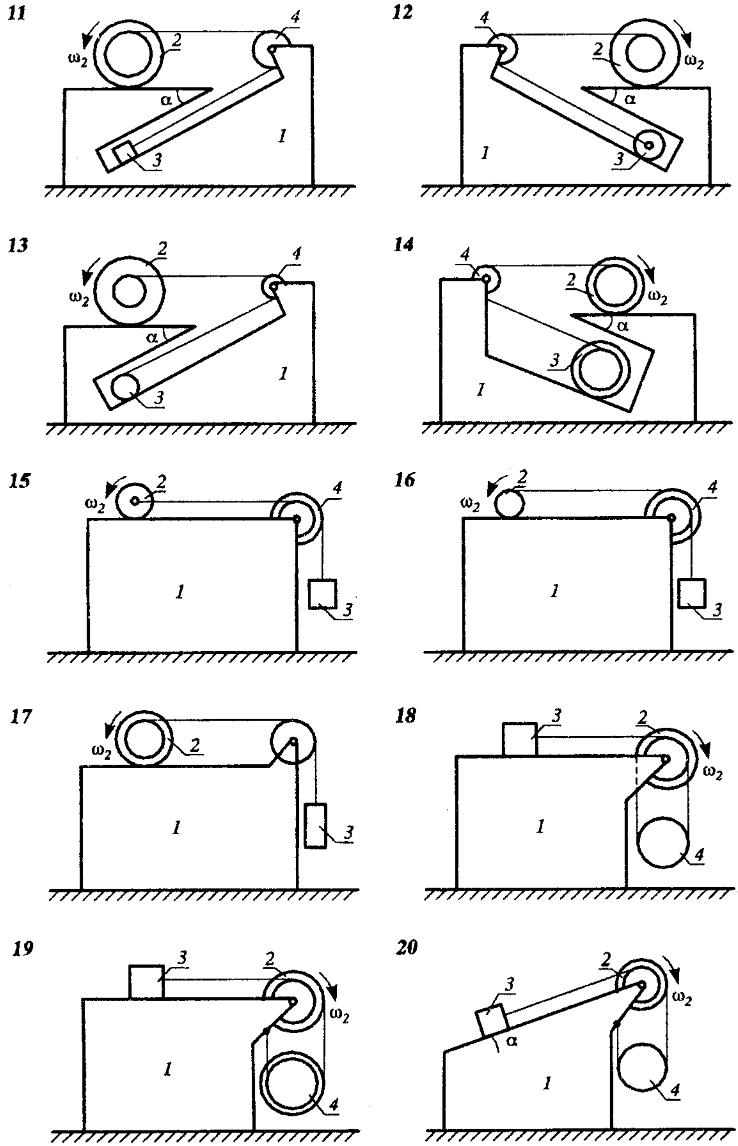
Паказваем на рыс. 19 усе знешнія сілы сістэмы. Дыферэнцыяльныя ўраўненні руху цэнтра мас маюць выгляд

$$\begin{cases} M\ddot{x}_C = 0, \\ M\ddot{y}_C = N - G_1 - G_2 - G_3 - G_4, \end{cases}$$

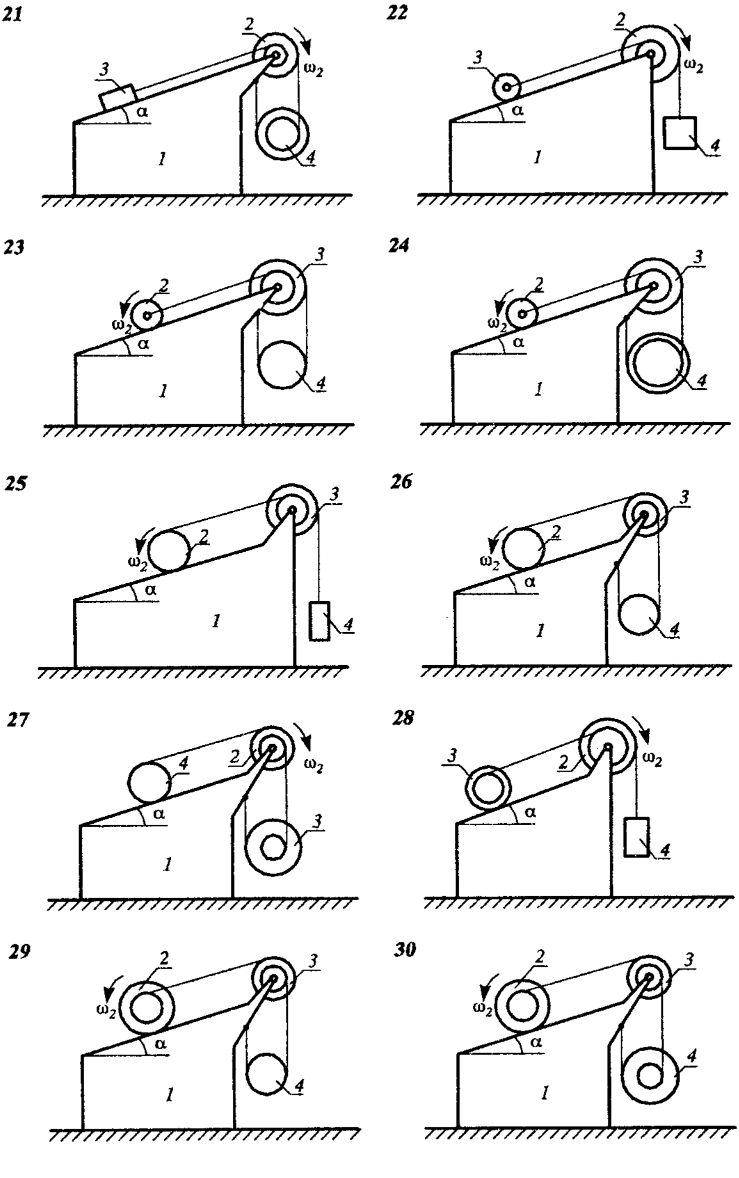
дзе $M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$.



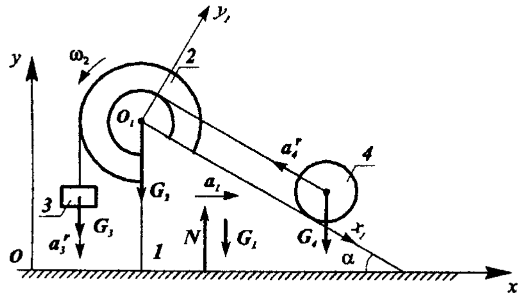
Рыс. 16



Рыс. 17



Рыс. 18



Рыс. 19

Праекцыі паскарэння цэнтра мас на восі каардынат вызначым наступным чынам:

$$\ddot{x}_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{4} m_k \ddot{x}_k}{M}, \qquad \ddot{y}_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{4} m_k \ddot{y}_k}{M},$$

дзе $\ddot{x}_k, \ddot{y}_k$ — праекцыі паскарэнняў цэнтраў мас целаў, якія ўтвараюць механічную сістэму, на восі каардынат.

Целы 2, 3 і 4 удзельнічаюць у складаным руху. Рухомую сістэму каардынат $O_1x_1y_1$ замацоўваем на прызме. Тады пераносны рух целаў 2, 3, 4 — паступальны прамалінейны рух разам з прызмаю 1 па гарызанталі. Прымем накірунак адноснага вярчальнага руху блока 2 супраць гадзіннікавай стрэлкі. Тады адносны рух грузу 3 будзе адбывацца па вертыкалі ўніз, а адносны рух цэнтра катка 4 — па прамой уверх уздоўж нахіленай паверхні прызмы.

Падлічым адносныя паскарэнні цэнтраў мас целаў 2, 3 і 4.

Вуглавое паскарэнне блока 2

$$\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = 6t .$$

У момант t_1 вуглавое паскарэнне $\varepsilon_2 = 6$ рад/с^2.

Тады

$$a_3^r = \varepsilon_2 \cdot R_2 = 6 \cdot 0{,}2 = 1{,}2 \text{ м/с} ,$$

$$a_4^r = \varepsilon_2 \cdot r_2 = 6 \cdot 0{,}1 = 0{,}6 \text{ м/с},$$

$$a_2^r = 0$$

(у восях $O_1x_1y_1$ цэнтр блока O_1 не рухаецца).

Пераноснае паскарэнне целаў 2, 3 і 4 роўнае паскарэнню a_1 прызмы. Падлічым праекцыі паскарэння цэнтра мас на нерухомыя восі Ox і Oy.

$$a_{cx} = \ddot{x}_c = \frac{m_1 \cdot a_1 + m_2 \cdot a_1 + m_3 \cdot a_1 + m_4(a_1 - a_4^r \cos\alpha)}{M} =$$

$$= \frac{M \cdot a_1 - m_4 \cdot a_4^r \cos\alpha}{M} = \frac{21a_1 - 5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}766}{21} = a_1 - 0{,}1.$$

$$a_{cy} = \ddot{y}_c = \frac{m_3(-a_3^r) + m_4 \cdot a_4^r \sin\alpha}{M} = \frac{-4 \cdot 1{,}2 + 5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}643}{21} =$$

$$= \frac{-4{,}8 + 1{,}93}{21} = -0{,}14 \text{ м/с}^2.$$

Падставім атрыманыя значэнні праекцый паскарэння цэнтра мас у дыферэнцыяльныя ўраўненні руху цэнтра мас разглядаемай механічнай сістэмы.

$$\begin{cases} M \cdot (a_1 - 0{,}1) = 0, \\ -M \cdot 0{,}14 = N - G_1 - G_2 - G_3 - G_4. \end{cases}$$

Адсюль атрымаем паскарэнне прызмы a_1 і рэакцыю апорнай паверхні N, якая лікава роўная ціску прызмы на апорную паверхню пры руху механічнай сістэмы ў момант t_1.

$$a_1 = 0{,}1 \text{ м/с}^2.$$

$$N = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 - 0{,}14M = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \cdot g - 0{,}14M =$$

$$= M \cdot 9{,}8 - 0{,}14 \cdot M = 9{,}66M = 9{,}66 \cdot 21 = 202{,}9 \text{ Н}.$$

Заданне Д-6

Прымяненне тэарэмы аб змяненні кінетычнага моманту для вывучэння руху механічнай сістэмы

Цела D, маса якога m_1, верціцца вакол вертыкальнай восі z з нязменнаю вуглавою скорасцю ω_0 (рыс. 20–24). У пункце A канала AB на паверхні цела знаходзіцца матэрыяльны пункт K, маса якога m_2 . У некаторы момант часу (t = 0) на механічную сістэму пачынае дзейнічаць пара сіл з момантам $M_z = f_1(t)$. Пры $t = \tau$ пара сіл перастае дзейнічаць, а пункт K у гэты момант пачынае адносны рух з пункта A ўздоўж канала AB (у накірунку да пункта B) па закону $AK = s = f_2(t)$, дзе $t \geq \tau$.

Вызначыць вуглавую скорасць цела D у моманты t_1 і t_2. Супраціўленне руху цела D не ўлічваць. Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 6. Дадатная велічыня M_z азначае, што накірунак дзеяння моманту супадае з накірункам вярчэння цела D, вуглавая скорасць якога ω_0 .

Табліца 6

Варыянт	m_1, кг	m_2, кг	ω_0, рад/с	a, м	b, м	c, м	$M_z = f_1(t)$, Нм	τ, с	t_1, с	t_2, с	$S = f_2(t-\tau)$, м
1	80	9	2,0	0,4	0,3	0,5	$10t$	2,0	1,0	3,0	$0{,}5(t-\tau)$
2	50	6	2,2	0,3	0,4	0,5	$8t^2$	2,4	1,2	3,2	$0{,}45(t-\tau)^2$
3	60	7	2,4	0,5	0,5	0,4	$-16t$	2,8	1,4	3,6	$0{,}42(t-\tau)^3$
4	70	9	2,6	0,6	0,4	0,5	$-10t^2$	3,2	2,8	4,0	$0{,}56(t-\tau)$
5	60	6	2,8	0,5	0,4	0,3	$12t$	3,6	3,0	4,5	$0{,}4(t-\tau)^2$
6	76	9	3,0	0,3	0,5	0,4	$18t$	4,0	2,0	5,0	$0{,}38(t-\tau)^3$
7	40	5	3,2	0,4	0,5	0,6	$-5t^2$	4,4	2,5	5,5	$0{,}53(t-\tau)$
8	58	7	3,4	0,5	0,6		$-8t$	4,8	3,0	5,8	$0{,}46(t-\tau)^2$
9	68	9	3,6	0,4	0,5		$2t^2$	5,0	4,0	6,0	$0{,}1\pi(t-\tau)$
10	70	8	3,8		0,5	0,6	$7t$	5,0	3,5	6,5	$0{,}12\pi(t-\tau)$
11	60	7	4,0		0,3	0,4	$-4t^2$	4,9	3,0	5,5	$0{,}14\pi(t-\tau)^2$
12	92	9	2,0		0,4	0,5	$-14t^2$	4,8	3,5	6,0	$0{,}16\pi(t-\tau)$
13	84	8	2,2		0,5	0,4	$15t$	4,7	4,0	5,6	$0{,}18\pi(t-\tau)^2$
14	70	7	2,4		0,6	0,5	$12t$	4,6	2,5	5,4	$0{,}2\pi(t-\tau)^3$
15	90	9	2,6		0,4	0,3	$-10t$	4,5	3,5	5,8	$0{,}1\pi(t-\tau)$
16	78	8	2,8	0,3	0,4		$-8t^2$	4,4	3,0	6,0	$0{,}05\pi(t-\tau)$
17	67	7	3,0	0,4	0,5		$16t$	4,3	3,2	5,5	$0{,}1\pi(t-\tau)^2$

Вары-янт	m_1, кг	m_2, кг	ω_0, рад/с	a, м	b, м	c, м	$M_z=f_1(t)$, Нм	τ, с	t_1, с	t_2, с	$S=f_2(t-\tau)$, м
18	86	9	2,1	0,6	0,5		$10t^2$	4,1	2,5	6,0	$0{,}12\pi(t-\tau)$
19	73	8	2,3	0,5	0,4	0,4	$-12t$	3,9	3,0	5,0	$0{,}06\pi(t-\tau)^2$
20	98	9	2,5		0,3	0,5	$-18t$	3,7	2,0	5,5	$0{,}08\pi(t-\tau)$
21	66	8	2,7		0,4	0,6	$5t^2$	3,5	2,5	5,0	$0{,}04\pi(t-\tau)^2$
22	40	6	2,9		0,5	0,3	$8t$	3,3	2,4	4,5	$0{,}1\pi(t-\tau)$
23	69	7	3,1		0,4		$-2t^2$	3,1	2,0	4,0	$0{,}2\pi(t-\tau)^3$
24	58	6	3,3		0,6		$-7t$	2,9	2,0	4,5	$0{,}9\pi(t-\tau)$
25	47	5	3,5		0,5		$4t^2$	2,7	2,0	4,0	$0{,}8\pi(t-\tau)$
26	86	9	3,7	0,5	0,4	0,4	$14t^2$	2,5	1,5	3,5	$0{,}5(t-\tau)^2$
27	98	9	2,2		0,4		$-15t$	2,3	1,2	3,0	$0{,}7(t-\tau)^3$
28	90	8	2,0	0,6	0,5		$-12t$	2,1	1,4	3,2	$0{,}6(t-\tau)$
29	42	6	3,9	0,4	0,3	0,5	$10t$	4,.0	3,0	5,0	$0{,}7(t-\tau)^2$
30	74	7	2,4	0,8	0,4	0,6	$8t^2$	3,0	2,0	4,0	$1{,}5(t-\tau)^3$

Прыклад рашэння задання Д-6

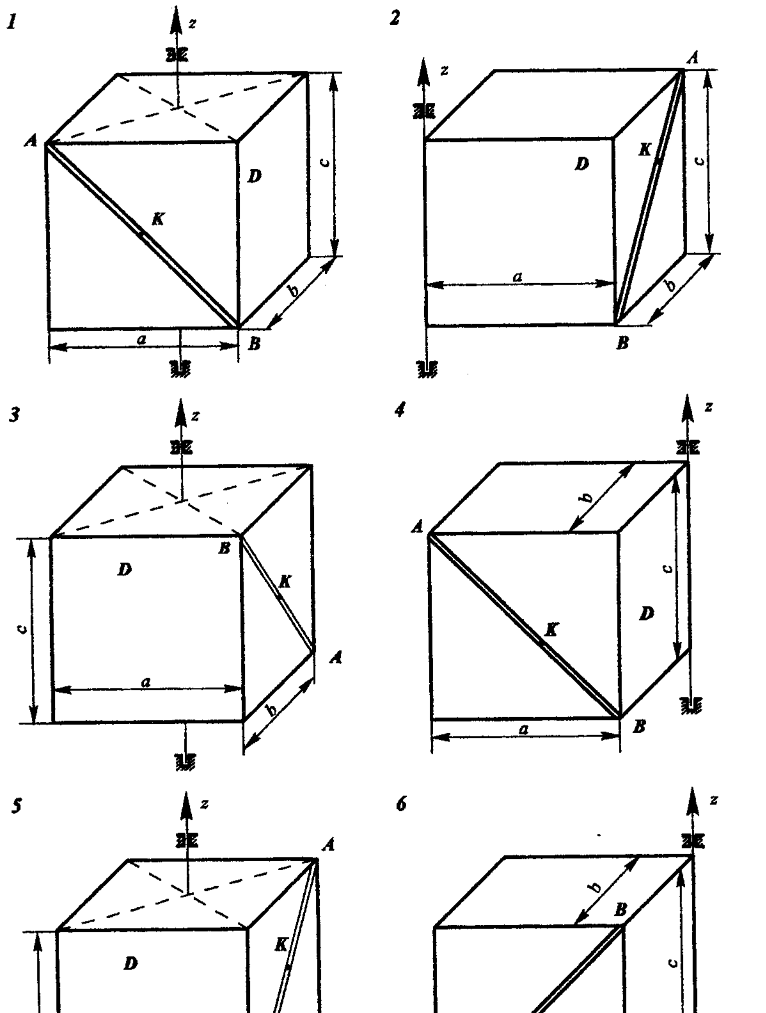
Прамая квадратная прызма, маса якой m_1 = 60 кг, замацавана на нерухомай восі z (рыс. 25) і верціцца вакол яе з вуглавой скорасцю ω_0 = 3 рад/с. У канале на бакавой паверхні прызмы у пункце A знаходзіцца матэрыяльны пункт K, маса якога m_2 = 8 кг. У некаторы момант часу (t = 0) на механічную сістэму пачынае дзейнічаць вярчальны момант $M_z = -20t$ (Нм). Пры $t = \tau$ = 2 с вярчальны момант перастае дзейнічаць, а пункт K пачынае рух па канале па закону $AK = s = 0{,}05\pi(t-\tau)$ м, ($t \geq \tau$).

Вызначыць вуглавую скорасць прызмы ў момант часу t_1 = 1 с і t_2 = 3 с, калі a = 0,4 м.

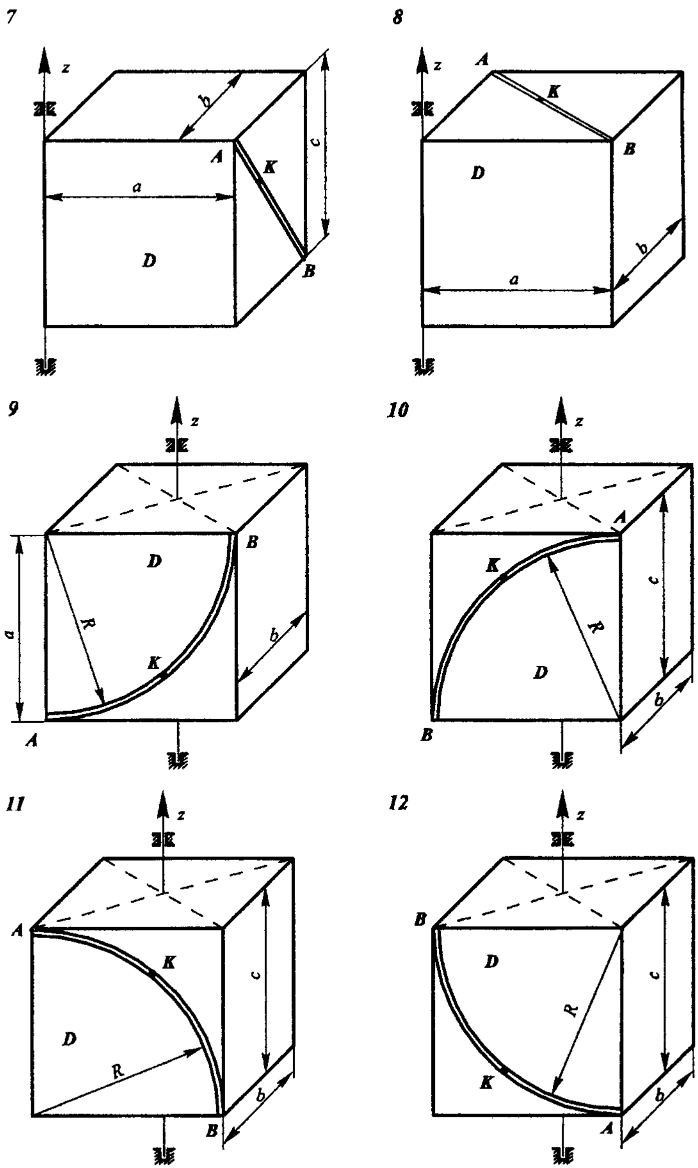
Р а ш э н н е. Для рашэння задачы прыменім тэарэму аб кінетычным моманце механічнай сістэмы адносна восі z:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^e.$$

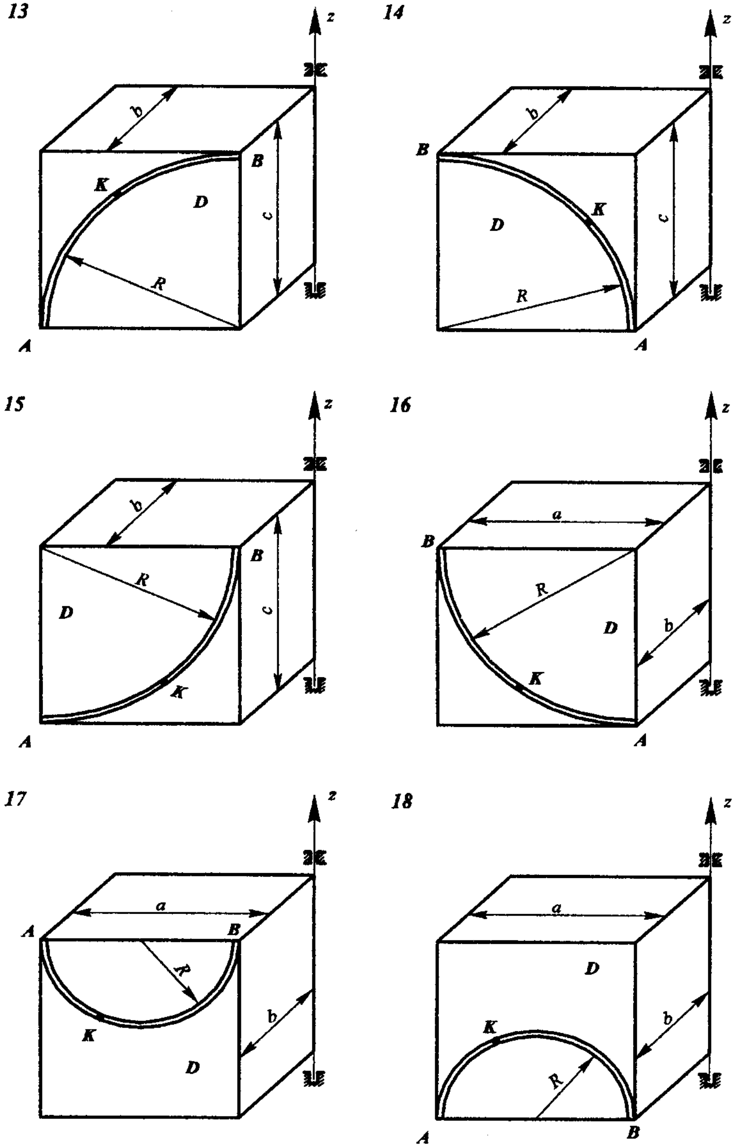
Разглядаем рух механічнай сістэмы ў прамежку часу $0 \leq t \leq \tau$. Прымаем пачатковы накірунак вярчэння пры назіранні з дадатнага накірунку восі z супраць гадзіннікавай стрэлкі.


1
z
A
D
K
c
b
a
B
2
z
A
D
K
c
a
b
B
3
z
D
B
K
c
A
a
b
4
z
A
b
c
D
K
a
B
5
z
A
D
K
c
a
b
B
6
z
b
B
c
K
D
A
a

Рыс. 20

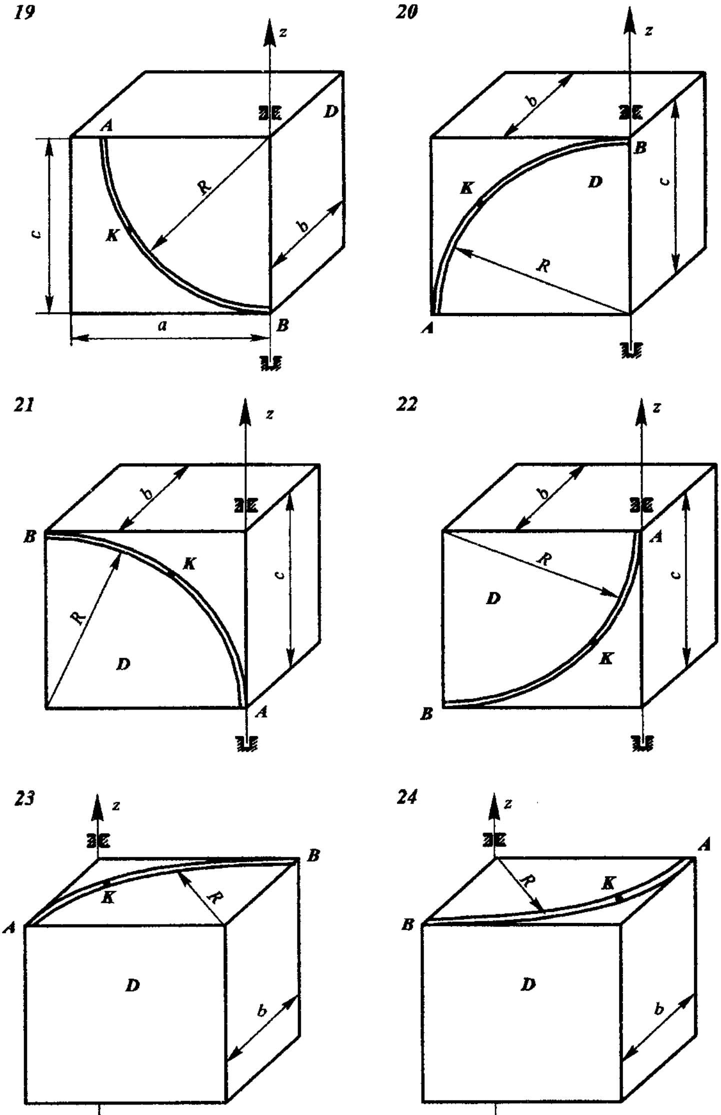

7
z
b
c
A
K
a
D
B
8
A
z
K
B
D
b
a
9
z
B
D
a
R
b
K
A
10
z
A
K
c
R
D
b
B
11
z
A
K
c
D
R
b
B
12
z
B
D
c
R
K
b
A

Рыс. 21

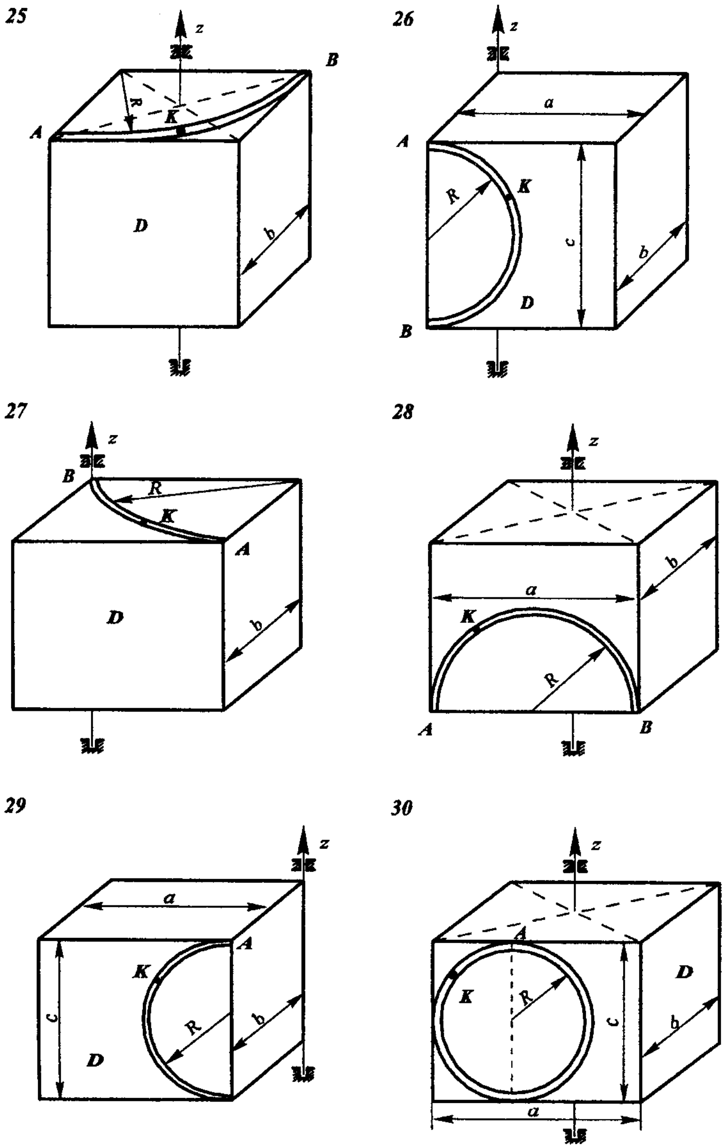


13
z
b
B
K
D
c
R
A
14
z
b
B
D
K
c
R
A
15
z
b
B
R
D
c
K
A
16
z
a
B
R
D
b
K
A
17
z
a
A
B
R
b
K
D
18
z
a
D
b
K
R
A
B

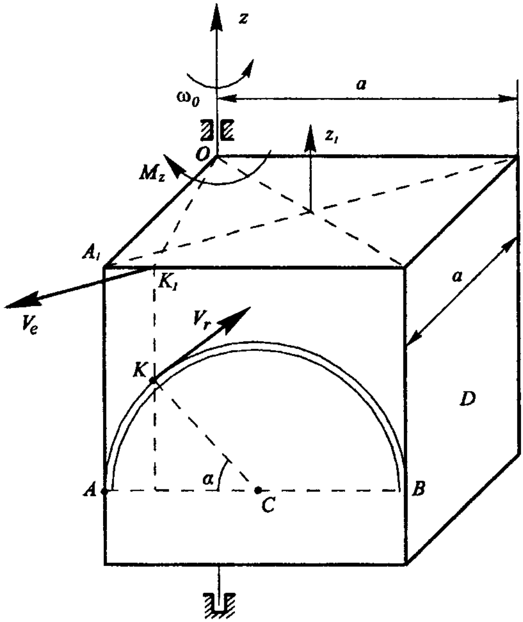
Рыс. 22


19
z
A
D
R
K
c
b
a
B
20
z
b
B
K
D
c
R
A
21
z
b
B
K
c
R
D
A
22
z
b
A
R
D
c
K
B
23
z
B
K
R
A
D
b
24
z
A
R
K
B
D
b

Рыс. 23



Рыс. 24



Рыс. 25

Кінетычны момант механічнай сістэмы адносна восі z у адвольны час

$$L_z = L_z^{(D)} + L_z^{(K)} = I_z \cdot \omega + (m_2 \omega \cdot a) \cdot a = I_z \cdot \omega + m_2 a^2 \omega .$$

Па тэарэме аб момантах інерцыі цела адносна паралельных восей атрымаем момант інерцыі цела D адносна восі z .

$$I_z = I_{z_1} + m_1 \left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \right) = m_1 \frac{a^2 + a^2}{12} + m_1 \frac{a^2}{2} = \frac{2}{3} m_1 a^2 .$$

$$I_z = \frac{2}{3} \cdot 60 \cdot 0{,}16 = 6{,}4 \text{ кг·м}^2. \quad m_2 a^2 = 8 \cdot 0{,}16 = 1{,}28 \text{ кг·м}^2.$$

Тады $L_z = (6{,}4 + 1{,}28) \cdot \omega = 7{,}68\omega$.

Дыференцыяльнае ўраўненне, якое апісвае рух механічнай сістэмы ў інтэрвале $0 \le t \le \tau$, мае наступны выгляд:

$$7{,}68\frac{d\omega}{dt} = -20t\,.$$

Пасля інтэгравання атрымаем выраз вуглавой скорасці цела D.

$$7{,}68\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = -20\int_0^t dt\,,$$

$$7{,}68(\omega - \omega_0) = -10t^2\,,$$

$$\omega = 3 - 1{,}3t^2\,.$$

У момант t_1

$$\omega_1 = 3 - 1{,}3 \cdot 1 = 1{,}7 \text{ рад/с},$$

у момант τ

$$\omega_\tau = 3 - 1{,}3 \cdot 2^2 = -2{,}2 \text{ рад/с}.$$

У момант τ цела D верціцца ўжо па гадзіннікавай стрэлцы, калі назіраць яго рух з дадатнага накірунку восі z. У гэты момант перастае дзейнічаць момант M_z, але пачынае рухацца па канале AB матэрыяльны пункт K.

Зноў карыстаемся тэарэмаю аб кінетычным моманце механічнай сістэмы адносна восі z:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^e\,.$$

На гэтым этапе руху $M_z^e = 0$. Таму $L_z = \text{const}$. Падлічым L_z у моманты τ і t_2.

У момант $\tau = 2$ с кінетычны момант

$$L_z = 7{,}68\omega_\tau = 7{,}68(-2{,}2) = -16{,}9 \text{ кг·м}^2\text{/с}.$$

У момант $t_2 = 3$ с кінетычны момант

$$L_z = L_z^{(D)} + L_z^{(K)}\,.$$

$$L_z^{(D)} = I_z\omega_2 = -6{,}4\omega_2 .$$

Згодна з законам руху пункта K па канале, у момант $t_2 = 3$ с дуга AK роўная:

$$s = 0{,}05\pi\,(3-2) = 0{,}05\pi \text{ (м)}.$$

Цэнтральны вугал α, які адпавядае дузе s:

$$\alpha = \frac{s}{r} = \frac{0{,}05\pi}{0{,}2} = 0{,}25\pi \text{ (рад), або } \alpha = 45°.$$

Вызначым адлегласць ад пункта K да восі z, адлегласць OK_1.

$$A_1K_1 = AC - KC \cdot \cos\alpha = 0{,}2 - 0{,}2 \cdot 0{,}707 = 0{,}06 \text{ м}.$$

У прамавугольным трохвугольніку OA_1K_1 гіпатэнуза OK_1 роўная:

$$OK_1 = \sqrt{0{,}4^2 + 0{,}06^2} = 0{,}4045 \text{ м}.$$

Пункт K удзельнічае ў складаным руху. Пераносны рух — вярчэнне разам з целам D па гадзіннікавай стрэлцы, адносны рух — крывалінейны рух па канале. Пераносная скорасць пункта K у момант t_2:

$$v_e = \omega_2 \cdot OK_1 = 0{,}4045 \cdot \omega_2 .$$

Адносная скорасць пункта K у момант t_2:

$$v_r = \dot{s} = 0{,}05\pi = 0{,}157 \text{ м/с}.$$

Кінетычны момант пункта K адносна восі z у момант t_2 з улікам накірункаў вектараў $\boldsymbol{v}_e$ і $\boldsymbol{v}_r$:

$$L_z^{(K)} = -m_2 v_e \cdot OK_1 + m_2 v_r \sin\alpha \cdot OA_1 =$$

$$= -8 \cdot 0{,}4045 \cdot \omega_2 \cdot 0{,}4045 + 8 \cdot 0{,}157 \cdot 0{,}707 \cdot 0{,}4 = -1{,}3\omega_2 + 0{,}36 .$$

Кінетычны момант механічнай сістэмы ў момант t_2:

$$L_z = L_z^{(D)} + L_z^{(K)} = -6{,}4\omega_2 - 1{,}3\omega_2 + 0{,}36 = -7{,}7\omega_2 + 0{,}36 .$$

Прыраўнуем L_z у момант τ і L_z у момант t_2, таму што $L_z = \text{const}$.

$$-16{,}9 = -7{,}7\omega_2+0{,}36.$$

$$\omega_2 = 2{,}24 \text{ рад/с}.$$

Атрыманае дадатнае значэнне ω_2 пацвярджае, што цела D у момант t_2 верціцца ў той жа бок, што і ў момант τ.

З а д а н н е Д - 7

Даследаванне вярчальнага руху цвёрдага цела

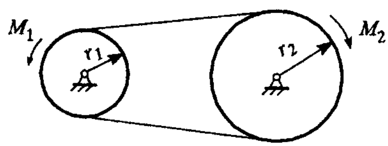
Атрымаць ураўненне руху для кожнага цела механічнай сістэмы (рыс. 27), якая рухаецца са стану спакою. Накірунак пачатку руху неабходна вызначыць самастойна. Шківы лічыць аднароднымі дыскамі. Прыняць суадносіны нацягу вядучай (T_1) і вядзёнай (T_2) частак паса $T_1 = 2T_2$. Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 7.

Прыклад рашэння задання Д-7

Шківы пасавай перадачы (рыс. 26) рухаюцца са стану спакою пад уздзеяннем прыкладзеных да іх момантаў: $M_1 = 10 + 2t$ (Нм), $M_2 = 3 + \omega_2$ (Нм).

Масы аднародных шківаў: $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 5$ кг, іх радыусы: $r_1 = 0{,}2$ м, $r_2 = 0{,}3$ м.

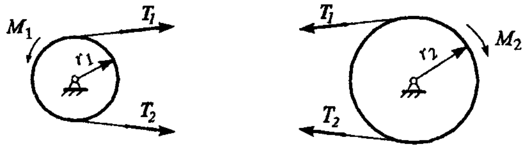
Атрымаць ураўненні руху шківаў.



Рыс. 26

Р а ш э н н е . У пачатку руху механічнай сістэмы са стану спакою $M_1 = 10$ Нм, $M_2 = 3$ Нм. Адпаведна на вядучую (верхнюю) частку паса з боку першага шківа ўлева дзейнічае сіла $F_1 = M_1 : r_1 \mp 50$ Н, а з боку другога шківа ўправа дзейнічае сіла $F_2 = M_2 : r_2 = 10$ Н . Таму вядучая частка паса пачне рухацца ўлева, а шківы пачнуць вярцецца супраць гадзіннікавай стрэлкі, у бок дзеяння моманту M_1.

Разглядаем рух кожнага шківа паасобку, падзяліўшы тым самым сістэму на дзве часткі.



Сілы T_1 і T_2 — сілы нацягу вядучай і вядзёнай частак паса. Прымаем, што $T_1 = 2T_2$.

Дыферэнцыяльныя ўраўненні вярчальных рухаў шківаў:

$$I_1\ddot{\varphi}_1 = M_1 + T_2 \cdot r_1 - T_1 \cdot r_1,$$

$$I_2\ddot{\varphi}_2 = T_1 \cdot r_2 - M_2 - T_2 \cdot r_2.$$

У дыферынцыяльных ураўненнях моманты сіл, якія садзейнічаюць вярчэнню шківаў, запісаны са знакам «плюс».

З улікам даных умовы задачы дыферэнцыяльныя ўраўненні прымуць выгляд

$$\frac{m_1 r_1^2}{2}\ddot{\varphi}_1 = 10 + 2t + T_2 \cdot r_1 - 2T_2 r_1,$$

$$\frac{m_2 r_2^2}{2}\ddot{\varphi}_2 = 2T_2 \cdot r_2 - 3 - \omega_2 - T_2 r_2.$$

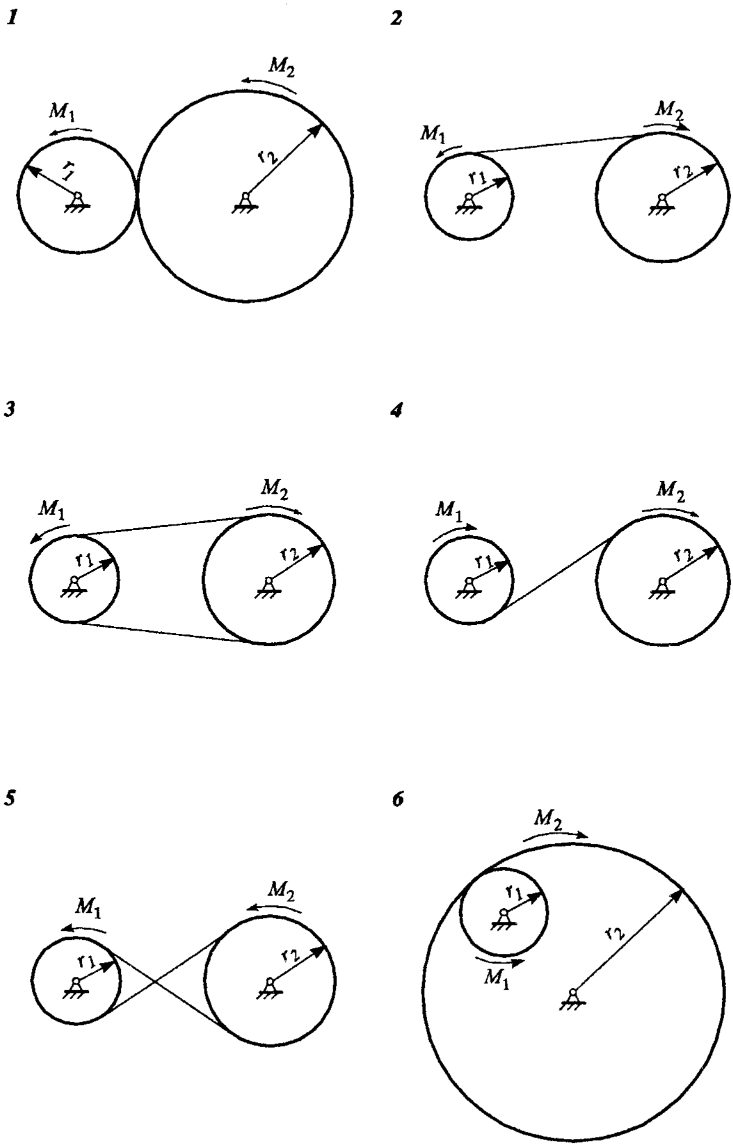
Пасля падстаноўкі лікавых значэнняў вядомых велічынь атрымаем сістэму дыферэнцыяльных ураўненняў:

$$\begin{cases} \dfrac{3 \cdot 0{,}04}{2}\ddot{\varphi}_1 = 10 + 2t - 0{,}2T_2, \\ \dfrac{5 \cdot 0{,}09}{2}\ddot{\varphi}_2 = T_2 \cdot 0{,}3 - 3 - \omega_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}06\ddot{\varphi}_1 = 10 + 2t - 0{,}2T_2, \\ 0{,}225\ddot{\varphi}_2 = 0{,}3T_2 - 3 - \omega_2. \end{cases}$$

Лічым, што ў разглядаемай пасавай перадачы праслізгванне паса па шківах адсутнічае. Тады выконваецца роўнасць

$$\frac{\ddot{\varphi}_1}{\ddot{\varphi}_2} = \frac{r_2}{r_1}, \text{ або } \ddot{\varphi}_1 = 1{,}5\ddot{\varphi}_2.$$


1
M_1
M_2
r_1
r_2
2
M_1
M_2
r_1
r_2
3
M_1
M_2
r_1
r_2
4
M_1
M_2
r_1
r_2
5
M_1
M_2
r_1
r_2
6
M_2
r_1
r_2
M_1

Рыс. 27

Табліца 7

Вары-янт	Рыс.	r_1, см	r_2, см	m_1, кг	m_2, кг	M_1, Нм	M_2, Нм
1	27.1	10	15	4	6	18	$5\omega_2$
2	27.2	8	14	3	5	$10+2t$	$4+\omega_2$
3	27.3	12	16	5	7	$8+t^2$	$1+\omega_2$
4	27.4	10	18	4	7	$16+5t$	$4\omega_2$
5	27.5	14	20	5	8	$20+t$	$8+\omega_2$
6	27.6	6	14	2	6	$18-\omega_1$	$2+t$
7	27.1	12	16	5	8	$4+2t$	$2+\omega_2$
8	27.2	9	15	4	6	$30-6t$	$3+2\omega_2$
9	27.3	13	17	5	7	$24+t^2$	$9+\omega_2$
10	27.4	14	22	6	9	$13-6\omega_1$	$1+\omega_2$
11	27.5	16	22	7	9	$14-t$	$2\omega_2$
12	27.6	8	20	3	8	$22+\omega_1$	$10+t$
13	27.1	14	18	6	10	$10+t^2$	$3\omega_2$
14	27.2	10	16	4	6	$16+t$	$2\omega_2$
15	27.3	14	18	5	7	$8-t$	$2+3\omega_2$
16	27.4	12	20	5	8	$5\omega_1+8$	$2+t$
17	27.5	18	24	7	9	$6\omega_1+10$	t^2+4
18	27.6	10	26	4	10	$4t^2+12$	$7\omega_2$
19	27.1	16	20	7	12	$12+5t$	$1+\omega_2$
20	27.2	11	17	4	7	$18-6t$	$4+\omega_2$
21	27.3	15	19	6	8	$10-t^2$	$2\omega_2$
22	27.4	16	24	6	10	$4+3\omega_1$	t^2
23	27.5	20	28	8	11	$11\omega_1+8$	$2+t^2$
24	27.6	12	30	5	12	$15t+12$	$8\omega_2+2$
25	27.1	18	24	8	14	$12+t^2$	$5\omega_2$
26	27.2	12	18	5	7	$26-2t$	$8+\omega_2$
27	27.3	16	20	6	8	$14-t^2$	$3+\omega_2$
28	27.4	18	26	7	11	$12+\omega_1$	$6+t$
29	27.5	22	30	9	12	$13t+9$	ω_2+1
30	27.6	14	36	6	14	$4t^2+15$	$8+\omega_2$

З улікам гэтага маем:

$$\begin{cases} 0{,}09\ddot{\varphi}_2 = 10 + 2t - 0{,}2T_2, \\ 0{,}225\ddot{\varphi}_2 = 0{,}3T_2 - 3 - \dot{\varphi}_2. \end{cases}$$

Памножым першае ўраўненне на 1,5 і складзём іх левыя і правыя часткі.

$$0{,}36\ddot{\varphi}_2 = 12 + 3t - \dot{\varphi}_2 .$$

Атрымалі лінейнае дыферэнцыяльнае ўраўненне з пастаяннымі каэфіцыентамі, неаднароднае:

$$\ddot{\varphi}_2 + 2{,}78\dot{\varphi}_2 = 8{,}33t + 33{,}33 .$$

Агульнае рашэнне гэтага ўраўнення

$$\varphi_2 = \overline{\varphi}_2 + \varphi_2^* ,$$

дзе $\overline{\varphi}_2$ — агульнае рашэнне аднароднага ўраўнення $\ddot{\varphi}_2 + 2{,}78\dot{\varphi}_2 = 0$;

φ_2^* — прыватнае рашэнне неаднароднага ўраўнення.

Рашаем ураўненне $\ddot{\varphi}_2 + 2{,}78\dot{\varphi}_2 = 0$.

Характарыстычнае ўраўненне $r^2 + 2{,}78r = 0$.

Карані характарыстычнага ўраўнення $r_1 = 0,\ r_2 = -2{,}78$.

Агульнае рашэнне аднароднага ўраўнення

$$\overline{\varphi}_2 = C_1 + C_2 e^{-2{,}78t} .$$

Прыватнае рашэнне неаднароднага ўраўнення з улікам выгляду правай часткі

$$\varphi_2^* = At^2 + Bt .$$

Падставім φ_2^* у неаднароднае дыферэнцыяльнае ўраўненне і атрымаем значэнні каэфіцыентаў A і B.

$$\dot{\varphi}_2^* = 2At + B , \quad \ddot{\varphi}_2^* = 2A .$$

$$2A + 5{,}56At + 2{,}78B = 8{,}33t + 33{,}33.$$

$$\begin{cases} 5{,}56A = 8{,}33, \\ 2A + 2{,}78B = 33{,}33. \end{cases}$$

$$A = 1{,}5, \quad B = 10{,}9.$$

Тады прыватнае рашэнне неаднароднага ўраўнення мае выгляд

$$\varphi_2^* = 1{,}5t^2 + 10{,}9t .$$

Агульнае рашэнне неаднароднага ўраўнення

$$\varphi_2 = C_1 + C_2 e^{-2{,}78t} + 1{,}5t^2 + 10{,}9t .$$

Канстанты інтэгравання C_1 і C_2 знаходзім па пачатковых умовах руху другога шківа: $t = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\dot{\varphi}_2 = 0$.

Запісваем выраз вуглавой скорасці другога шківа.

$$\dot{\varphi}_2 = -2{,}78C_2e^{-2{,}78t} + 3t + 10{,}9.$$

Падставім пачатковыя ўмовы руху ў роўнасці $\varphi_2 = f_1(t)$ і $\dot{\varphi}_2 = f_2(t)$ і атрымаем сістэму ўраўненняў для падліку C_1 і C_2.

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2, \\ 0 = -2{,}78C_2 + 10{,}9. \end{cases}$$

$$C_2 = 3{,}92, \qquad C_1 = -3{,}92.$$

Канчаткова запішам ураўненне вярчальнага руху другога шківа:

$$\varphi_2 = 1{,}5t^2 + 10{,}9t - 3{,}92 + 3{,}92e^{-2{,}78t}.$$

Ураўненне вярчальнага руху першага шківа з улікам, што $\varphi_1 = 1{,}5\varphi_2$, мае выгляд

$$\varphi_1 = 2{,}25t^2 + 16{,}35t - 5{,}88 + 5{,}88e^{-2{,}78t}.$$

Заданне Д-8

Прымяненне тэарэмы аб змяненні кінетычнай энергіі для вывучэння руху механічнай сістэмы

Механічная сістэма (рыс. 29–33) пачынае рухацца пад уздзеяннем сіл цяжару і прыкладзенага да яе моманту. Вызначыць скорасць грузу 1 пасля перамяшчэння яго на дадзеную адлегласць.

Блокі, паказаныя адным кругам, лічыць аднароднымі дыскамі, блокі, паказаныя двума канцэнтрычнымі кругамі, — састаўнымі блокамі. Прымаць качэнне блокаў без праслізгвання. R_2, r_2, R_3, r_3 — радыусы адпаведных блокаў і каткоў; i_{2x}, i_{3x} — радыусы інерцыі састаўных блокаў 2 і 3; f — каэфіцыент трэння слізгання грузу 1 па нахіленай паверхні; s_1 — адлегласць, на якую перамясціўся груз 1 за час руху сістэмы са стану спакою. Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 8.

Табліца 8

Вары-янт	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	r_2, см	R_2, см	r_3, см	R_3, см	i_{2x}, см	i_{3x}, см	α, град	f	M, Нм	s_1, см
1	3	2	1	1	10	15			12		30	0,1	10	80
2	4	3	2	1		30					35	0,2	$4\varphi_2$	60
3	1	2	3	4	12	18			15		70	0,3	$2\varphi_2$	70
4	2	3	4	1		12	10	15		13	35	0,4	12	50
5	5	3	2	2	14	22	10	14	18	12	45	0,1	$3\varphi_2$	90
6	6	2	3	1	10	16	15	18	14	16	40	0,2	6	50
7	4	3	4	2		15	12	14		13	35	0,1	8	60
8	6	8	3	1	12	18	10	15	16	14	50	0,3	$5\varphi_2$	70
9	8	7	4	2	14	20	10	16	18	15	30	0,1	$2\varphi_2$	80
10	3	4	2		15	18			16		60		$3\varphi_2$	90
11	2	5	3		12	16			15		55		4	40
12	9	8	6		10	14	12	16	12	15	45		$4\varphi_2$	50
13	2	4	5	6				15			50		$2\varphi_3$	60
14	6	3	4	2				12			40		1	70
15	5	6	7	3	14	20		18	18		30		$3\varphi_3$	80
16	4	2	6	5			14	16		15	35		2	90
17	3	4	5	2			15	20		18	45		$4\varphi_3$	40
18	2	3	4	4	10	14	12	15	13	14	40		$2\varphi_3$	50
19	7	5	3	2	12	16	10	15	15	13	30		$3\varphi_3$	60
20	2	3	6	5			13	18		16	35		3	70
21	3	4	5	6			14	20		18	40		$4\varphi_3$	80
22	2	3	4	6	10	16	12	14	15	13	40		$3\varphi_3$	40
23	4	5	6	3	12	18	14	20	16	17	45		$5\varphi_3$	50
24	1	2	3	5	13	20	10	18	17	14	50		$2\varphi_3$	60
25	2	3	4	6	10	15	12	16	13	15	45		2	70
26	3	4	5	7	12	18	14	20	16	18	35		3	80
27	4	5	6	8	14	20	13	17	18	15	40		4	90
28	1	2	4	5	10	14	12	16	12	14	45		$2\varphi_3$	40
29	2	3	4	6	12	16	13	18	15	16	50		$3\varphi_3$	50
30	3	4	9	3	14	17	14	20	16	18	30		$4\varphi_4$	60

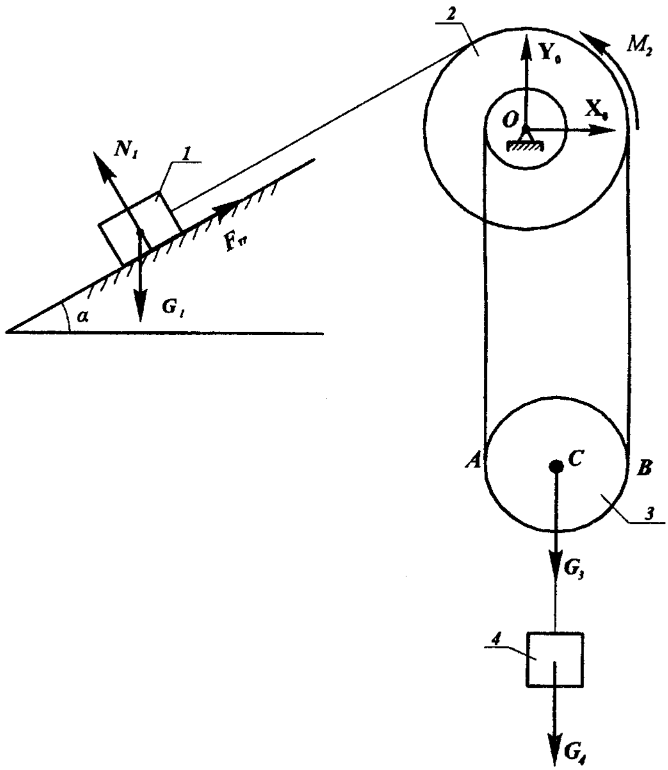
Прыклад рашэння задання Д-8

Механічная сістэма (рыс. 28) рухаецца са стану спакою пад уздзеяннем сіл цяжару і моманту $M = 3\varphi_2$. Вызначыць скорасць грузу 1 пасля яго перамяшчэння на s_1 = 0,6 м. Вядома, што m_1 = 4 кг, m_2 = 3 кг, m_3 = 2 кг, m_4 = 1 кг, r_2 = 0,2 м, R_2 = 0,3 м, i_{2x} = 0,26 м, f = 0,1, α = 30°.

Рашэнне. Прыменім для рашэння задачы тэарэму аб змяненні кінетычнай энергіі механічнай сістэмы:

$$T - T_0 = A^e + A^i .$$

У пачатковы момант сістэма не рухалася, таму T_0 = 0. Лічым, што трос у час руху не расцягваецца, а ўсе матэрыяльныя аб'екты — абсалютна цвёрдыя. Тады A^i = 0.



Рыс. 28

Такім чынам, кінетычная энергія сістэмы пасля перамяшчэння грузу 1 на s_1 роўная рабоце ўсіх знешніх сіл сістэмы:

$$T = A^e.$$

Падлічым кінетычную энергію механічнай сістэмы.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

Улічваем від руху кожнага цела. Груз 1 рухаецца паступальна.

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

Блок 2 удзельнічае ў вярчальным руху.

$$T_2 = \frac{I_0 \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 i_{2x}^2 v_1^2}{2R_2^2}.$$

Блок 3 удзельнічае ў плоскапаралельным руху.

$$T_3 = \frac{m_3 v_C^2}{2} + \frac{I_C \omega_3^2}{2}.$$

$$v_C = \frac{v_B - v_A}{2} = \frac{\omega_2 R_2 - \omega_2 r_2}{2} = \omega_2 \frac{R_2 - r_2}{2} = \frac{v_1}{R_2} \frac{(R_2 - r_2)}{2};$$

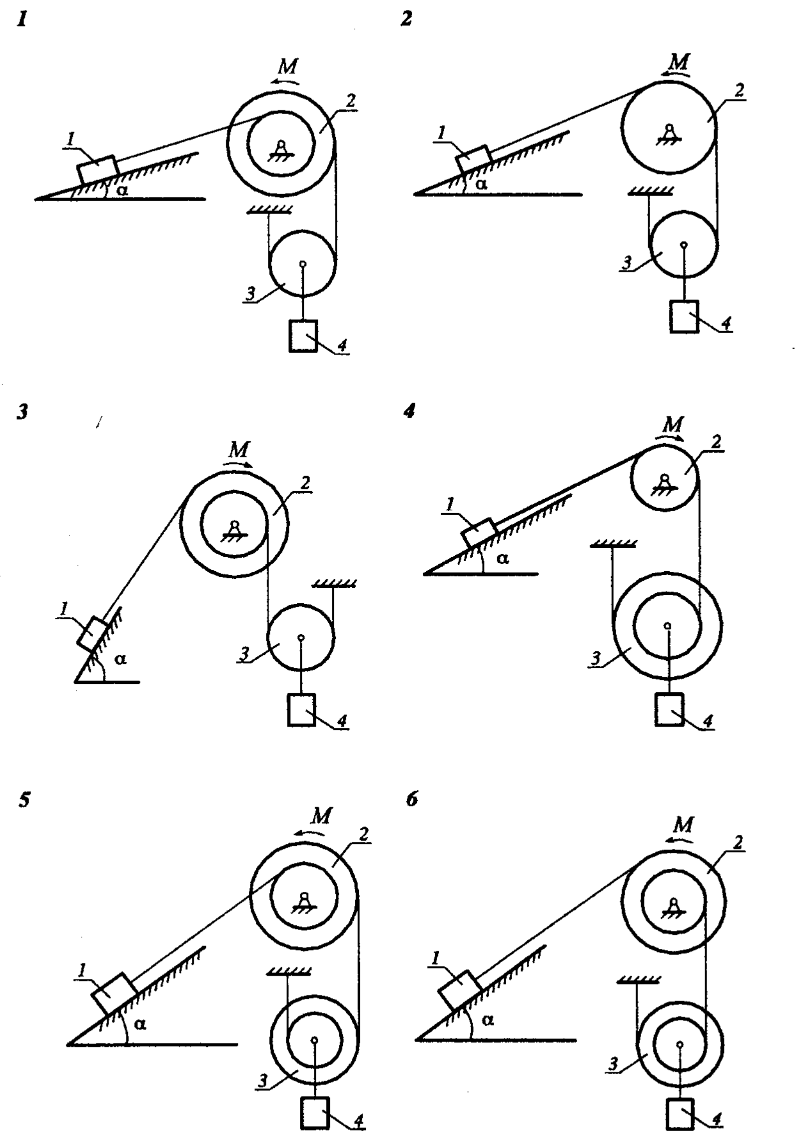
$$\omega_3 = \frac{v_B + v_A}{2R_3} = \frac{v_1}{R_2} \frac{(R_2 + r_2)}{2R_3}.$$

$$T_3 = \frac{m_3 v_1^2 (R_2 - r_2)^2}{8R_2^2} + \frac{m_3 R_3^2}{2} \frac{v_1^2}{R_2^2} \frac{(R_2 + r_2)^2}{8R_3^2} =$$

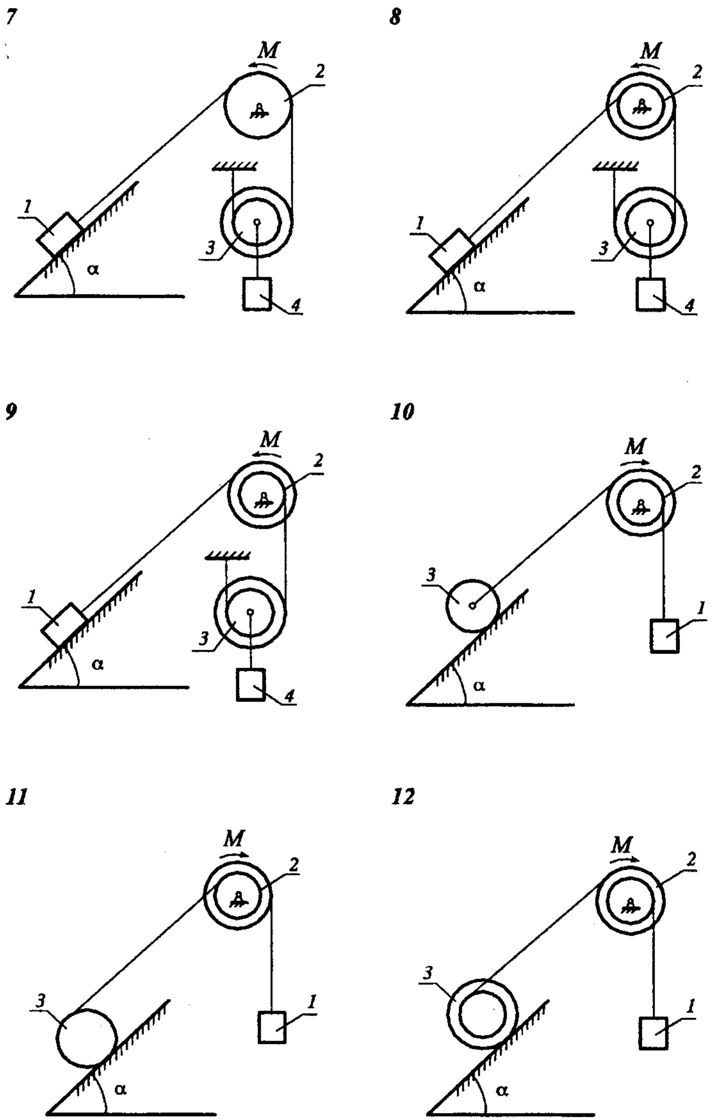
$$= \frac{m_3 v_1^2}{16R_2^2} \left[2(R_2 - r_2)^2 + (R_2 + r_2)^2 \right].$$

Груз 4 рухаецца паступальна.

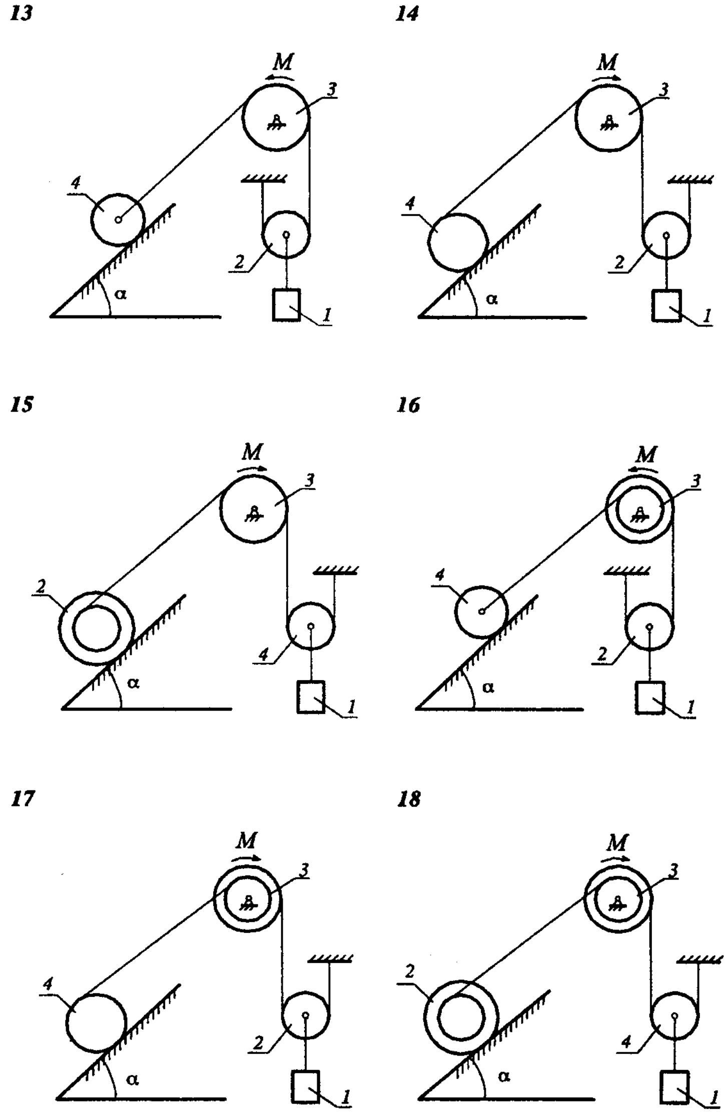
$$T_4 = \frac{m_4 v_4^2}{2} = \frac{m_4 v_C^2}{2} = \frac{m_4 v_1^2 (R_2 - r_2)^2}{8R_2^2}.$$



Рыс. 29

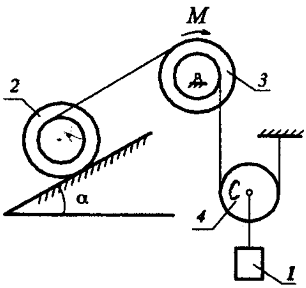


Рыс. 30

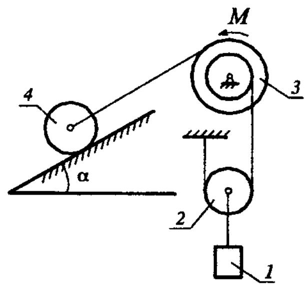


Рыс. 31

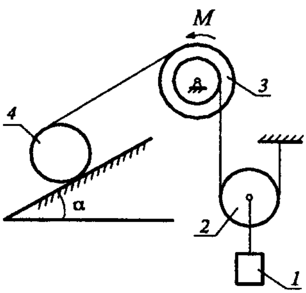
19



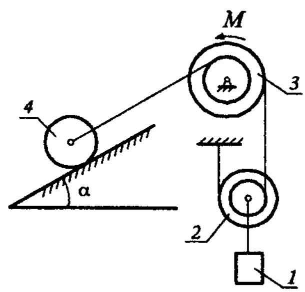
20



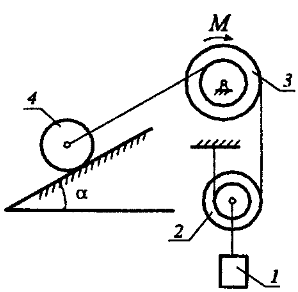
21



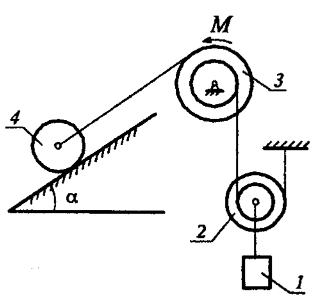
22



23

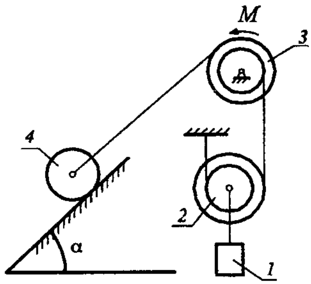


24

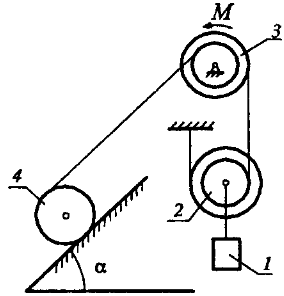


Рыс. 32

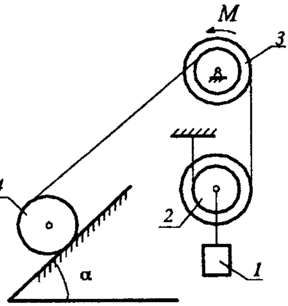
25



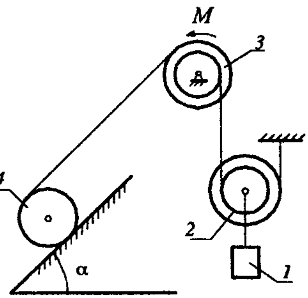
26



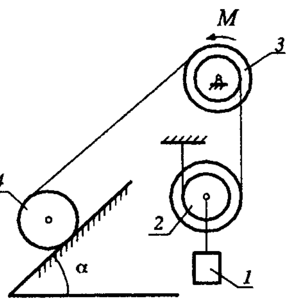
27



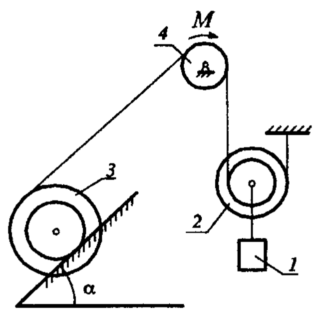
28



29



30



$R_4 = r_2$

Рис. 33

Тады кінетычная энергія механічнай сістэмы

$$T=\frac{4v_1^2}{2}+\frac{3\cdot 0,26^2\cdot v_1^2}{2\cdot 0,3^2}+\frac{2v_1^2}{16\cdot 0,3^2}\left[2(0,3-0,2)^2+(0,3+0,2)^2\right]+$$

$$+\frac{v_1^2(0,3-0,2)^2}{8\cdot 0,3^2}=2v_1^2+1,13v_1^2+0,37v_1^2+0,01v_1^2=3,51v_1^2.$$

З усіх знешніх сіл, якія паказаны на схеме механізма, пры перамяшчэнні грузу 1 на велічыню s_1 уніз па нахіленай паверхні выконваюць работу толькі $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$, $\boldsymbol{G}_3$, $\boldsymbol{G}_4$ і момант M_2.

$$A_{G_1}=m_1 g\sin\alpha\cdot s_1=4\cdot 9,8\cdot 0,5\cdot 0,6=11,76\text{ Дж.}$$

$$A_{F_{\text{тр}}}=-F_{\text{тр}}\cdot s_1=-m_1 g\cos\alpha\cdot f\cdot s_1=-4\cdot 9,8\cdot 0,866\cdot 0,1\cdot 0,6=-2,04\text{ Дж.}$$

$$A_{G_3}+A_{G_4}=-(G_3+G_4)\cdot s_C=-g(m_3+m_4)\cdot\frac{s_B-s_A}{2}=$$

$$=-g(m_3+m_4)\cdot\frac{\varphi_2(R_2-r_2)}{2}=-g(m_3+m_4)\frac{s_1}{R_2}\frac{(R_2-r_2)}{2}=$$

$$=-9,8\cdot 3\frac{0,6}{0,3}\cdot\frac{0,1}{2}=-2,94\text{ Дж.}$$

$$A_{M_2}=\int_0^{\varphi_2}M_2 d\varphi_2=\int_0^{\varphi_2}3\varphi_2 d\varphi_2=\frac{3}{2}\varphi_2^2=1,5\frac{s_1^2}{R_2^2}=1,5\frac{0,6^2}{0,3^2}=6\text{ Дж.}$$

$$A^e=11,76-2,04-2,94+6=12,78\text{ Дж.}$$

$$T=A^e.\quad 3,51v_1^2=12,78.\quad v_1=1,9\text{ м/с.}$$

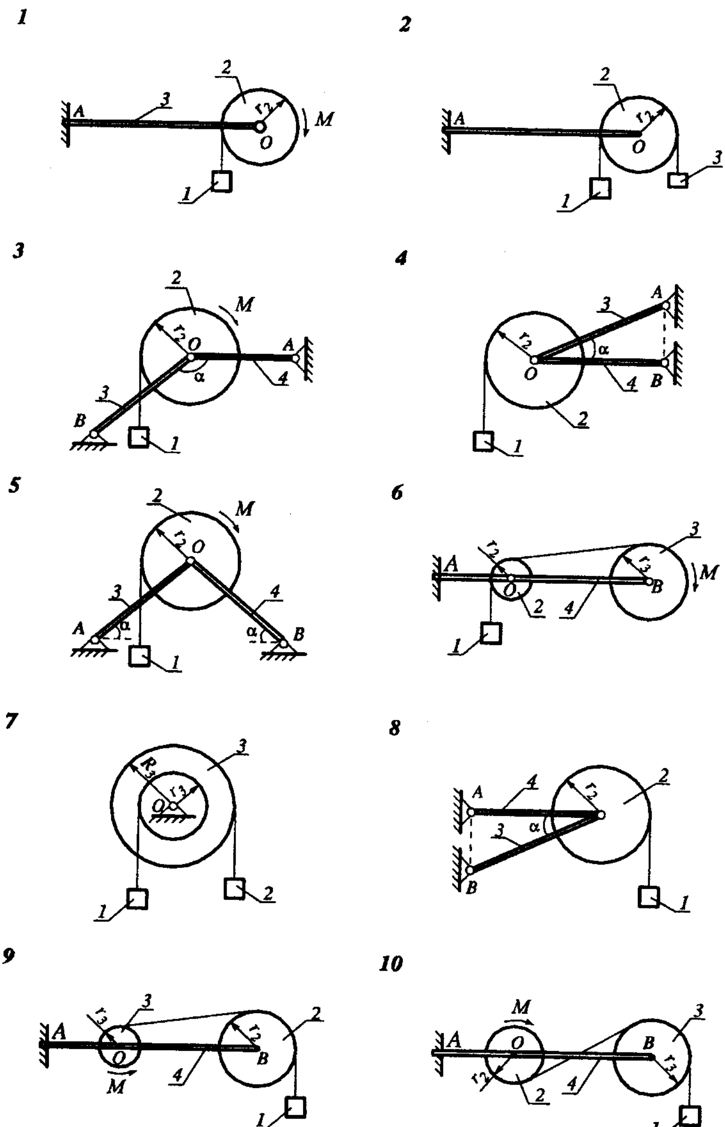
Заданне Д-9

Прымяненне прынцыпу Даламбера пры вызначэнні рэакцый сувязей

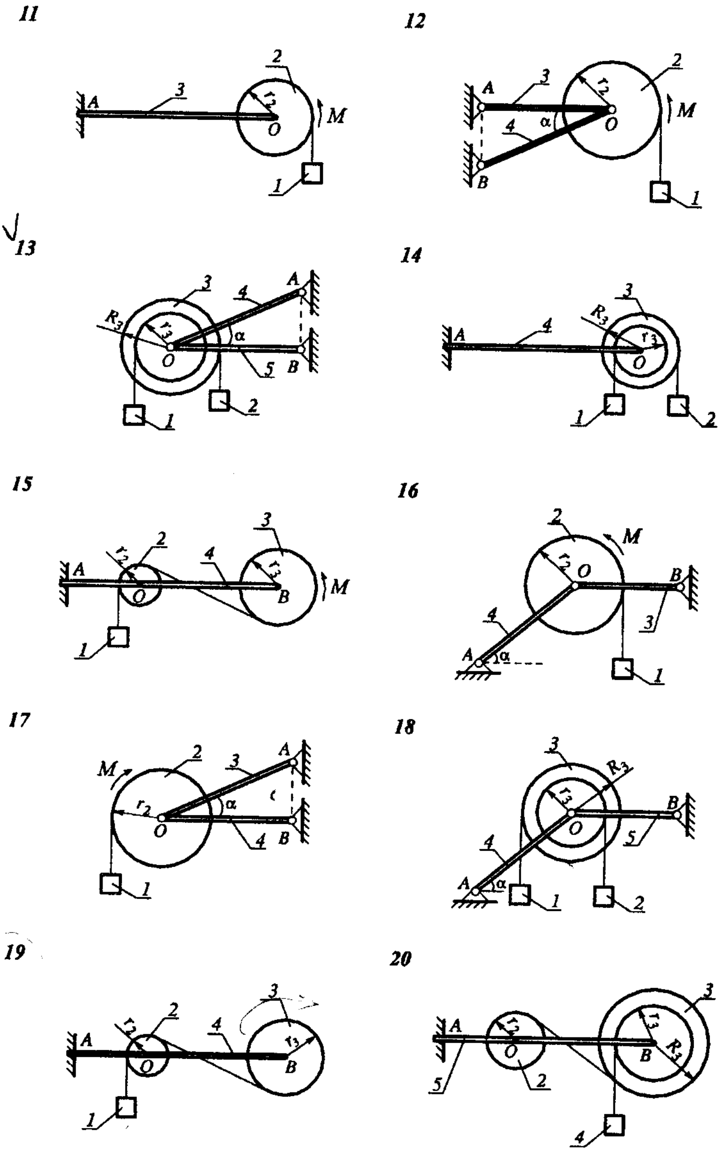
Вызначыць рэакцыі сувязей, накладзеных на механічную сістэму, пры яе руху у адвольны момант часу (рыс. 34–36). Ва ўсіх варыянтах часткі механічнай сістэмы рухаюцца ў вертыкальных плоскасцях. У кожным выпадку вугал α адлічваецца ад гарызонту, або гарызантальнага стрыжня. Цэнтры цяжару стрыжняў, якія ўключаны ў механічную сістэму, знаходзяцца пасярэдзіне стрыжняў. Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 9, i_{3x} — радыус інерцыі блока 3 адносна восі вярчэння.

Табліца 9

Варыянт	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	AO, м	OB, м	r_2, м	R_2, м	r_3, м	R_3, м	α, град	M, Нм	i_{3x}, м
1	1	3	5			1,2		0,3					6	
2	2	4	3	5		1,0								
3	3	5	4	2		0,6	0,8	0,3				120	15	
4	1	4	2	3		0,9						30		
5	2	5	3	4		0,8	0,8	0,2				40	7	
6	3	4	5	6		0,5	0,9	0,2		0,3			12	
7	4	6	3							0,3	0,4			0,35
8	1	2	5	4			1,0	0,2				30		
9	2	3	1	5		0,4	1,2	0,4		0,2			8	
10	3	6	5	8		0,6	1,5	0,4		0,3			16	
11	4	5	6			1,0		0,2					10	
12	1	3	2	4			0,9	0,3				40	5	
13	2	4	6	8	7	0,8				0,2	0,3	35		0,24
14	3	2	5	6		1,2				0,4	0,5			0,45
15	4	2	3	5		0,5	0,7	0,2		0,3			14	
16	1	3	5	7		0,7	0,6	0,3				45	5	
17	3	4	6	8			0,8	0,2				25	9	
18	2	1	4	5	3	1,0	0,7			0,2	0,3	40		0,25
19	4	3	5	6		0,6	0,9	0,2		0,4				
20	2	3	6	4	5	0,5	1,4	0,1		0,2	0,3			0,27
21	1	5	3	4	6	0,7	0,8			0,3	0,4	30		0,36
22	3	2	4	5	6	0,4	1,0	0,2		0,3	0,4			0,35
23	4	5	6	5	7	0,5	1,5	0,3		0,5				
24	2	4	5	6		0,6	1,0	0,2		0,3				
25	1	2	3	4		0,5	1,4	0,2		0,3				
26	2	4	5	4	6	0,7	1,3	0,2		0,3	0,4			0,36
27	3	4	3	2	5	0,6	1,5	0,3		0,2				
28	2	3	5	4	6	0,4	1,0	0,1		0,2	0,3			0,26
29	1	2	3	4		0,6	0,9	0,3		0,4				
30	3	2	4	5		0,5	0,9	0,2			0,3		12	

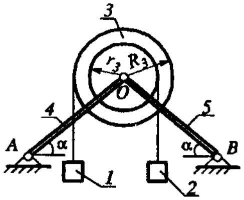


Рыс. 34

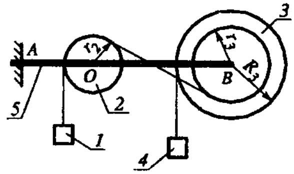


Рыс. 35

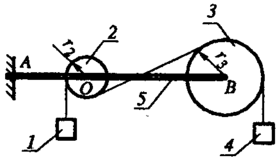
21



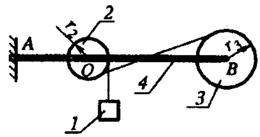
22



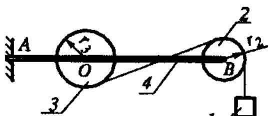
23



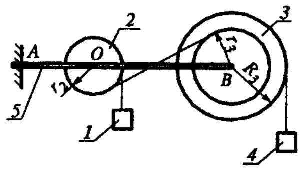
24



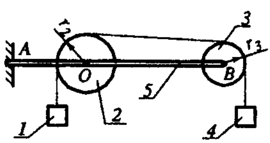
25



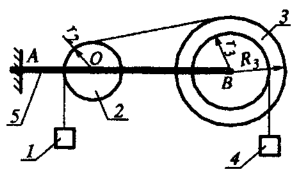
26



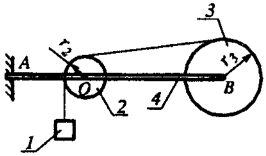
27



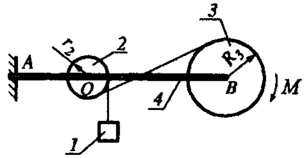
28



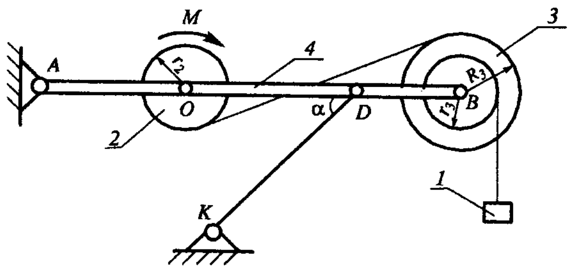
29



30



Рыс. 36

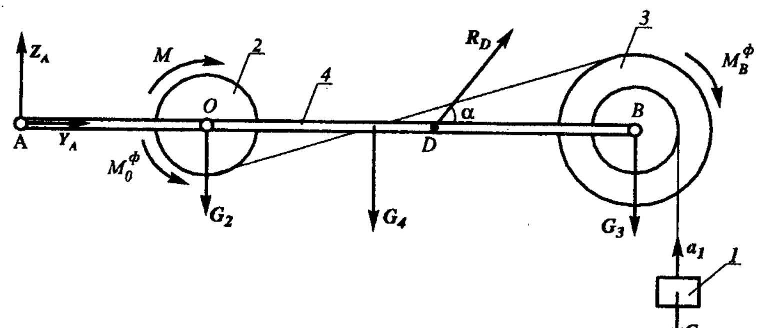


Рыс. 37

Прыклад рашэння задання Д-9

У дадзенай (рыс. 37) механічнай сістэме ў адвольны момант часу вызначыць рэакцыі сувязей. Бэльку AB лічыць аднародным стрыжнем, блок 2 — аднародным дыскам. Вядома, што $AB = 2$ м, $AO = 0{,}6$ м, $OД = 0{,}7$ м, $\alpha = 45°$, $r_2 = 0{,}2$ м, $r_3 = 0{,}2$ м, $R_3 = 0{,}3$ м, $i_{3x} = 0{,}24$ м, $M = 10$ Нм, $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 4$ кг, $m_3 = 5$ кг, $m_4 = 8$ кг.

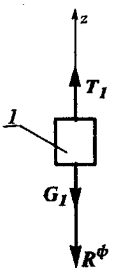
Р а ш э н н е . Для вызначэння рэакцый сувязей будзем карыстацца прынцыпам Даламбера. Лічым, што пад уздзеяннем моманту M, прыкладзенага да блока 2, груз 1 рухаецца паскорана ўверх, блок 3 верціцца паскорана супраць гадзіннікавай стрэлкі, а блок 2 верціцца паскорана па гадзіннікавай стрэлцы.



Рыс. 38

Паказваем вядомыя сілы цяжару G_1, G_2, G_3, G_4, прыкладзеныя ў адпаведных цэнтрах цяжару (рыс. 38), рэакцыі знешніх сувязей (нерухомага цыліндрычнага шарніра A і бязважкага стрыжня KD) Z_A, Y_A, R_D і сілы інерцыі.

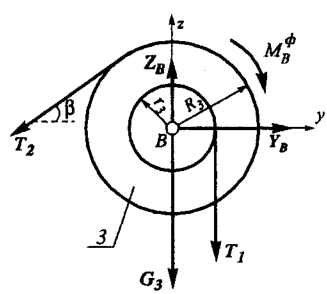
Груз 1 рухаецца пастýпальна па прамой, таму ўсе сілы інерцыі грузу замяняем галоўным вектарам сіл інерцыі R^{Φ}, накіраваным у адваротны бок паскарэнню грузу 1. Блок 3 верціцца вакол восі, якая з'яўляецца галоўнай цэнтральнай воссю інерцыі, таму ўсе сілы інерцыі замяняем толькі галоўным момантам $M_{\text{В}}^{\Phi}$ сіл інерцыі адносна восі вярчэння. У блоку 2 таксама ўсе сілы інерцыі замяняем галоўным момантам $M_{\text{О}}^{\Phi}$ сіл інерцыі адносна восі вярчэння. Галоўныя моманты паказваем накіраванымі ў авдваротны бок накірунку паскоранага вярчэння блокаў. Атрымалі плоскую адвольную сістэму сіл, якая ўмоўна знаходзіцца ў раўнавазе. У трох ураўненнях раўнавагі, якія можам запісаць для такой сістэмы, будзе 4 невядомыя (тры рэакцыі сувязей і паскарэнне грузу, праз якое падлічваюцца сілы інерцыі). Такую сістэму ўраўненняў рашыць не зможам. Таму разглядаем умоўную раўнавагу кожнага цела, якое ўваходзіць у механічную сістэму, паасобку.



Акрамя сіл G_1 і R^{Φ}, на груз дзейнічае рэакцыя троса T_1.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \qquad T_1 - G_1 - R^{\Phi} = 0\,. \tag{1}$$

На блок 3, акрамя G_3 і M_B^{Φ}, дзейнічаюць рэакцыі тросаў T_1, T_2 і дзве складовыя (Z_B, Y_B) рэакцыі нерухомага цыліндрычнага шарніра B. У раўнавазе знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл.



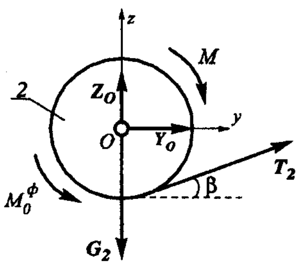
$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \qquad Y_B - T_2 \cos\beta = 0\,, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \qquad Z_B - T_2 \sin\beta - G_3 - T_1 = 0\,, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_B(\boldsymbol{F}_k) = 0 \qquad T_2 \cdot R_3 - T_1 \cdot r_3 - M_B^{\Phi} = 0\,. \tag{4}$$

На блок 2, акрамя вядомага моманту M, сілы цяжару G_2 і галоўнага моманту M_0^{Φ}, дзейнічаюць складовыя ($\boldsymbol{Z}_o$, $\boldsymbol{Y}_o$) рэакцыі нерухомага цыліндрычнага шпрніра O і рэакцыя троса $\boldsymbol{T}_2$.

У раўнавазе знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл.

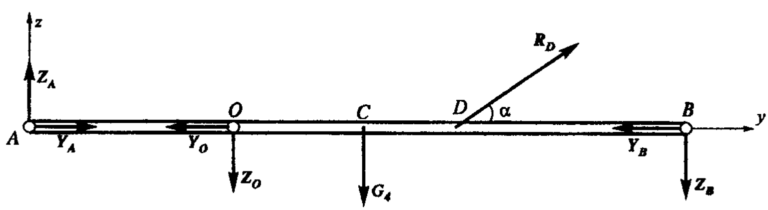


$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \;\; Y_0 + T_2 \cos\beta = 0\,, \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \quad Z_0 + T_2 \sin\beta - G_2 = 0\,, \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_0(\boldsymbol{F}_k) = 0 \quad M_0^{\Phi} - M + T_2 \cdot r_2 = 0\,. \tag{7}$$

Бэлька AB (рыс. 39) знаходзіцца ў раўнавазе пад уздзеяннем сілы $\boldsymbol{G}_4$, рэакцыі стрыжня $\boldsymbol{R}_D$ і рэакцый нерухомых цыліндрычных шарніраў A, O і B — $\boldsymbol{Z}_A$, $\boldsymbol{Y}_A$, $\boldsymbol{Z}_0$, $\boldsymbol{Y}_0$, $\boldsymbol{Z}_B$, $\boldsymbol{Y}_B$.



Рыс. 39

У раўнавазе знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \qquad \mathrm{Y_A} - Y_0 + R_D \cos\alpha - Y_B = 0\,, \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \qquad Z_A - Z_0 - G_4 + R_D \sin\alpha - Z_B = 0\,, \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\boldsymbol{F}_k) = 0 \quad -Z_0 \cdot AO - G_4 \cdot AC + R_D \sin\alpha \cdot AД - Z_B \cdot AB = 0\,. \tag{10}$$

$$G_1 = m_1 g = 2\cdot 9{,}8 = 19{,}6\ \text{Н}, \qquad G_2 = m_2 g = 4\cdot 9{,}8 = 39{,}2\ \text{Н},$$

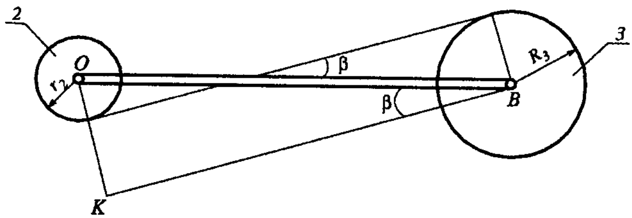
$$G_3 = m_3 g = 5\cdot 9{,}8 = 49\ \text{Н}, \qquad G_4 = m_4 g = 8\cdot 9{,}8 = 78{,}4\ \text{Н}.$$

$$R^{\Phi} = m_1 a_1 = 2a_1,$$

$$M_B^{\Phi} = I_B \cdot \varepsilon_3 = m_3 \cdot i_{3x}^2 \cdot \frac{a_1}{r_3} = 5 \cdot 0{,}24^2 \cdot \frac{a_1}{0{,}2} = 1{,}44a_1\,,$$

$$M_0^{\Phi} = I_0 \cdot \varepsilon_2 = m_2 \frac{r_2^2}{2} \cdot \frac{a_1 \cdot R_3}{r_3 \cdot r_2} = 4\frac{0{,}2^2}{2} \cdot \frac{a_1 \cdot 0{,}3}{0{,}2 \cdot 0{,}2} = 0{,}6a_1\,.$$

Яшчэ неабходна падлічыць $\sin\beta$ і $\cos\beta$.



Радыусы шківаў перпендыкулярныя да агульнай датычнай. З прамавугольнага трохвугольніка *OKB* маем:

$$\sin\beta = \frac{OK}{OB} = \frac{r_2 + R_3}{OB} = \frac{0{,}5}{1{,}4} = 0{,}357, \qquad \cos\beta = 0{,}934.$$

Падстаўляем вядомыя і падлічаныя велічыні ў сістэму ўраўненняў.

$$T_1 - 19{,}6 - 2a_1 = 0\,, \tag{1}$$

$$Y_B - T_2 \cdot 0{,}934 = 0\,, \tag{2}$$

$$Z_B - T_2 \cdot 0{,}357 - 49 - T_1 = 0\,, \tag{3}$$

$$T_2 \cdot 0{,}3 - T_1 \cdot 0{,}2 - 1{,}44a_1 = 0\,, \tag{4}$$

$$Y_0 + T_2 \cdot 0{,}934 = 0\,, \tag{5}$$

$$Z_0 + T_2 \cdot 0{,}357 - 39{,}2 = 0\,, \tag{6}$$

$$0{,}6a_1 - 10 + T_2 \cdot 0{,}2 = 0\,, \tag{7}$$

$$Y_A - Y_0 + R_D \cdot 0{,}707 - Y_B = 0\,, \tag{8}$$

$$Z_A - Z_0 - 78{,}4 + R_D \cdot 0{,}707 - Z_B = 0\,, \tag{9}$$

$$-Z_0 \cdot 0{,}6 - 78{,}4 \cdot 1 + R_D \cdot 0{,}707 \cdot 1{,}3 - Z_B \cdot 2 = 0\,. \tag{10}$$

Рэшым сумесна ўраўненні (1), (4), (7).

$$\begin{cases} T_1 - 19{,}6 - 2a_1 = 0\,, & (1) \\ T_2 \cdot 0{,}3 - T_1 \cdot 0{,}2 - 1{,}44a_1 = 0\,, & (4) \\ 0{,}6a_1 - 10 + T_2 \cdot 0{,}2 = 0\,. & (7) \end{cases}$$

З ураўнення (1) $T_1 = 19{,}6 + 2a_1$.

З ураўнення (7) $T_2 = 50 - 3a_1$.

Падстаўляем выразы T_1 і T_2 ва ўраўненне (4).

$$15 - 0{,}9a_1 - 3{,}92 - 0{,}4a_1 - 1{,}44a_1 = 0\,.$$

$$2{,}74a_1 = 11{,}08. \qquad a_1 = 4{,}04 \text{ м/с}^2.$$

Тады $T_1 = 27{,}68$ Н, $T_2 = 37{,}88$ Н

З ураўнення (2) $Y_B = 35{,}38$ Н.

З ураўнення (3) $Z_B = 13{,}52 + 49 + 27{,}68 = 90{,}2$ Н.

З ураўнення (5) $Y_0 = -35{,}38$ Н.

З ураўнення (6) $Z_0 = 39{,}2 - 13{,}52 = 25{,}68$ Н.

З ураўнення (10) $-15{,}41 - 78{,}4 + 0{,}92R_D - 180{,}4 = 0$,

$$R_D = 298{,}05 \text{ Н}.$$

З ураўнення (8) $Y_A = -35{,}38 - 210{,}72 + 35{,}38 = -210{,}72$ Н.

З ураўнення (9) $Z_A = 25,68 + 78,4 - 210,72 + 90,2 = -16,44$ Н.

Атрыманыя адмоўныя значэнні гавораць аб тым, што на самай справе гэтыя рэакцыі накіраваны ў адваротныя бакі.

Заданне Д-10

Вызначэнне рэакцый апор пры вярчэнні цвёрдага цела вакол нерухомай восі

Аднароднае цела верціцца вакол нерухомай вертыкальнай восі Az (рыс. 41–45) пад уздзеяннем пастаяннага моманту M_z. Вызначыць рэакцыі падпятніка A і падшыпніка B праз τ секунд ад пачатку руху. Прыняць, што ў гэты момант цэнтр мас C цела знаходзіцца ў плоскасці Ayz, з якой супадае і плоскасць матэрыяльнай сіметрыі цела Cy_1z_1. Месцазнаходжанне цэнтра мас вызначана каардынатамі y_C і z_C. Вярчэнне цела пачалося са стану спакою. Стрыжні, якімі цела прымацавана да восі вярчэння, лічыць бязважкімі.

Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 10.

Табліца 10

Варыянт	m, кг	y_C, см	z_C, см	AB, см	a, см	b, см	H, см	R, см	r, см	γ, град	M_z, Нм	τ, с
1	50	35	45	100	20	70				20	10	1,8
2	55	40	50	110				25		15	15	2,0
3	60	0	60	110		80				35	20	2,2
4	65	50	55	100				40		30	25	2,4
5	70		60	120	30	90				25	30	2,6
6	75	45	50	105				35		65	35	2,8
7	80	–60	75	120			80	18		60	40	1,5
8	85	55	60	110			70	30		35	45	1,7
9	90	–50	65	100			70	20		70	50	1,9
10	60	60	40	90			60	15		30	10	2,1
11	65	–35	45	80			50	14		15	15	2,3
12	70	40	65	100			65	22		25	20	2,5
13	75	45	50	95			60	15		35	25	2,7
14	80	0	45	105			70	12		25	30	2,9
15	85	50	38	80			55	16		60	35	3,0

Заканчэнне табл. 10

Вары-янт	m, кг	y_C, см	z_C, см	AB, см	a, см	b, см	H, см	R, см	r, см	γ, град	M_z, Нм	τ, с
16	90		50	90			50	20			40	3,2
17	95	–15	45	100			60	14		50	45	3,4
18	70	40	35	95			50	15		55	50	2,0
19	75	–5	40	85	14	16	70			40	25	2,4
20	80	45	30	80	30	28	40			15	30	2,8
21	85	35	40	90	26	20	40			20	40	3,2
22	90	36	30	75	28	24	60			22	45	3,5
23	95	40	35	80			45	20	10	20	50	1,5
24	80		45	95			60	30	20		45	1,6
25	85		60	100			50	26	20	30	40	1,7
26	90		50	110			60	20		40	35	1,8
27	95		55	90			45	24	10		30	1,9
28	80		30	80	60	40	30	15			25	2,0
29	45		60	100			55	18	8		20	2,5
30	50		40	105			60	20		25	15	3,0

Прыклад рашэння задання Д-10

Аднародны конус (рыс. 40) з дапамогай бязважкіх стрыжняў жорстка прымацаваны да восі Az і верціцца вакол яе са стану спакою пад уздзеяннем пастаяннага моманту M_z. Плоскасць матэрыяльнай сіметрыі конуса Cy_1z_1 праз τ секунд з пачатку руху супадае з плоскасцю Ayz.

Вызначыць рэакцыі падпятніка A і падшыпніка B у момант $\tau = 4$ с, калі вядома, што $AB = 2$ м, $R = 0{,}5$ м, Н = 1 м, $y_C = 0{,}8$ м, $z_C = 1{,}0$ м, $\gamma = 20°$, $m = 40$ кг, $M_z = 20$ Нм.

Рашэнне. На рыс. 40 паказваем вядомую сілу цяжару $\boldsymbol{G}$, дадзены момант M_z і складовыя рэакцый падпятніка і падшыпніка $\boldsymbol{X}_A$, $\boldsymbol{Y}_A$, $\boldsymbol{Z}_A$, $\boldsymbol{X}_B$, $\boldsymbol{Y}_B$.

Выкарыстоўваем вядомую сістэму ўраўненняў [4, § 58]:

$$X_A + X_B + \omega^2 m x_C + \varepsilon m y_C = 0\,; \qquad (1)$$

$$Y_A + Y_B + \omega^2 m y_C - \varepsilon m x_C = 0\,; \qquad (2)$$

$$z_A - G = 0; \qquad (3)$$

$$-G \cdot y_C - Y_B \cdot AB - \omega^2 \cdot I_{yz} + \varepsilon \cdot I_{xz} = 0; \qquad (4)$$

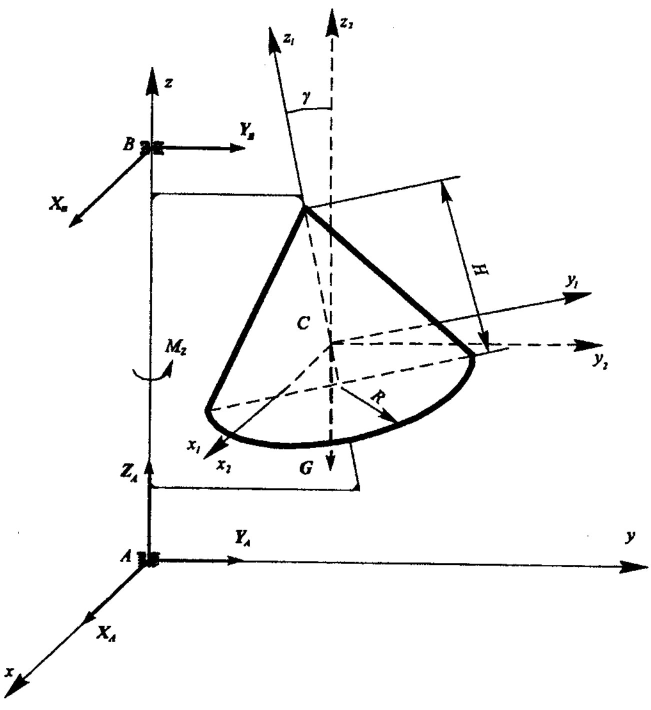
$$X_B \cdot AB + \omega^2 \cdot I_{xz} + \varepsilon \cdot I_{yz} = 0; \qquad (5)$$

$$M_z - \varepsilon \cdot I_z = 0. \qquad (6)$$

З ураўнення (3) маем:

$$Z_A = G = mg = 40 \cdot 9{,}81 = 392{,}4 \text{ Н}.$$

Каб вызначыць вуглавое паскарэнне з ураўнення (6), неабходна зрабіць папярэдні падлік восевага моманту інерцыі I_z.



Рыс. 40

Момант інерцыі конуса адносна восі вярчэння

$$I_z = I_{z_2} + md^2, \qquad (7)$$

дзе I_{z_2} — момант інерцыі конуса адносна цэнтральнай восі Cz_2, якая паралельная восі Az;

d — адлегласць паміж восямі z_2 і z, $d = y_C$.

Момант інерцыі I_{z_2} можна падлічыць па формуле

$$I_{z_2} = I_{x_1}\cos^2\alpha + I_{y_1}\cos^2\beta + I_{z_1}\cos^2\gamma, \qquad (8)$$

дзе x_1, y_1, z_1 — галоўныя цэнтральныя восі інерцыі конуса;

α, β, γ — вуглы паміж восямі x_1, y_1, z_1 і восю z_2.

$$\alpha = 90°,\ \beta = 70°,\ \gamma = 20°.$$

Момант інерцыі конуса адносна восі Cy_1 вызначаецца па формуле (табл. 11):

$$I_{y_1} = 0{,}15m(R^2 + 0{,}25H^2). \qquad (9)$$

$$I_{y_1} = 0{,}15 \cdot 40 \cdot (0{,}25 + 0{,}25 \cdot 1) = 3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Момант інерцыі конуса адносна восі Cz_1 (табл. 11)

$$I_{z_1} = 0{,}3mR^2 = 0{,}3 \cdot 40 \cdot 0{,}5^2 = 3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Цяпер па формуле (8) з улікам таго, што $\cos 90° = 0$,

$$I_{z_2} = 3 \cdot 0{,}342^2 + 3 \cdot 0{,}94^2 = 0{,}35 + 2{,}65 = 3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Момант інерцыі конуса адносна восі вярчэння атрымаем па формуле (7).

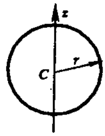
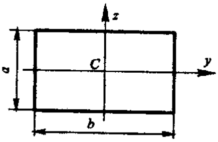
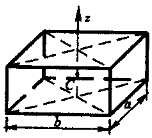
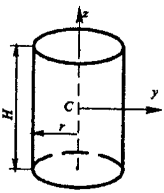
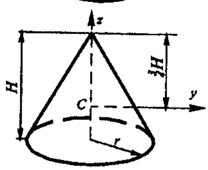
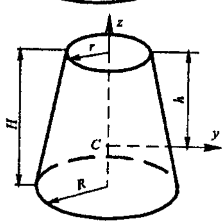
$$I_z = 3 + 40 \cdot 0{,}8^2 = 3 + 25{,}6 = 28{,}6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Вуглавое паскарэнне вызначаем з ураўнення (6).

$$\varepsilon = \frac{M_z}{I_z} = \frac{20}{28{,}6} = 0{,}7 \text{ с}^{-2}.$$

Табліца 11

Моманты інерцыі аднародных целаў

Форма цела	Выгляд цела	Момант інерцыі
Круглы дыск вельмі малой таўшчыні		$I_z = \frac{mr^2}{4}$
Тонкая прамавугольная пласціна		$I_y = \frac{ma^2}{12}$ $I_z = \frac{mb^2}{12}$
Прамавугольны паралелепіпед		$I_z = m\frac{a^2+b^2}{12}$
Кругавы цыліндр		$I_z = \frac{mr^2}{2}$ $I_y = \frac{m}{12}(H^2+3r^2)$
Кругавы конус		$I_z = 0{,}3mr^2$ $I_y = 0{,}15m(r^2+0{,}25H^2)$
Усечаны кругавы конус		$h = \frac{H}{4}\left[2+\frac{(R-r)(R^2-r^2)}{R^3-r^3}\right]$ $I_z = 0{,}3m\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$ $I_y = \frac{\pi}{3}mH^2\frac{(R-r)^2}{(R^3-r^3)^2}\times$ $\times[(R+r)^4+4R^2r^2]+$ $+\frac{3}{20}m\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$

Вуглавая скорасць конуса праз τ секунд з пачатку роўнапаскоранага вярчальнага руху са стану спакою ($\omega_0 = 0$)

$$\omega = \varepsilon\tau = 0{,}7 \cdot 4 = 2{,}8 \text{ с}^{-1}.$$

Для падліку гарызантальных складовых рэакцый падшыпніка і падпятніка неабходна вызначыць цэнтрабежныя моманты інерцыі I_{yz} і I_{xz} конуса. З улікам таго, што вось Ax перпендыкулярная да плоскасці матэрыяльнай сіметрыі конуса, яна з'яўляецца галоўнай восю інерцыі конуса ў пункце A. Па гэтай прычыне $I_{xz} = 0$.

Цэнтрабежны момант інерцыі конуса I_{yz} вызначаецца па формуле [3]

$$I_{yz} = I_{y_2 z_2} + m y_C z_C,$$

дзе $I_{y_2 z_2} = (I_{y_1} - I_{z_1})\dfrac{\sin 2\gamma}{2}$.

У дадзеным выпадку атрымалі $I_{y_1} = I_{z_1}$, таму $I_{y_2 z_2} = 0$.

Тады $I_{yz} = 40 \cdot 0{,}8 \cdot 1 = 32 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Цяпер падстаўляем падлічаныя велічыні ва ўраўненні (1), (2), (4), (5) і атрымліваем неабходныя складовыя рэакцый. Дадаткова ведаем, што $x_C = 0$.

$$X_A + X_B + 0{,}7 \cdot 40 \cdot 0{,}8 = 0.$$

$$Y_A + Y_B + 2{,}8^2 \cdot 40 \cdot 0{,}8 = 0.$$

$$-392{,}4 \cdot 0{,}8 - Y_B \cdot 2 - 2{,}8^2 \cdot 32 = 0.$$

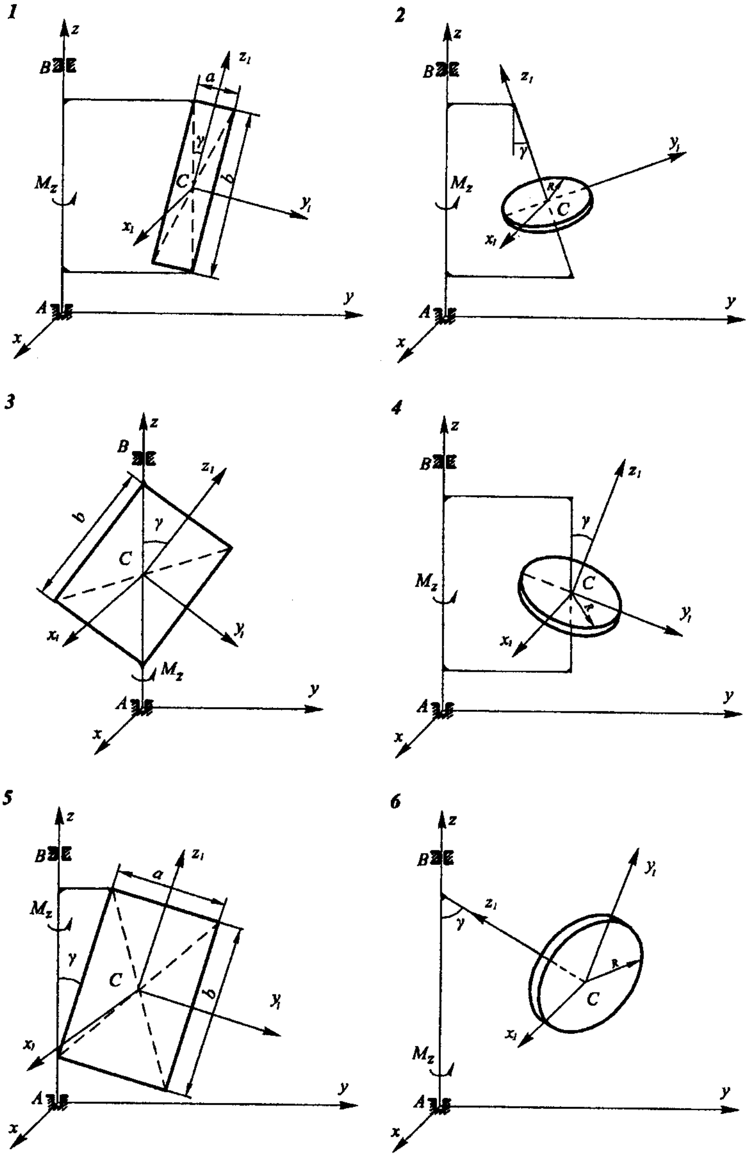
$$X_B \cdot 2 + 0{,}7 \cdot 32 = 0.$$

$$X_B = -11{,}2 \text{ Н}.$$

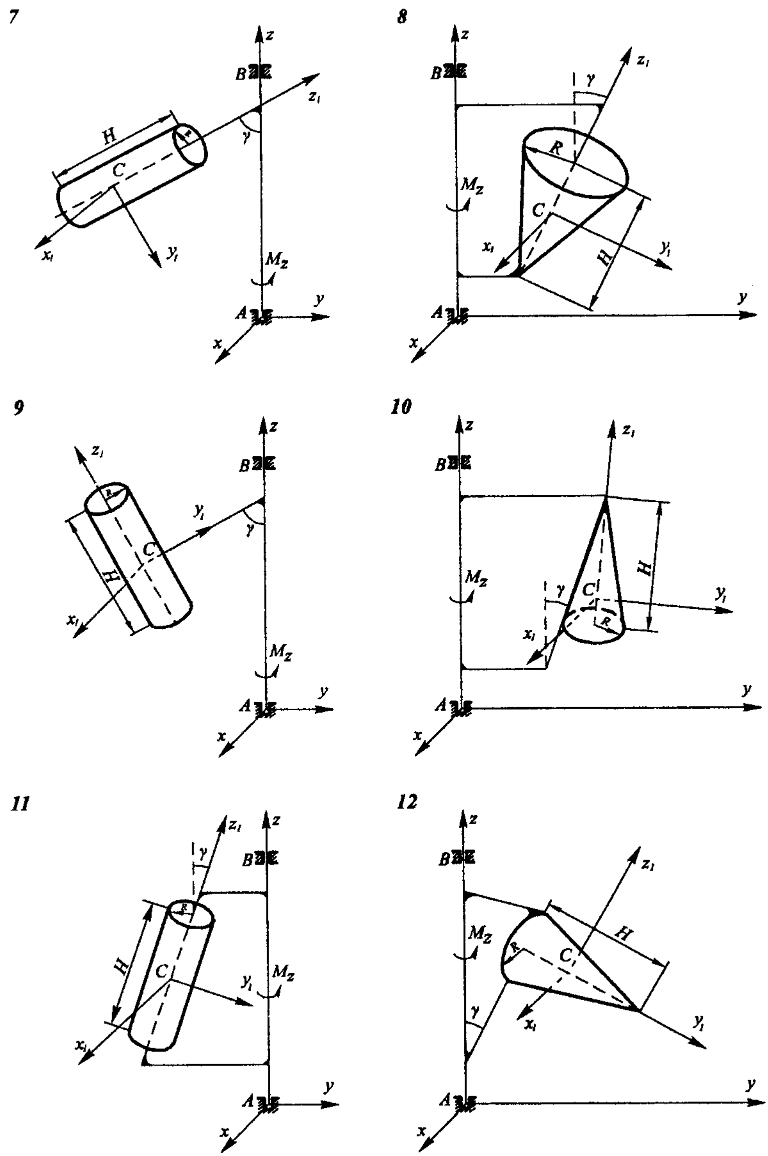
$$Y_B = -(156{,}96 + 125{,}44) = -282{,}4 \text{ Н}.$$

$$X_A = 11{,}2 - 22{,}4 = -11{,}2 \text{ Н}.$$

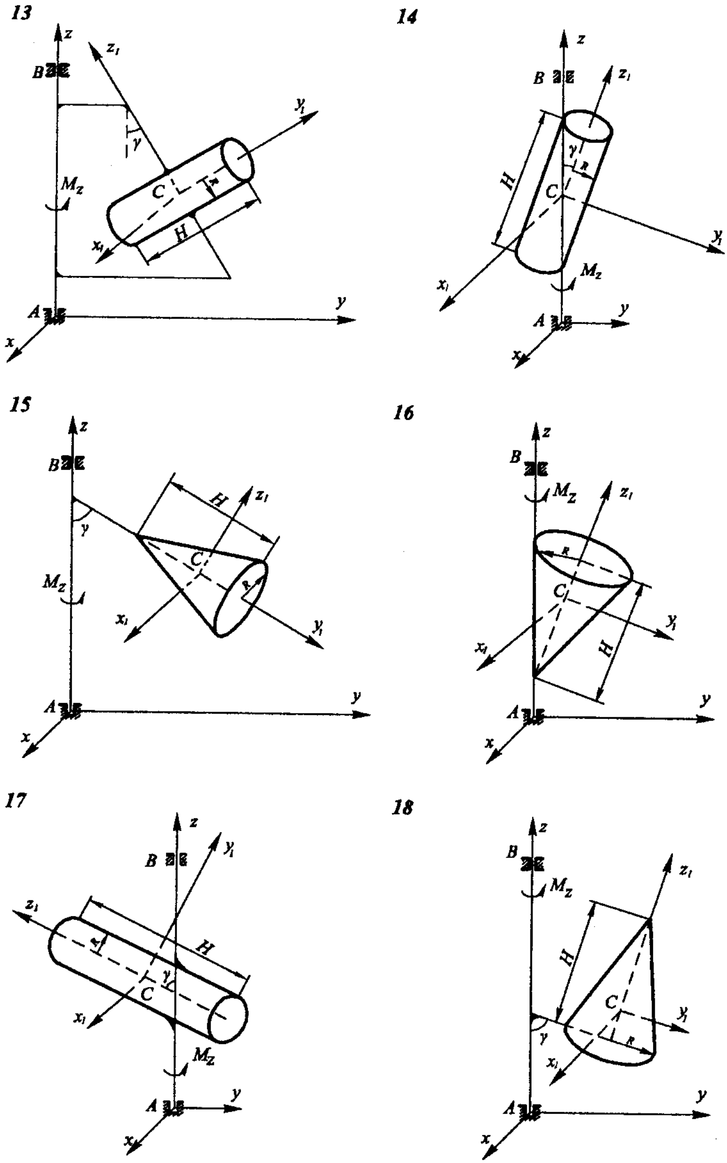
$$Y_A = 282{,}4 - 250{,}9 = 31{,}5 \text{ Н}.$$



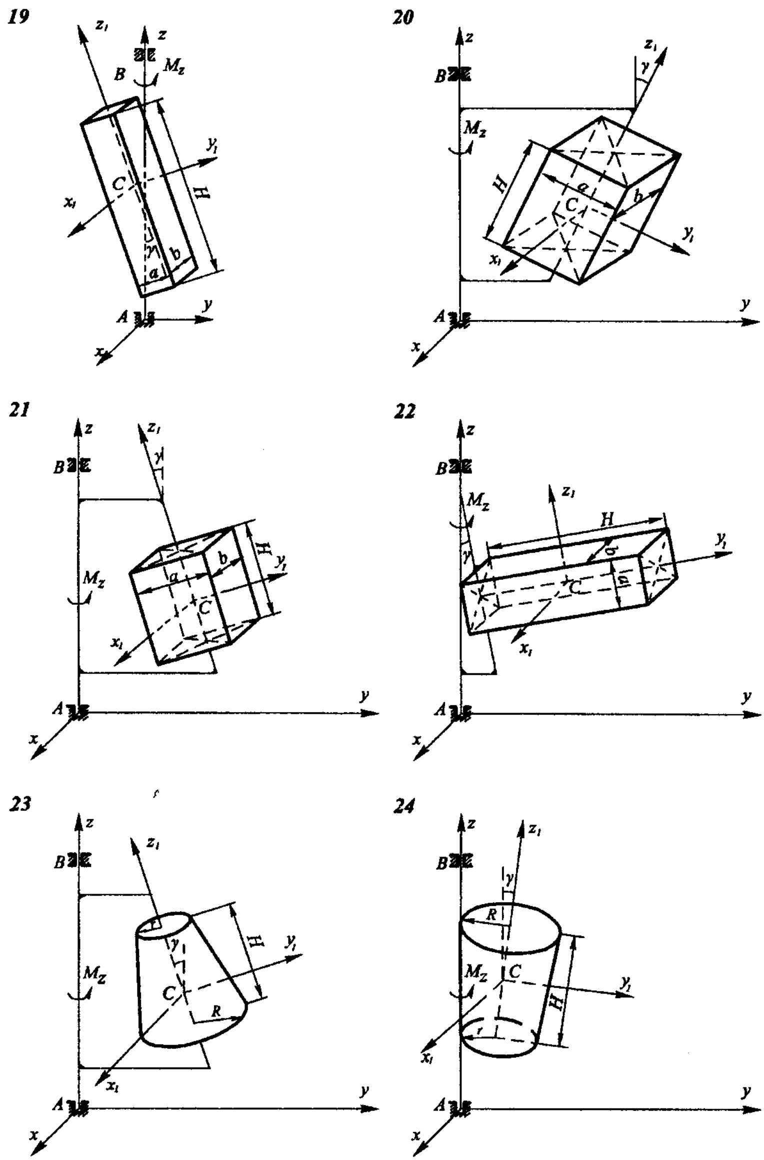
Рыс. 41



Рыс. 42

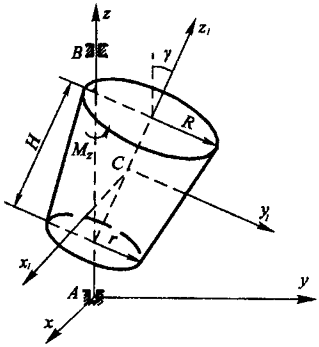


Рыс. 43

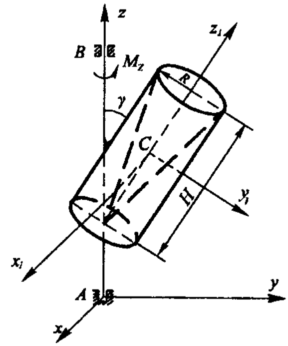


Рыс. 44

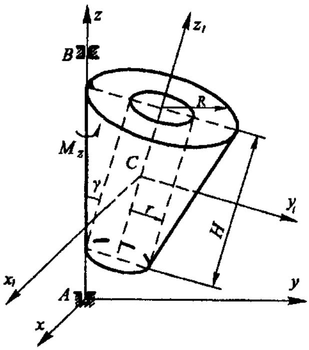
25



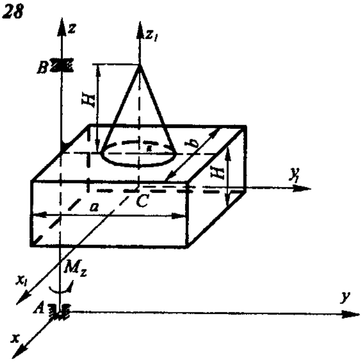
26



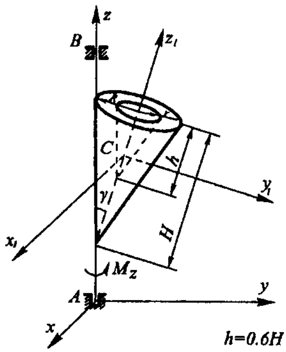
27



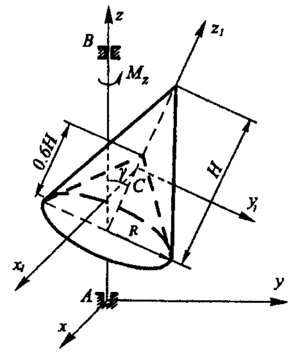
28



29



30



Рыс. 45

Заданне Д-11

Прымяненне прынцыпу Даламбера ў дынаміцы плоскапаралельнага руху цела

Аднароднае цвёрдае цела, маса якога m, можа каціцца (з праслізгваннем або без праслізгвання) па нерухомай паверхні пад уздзеяннем нязменных па накірунку сіл $\boldsymbol{F}_1$ і $\boldsymbol{F}_2$ (рыс. 47–49). Вызначыць паскарэнне цэнтра мас і вуглавое паскарэнне цела. Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 12, дзе i_{Cx} — радыус інерцыі цела адносна восі Cx, якая праходзіць праз цэнтр мас цела перпендыкулярна да чарцяжа; f — каэфіцыент трэння слізгання цела A на апорнай паверхні.

Прыклад рашэння задання Д-11

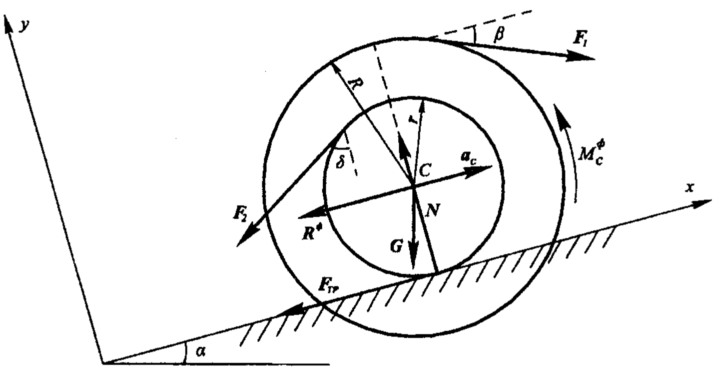
Аднароднае цвёрдае цела коціцца па нерухомай паверхні пад уздзеяннем нязменных па накірунку сіл $\boldsymbol{F}_1$ і $\boldsymbol{F}_2$ (рыс. 46). Вызначыць паскарэнне цэнтра мас і вуглавое паскарэнне цела, калі вядома, што m = 20 кг, R = 0,25 м, r = 0,15 м, i_{Cx} = 0,2 м, F_1 = 120 Н, F_2 = 90 Н, α = 30°, β = 30°, δ = 60°, f = 0,2.

Табліца 12

Варыянт	m, кг	R, м	r, м	i_{Cx}, м	F_1, Н	F_2, Н	α, град	β, град	δ, град	f,
1	15	0,30	0,20	0,26	120	70	15	35	30	0,12
2	18	0,29	0,19	0,25	130	80	45	40		0,18
3	20	0,28	0,18	0,24	140	90	20	65	25	0,15
4	23	0,27	0,17	0,23	150	100	24	30		0,20
5	26	0,26	0,16	0,22	90	70	18	50	30	0,16
6	30	0,25	0,15	0,21	80	60	40	55		0,21
7	32	0,24	0,14	0,20	70	90	16	25	45	0,24
8	35	0,23	0,13	0,19	100	80	26	32		0,14
9	38	0,22	0,12	0,18	110	50	20	45	40	0,17
10	40	0,21	0,11	0,17	120	100	30	34		0,20
11	15	0,20	0,10	0,16	130	110	40	48		0,19
12	20	0,30	0,22	0,26	140	120	30	35		0,18
13	25	0,29	0,21	0,25	130	30	28	30		0,17

Заканчэнне табл. 12

Варыянт	m, кг	R, м	r, м	i_{Cx}, м	F_1, Н	F_2, Н	α, град	β, град	δ, град	f,
14	30	0,28	0,20	0,24	140	90	20	45		0,16
15	35	0,27	0,19	0,23	120	85	35	45		0,21
16	40	0,26	0,18	0,22	110	75	30		42	0,15
17	17	0,25	0,17	0,21	130	80	30	26	38	0,20
18	22	0,24	0,16	0,20	100	70	24	42		0,14
19	27	0,23	0,15	0,19	90	60	50	45		0,19
20	32	0,22	0,14	0,18	85	50	26		30	0,18
21	37	0,21	0,13	0,17	120	70	30	65	36	0,22
22	40	0,20	0,12	0,16	60	110	70	55		0,16
23	15	0,30	0,24	0,27	130	50	35	30	60	0,21
24	18	0,29	0,23	0,26	120	65	30			0,15
25	21	0,28	0,22	0,25	65	40	45	60		0,17
26	24	0,27	0,21	0,24	140	100	42	40		0,19
27	27	0,26	0,20	0,23	150	90	20	60		0,20
28	30	0,25	0,19	0,22	90	75	50	75		0,18
29	33	0,24	0,18	0,21	100	80	30	32		0,17
30	40	0,23	0,17	0,20	110	90	22	70	24	0,21



Рыс. 46

Р а ш э н н е . Пад уздзеяннем прыкладзеных сіл і рэакцый сувязей цела рухаецца плоскапаралельна адносна нерухомай плоскасці Oxy. Згодна з прынцыпам Даламбера, для механічнай сістэмы акрамя дадзеных сіл $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ і $\boldsymbol{G}$ пакажам складовыя рэакцыі нягладкай нахіленай паверхні N і $\boldsymbol{F}_{тр}$, а таксама галоўны вектар сіл інерцыі $\boldsymbol{R}^{\Phi}$ і галоўны момант M_C^{Φ} сіл інерцыі адносна цэнтра мас. Будзем лічыць, што цела рухаецца ў дадатным накірунку восі Ox без праслізгвання. Адпаведна з гэтым паказаны паскарэнне цэнтра мас $\boldsymbol{a}_C$, вектар $\boldsymbol{R}^{\Phi}$ і M_C^{Φ}.

У пункце дотыку цела да апорнай паверхні знаходзіцца ў гэтым выпадку імгненны цэнтр скорасцей C_v.

Запісваем тры ўраўненні раўнавагі плоскай адвольнай сістэмы сіл.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \qquad F_1 \cos\beta - F_2 \sin\delta - G\sin\alpha - R^{\Phi} - F_{тр} = 0\,,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \qquad -F_1 \sin\beta - F_2 \cos\delta - G\cos\alpha + N = 0\,,$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_C(\boldsymbol{F}_k) = 0 \qquad F_2 \cdot r - F_1 \cdot R - F_{тр} \cdot r + M_C^{\Phi} = 0\,.$$

$$R^{\Phi} = m \cdot a_C, \qquad M_C^{\Phi} = I_C \cdot \varepsilon = m \cdot i_{Cx}^2 \frac{a_C}{r}.$$

Пры адсутнасці праслізгвання цела сіла трэння $F_{тр} < fN$, таму значэнне $F_{тр}$ невядомае.

Падставім усе вядомыя нам лікавыя значэнні і выразы ў атрыманыя ўраўненні.

$$\begin{cases} 120 \cdot 0{,}866 - 90 \cdot 0{,}866 - 20 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 - 20 \cdot a_C - F_{тр} = 0, \\ -120 \cdot 0{,}5 - 90 \cdot 0{,}5 - 20 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}866 + N = 0, \\ 90 \cdot 0{,}15 - 120 \cdot 0{,}25 - F_{тр} \cdot 0{,}15 + 20 \cdot 0{,}2^2 \cdot \dfrac{a_C}{0{,}15} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 103{,}9 - 77{,}9 - 98{,}1 - 20 \cdot a_C - F_{тр} = 0, \\ -60 - 45 - 169{,}7 + N = 0, \\ 13{,}5 - 30 - 0{,}15 F_{тр} + 5{,}3 a_C = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -72-20a_C-F_{\text{тр}}=0, \\ -274{,}7+N=0, \\ -16{,}5-0{,}15F_{\text{тр}}+5{,}3a_C=0. \end{cases}$$

З другога ўраўнення $N = 274{,}7$ Н.

Памножым першае ўраўненне на 0,15 і адымем ад яго трэцяе ўраўненне. У выніку атрымаем:

$$5{,}7-8{,}3a_C=0. \quad a_c=0{,}7 \text{ м/с}^2.$$

З першага ўраўнення атрымаем значэнне $F_{\text{тр}}$.

$$-72-14-F_{\text{тр}}=0. \qquad F_{\text{тр}}=-86 \text{ Н}.$$

Мінус у адказе для сілы трэння азначае, што на самай справе яна павінна быць накіравана ў дадатным накірунку восі Ox.

Праверым магчымасць качэння цела без праслізгвання па апорнай паверхні.

Максімальна магчымае значэнне сілы трэння пры дадзеным каэфіцыенце трэння

$$F_{\text{тр. max}}=fN=0{,}2\cdot 274{,}7=54{,}9 \text{ Н}.$$

Атрымалася, што патрэбнае для качэння без праслізгвання значэнне сілы трэння ($F_{\text{тр}}$ = 86 Н) большае за $F_{\text{тр. max}}$, што немагчыма забяспечыць на гэтай паверхні. Таму неабходна паўторна правесці рашэнне задання з улікам руху цела з праслізгваннем.

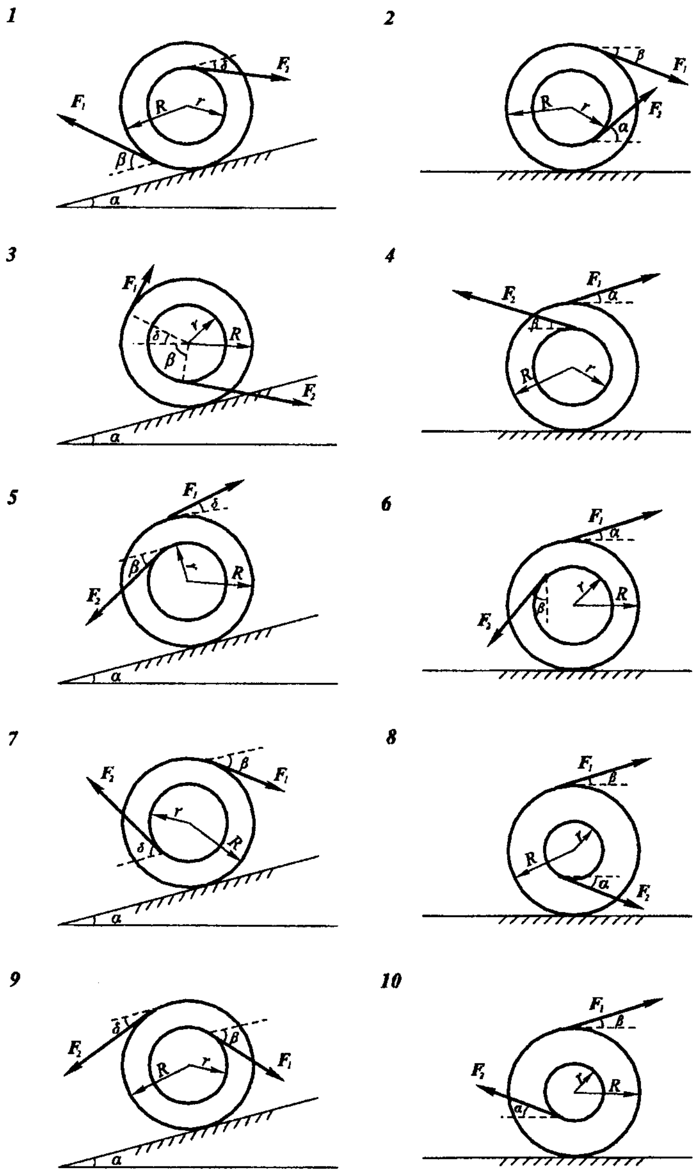
Запісваем зноў тры ўраўненні раўнавагі, толькі ўлічваем, што максімальная сіла трэння $\boldsymbol{F}_{\text{тр. max}}$ накіравана ў дадатным накірунку восі Ox.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}=0 \qquad F_1\cos\beta-F_2\sin\delta-G\sin\alpha-R^{\Phi}+F_{\text{тр.max}}=0,$$

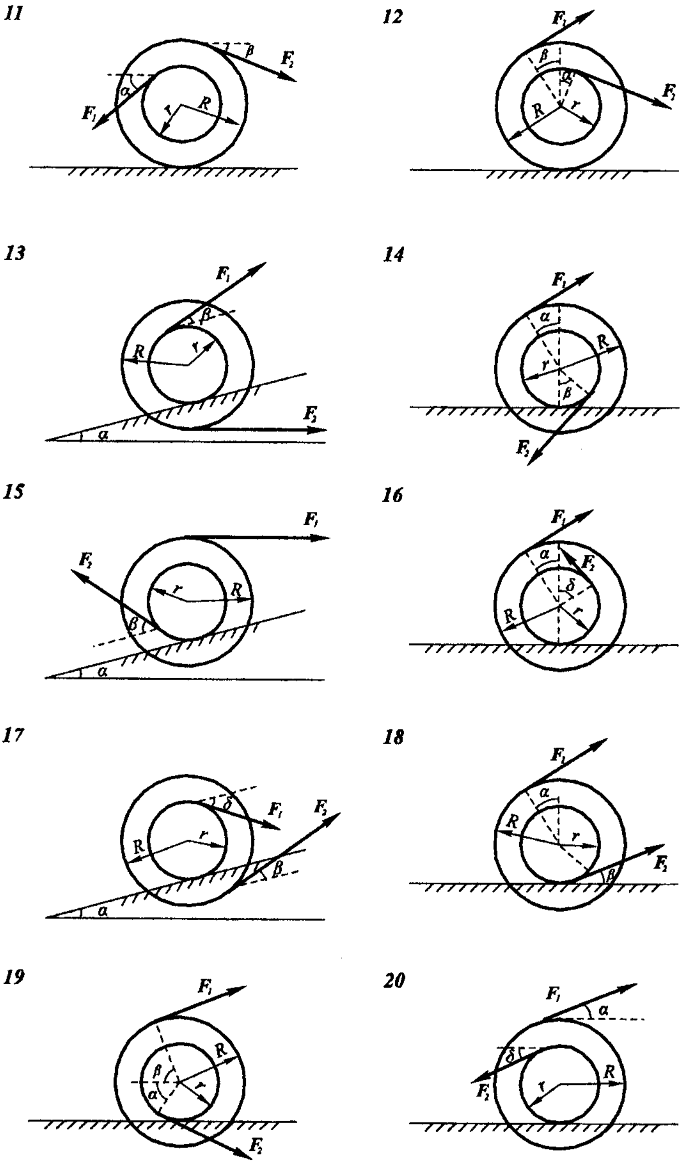
$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky}=0 \qquad -F_1\sin\beta-F_2\cos\delta-G\cos\alpha+N=0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_C(\boldsymbol{F}_k)=0 \qquad F_2\cdot r-F_1\cdot R+F_{\text{тр. max}}\cdot r+M_C^{\Phi}=0.$$

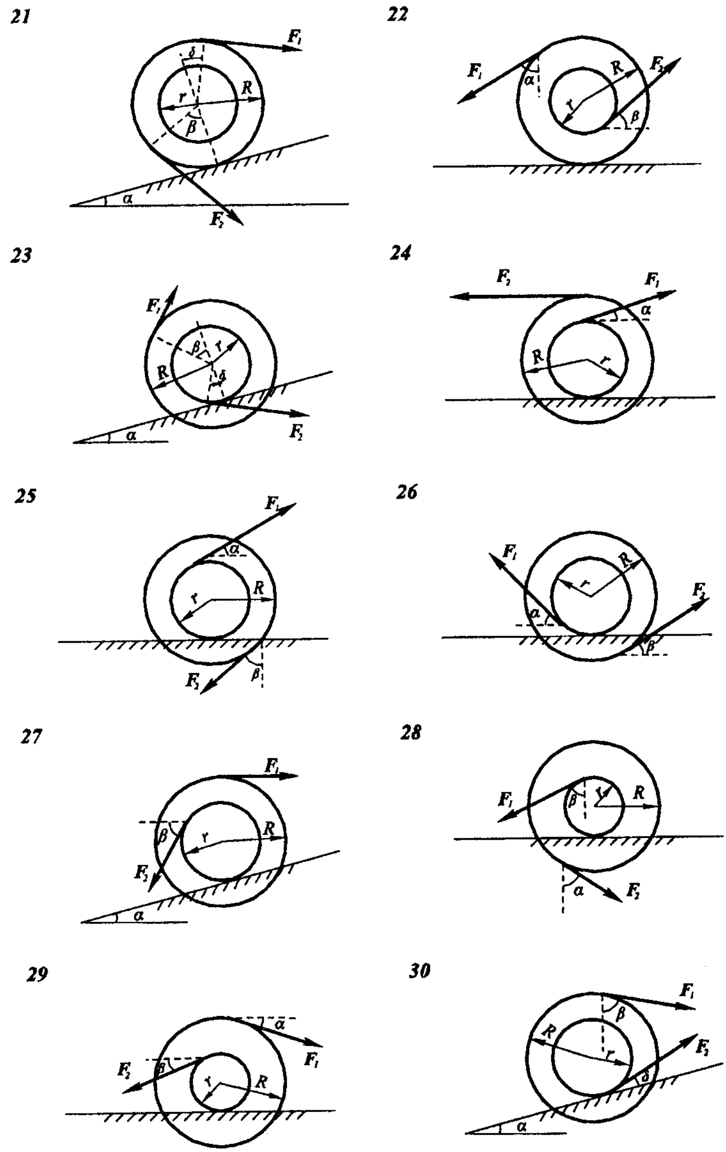
$$F_{\text{тр.max}}=f\cdot N; \quad R^{\Phi}=ma_C; \qquad M_C^{\Phi}=m\cdot i_{Cx}^2\cdot\varepsilon.$$


1
F1
F2
R
r
δ
β
α
2
β
F1
R
r
F2
α
3
F1
r
R
δ
β
F2
α
4
F1
F2
α
β
R
r
5
F1
δ
β
r
R
F2
α
6
F1
α
r
R
β
F2
7
β
F2
F1
r
R
δ
α
8
F1
β
r
R
α
F2
9
δ
β
F2
R
r
F1
α
10
F1
β
F2
r
R
α

Рыс. 47



Рыс. 48



Рыс. 49

Цяпер пункт дотыку цела да апорнай паверхні не з'яўляецца імгненным цэнтрам скорасцей. Таму невядомымі велічынямі ў сістэме ўраўненняў з'яўляюцца a_C і ε, паміж якімі ў дадзеным выпадку сувязь не існуе.

Падставім усе вядомыя нам лікавыя значэнні велічынь і выразы ў атрыманыя ўраўненні.

$$\begin{cases} 120\cdot 0{,}866-90\cdot 0{,}866-20\cdot 9{,}81\cdot 0{,}5-20\cdot a_C+0{,}2N=0, \\ -120\cdot 0{,}5-90\cdot 0{,}5-20\cdot 9{,}81\cdot 0{,}866+N=0, \\ 90\cdot 0{,}15-120\cdot 0{,}25+0{,}2N\cdot 0{,}15+20\cdot 0{,}2^2\cdot \varepsilon=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -72-20a_C+0{,}2N=0, \\ -274{,}7+N=0, \\ -16{,}5+0{,}03N+0{,}8\varepsilon=0. \end{cases}$$

Пасля рашэння сістэмы ўраўненняў атрымаем:

$$N=274{,}7\ \text{Н},\quad a_C=-0{,}85\ \text{м/с}^2,\quad \varepsilon=10{,}4\ \text{рад/с}^2.$$

З атрыманага відаць, што цела паварочваецца па гадзіннікавай стрэлцы, а цэнтр мас цела рухаецца ўлева.

Заданне Д-12

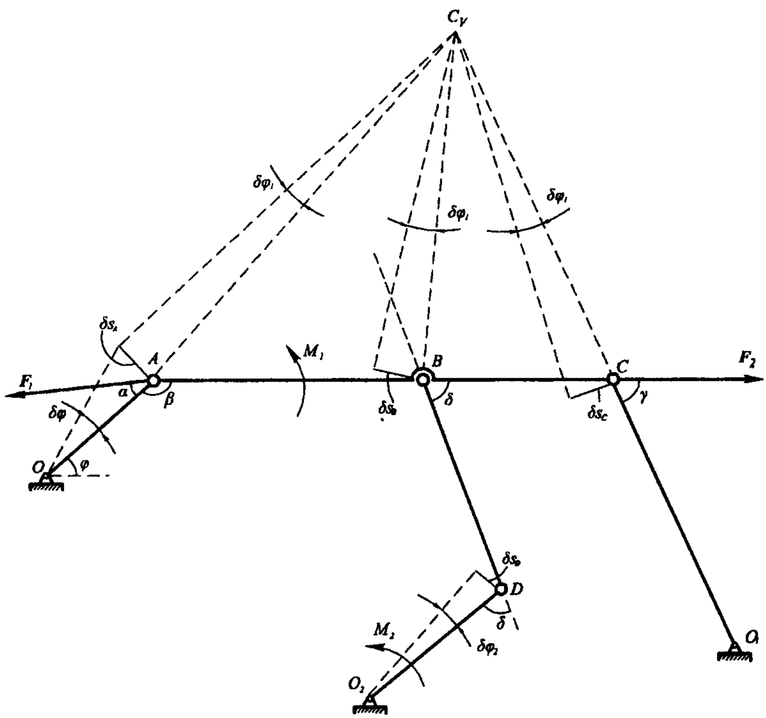
Прымяненне прынцыпу магчымых перамяшчэнняў пры рашэнні задач аб раўнавазе механічнай сістэмы

Механічная сістэма ў выглядзе плоскага механізма (рыс. 51–55) знаходзіцца ў стане раўнавагі пад дзеяннем прыкладзеных да яе актыўных сіл. Усе сувязі, якія накладзены на сістэму, лічыць ідэальнымі. Вызначыць велічыню, якая адзначана ў табл. 13 як невядомая. Уласную вагу звёнаў механізма не ўлічваць.

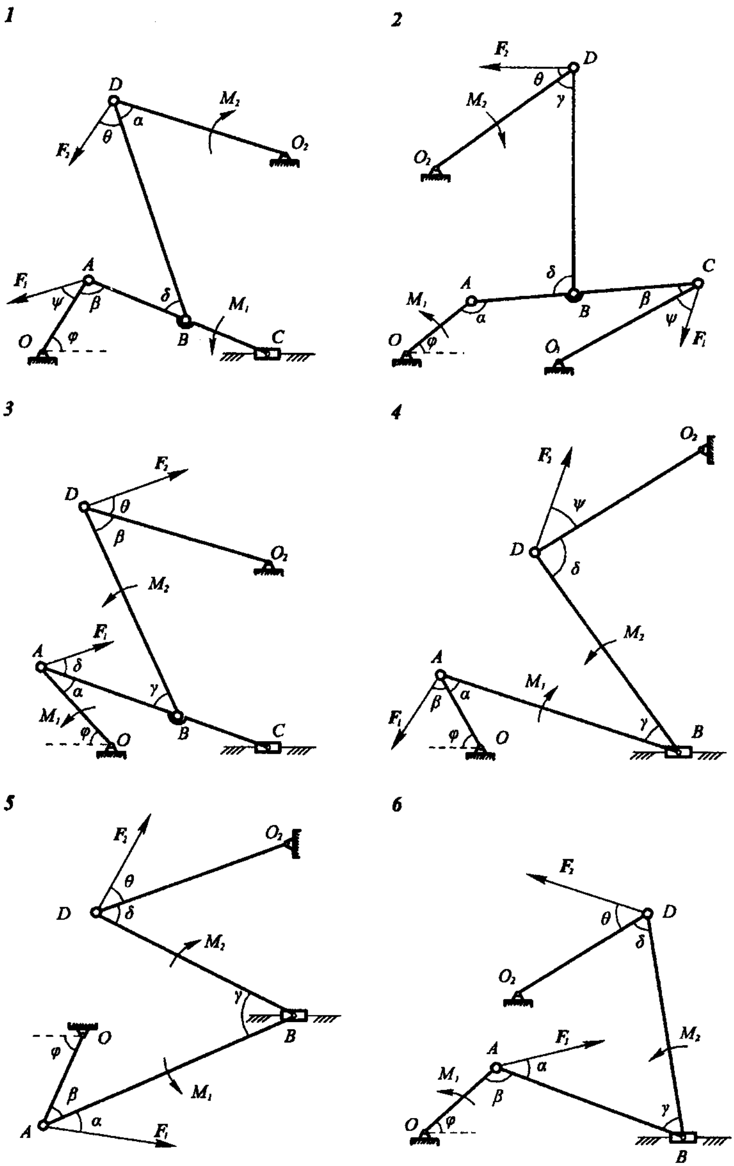
Прыклад рашэння задання Д-12

Рычажны плоскі механізм (рыс. 50) знаходзіцца ў раўнавазе пад уздзеяннем сіл $\boldsymbol{F}_1$ і $\boldsymbol{F}_2$ і пар сіл з момантамі M_1 і M_2. Вызначыць велічыню моманту M_2, калі вядома, што $OA = 0{,}2$ м, $AB = 0{,}4$ м, $BC = 0{,}25$ м, $BD = 0{,}3$ м, $DO_2 = 0{,}35$ м, $CO_1 = 0{,}4$ м, $\varphi = 40°$, $\beta = 140°$, $\delta = 70°$, $\alpha = 30°$, $\gamma = 60°$, $F_1 = 60$ Н, $F_2 = 120$ Н, $M_1 = 100$ Нм.

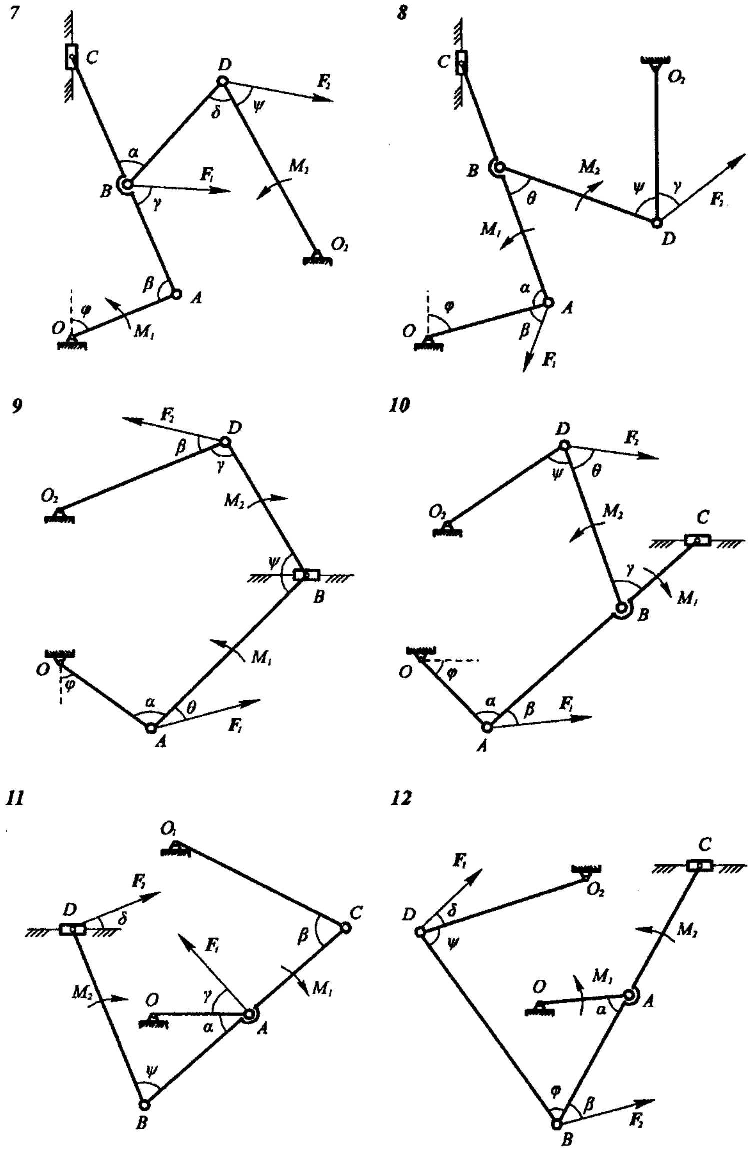
Рашэнне. Механізм знаходзіцца ў стане раўнавагі пад уздзеяннем дадзеных сіл і момантаў. Для рашэння задачы прымяняем прынцып магчымых перамяшчэнняў. З улікам адной ступені свабоды механізма за абагульненую каардынату прымем вугал φ. Надаўшы звяну OA магчымае вуглавое перамяшчэнне $\delta\varphi$, атрымаем магчымыя перамяшчэнні ва ўсіх рухомых пунктах механізма. C_v — імгненны цэнтр магчымага развароту звяна AC, C_v' — імгненны цэнтр магчымага развароту звяна BD.



Рыс. 50

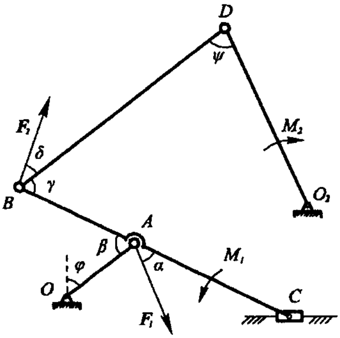

1
D
α
θ
F_2
M_2
O_2
A
F_1
ψ
β
δ
M_1
O
φ
B
C
2
F_2
D
θ
γ
M_2
O_2
δ
C
A
M_1
β
α
B
ψ
O
φ
O_1
F_1
3
F_2
D
θ
β
O_2
M_2
F_1
A
δ
α
γ
M_1
φ
O
B
C
4
O_2
F_2
ψ
D
δ
M_2
A
M_1
β
α
F_1
γ
B
φ
O
5
F_2
O_2
θ
D
δ
M_2
γ
B
O
φ
β
M_1
A
α
F_1
6
F_2
θ
D
δ
O_2
M_2
A
F_1
M_1
α
β
γ
O
φ
B

Рыс. 51

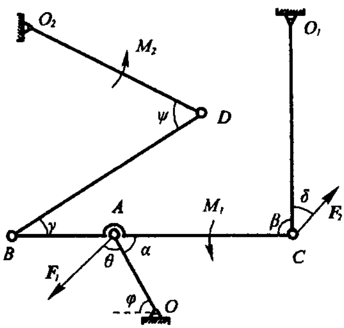


Рыс. 52

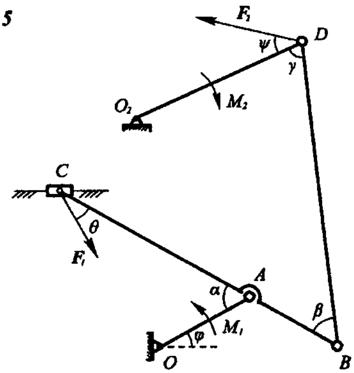
13



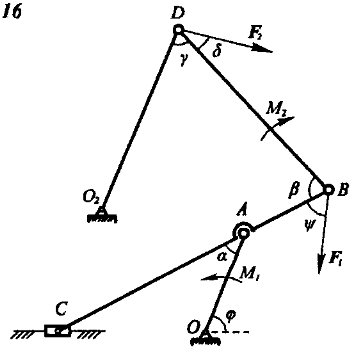
14



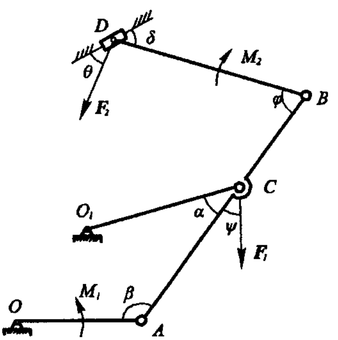
15



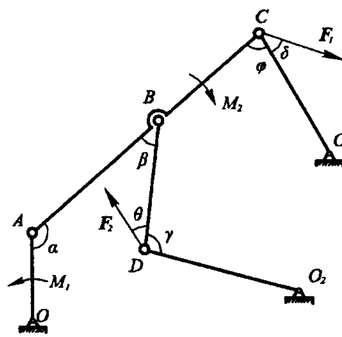
16



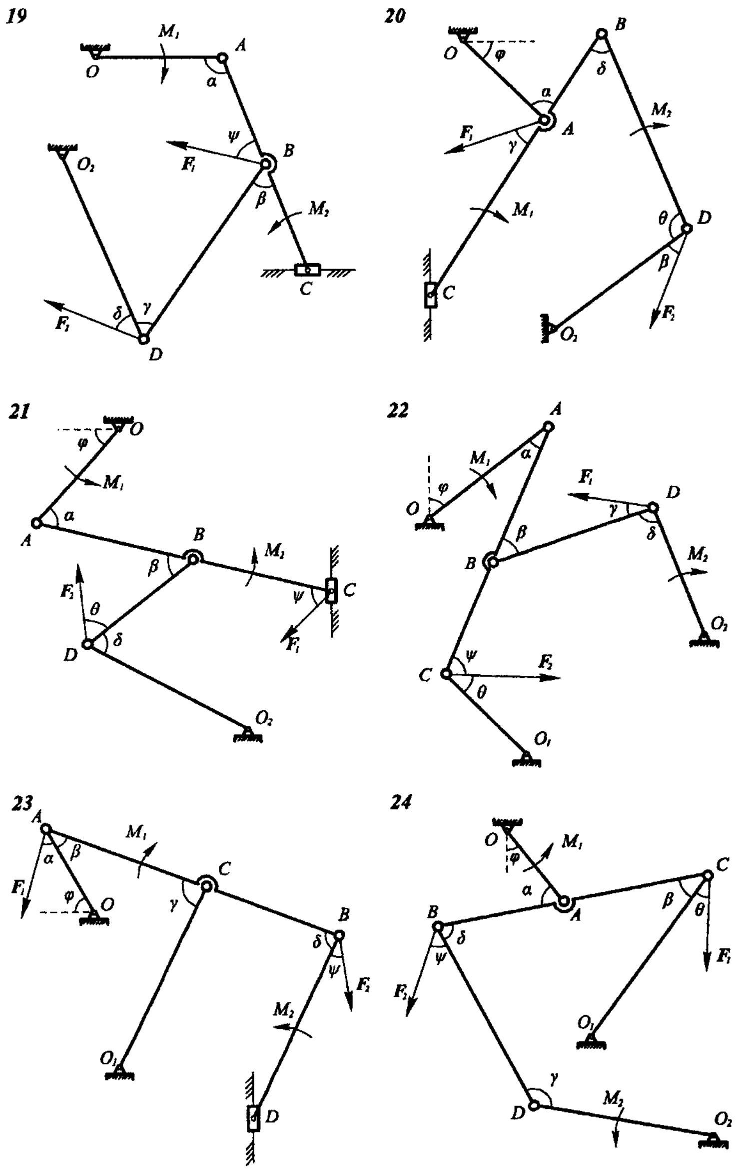
17



18

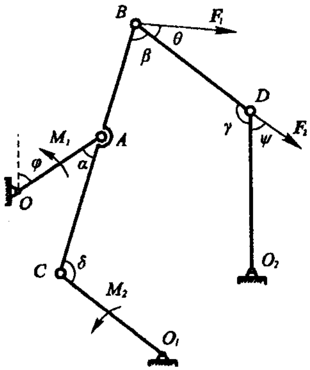


Рыс. 53

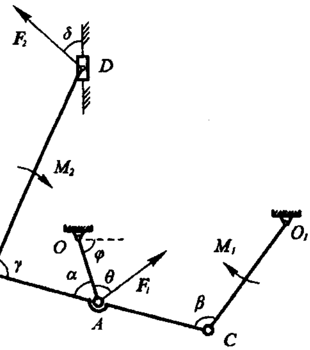

19
O
M1
A
α
ψ
B
F1
O2
β
M2
C
δ
γ
F1
D
20
B
O
φ
δ
α
M2
F1
A
γ
M1
θ
D
β
C
F2
O2
21
O
φ
M1
α
A
B
β
M2
C
F2
θ
ψ
D
δ
F1
O2
22
A
M1
α
φ
O
F1
D
γ
β
δ
B
M2
O2
ψ
C
F2
θ
O1
23
A
M1
β
α
C
F1
φ
O
γ
B
δ
ψ
F2
M2
O1
D
24
O
M1
φ
C
α
A
β
B
θ
δ
F1
ψ
F2
O1
γ
D
M2
O2

Рыс. 54

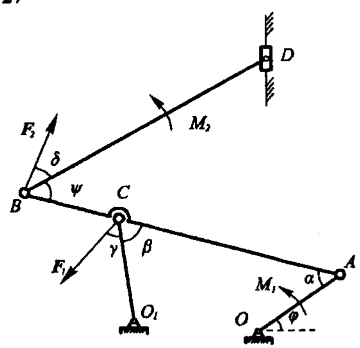
25



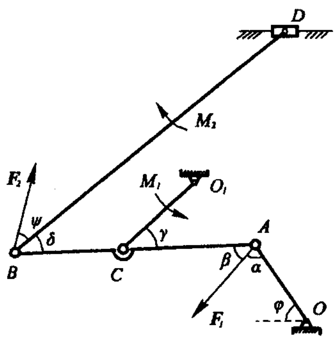
26



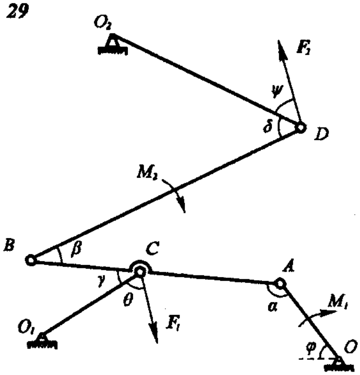
27



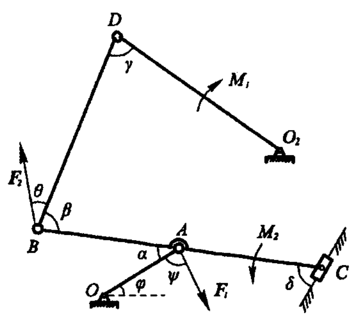
28



29



30



Рыс. 55

Таблиця 13

Варыянт	OA, см	AB, см	BC, см	CO_1, см	$BД$, см	$ДO_2$, см	φ, град	α, град	β, град	γ, град	δ, град	θ, град	ψ, град	F_1, Н	F_2, Н	M_1, Нм	M_2, Нм
1	20	22	24		55	50	45	40	105		45	40	35	100	80	40	?
2	18	25	20	35	50	45	35	120	45	60	90	35	40	90	?	50	70
3	17	30	15		40	38	46	30	45	48	40	35		80	?	30	60
4	19	45			45	30	50	45	55	45	100		30	?	90	60	50
5	16	40			36	32	60	20	45	60	60	45		70	60	?	80
6	15	30			40	25	45	30	110	60	75	45		60	70	70	?
7	20	25	20		30	60	70	50	90	60	80		45	50	100	?	90
8	18	22	20		35	35	60	105	45	40		45	60	?	50	80	30
9	17	35			30	26	50	95	30	110		25	90	70	60	40	?
10	19	34	26		40	35	45	90	40	50		60	70	80	?	30	50
11	16	25	50	40	40			40	60	45	30		70	?	90	70	40
12	15	20	60		40	36	70	45	50		30		75	100	80	?	90
13	16	20	56		45	35	45	35	60	65	35		65	90	100	40	?
14	17	18	60	55	50	45	50	50	90	45	40	60	60	80	?	50	30
15	18	20	55		52	38	45	80	45	80		25	45	?	60	80	50
16	19	15	50		45	40	60	45	55	75	30		50	70	90	?	40
17	20	60	20	35	40		60	30	130		55	30	30	60	70	30	?
18	19	38	40	45	30	48	65	135	45	95	30	35		90	50	?	60
19	18	35	30		45	45		135	60	50	30		35	100	?	70	80
20	17	10	45		40	30	35	85	35	30	60	90		?	80	60	50
21	16	28	28		22	35	60	80	70		70	30	75	90	?	80	70
22	15	22	12	20	30	26	50	30	45	45	80	45	60	80	70	60	?
23	20	60	25	35	45		45	50	40	65	80		45	70	60	?	50
24	16	16	40	32	35	32	48	45	50	120	65	40	35	?	60	50	40
25	17	17	42	25	30	30	50	40	60	135	115	30	45	50	?	40	30
26	18	28	56	30	50		45	35	95	80	30	80		60	50	30	?
27	19	70	20	25	60		40	50	45	50	30		45	?	65	60	55
28	25	50	20	24	70		50	60	55	45	45		35	70	75	?	60
29	20	60	22	22	60	50	60	120	30	35	45	60	45	75	?	65	50
30	19	20	55		40	40	45	45	80	70	70	30	60	?	80	75	70

Ураўненне элементарных работ, якое адлюстроўвае прынцып магчымых перамяшчэнняў, у прымяненні да разглядаемага механізма мае наступны выгляд:

$$F_1 \cdot \delta s_A \cdot \sin\alpha - M_1 \cdot \delta\varphi_1 - F_2 \cdot \delta s_C \cdot \sin\gamma + M_2 \cdot \delta\varphi_2 = 0.$$

Для рашэння ураўнення неабходна ўсе магчымыя перамяшчэнні, якія ўключаны ва ўраўненне, выразіць праз варыяцыю $\delta\varphi$ абагульненай каардынаты φ.

$$\delta s_A = \delta\varphi \cdot OA, \quad \delta\varphi_1 = \frac{\delta s_A}{AC_v}, \quad \delta s_B = \delta\varphi_1 \cdot BC_v, \quad \delta s_C = \delta\varphi_1 \cdot CC_v.$$

У трохвугольніку ACC_v

$$\angle C_vAC = 40°, \quad \angle ACC_v = 60°, \quad \angle AC_vC = 80°.$$

Згодна з тэарэмай сінусаў,

$$\frac{AC_v}{AC} = \frac{\sin 60°}{\sin 80°}, \quad AC_v = 0{,}65\frac{0{,}866}{0{,}985} = 0{,}57 \text{ м}.$$

$$\frac{CC_v}{AC} = \frac{\sin 40°}{\sin 80°}, \quad CC_v = 0{,}65\frac{0{,}643}{0{,}985} = 0{,}42 \text{ м}.$$

У трохвугольніку ABC_v, згодна з тэарэмай косінусаў,

$$BC_v = \sqrt{(AC_v)^2 + (AB)^2 - 2 \cdot AC_v \cdot AB\cos 40°} =$$

$$= \sqrt{0{,}32 + 0{,}16 - 0{,}35} = \sqrt{0{,}13} = 0{,}36 \text{ м}.$$

$$(AC_v)^2 = (AB)^2 + (BC_v)^2 - 2AB \cdot BC_v \cdot \cos\angle ABC_v.$$

$$0{,}325 = 0{,}16 + 0{,}13 - 0{,}288 \cdot \cos\angle ABC_v.$$

$$\cos\angle ABC_v = -0{,}121, \quad \angle ABC_v = 97°, \quad \angle CBC_v = 83°.$$

Магчымае перамяшчэнне δs_D знойдзем праз δs_B з роўнасці іх праекцый на прамую BD.

$$\delta s_B \cdot \cos[90° - (180° - \delta - \angle CBC_v)] = \delta s_D \cdot \cos(180° - 90° - \delta).$$

$$\delta s_B \cdot \cos 63° = \delta s_D \cdot \cos 20°.$$

$$\delta s_D = \delta\varphi_1 \cdot BC_v \cdot \frac{\cos 63°}{\cos 20°} = \delta\varphi \frac{OA}{AC_v} \cdot BC_v \cdot \frac{\cos 63°}{\cos 20°}.$$

$$\delta s_D = \delta\varphi \frac{0{,}2}{0{,}57} \cdot 0{,}36 \cdot \frac{0{,}454}{0{,}940} = 0{,}061 \cdot \delta\varphi. \quad \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_D}{O_2 D}.$$

Тады маем наступныя выразы неабходных магчымых перамяшчэнняў:

$$\delta s_A = 0{,}2\delta\varphi, \quad \delta\varphi_1 = 0{,}35\delta\varphi, \quad \delta s_C = 0{,}147\delta\varphi, \ \delta\varphi_2 = 0{,}174\delta\varphi.$$

Падставім лікавыя значэнні вядомых велічынь і выразы магчымых перамяшчэнняў у запісанае першапачатковае ўраўненне.

$$60 \cdot 0{,}2\delta\varphi \cdot 0{,}5 - 100 \cdot 0{,}35\delta\varphi - 120 \cdot 0{,}147\delta\varphi \cdot 0{,}866 + M_2 \cdot 0{,}174\delta\varphi = 0.$$

$$6\delta\varphi - 35\delta\varphi - 15{,}3\delta\varphi + M_2 \cdot 0{,}174\delta\varphi = 0.$$

$$M_2 \cdot 0{,}174\delta\varphi = 44{,}3\delta\varphi, \quad M_2 = 254{,}6 \text{ Нм}.$$

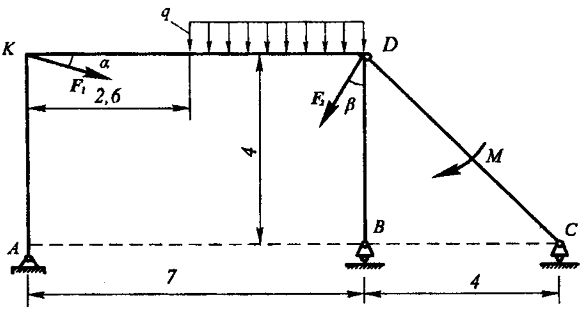
Заданне Д-13

Прымяненне прынцыпу магчымых перамяшчэнняў пры вызначэнні рэакцый апор плоскай састаўной канструкцыі

Вызначыць рэакцыі апор плоскай састаўной канструкцыі з дапамогай прынцыпу магчымых перамяшчэнняў (рыс. 62–66). Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 14. Памеры элементаў канструкцыі на рысунках дадзены ў метрах.

Прыклад рашэння задання Д-13

У прыведзенай на рыс. 56 састаўной канструкцыі вызначыць рэакцыі апор A і B, карыстаючыся прынцыпам магчымых перамяшчэнняў. Вядома, што F_1 = 100 Н, F_2 = 200 Н, M = 30 Нм, q =10 Н/м, α = 30°, β = 30°. Памеры частак канструкцыі дадзены ў метрах.

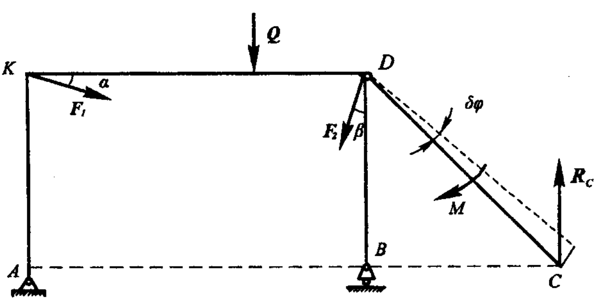


Рыс. 56

Рашэнне. Размеркаваную нагрузку з інтэнсіўнасцю q заменім раўнадзейнаю, якая прыкладзена ў сярэдзіне нагружанага ўчастка рамы $AKDB$.

$$Q = q \cdot (7 - 2{,}6) = 10 \cdot 4{,}4 = 44 \text{ Н}.$$

Каб знайсці рэакцыю рухомага цыліндрычнага шарніра C, адкінем умоўна гэтую сувязь і заменім яе дзеянне рэакцыяю $\boldsymbol{R}_C$ (рыс. 57).

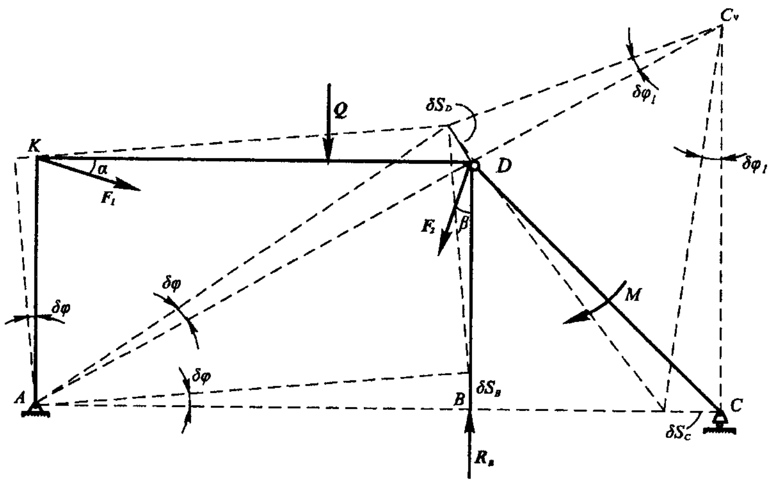


Рыс. 57

Магчымым перамяшчэннем правай часткі DC канструкцыі з'яўляецца яе паварот вакол шарніра D на вугал $\delta\varphi$. Прымем паварот супраць гадзіннікавай стрэлкі. Астатняя частка састаўной канструкцыі астаецца нерухомаю. Запісваем ураўненне элементарных работ, якое адлюстроўвае прынцып магчымых перамяшчэнняў.

$$R_C \cdot 4 \cdot \delta\varphi - M \cdot \delta\varphi = 0. \qquad R_C = \frac{M}{4} = \frac{30}{4} = 7{,}5 \text{ Н}.$$

Цяпер вызначаем рэакцыю рухомага цыліндрычнага шарніра *B*. Адкінем умоўна гэтую сувязь і заменім яе дзеянне рэакцыяю $\boldsymbol{R}_B$ (рыс. 58).



Рыс. 58

Надаём канструкцыі магчымае перамяшчэнне. Левая частка – рама *AKDB* паварочваецца вакол нерухомага цыліндрычнага шарніра *A* на вугал $\delta\varphi$, пункт *C* правай часткі канструкцыі *DC* з улікам накладзенай сувязі (рухомага цыліндрычнага шарніра) атрымае пры гэтым магчымае гарызантальнае перамяшчэнне δs_C. За кошт павароту рамы *AKDB* на вугал $\delta\varphi$ пункт *D* рамы атрымае магчымае перамяшчэнне δs_D, перпендыкулярнае радыусу *AD*. Тады для правай часткі канструкцыі *DC*, якая будзе рухацца плоскапаралельна, на падставе магчымых перамяшчэнняў δs_C і δs_D будуем імгненны цэнтр развароту C_v (на перасячэнні перпендыкуляраў да магчымых перамяшчэнняў, праведзеных з пунктаў C і D). Цела DC павернецца вакол імгненнага цэнтра развароту на вугал $\delta\varphi_1$.

Запісваем ураўненне элементарных работ праз моманты сіл адносна цэнтра развароту цела і элементарны вугал павароту.

$$-F_1 \cdot \cos\alpha \cdot 4 \cdot \delta\varphi - Q \cdot 4{,}8 \cdot \delta\varphi - F_2 \cdot \cos\beta \cdot 7 \cdot \delta\varphi +$$

$$+F_2 \cdot \sin\beta \cdot 4 \cdot \delta\varphi + R_B \cdot 7 \cdot \delta\varphi + M \cdot \delta\varphi_1 = 0.$$

Атрымаем выраз $\delta\varphi_1$ праз $\delta\varphi$ (рыс. 58).

$$\delta s_D = AD \cdot \delta\varphi = \sqrt{7^2 + 4^2} \cdot \delta\varphi = 8{,}06 \cdot \delta\varphi.$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AC_v}, \quad AC_v = \frac{AD \cdot AC}{AB} = \frac{8{,}06 \cdot 11}{7} = 12{,}67 \text{ м}.$$

$$DC_v = AC_v - AD = 12{,}67 - 8{,}06 = 4{,}61 \text{ м}.$$

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta s_D}{DC_v} = \frac{8{,}06}{4{,}61}\delta\varphi = 1{,}75\delta\varphi.$$

Падстаўляем лікавыя значэнні вядомых велічынь і выраз $\delta\varphi_1$ ва ўраўненне элементарных работ.

$$-100 \cdot 0{,}866 \cdot 4 \cdot \delta\varphi - 44 \cdot 4{,}8 \cdot \delta\varphi - 200 \cdot 0{,}866 \cdot 7 \cdot \delta\varphi +$$

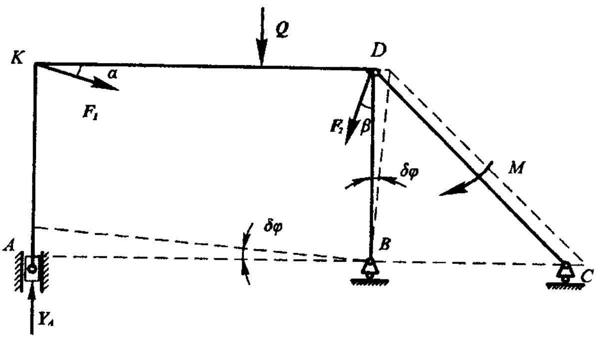
$$+200 \cdot 0{,}5 \cdot 4 \cdot \delta\varphi + R_B \cdot 7 \cdot \delta\varphi + 30 \cdot 1{,}75 \cdot \delta\varphi = 0.$$

$$-346{,}4 - 211{,}2 - 1212{,}4 + 400 + R_B \cdot 7 + 52{,}5 = 0.$$

$$7R_B = 1317{,}5. \qquad R_B = 188{,}2 \text{ Н}.$$

Для вызначэння вертыкальнай складовай Y_A рэакцыі нерухомага цыліндрычнага шарніра A адкінем сувязь, якая не дазваляе вертыкальнае перамяшчэнне пункта A рамы, замяніўшы нерухомы цыліндрычны шарнір на паўзун у вертыкальных накіроўваючых і прыклаўшы да яго рэакцыю Y_A (рыс. 59).

Надаём магчымае перамяшчэнне састаўной канструкцыі. Нерухомыя вертыкальныя накіроўваючыя ў пункце A не дазваляюць раме $AKDB$ рухацца гарызантальна. Таму пункт B рамы застанецца на месцы, а ўся рама павернецца вакол яго на элементарны вугал $\delta\varphi$. Магчымае перамяшчэнне пункта D адбываецца пры гэтым па гарызанталі, як і пункта C. Тады ўсё цела DC паступальна перамесціцца па гарызанталі.



Рыс. 59

Запісваем ураўненне элементарных работ.

$$Y_A \cdot 7 \cdot \delta\varphi + F_1 \cdot \cos\alpha \cdot 4 \cdot \delta\varphi - F_1 \cdot \sin\alpha \cdot 7 \cdot \delta\varphi -$$

$$-Q \cdot 2{,}2 \cdot \delta\varphi - F_2 \cdot \sin\beta \cdot 4 \cdot \delta\varphi = 0\,.$$

Цела DC не мае вугла павароту, таму работа моманту M роўная нулю.

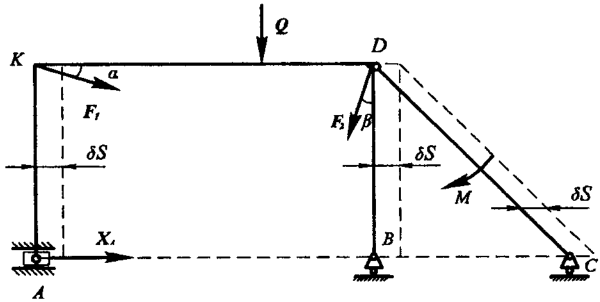
Падстаўляем лікавыя значэнні велічынь і падлічваем рэакцыю Y_A.

$$Y_A \cdot 7 + 100 \cdot 0{,}866 \cdot 4 - 100 \cdot 0{,}5 \cdot 7 - 44 \cdot 2{,}2 - 200 \cdot 0{,}5 \cdot 4 = 0.$$

$$Y_A \cdot 7 + 346{,}4 - 350 - 96{,}8 - 400 = 0.$$

$$Y_A \cdot 7 - 500{,}4 = 0. \qquad Y_A = 71{,}5 \text{ Н}.$$

Для вызначэння гарызантальнай складовай X_A рэакцыі нерухомага цыліндрычнага шарніра A адкінем сувязь, якая не дазваляе гарызантальнае перамяшчэнне пункта A рамы, замяніўшы нерухомы цыліндрычны шарнір на паўзун у гарызантальных накіроўваючых і прыклаўшы да яго рэакцыю X_A (рыс. 60).



Рыс. 60

Надаём усёй канструкцыі магчымае пастунальнае перамяшчэнне па гарызанталі ўправа.

Запісваем ураўненне элементарных работ.

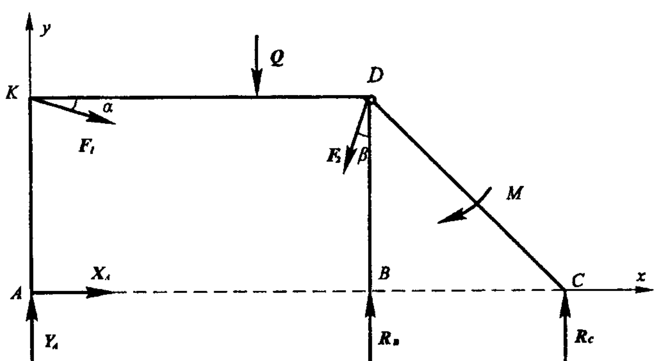
$$X_A \cdot \delta s + F_1 \cdot \cos\alpha \cdot \delta s - F_2 \cdot \sin\beta \cdot \delta s = 0.$$

$$X_A + 100 \cdot 0{,}866 - 200 \cdot 0{,}5 = 0.$$

$$X_A + 86{,}6 - 100 = 0.$$

$$X_A = 13{,}4 \text{ Н}.$$

Праверым правільнасць рашэння задачы. Запішам ураўненне раўнавагі для ўсёй канструкцыі (рыс. 61).



Рыс. 61

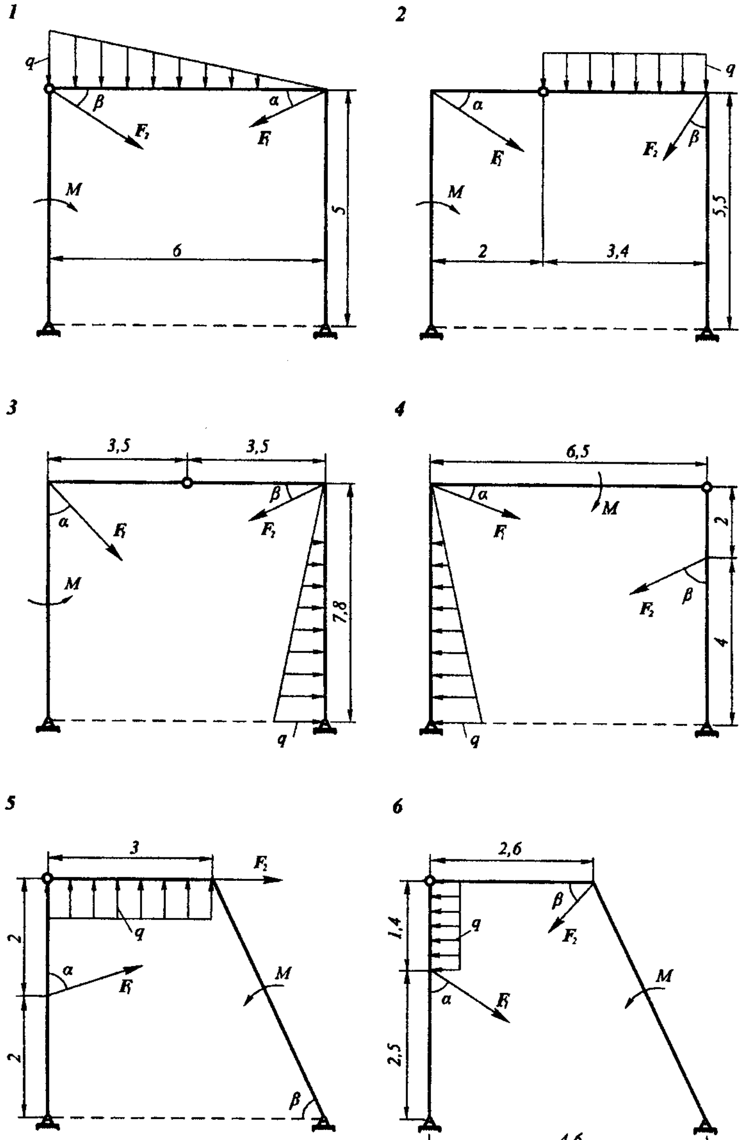
$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \qquad Y_A - F_1 \cdot \sin\alpha - Q - F_2 \cdot \cos\beta + R_B + R_C = 0.$$

$$71{,}5 - 50 - 44 - 173{,}2 + 188{,}2 + 7{,}5 = 0.$$

$$267{,}2 - 267{,}2 = 0.$$

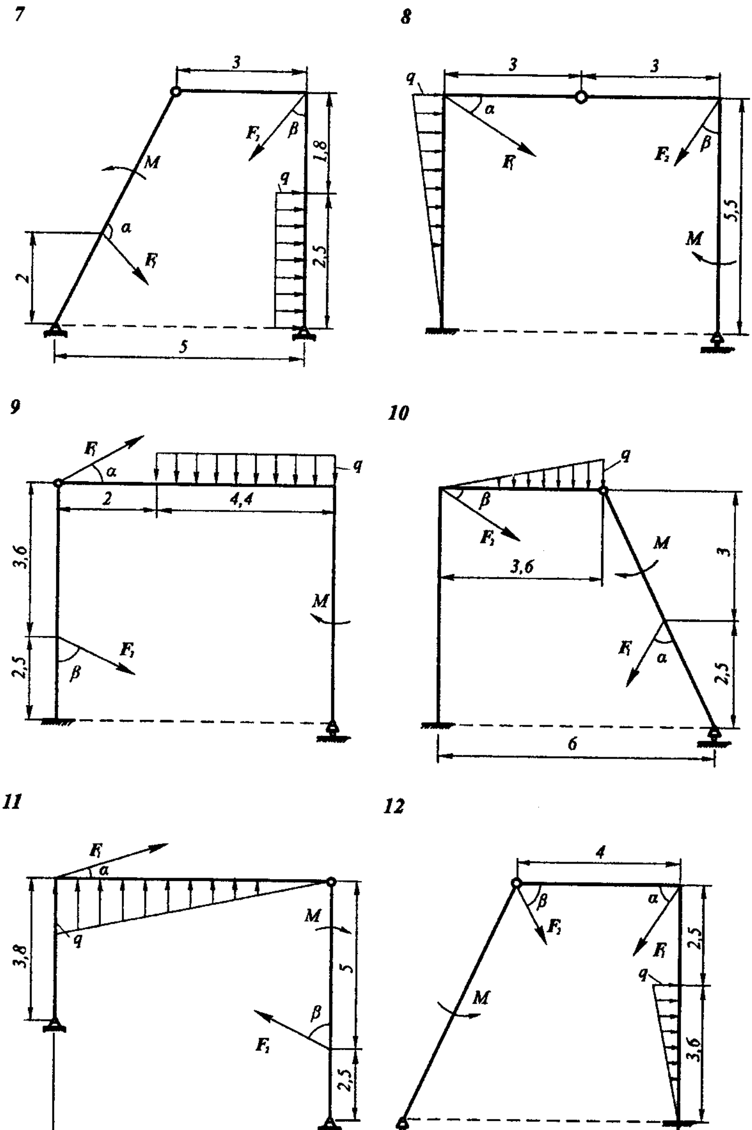
Табліца 14

Вары-янт	F_1, Н	F_2, Н	M, Нм	q, Н/м	α, град	β, град
1	150	180	190	25	30	40
2	140	170	180	30	30	30
3	130	160	170	40	40	25
4	120	150	160	50	25	50
5	110	140	150	35	70	65
6	100	130	140	40	45	55
7	90	120	130	45	90	30
8	80	110	120	25	30	35
9	70	100	110	30	30	65
10	150	120	100	50	60	35
11	140	110	90	25	20	70
12	130	100	80	30	65	70
13	120	90	140	35	25	–
14	110	80	130	40	60	45
15	100	140	120	50	45	30
16	90	130	110	30	40	45
17	80	120	100	45	50	30
18	150	110	90	50	45	50
19	140	80	130	40	30	40
20	130	90	100	45	20	60
21	120	100	110	25	30	25
22	160	80	120	20	30	25
23	150	100	130	25	30	45
24	140	110	100	30	30	40
25	130	90	150	15	20	25
26	120	100	140	50	40	35
27	110	140	130	45	45	30
28	160	80	120	40	35	–
29	150	130	110	35	45	40
30	140	120	100	30	20	30



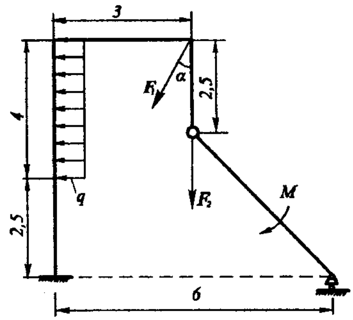
1
q
β
α
F2
F1
M
6
5
2
q
α
F1
β
F2
M
2
3,4
5,5
3
3,5
3,5
β
α
F1
F2
M
7,8
q
4
6,5
α
F1
M
2
F2
β
4
q
5
3
F2
2
q
α
F1
M
2
β
6
2,6
β
F2
q
1,4
α
F1
M
2,5
4,6

Рыс. 62

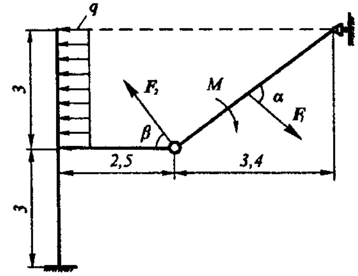

7
3
1,8
2,5
2
5
M
q
α
β
8
3
3
5,5
M
q
α
β
9
2
4,4
3,6
2,5
M
q
α
β
10
3,6
3
2,5
6
M
q
α
β
11
3,8
5
2,5
8,4
M
q
α
β
12
4
2,5
3,6
6
M
q
α
β

Рыс. 63

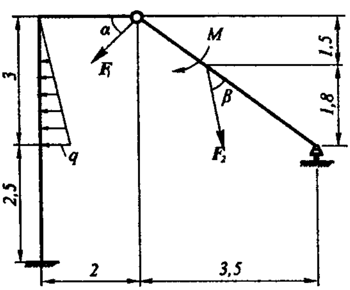
13



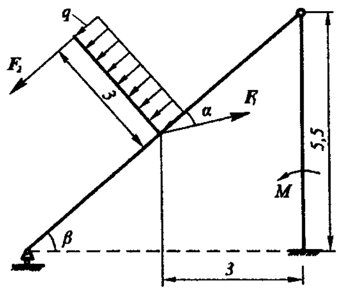
14



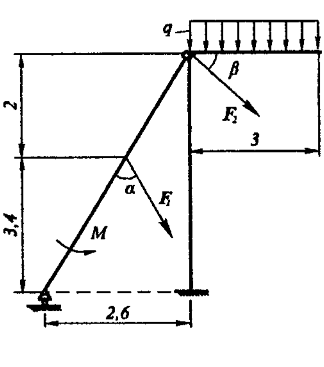
15



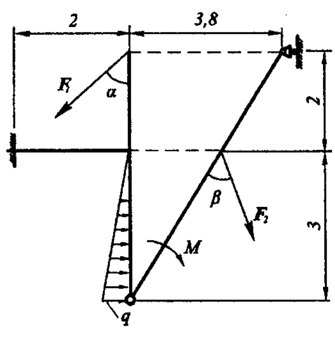
16



17

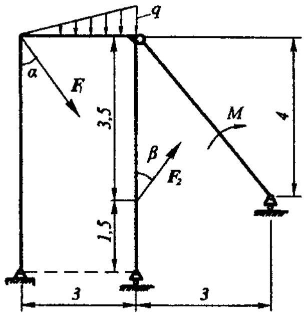


18

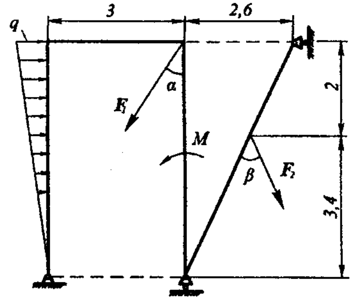


Рыс. 64

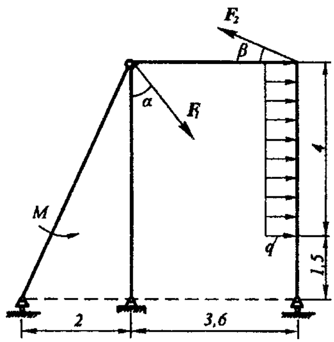
19



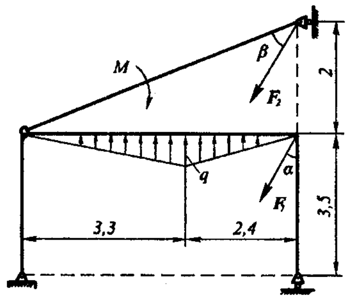
20



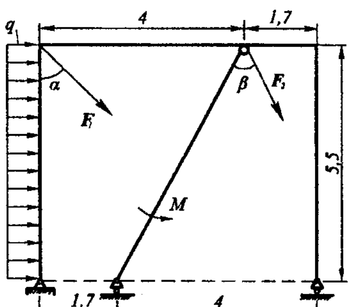
21



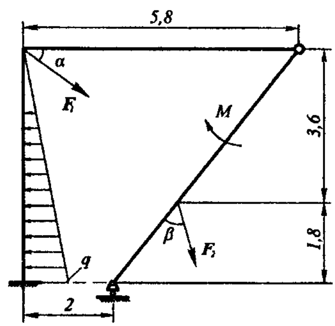
22



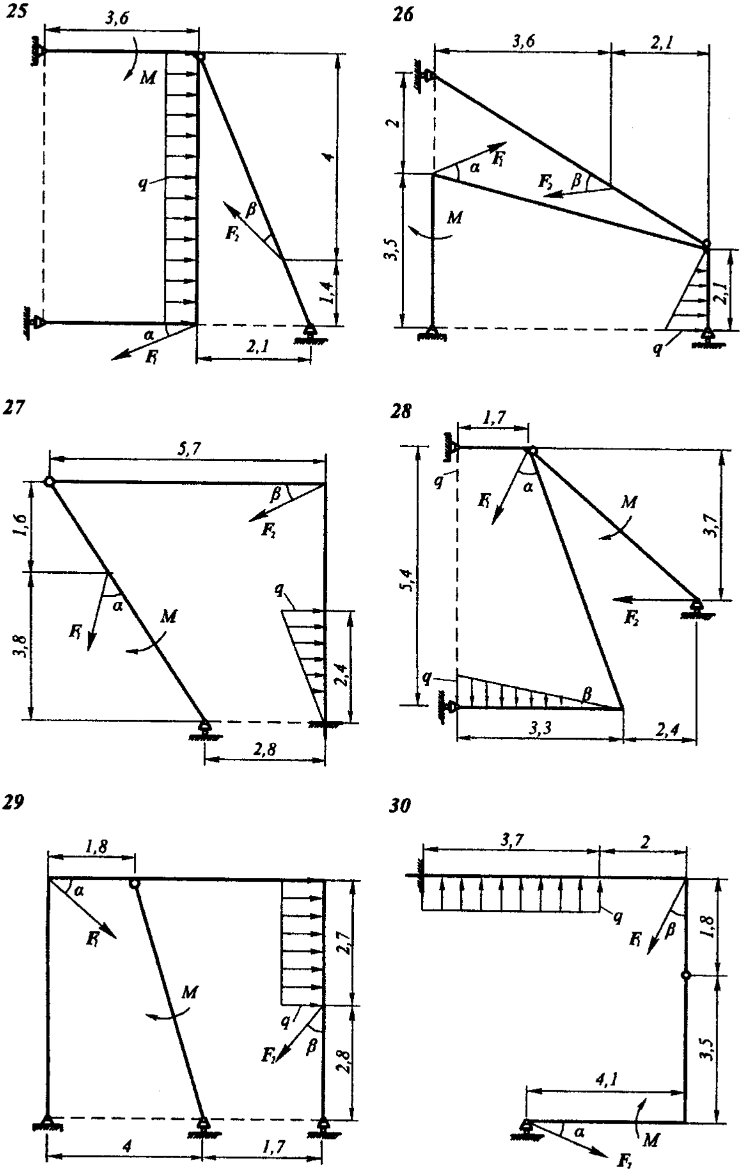
23



24



Рыс. 65


25
3,6
M
q
4
β
F2
1,4
α
F1
2,1
26
3,6
2,1
2
α
F1
F2
β
M
3,5
2,1
q
27
5,7
β
F2
1,6
α
F1
M
q
3,8
2,4
2,8
28
1,7
q
F1
α
M
3,7
5,4
F2
q
β
3,3
2,4
29
1,8
α
F1
M
2,7
q
F2
β
2,8
4
1,7
30
3,7
2
q
F1
β
1,8
3,5
4,1
α
M
F2

Рыс. 66

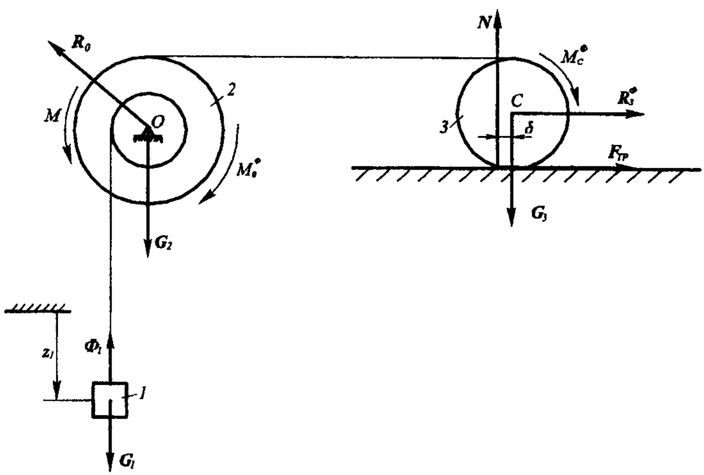
Заданне Д-14

Даследаванне руху механічнай сістэмы з дапамогаю агульнага ўраўнення дынамікі

Механічная сістэма (рыс. 68–72) рухаецца са стану спакою пад уздзеяннем сілы $\boldsymbol{F}$ або моманту M. Вызначыць паскарэнне грузу 1 у момант $\tau = 2$ с і атрымаць ураўненне яго руху. Усе каткі і блокі лічыць аднароднымі цыліндрамі. Прыняць, што качэнне целаў па нерухомай паверхні ажыццяўляецца без праслізгвання. δ — каэфіцыент трэння качэння, i_{2x} — радыус інерцыі цела 2 адносна яго цэнтральнай восі, φ — вугал павароту ад пачатку руху цела. Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 15.

Прыклад рашэння задання Д-14

Механічная сістэма (рыс. 67) рухаецца са стану спакою пад уздзеяннем моманту $M = 0{,}1\varphi_2$ (Нм). Вызначыць паскарэнне грузу 1 у момант $\tau = 2$ с і атрымаць ураўненне яго руху, калі вядома, што $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 3$ кг, $r_2 = 0{,}1$ м, $R_2 = 0{,}2$ м, $i_{2x} = 0{,}15$ м, $R_3 = 0{,}15$ м, $\delta = 0{,}01$ м.



Рыс. 67

Табліца 15

Ва-ры-янт	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	r_2, м	R_2, м	R_3, м	i_{2x}, м	δ, м	α, град	F, Н	M, Нм
1	1	2	3	0,12	0,17		0,15			$25+t$	
2	2	3	4	0,10	0,16	0,14	0,14	0,005	45		$6+\varphi_2$
3	3	4	2	0,12	0,18	0,14	0,16				$7+t$
4	4	5	3		0,16	0,16					$8+\varphi_3$
5	5	3	4			0,20		0,003		$35+t$	
6	1	2	3	0,14	0,20	0,18	0,17	0,008			$0{,}3\varphi_3$
7	2	3	4		0,15	0,20		0,007	20	$2t$	
8	3	4	5	0,13	0,19		0,15				$0{,}2\varphi_2$
9	4	5	3	0,10	0,15	0,13	0,12	0,008	35	$5t$	
10	5	4	3	0,12	0,18	0,14	0,16				$0{,}8\varphi_3$
11	4	3	2	0,11	0,16	0,15	0,14			$3+t$	
12	3	2	1			0,10		0,004	20	$20-t$	
13	2	1	5	0,15	0,20	0,16	0,17	0,003	40	$6+t$	
14	1	5	4	0,13	0,19	0,14	0,16				$6+\varphi_3$
15	5	4	3			0,18		0,005			$0{,}1\varphi_3$
16	4	3	2	0,14	0,21	0,15	0,18	0,006		$10+t$	
17	3	2	1	0,15	0,20	0,16	0,17	0,007	45		$2+\varphi_3$
18	2	1	5	0,16	0,24	0,19	0,21	0,004			$0{,}5\varphi_3$
19	1	5	4	0,12	0,18	0,18	0,16	0,005			$0{,}8\varphi_2$
20	5	4	3	0,13	0,20	0,20	0,17	0,006		$13-t$	
21	4	3	2	0,14	0,19	0,16	0,17				$6+t$
22	3	2	1	0,15	0,23	0,19	0,20	0,007	30		$0{,}9\varphi_2$
23	1	3	2	0,16	0,24	0,14	0,21	0,008	18	$30+t$	
24	2	1	3	0,10	0,15	0,14	0,13	0,004			$5+t$
25	3	4	5	0,11	0,17	0,12	0,15	0,005	45		$1{,}1\varphi_3$
26	4	5	1	0,12	0,18	0,17	0,16			$18+t$	
27	5	4	2			0,20		0,006	25		$0{,}2\varphi_3$
28	1	3	4	0,16	0,24	0,12	0,21	0,007		$15-t$	
29	2	4	5	0,13	0,20	0,14	0,17	0,008	20	$9+t$	
30	3	5	1	0,14	0,19	0,20	0,16	0,006	30		$0{,}9\varphi_3$

Р а ш э н н е. Заданне выконваем з ужываннем агульнага ўраўнення дынамікі. Сістэма мае адну ступень свабоды. За абагульненую каардынату прымем каардынату z_1 грузу 1. Паказваем усе знешнія сілы (актыўныя і рэакцыі сувязей) і для кожнага цела галоўныя вектары і галоўныя моманты сіл інерцыі адносна іх цэнтраў мас.

Надаём механічнай сістэме магчымае перамяшчэнне за кошт варыяцыі абагульненай каардынаты δz_1 і запісваем агульнае ўраўненне дынамікі.

$$(G_1 - \Phi_1)\cdot\delta z_1 + (M - M_o^{\Phi})\cdot\delta\varphi_2 - (N\cdot\delta + M_c^{\Phi})\cdot\delta\varphi_3 - R_3^{\Phi}\cdot\delta s_c = 0 .$$

Выразім усе магчымыя перамяшчэнні праз δz_1.

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta z_1}{r_2} = 10\delta z_1 , \qquad \delta\varphi_3 = \frac{\delta\varphi_2\cdot R_2}{2R_3} = \frac{10\cdot\delta z_1\cdot 0{,}2}{2\cdot 0{,}15} = \frac{20}{3}\delta z_1 ,$$

$$\delta s_c = \delta\varphi_3\cdot R_3 = \frac{20}{3}\delta z_1\cdot 0{,}15 = \delta z_1 .$$

Атрымаем выразы галоўных вектараў і галоўных момантаў сіл інерцыі кожнага цела.

$$\Phi_1 = m_1 a_1 = a_1 , \quad M_0^{\Phi} = I_0\varepsilon_2 = m_2\cdot i_{2x}^2\cdot\frac{a_1}{r_2} = 2\cdot 0{,}15^2\cdot\frac{a_1}{0{,}1} = 0{,}45a_1 ,$$

$$M_c^{\Phi} = I_c\cdot\varepsilon_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2}\cdot\frac{a_1 R_2}{r_2\cdot 2R_3} = \frac{3\cdot 0{,}15^2\cdot a_1\cdot 0{,}2}{2\cdot 0{,}1\cdot 2\cdot 0{,}15} = 0{,}225a_1 ,$$

$$R_3^{\Phi} = m_3\cdot a_c = m_3\frac{a_1\cdot R_2}{r_2\cdot 2} = 3\frac{a_1\cdot 0{,}2}{0{,}1\cdot 2} = 3a_1 .$$

Астатнія сілы, якія ўключаны ва ўраўненне, маюць значэнні:

$$G_1 = m_1 g = 9{,}8\text{ Н}, \quad N = G_3 = m_3\cdot g = 3\cdot 9{,}8 = 29{,}4\text{ Н} .$$

З улікам атрыманых велічынь ураўненне будзе мець наступны выгляд:

$$(9{,}8 - a_1)\delta z_1 + (0{,}1\varphi_2 - 0{,}45a_1)10\delta z_1 -$$

$$-(0{,}294 + 0{,}225a_1)\frac{20}{3}\delta z_1 - 3a_1\delta z_1 = 0.$$

Пасля скарачэння на δz_1 і прывядзення падобных членаў атрымаем:

$$a_1 - 0{,}14\varphi_2 = 1{,}12 .$$

Перапішам, маючы на ўвазе, што $a_1 = \ddot{z}_1$, $\varphi_2 = \dfrac{z_1}{r_2} = \dfrac{z_1}{0{,}1} = 10z_1$.

$$\ddot{z}_1 - 1{,}4z_1 = 1{,}12 .$$

Атрымалі лінейнае дыферэнцыяльнае ўраўненне другога парадку з пастаяннымі каэфіцыентамі, неаднароднае, акое апісвае рух грузу 1.

Агульнае рашэнне гэтага неаднароднага ўраўнення

$$z_1 = \bar{z}_1 + z_1^* .$$

Атрымаем агульнае рашэнне $\bar{z}_1$ аднароднага ўраўнення

$$\ddot{z}_1 - 1{,}4z_1 = 0 .$$

Яго характарыстычнае ўраўненне $\lambda^2 - 1{,}4 = 0$. Карані $\lambda_1 = 1{,}18$, $\lambda_2 = -1{,}18$.

Тады $\bar{z}_1 = C_1 \cdot e^{1{,}18t} + C_2 e^{-1{,}18t}$.

З улікам таго, што правая частка неаднароднага ўраўнення канстанта, а карані $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$, прыватнае рашэнне неаднароднага ўраўнення $z_1^* = B$.

Падстаўляем z_1^* у неаднароднае ўраўненне і знаходзім значэнне B па метаду нявызначаных каэфіцыентаў.

$$-1{,}4B = 1{,}12; \quad B = -0{,}8.$$

Цяпер агульнае рашэнне неаднароднага ўраўнення мае выгляд

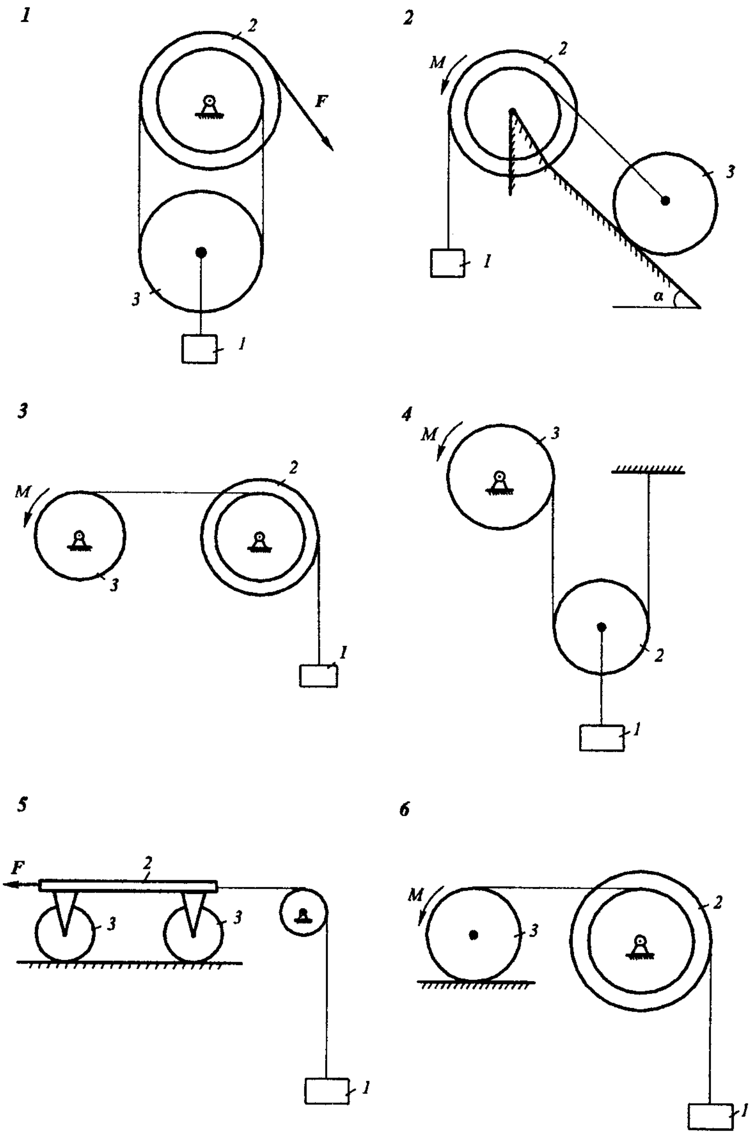
$$z_1 = C_1 \cdot e^{1{,}18t} + C_2 \cdot e^{-1{,}18t} - 0{,}8 .$$

У пачатковы момант руху механічнай сістэмы $t_0 = 0$, $z_1 = 0$, $\dot{z}_1 = 0$. З дапамогай гэтых пачатковых умоў руху знаходзім C_1 і C_2.

$$\dot{z}_1 = 1{,}18C_1 \cdot e^{1{,}18t} - 1{,}18C_2 \cdot e^{-1{,}18t} .$$

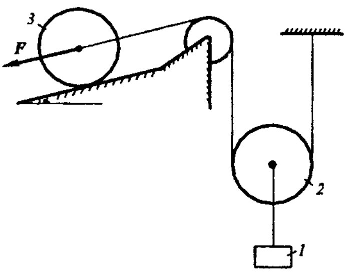
$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 - 0{,}8, \\ 0 = 1{,}18C_1 - 1{,}18C_2 . \end{cases}$$

$$C_1 = C_2 = 0{,}4.$$

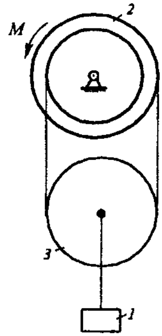


Рыс. 68

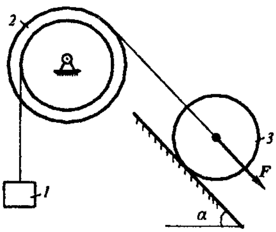
7



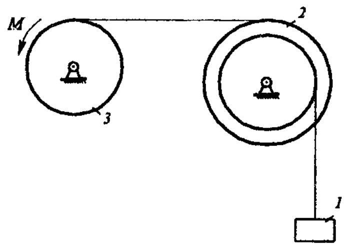
8



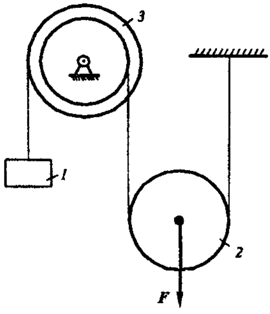
9



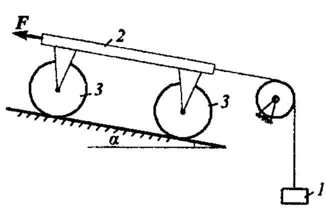
10



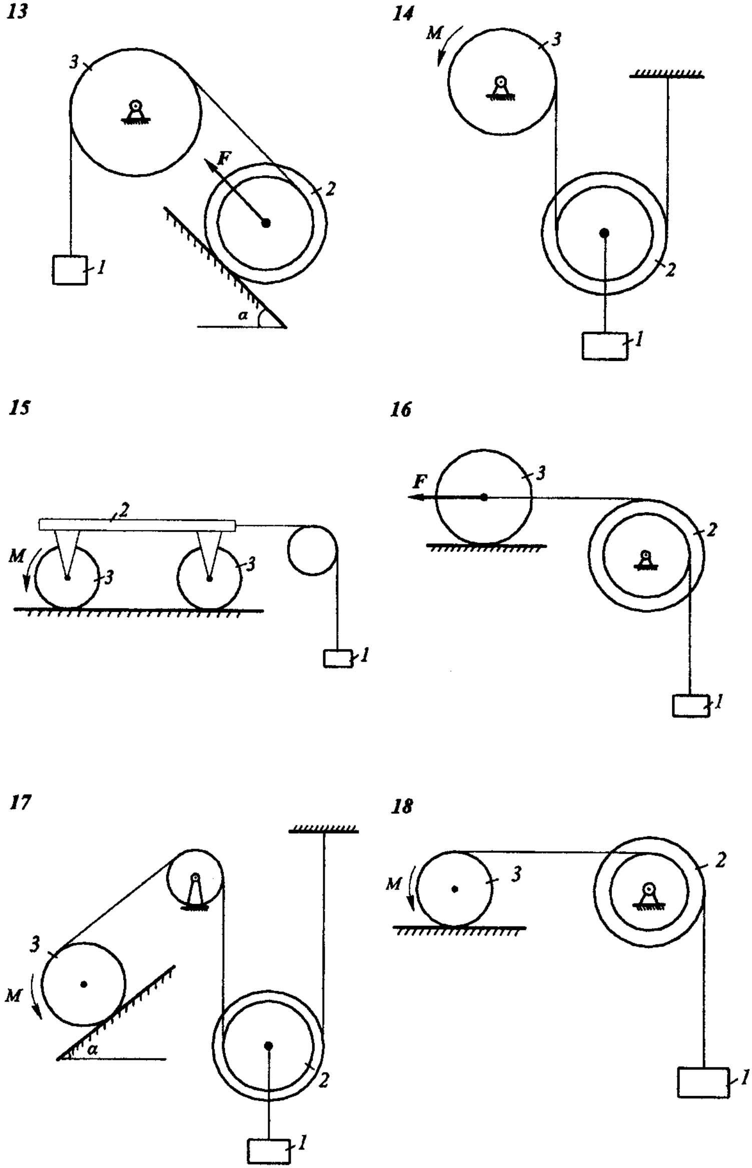
11



12

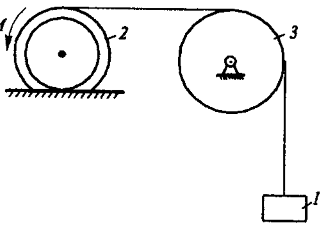


Рыс. 69

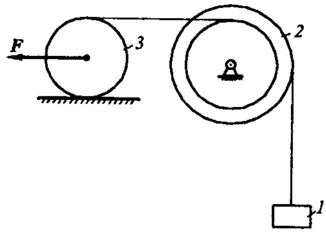


Рыс. 70

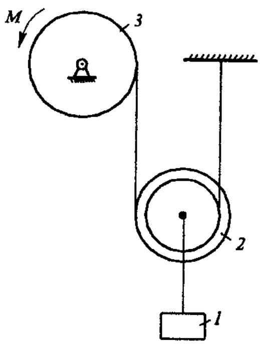
19



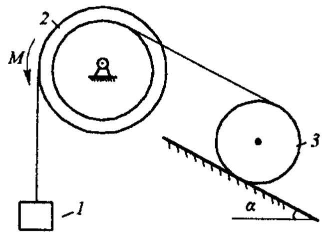
20



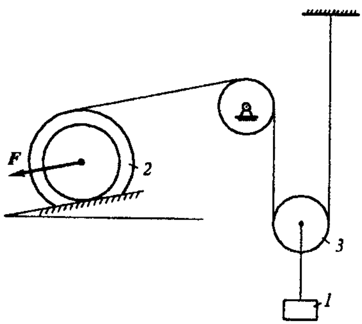
21



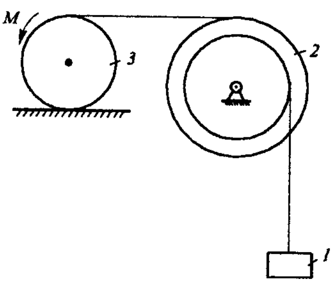
22



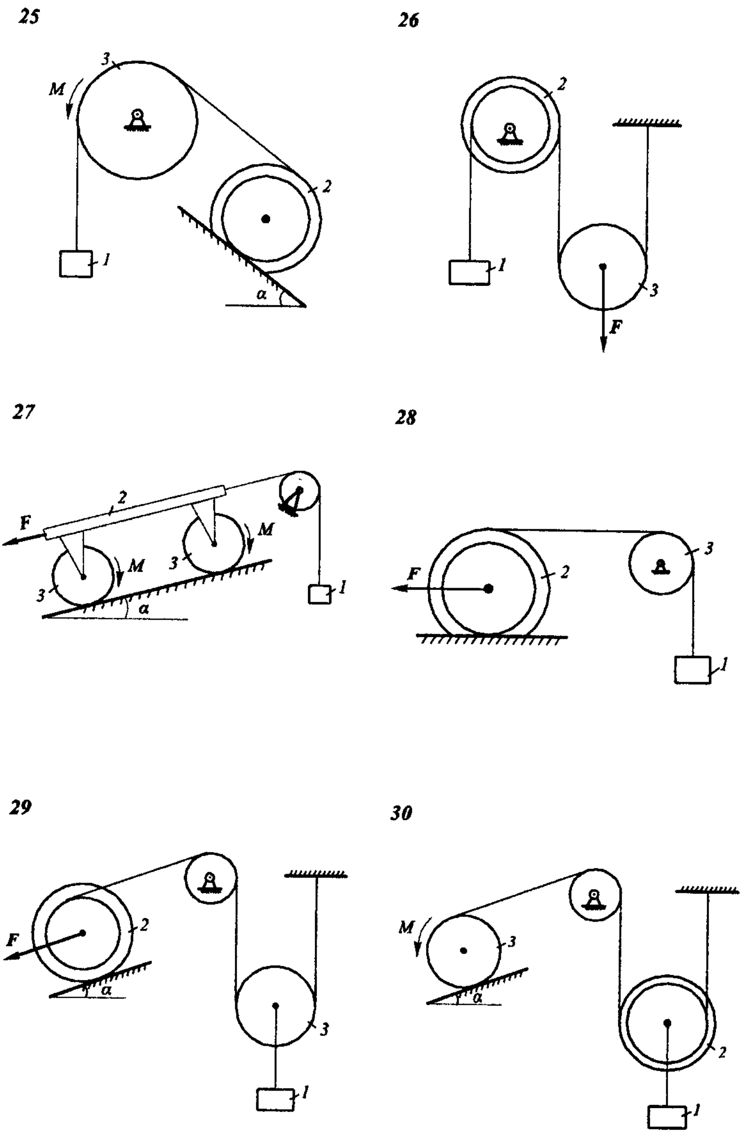
23



24



Рыс. 71



Рыс. 72

Канчаткова атрымаем ураўненне руху грузу 1:

$$z_1 = 0{,}4 \cdot e^{1{,}18t} + 0{,}4 \cdot e^{-1{,}18t} - 0{,}8 = 0{,}4(e^{1{,}18t} + e^{-1{,}18t} - 2)\ \text{м}.$$

Праекцыя паскарэння грузу 1 на вось z

$$\ddot{z}_1 = 0{,}556(e^{1{,}18t} + e^{-1{,}18t}).$$

У момант $\tau = 2$ с паскарэнне грузу 1

$$a_1 = 0{,}556(e^{2{,}36} + e^{-2{,}36}) = 6\ \text{м/с}^2.$$

Заданне Д-15

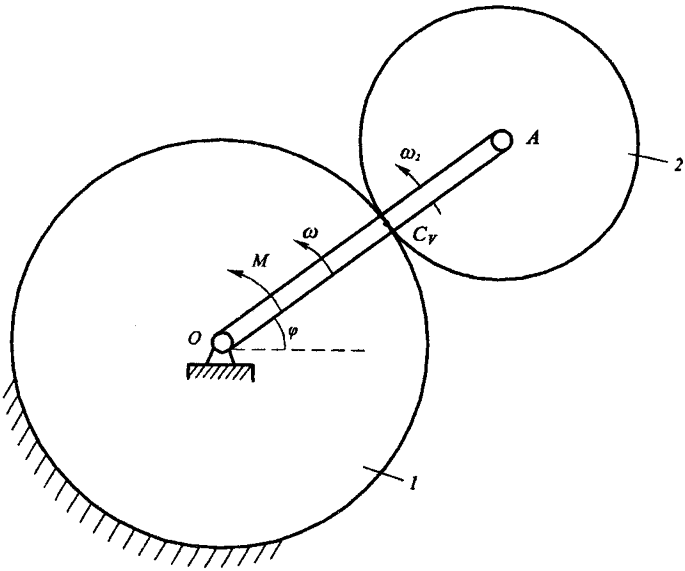
Даследаванне руху механічнай сістэмы з адною ступенню свабоды з выкарыстаннем ураўнення Лагранжа

Механічная сістэма (рыс. 74–76) рухаецца пад уздзеяннем моманту M пары сіл або сілы $\boldsymbol{F}$. Запісаць ўраўненне Лагранжа і вызначыць кінематычны параметр цела, адзначаны ў табліцы. У варыянтах 1, 2, 3 усе звёны механізма рухаюцца ў гарызантальных плоскасцях, у астатніх варыянтах — у вертыкальных плоскасцях. Крывашыпы лічыць аднароднымі стрыжнямі, колы, блокі — аднароднымі дыскамі. Качэнне колаў па апорных паверхнях адбываецца без праслізгвання; δ — каэфіцыент трэння качэння, f — каэфіцыент трэння слізгання грузу на апорнай паверхні, i_{2x} — радыус інерцыі цела 2 адносна яго цэнтральнай восі.

Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 16.

Прыклад рашэння задання Д-15

Крывашып OA планетарнага механізма (рыс. 73) верціцца вакол нерухомай вертыкальнай восі Oz пад уздзеяннем вярчальнага моманту M і прыводзіць у рух кола 2, якое коціцца без праслізгвання па нерухомым коле 1. Вызначыць вуглавое паскарэнне крывашыпа з дапамогай ураўнення Лагранжа, калі вядома, што $m_2 = 10$ кг, $m_{OA} = 3$ кг, $r_1 = 0{,}3$ м, $r_2 = 0{,}2$ м, $M = 8$ Нм. Крывашып лічыць аднародным стрыжнем, кола 2 — аднародным дыскам.



Рыс. 73

Р а ш э н н е . Механізм мае адну ступень свабоды. За абагульненую каардынату выбіраем вугал φ павароту крывашыпа OA вакол вертыкальнай восі Oz.

Складзём ураўненне Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}$$

для разглядаемага планетарнага механізма. Падлічым кінетычную энергію T механічнай сістэмы як функцыю абагульненай каардынаты φ і абагульненай скорасці $\dot{\varphi}$.

$$T = T_{OA} + T_2 .$$

Крывашып OA ўдзельнічае ў вярчальным руху, таму

$$T_{OA} = \frac{I_{Oz} \cdot \omega_{OA}^2}{2} = \frac{m_{OA}(r_1 + r_2)^2}{3} \cdot \frac{\dot{\varphi}^2}{2} .$$

Кола 2 удзельнічае ў плоскапаралельным руху, таму

$$T_2 = \frac{m_2 v_A^2}{2} + \frac{I_{Az} \cdot \omega_2^2}{2}.$$

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = \dot{\varphi}(r_1 + r_2), \quad I_{Az} = \frac{m_2 r_2^2}{2}, \quad \omega_2 = \frac{v_A}{AC_v} = \dot{\varphi}\frac{r_1 + r_2}{r_2}.$$

З улікам гэтых выразаў маем:

$$T_2 = \frac{m_2 \dot{\varphi}^2 (r_1 + r_2)^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2 \cdot \dot{\varphi}^2 (r_1 + r_2)^2}{4 \cdot r_2^2} = \frac{3}{4} m_2 \dot{\varphi}^2 (r_1 + r_2)^2.$$

Кінетычная энергія механічнай сістэмы мае выраз

$$T = \frac{m_{OA}}{6}(r_1 + r_2)^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{3}{4} m_2 \dot{\varphi}^2 (r_1 + r_2)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{6} m_{OA} + \frac{3}{4} m_2\right)(r_1 + r_2)^2 \cdot \dot{\varphi}^2.$$

Пасля падстаноўкі вядомых лікавых значэнняў велічынь атрымаем:

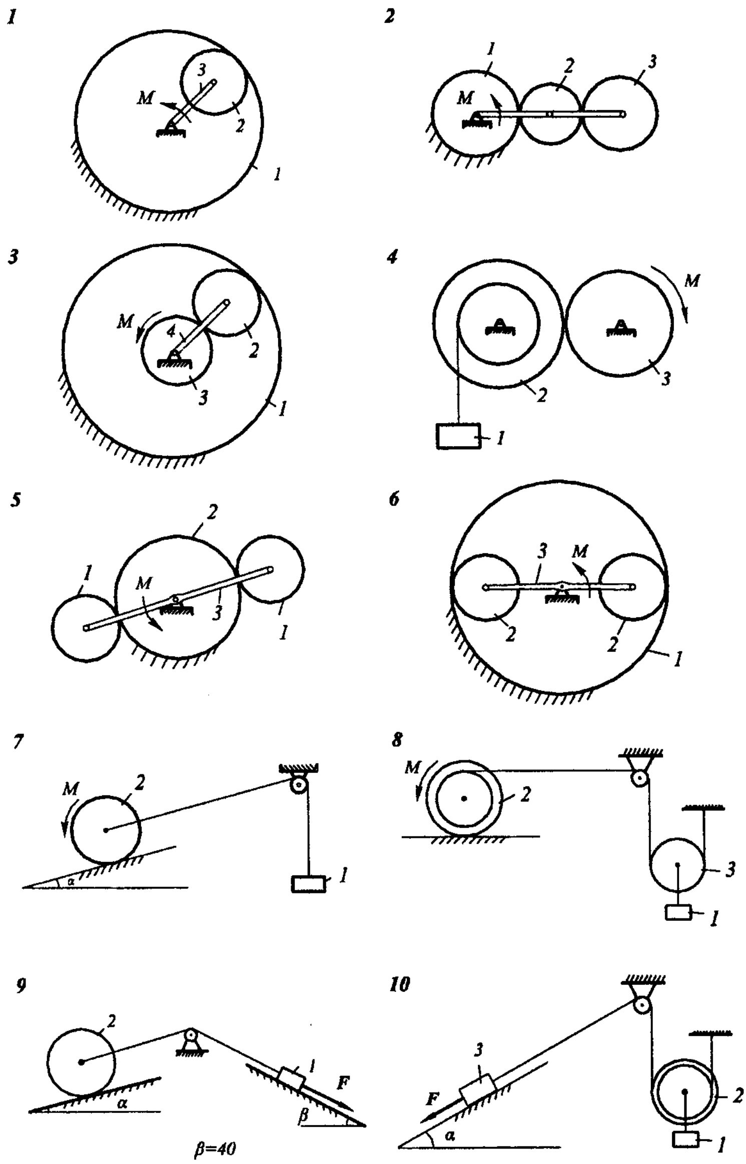
$$T = \left(\frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{3}{4} \cdot 10\right)(0{,}3 + 0{,}2)^2 \cdot \dot{\varphi}^2 = 2\dot{\varphi}^2.$$

Запішам выразы неабходных вытворных для левай часткі ўраўнення Лагранжа.

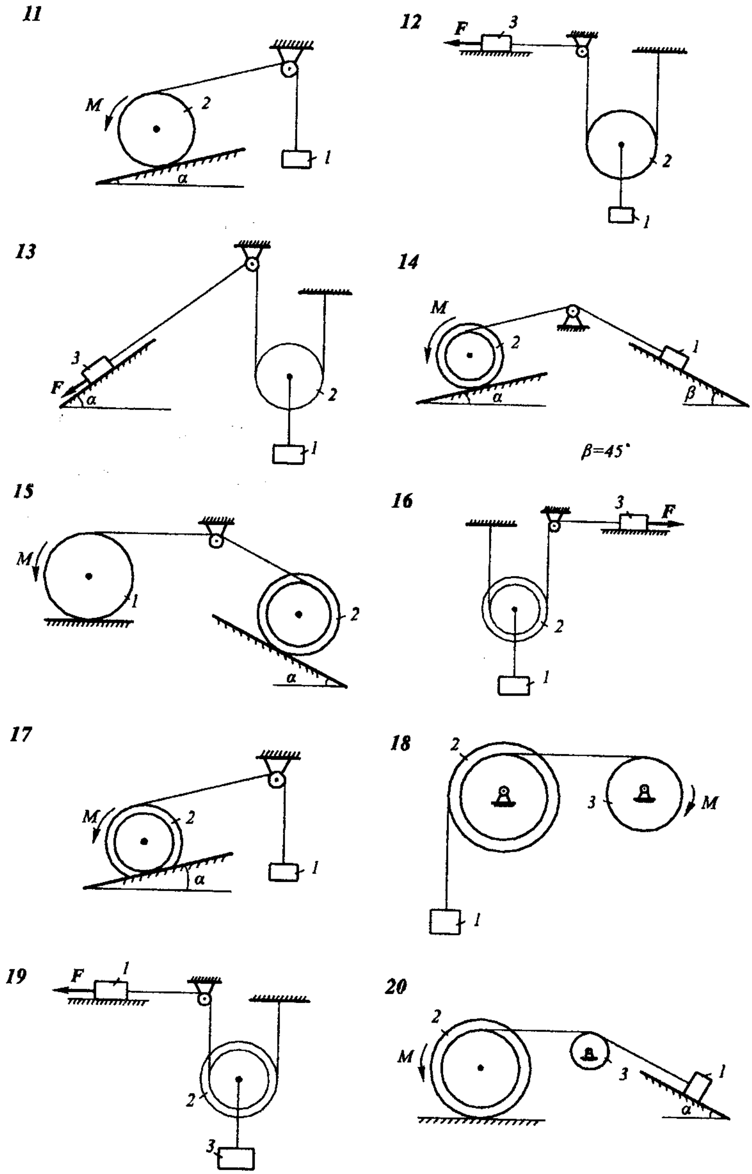
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 4\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 4\ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Атрымаем значэнне абагульненай сілы Q_φ, якая адпавядае абагульненай каардынаце φ.

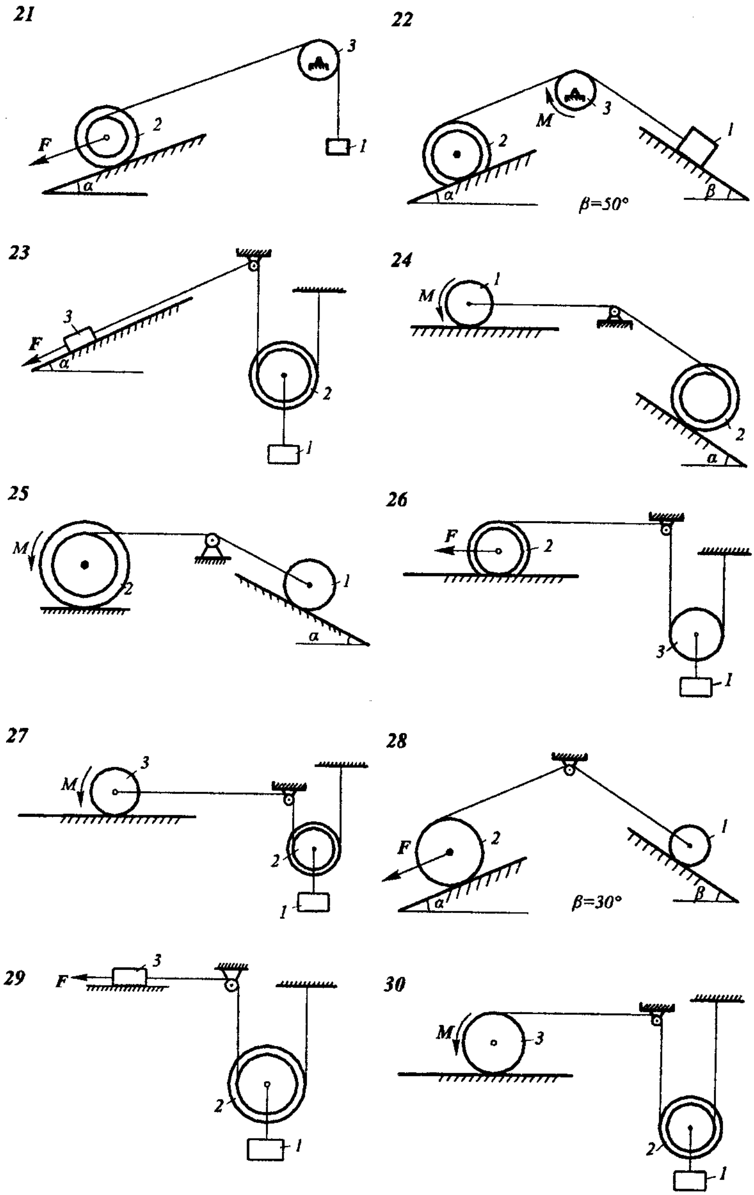
$$Q_\varphi = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \delta A_k\right)_\varphi}{\delta \varphi}.$$



Рыс. 74


11
M
2
1
α
12
F
3
2
1
13
3
F
α
2
1
14
M
2
1
α
β
β=45°
15
M
1
2
α
16
3
F
2
1
17
M
2
1
α
18
2
3
M
1
19
F
1
2
3
20
2
M
3
1
α

Рыс. 75



Рыс. 76

Табліца 16

Варыянт	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	R_1, м	r_2, м	R_2, м	i_{2x}, м	R_3, м	α, град	δ, м	f	M, Нм	F, Н	Знайсці
1		4,2	2,3	0,60		0,20						5,5		ε_3
2		3,4	5,0	0,30		0,20		0,25				9,2		ε_4
3		2,0	2,2	0,75		0,24						4,5		ε_4
4	3,6	4,8	3,5		0,15	0,28	0,24	0,20				6,0		a_1
5	4,0		2,6	0,24		0,30						4,0		ε_3
6		5,0	3,6	0,40		0,13						5,2		ε_3
7	4,5	6,5				0,20			20	0,004		9,8		a_1
8	2,4	4,4	1,2		0,16	0,24	0,20			0,005		8,5		a_1
9	3,5	4,0				0,18			22	0,006	0,12		10	ε_2
10	3,0	4,5	5,0		0,10	0,14	0,13		30		0,13		30	a_3
11	3,2	5,2				0,22			28	0,007		9,6		ε_2
12	3,4	4,1	3,6								0,14		46	a_3
13	3,5	5,0	4,0						40		0,15		25	a_1
14	5,0	6,0			0,18	0,25	0,21		25	0,008	0,10	5,0		a_1
15	5,5	6,5		0,20	0,20	0,26	0,22		28	0,003		9,5		ε_1
16	4,0	6,0	5,0		0,16	0,20	0,18				0,11		35	a_3
17	4,5	5,5			0,20	0,25	0,23		20	0,004		4,5		a_1
18	5,0	6,0	3,0		0,14	0,22	0,19	0,12				6,0		ε_3
19	3,0	4,0	2,5		0,15	0,20	0,18				0,12		15	a_1
20	6,0	5,5	1,5		0,16	0,22	0,20		45	0,005	0,13	7,0		ε_2
21	3,5	4,0	2,0		0,18	0,25	0,23		22	0,006			48	a_1
22	4,0	5,0	3,5		0,20	0,26	0,24	0,20	25	0,007	0,14	8,0		ε_3
23	4,5	3,5	6,0		0,15	0,20	0,18		20		0,15		40	a_3
24	5,0	6,5		0,15	0,16	0,19	0,18		30	0,008		6,5		ε_1
25	4,0	5,5			0,18	0,25	0,22		40	0,004		7,0		ε_2
26	6,0	4,0	3,0		0,20	0,26	0,24			0,005			80	a_1
27	5,5	3,5	5,0		0,16	0,19	0,18	0,22		0,006		9,0		ε_3
28	3,5	4,5							22	0,007			50	ε_1
29	5,0	4,0	6,0		0,12	0,16	0,15				0,10		60	a_3
30	4,5	5,0	5,5		0,15	0,22	0,20	0,18		0,008		9,8		a_1

Запішам выраз сумы элементарных работ усіх знешніх сіл, што дзейнічаюць на сістэму, на магчымых перамяшчэннях, якія адпавядаюць варыяцыі $\delta\varphi$ абагульненай каардынаты. Няхай вугал φ умоўна павялічыцца на $\delta\varphi$. Тады $\delta s_A = \delta\varphi \cdot OA = \delta\varphi \cdot (r_1 + r_2)$,

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta s_A}{r_2} = \delta\varphi \frac{r_1 + r_2}{r_2}.$$

З усіх актыўных нагрузак элементарную работу выконвае толькі момант M. Работа сіл цяжару на магчымых перамяшчэннях роўная нулю, таму што цэнтры цяжару рухаюцца ў гарызантальных плоскасцях.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \delta A_k \right)_{\varphi} = M \cdot \delta\varphi .$$

Абагульненая сіла $Q_\varphi = M$.

Ураўненне Лагранжа для разглядаемага механізма мае наступны выгляд:

$$4\ddot{\varphi} = M ,$$

або

$$4\ddot{\varphi} = 8 .$$

Адкуль вуглавое паскарэнне крывашыпа OA

$$\varepsilon_{OA} = \ddot{\varphi} = 2 \text{ рад/с}^2.$$

Заданне Д-16

Прымяненне ўраўнення Лагранжа пры даследаванні руху механічнай сістэмы з дзвюма ступенямі свабоды

Механічная сістэма (рыс. 78–82) рухаецца са стану спакою пад уздзеяннем сілы $\boldsymbol{F}$ або пары сіл з момантам M і сіл цяжару. Карыстаючыся ўраўненнямі Лагранжа, атрымаць ураўненні руху механічнай сістэмы ў абагульненых каардынатах. Лічыць, што качэнне колаў па нерухомых паверхнях атрымліваецца без праслізгвання. Трэнне качэння і сілы трэння ў падшыпніках не ўлічваць. Колы, для якіх не дадзены радыусы інерцыі, лічыць аднароднымі дыскамі. δ – каэфіцыент трэння качэння кола па апорнай паверхні, f – каэфіцыент трэння слізгання грузу па паверхні.

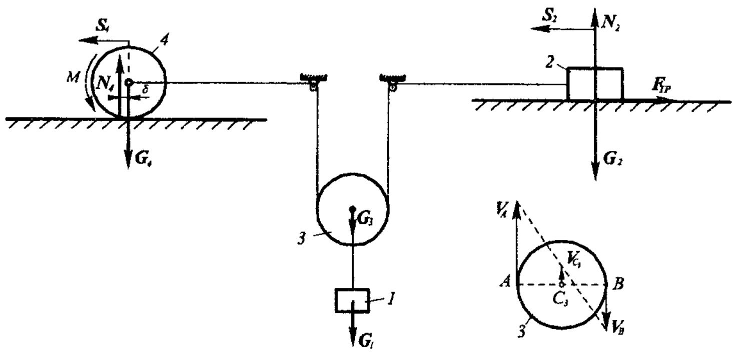
Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 17.

Табліца 17

Варыянт	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	R_1, см	r_2, см	R_2, см	i_{2x}, см	R_3, см	F, Н	M, Нм	α, град	f	δ, см
1	4	6			20	15	22	19			10			0,5
2	5	7			20	25	30	28			12			0,6
3	5	8			22		28			90				0,4
4	6	3			30		20				15			0,3
5	3	5	2		15	18	24	20		80		15		0,2
6	4	9	5			20	26	24	15		16			
7	5	3			18		14				10			
8	2	6	3				22		14		13			
9	3	7	4			30	34	32	16		14			
10	4	6	3						15	70			0,2	
11	1	4	2						12	60		30	0,3	
12	3	4	2			15	18	16	13		10		0,1	
13	2	5			16	18	24	20		80		20		0,1
14	4	8			12	16	20	18			17	35		0,2
15	6	4			18		15			50		20		0,3
16	5	6	3	2	20	15	20	18	12		15	15		0,1
17	4	2			16		12				14	25		0,2
18	3	7	4			10	14	12	10	60			0,2	
19	2	6	3			14	20	17	10		16	45	0,3	
20	1	2	3	4			10			56		70	0,2	
21	2	3	4	2			12			80			0,1	
22	2	5	3			15	20	18	12	70		20	0,3	
23	3	5	4	3		16	18	17		65			0,2	
24	4	5	3	4		18	22	20		50		45	0,1	
25	8	5	3	2					14		6		0,3	
26	9	6	4	3			20		15		12	45	0,1	
27	7	4	3	2	15		18		12		10	40		0,3
28	5	3	2	1	12		20		15		11	45		0,2
29	2	4	3			12	16	14	10	90				0,1
30	1	6	4			10	15	13	13	20				0,3

Прыклад рашэння задання Д-16

Механічная сістэма (рыс. 77) рухаецца са стану спакою пад уздзеяннем пары сіл з момантам M. З дапамогаю ўраўненняў Лагранжа атрымаць ураўненні руху механічнай сістэмы ў абагульненых каардынатах. Качэнне кола 4 адбываецца без праслізгвання (з улікам трэння качэння), груз 2 рухаецца па нягладкай паверхні. Колы лічыць аднароднымі дыскамі. Вядома, што $M = 10$ Нм, $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 5$ кг, $m_3 = 2$ кг, $m_4 = 6$ кг, $r_3 = r_4 = 0{,}2$ м, $f = 0{,}2$, $\delta = 0{,}004$ м.



Рыс. 77

Р а ш э н н е . Механічная сістэма мае дзве ступені свабоды. За абагульненыя каардынаты прымем перамяшчэнне цэнтра цяжару кола 4 і перамяшчэнне цэнтра цяжару грузу 2.

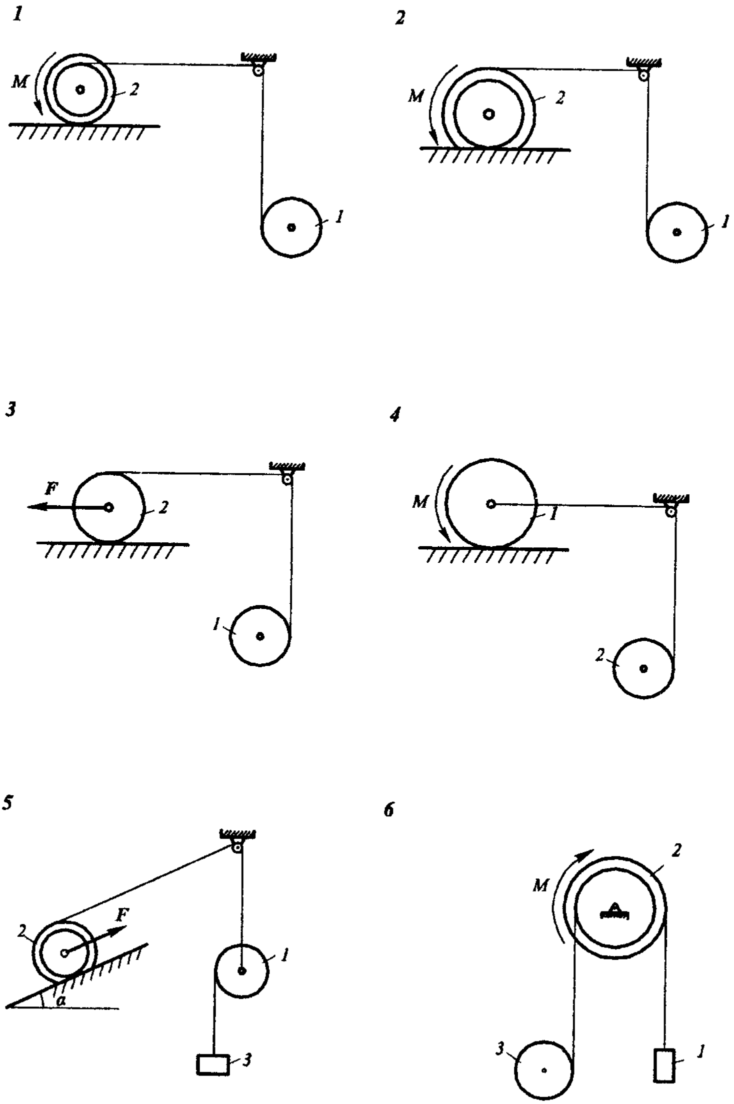
Такім чынам, $q_1 = s_4$, $q_2 = s_2$.

Для рашэння задачы прыменім ураўненні Лагранжа.

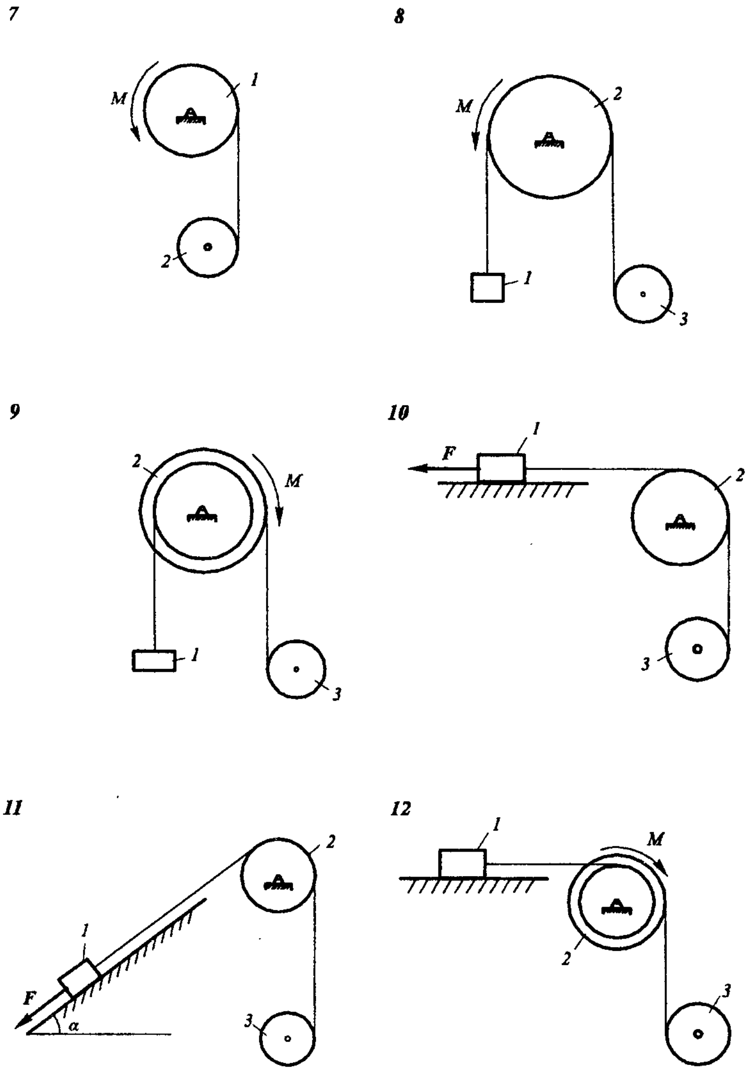
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2.$$

Выразім кінетычную энергію T механічнай сістэмы праз абагульненыя скорасці $\dot{q}_1$ і $\dot{q}_2$ або праз $\dot{s}_4$ і $\dot{s}_2$.

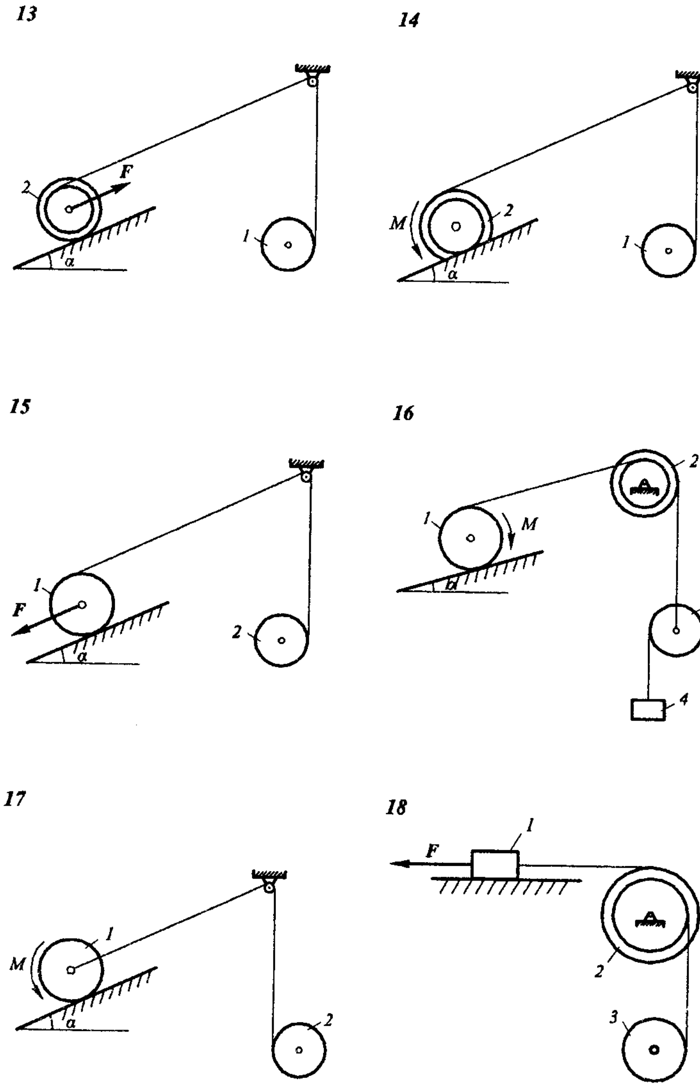
$$T = T_4 + T_2 + T_3 + T_1.$$



Рыс. 78

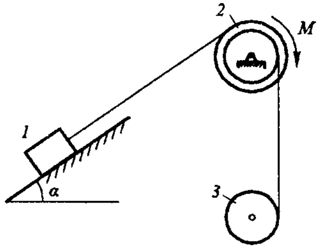


Рыс. 79

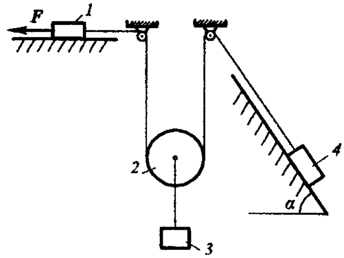


Рыс. 80

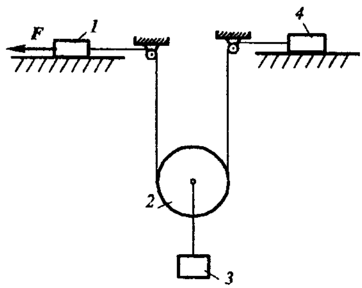
19



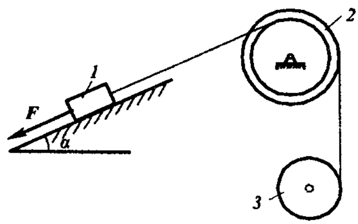
20



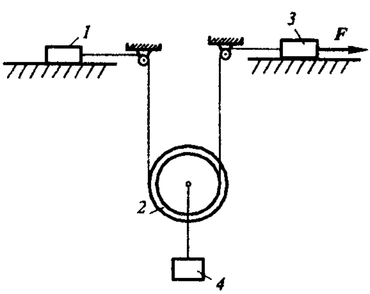
21



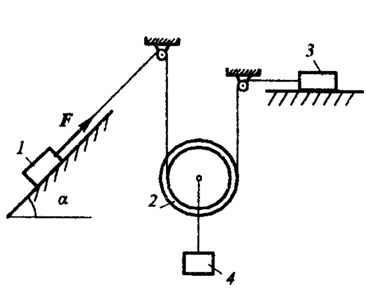
22



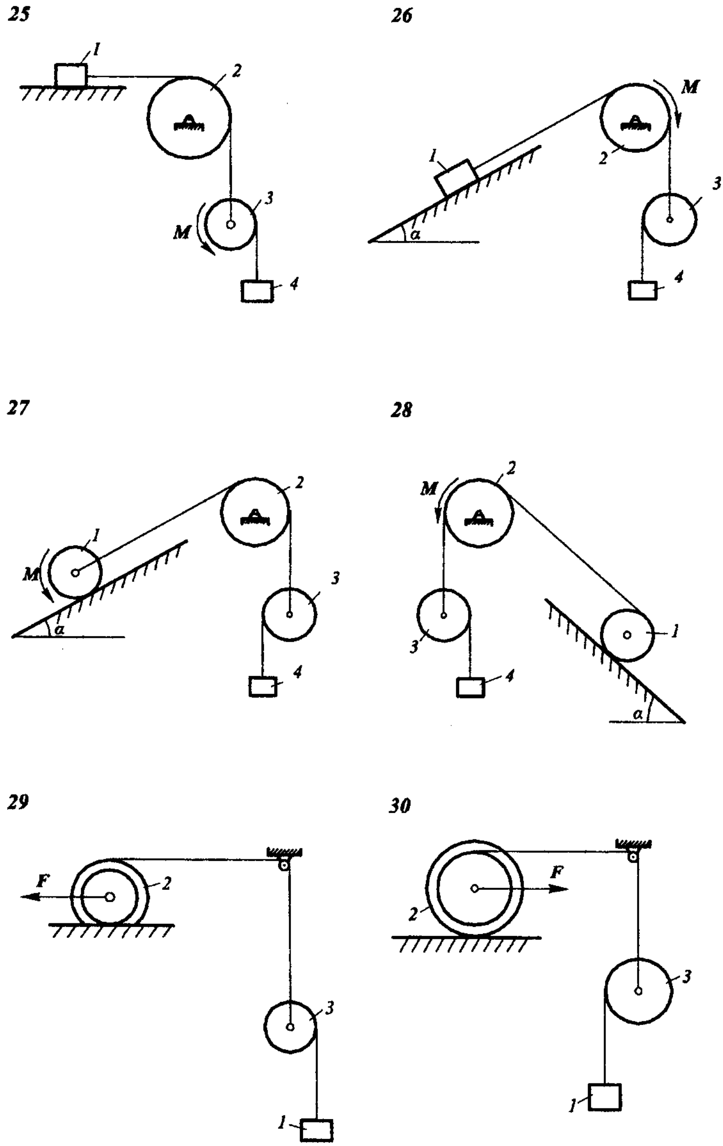
23



24



Рыс. 81



Рыс. 82

Кола 4 рухаецца плоскапаралельна. Яго кінетычная энергія

$$T_4 = \frac{m_4 \cdot v_{c_4}^2}{2} + \frac{I_{c_4} \cdot \omega_4^2}{2}.$$

Скорасць v_{c_4} цэнтра мас кола 4 роўная $\dot{s}_4$.

Восевы момант інерцыі I_{c_4} кола 4 адносна галоўнай цэнтральнай восі

$$I_{c_4} = \frac{m_4 \cdot r_4^2}{2} = \frac{6 \cdot 0{,}04}{2} = 0{,}12 \text{ кг·м}^2.$$

Вуглавая скорасць кола 4 з улікам таго, што пункт дотыку кола да нерухомай апоры з'яўляецца імгненным цэнтрам скорасцей,

$$\omega_4 = \frac{v_{c_4}}{r_4} = \frac{\dot{s}_4}{0{,}2}.$$

Тады

$$T_4 = \frac{6 \cdot \dot{s}_4^2}{2} + \frac{0{,}12 \cdot \dot{s}_4^2}{2 \cdot 0{,}04} = 3\dot{s}_4^2 + 1{,}5\dot{s}_4^2 = 4{,}5\dot{s}_4^2.$$

Кінетычная энергія грузу 2 пры пастулальным руху

$$T_2 = \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} = \frac{5 \cdot \dot{s}_2^2}{2} = 2{,}5\dot{s}_2^2.$$

Рухомы блок 3 удзельнічае ў плоскапаралельным руху. Яго кінетычная энергія

$$T_3 = \frac{m_3 \cdot v_{c_3}^2}{2} + \frac{I_{c_3}\omega_3^2}{2},$$

дзе v_{c_3} — скорасць руху цэнтра мас блока 3;

I_{c_3} — момант інерцыі блока адносна галоўнай цэнтральнай восі C_3;

ω_3 — вуглавая скорасць блока ў час яго руху.

Пры руху цэнтра мас кола 4 пад уздзеяннем моманту M па гарызанталі ўлева скорасць пункта A блока 3 накіравана ўверх (рыс. 77).

Пры руху грузу 2 улева скорасць пункта B блока 3 накіравана ўніз. Пры гэтым $v_A = \dot{s}_4$, $v_B = \dot{s}_2$.

Скорасць цэнтра мас блока вызначаецца як сярэдняя лінія антытрапецыі:

$$v_{c_3} = \frac{v_A - v_B}{2} = \frac{\dot{s}_4 - \dot{s}_2}{2}.$$

Вуглавая скорасць блока вызначаецца як у прыватным выпадку плоскапаралельнага руху цела, калі скорасці двух пунктаў антыпаралельныя.

$$\omega_3 = \frac{v_A + v_B}{2r_3} = \frac{\dot{s}_4 + \dot{s}_2}{0,4}.$$

$$I_{C_3} = \frac{m_3 r_3^2}{2} = \frac{2 \cdot 0,04}{2} = 0,04 \text{ кг·м}^2.$$

Тады кінетычная энергія блока 3

$$T_3 = \frac{2(\dot{s}_4 - \dot{s}_2)^2}{2 \cdot 4} + \frac{0,04 \cdot (\dot{s}_4 + \dot{s}_2)^2}{2 \cdot 0,16} =$$

$$= 0,25(\dot{s}_4 - \dot{s}_2)^2 + 0,125(\dot{s}_4 + \dot{s}_2)^2.$$

Груз 1 рухаецца па вертыкалі пастунальна са скарасцю руху цэнтра мас C_3 блока.

У гэтым выпадку

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{4(\dot{s}_4 - \dot{s}_2)^2}{2 \cdot 4} = 0,5(\dot{s}_4 - \dot{s}_2)^2.$$

Кінетычная энергія пры руху механічнай сістэмы

$$T = 4,5\dot{s}_4^2 + 2,5\dot{s}_2^2 + 0,25(\dot{s}_4 - \dot{s}_2)^2 + 0,125(\dot{s}_4 + \dot{s}_2)^2 + 0,5(\dot{s}_4 - \dot{s}_2)^2 =$$

$$= 4,5\dot{s}_4^2 + 2,5\dot{s}_2^2 + 0,75(\dot{s}_4 - \dot{s}_2)^2 + 0,125(\dot{s}_4 + \dot{s}_2)^2.$$

Атрымаем неабходныя выразы для падстаноўкі ў левыя часткі ўраўненняў Лагранжа.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_4} = 9\dot{s}_4 + 1{,}5(\dot{s}_4 - \dot{s}_2) + 0{,}25(\dot{s}_4 + \dot{s}_2)\ ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_4}\right) = 9\ddot{s}_4 + 1{,}5\ddot{s}_4 - 1{,}5\ddot{s}_2 + 0{,}25\ddot{s}_4 + 0{,}25\ddot{s}_2 =$$

$$= 10{,}75\ddot{s}_4 - 1{,}25\ddot{s}_2\ ;$$

$$\frac{\partial T}{\partial s_4} = 0\ ;\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_2} = 5\dot{s}_2 - 1{,}5(\dot{s}_4 - \dot{s}_2) + 0{,}25(\dot{s}_4 + \dot{s}_2)\ ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_2}\right) = 5\ddot{s}_2 - 1{,}5\ddot{s}_4 + 1{,}5\ddot{s}_2 + 0{,}25\ddot{s}_4 + 0{,}25\ddot{s}_2 =$$

$$= 6{,}75\ddot{s}_2 - 1{,}25\ddot{s}_4\ ;\quad \frac{\partial T}{\partial s_2} = 0\ .$$

Падлічым абагульненыя сілы Q_1 і Q_2, якія адпавядаюць абагульненым каардынатам s_4 і s_2.

На рыс. 77 паказваем знешнія сілы механічнай сістэмы, якія непасрэдна дзейнічаюць на грузы 1 і 2, блок 3, кола 4 і прыкладзены ў рухомых пунктах гэтых матэрыяльных цел ($\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{G}_2$, $\boldsymbol{G}_3$, $\boldsymbol{G}_4$, $\boldsymbol{N}_2$, $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$, $\boldsymbol{N}_4$, $\boldsymbol{M}$). Рэакцыю $\boldsymbol{N}_4$ паказваем з улікам δ – каэфіцыента трэння качэння кола па паверхні.

Вар'іруем абагульненую каардынату s_4, а абагульненую каардынату s_2 лічым нязменнаю. Цэнтр мас C_4 кола 4 пры гэтым атрымлівае магчымае перамяшчэнне ўлева на δs_4, пункт A блока 3 перамяшчаецца на $\delta s_A = \delta s_4$ уверх, груз 2 не рухаецца, пункт B блока 3 не рухаецца, цэнтр мас C_3 блока 3 і груз 1 маюць магчымыя перамяшчэнні ўверх: $\delta s_{C_3} = 0{,}5\delta s_A = 0{,}5\delta s_4 = \delta s_1$.

$$Q_1 = \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\delta A_k\right)_{s_4}}{\delta s_4} = \frac{M\cdot\delta\varphi_4 - N_4\cdot\delta\cdot\delta\varphi_4 - (G_3 + G_1)\cdot\delta s_1}{\delta s_4} =$$

$$= \frac{M\cdot\dfrac{\delta s_4}{r_4} - N_4\cdot\delta\cdot\dfrac{\delta s_4}{r_4} - (G_3 + G_1)\cdot 0{,}5\delta s_4}{\delta s_4} =$$

$$=\frac{M}{r_4}-\frac{G_4\cdot\delta}{r_4}-(G_3+G_1)\cdot 0{,}5=\frac{10}{0{,}2}-\frac{6\cdot 9{,}81\cdot 0{,}004}{0{,}2}-$$

$$-(2+4)\cdot 9{,}81\cdot 0{,}5=50-1{,}18-29{,}43=19{,}39\text{ Н}.$$

Вар'іруем абагульненую каардынату s_2, а абагульненую каардынату s_4 лічым нязменнаю. Пры гэтым кола 4 і пункт A блока 3 не рухаецца, груз 2 атрымлівае магчымае перамяшчэнне δs_2 улева, пункт B блока перамяшчаецца на $\delta s_B = \delta s_2$ уніз, цэнтр мас C_3 блока 3 і груз 1 маюць аднолькавае магчымае перамяшчэнне ўніз: $\delta s_{C_3}=\delta s_1=0{,}5\delta s_B=0{,}5\cdot\delta s_2$.

$$Q_2=\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}\delta A_k\right)_{s_2}}{\delta s_2}=\frac{-F_{\text{тр}}\cdot\delta s_2+(G_3+G_1)\cdot\delta s_1}{\delta s_2}=$$

$$=\frac{-G_2\cdot f\cdot\delta s_2+(G_3+G_1)\cdot 0{,}5\delta s_2}{\delta s_2}=-G_2\cdot f+(G_3+G_1)\cdot 0{,}5=$$

$$=-5\cdot 9{,}81\cdot 0{,}2+(2+4)\cdot 9{,}81\cdot 0{,}5=-9{,}81+29{,}43=19{,}62\text{ Н}.$$

У адпаведнасці з дзвюма ступенямі свабоды механічнай сістэмы запісваем два ўраўненні Лагранжа.

$$\begin{cases}10{,}75\ddot{s}_4-1{,}25\ddot{s}_2=19{,}39,\\ 6{,}75\ddot{s}_2-1{,}25\ddot{s}_4=19{,}62.\end{cases}$$

З атрыманай сістэмы ўраўненняў падлічваем значэнні $\ddot{s}_2$ і $\ddot{s}_4$.

Першае ўраўненне памножым на 5,4 і складзём пачленна з другім ураўненнем.

$$\begin{cases}58{,}05\ddot{s}_4-6{,}75\ddot{s}_2=104{,}7\\ \underline{-1{,}25\ddot{s}_4+6{,}75\ddot{s}_2=19{,}62}\end{cases}$$

$$56{,}8\ddot{s}_4=124{,}32.$$

$$\ddot{s}_4=2{,}19\text{ м/с}^2.\quad -1{,}25\cdot 2{,}19+6{,}75\ddot{s}_2=19{,}62.$$

$$6{,}75\ddot{s}_2=22{,}36.\quad \ddot{s}_2=3{,}31\text{ м/с}^2.$$

Атрымалі $\ddot{s}_4$ і $\ddot{s}_2$ у выглядзе дадатных пастаянных велічынь. Гэта азначае, што цэнтр мас кола 4 і груз 2 рухаюцца ўлева са стану спакою роўнапаскорана. Рух механічнай сістэмы ў абагульненых каардынатах апісваецца адпаведнымі ўраўненнямі.

$$s_4 = \frac{\ddot{s}_4 \cdot t^2}{2} = 1{,}045t^2, \qquad s_2 = \frac{\ddot{s}_2 \cdot t^2}{2} = 1{,}655t^2.$$

Заданне Д-17

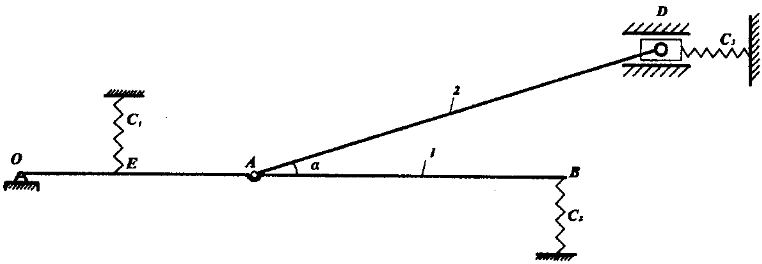
Вызначэнне ўмовы ўстойлівасці стану раўнавагі кансерватыўнай сістэмы з адною ступенню свабоды па тэарэме Лагранжа –Дырыхле

Вызначыць умову устойлівасці дадзенага стану раўнавагі кансерватыўнай механічнай сістэмы з адною ступенню свабоды (рыс. 85–89). Масы пругкіх элемантаў не ўлічваць. У стане раўнавагі пругкія элементы, каэфіцыенты жорсткасці якіх c_1 і c_2, не дэфармаваны. Усе стрыжні і рычагі лічыць аднароднымі. Трэнне ў шарнірах не ўлічваць. Магчымы рух пунктаў механічнай сістэмы са стану спакою адбываецца ў вертыкальных плоскасцях. Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 18.

Табліца 18

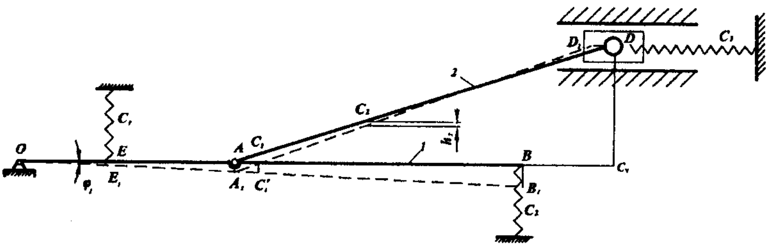
Варыянт	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	c_1, Н/м	c_2, Н/м	Варыянт	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	c_1, Н/м	c_2, Н/м
1	6	10			400	16	8	12	14	600	
2	8	4	8	500		17	6	7	10		700
3	10	6	7	600	500	18	4	10		800	
4	7	5	6	400	300	19	5	9	11		900
5	5	4	5		500	20	6	7	8	500	
6	4	5	6	500	600	21	7	5		600	
7	5	6	3	300	400	22	8	9			700
8	6	10		200	500	23	9	12	8		800
9	8	6	4		600	24	14	6		400	
10	10	7	5	400	500	25	12	10			500
11	12	10			400	26	8	9		500	600
12	15	8		600		27	10	11		700	
13	10	8		500		28	9	7			800
14	14	6		700		29	11	8	15		600
15	12	7			800	30	5	15	10	500	

У механічнай сістэме (рыс. 83), якая знаходзіцца ў стане раўнавагі, $m_1 = 5$ кг, $m_2 = 6$ кг, $c_1 = 400$ Н/м, $c_2 = 600$ Н/м, $l_1 = 2$ м, $l_2 = 1{,}5$ м, $OA = 0{,}8$ м, $OE = 0{,}4$ м, $\alpha = 30°$. У стане раўнавагі дэфармацыі спружын, каэфіцыенты жорсткасці якіх c_1 і c_2, адсутнічаюць. Усе пункты сістэмы могуць перамяшчацца ў вертыкальных плоскасцях. Вызначыць умову ўстойлівасці дадзенага стану раўнавагі.



Рыс. 83

Р а ш э н н е . У якасці абагульненай каардынаты выбіраем вугал φ_1, на які паварочваецца стрыжань 1 са стану раўнавагі (рыс. 84).



Рыс. 84

Паколькі дадзеная механічная сістэма з'яўляецца кансерватыўнаю, то ў стане раўнавагі пры $\varphi_1 = 0$ павінна выконвацца роўнасць

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}\right)_{\varphi_1=0} = 0.$$

Згодна з тэарэмаю Лагранжа – Дырыхле, стан раўнавагі з'яўляецца ўстойлівым, калі дадаткова выконваецца яшчэ адна ўмова:

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1^2}\right)_{\varphi_1=0} > 0.$$

У далейшых разліках прымаем, што абагульненая каардыната φ_1 дастаткова малая, таму што даследаванне ўстойлівасці праводзім каля становішча $\varphi_1 = 0$.

Патэнцыяльную энергію механічнай сістэмы падлічваем як суму работ сіл цяжару і пругкіх сіл пры перамяшчэнні сістэмы са стану, вызначаемага вуглом φ_1, у нулявое становішча – стан раўнавагі ($\varphi_1 = 0$).

Пры вызначэнні перамяшчэнняў пунктаў звёнаў механічнай сістэмы будзем улічваць толькі велічыні першага парадку маласці. Тады ўсе перамяшчэнні пунктаў звяна 1 будуць перпендыкулярнымі OB.

$$EE_1 = \varphi_1 \cdot OE = 0{,}4\varphi_1, \qquad AA_1 = \varphi_1 \cdot OA = 0{,}8\varphi_1,$$

$$C_1C_1^1 = \varphi_1 \cdot OC_1 = \varphi_1, \qquad BB_1 = \varphi_1 \cdot OB = 2\varphi_1.$$

Звяно 2 рухаецца плоскапаралельна. C_v – імгненны цэнтр развароту звяна 2. Вугал павароту звяна 2 вакол цэнтра C_v

$$\varphi_2 = \frac{AA_1}{AC_v} = \frac{0{,}8\varphi_1}{AD \cdot \cos\alpha} = \frac{0{,}8\varphi_1}{1{,}5 \cdot 0{,}866} = 0{,}6\varphi_1.$$

$$DD_1 = \varphi_2 \cdot DC_v = 0{,}6\varphi_1 \cdot AD \cdot \sin\alpha = 0{,}6\varphi_1 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}45\varphi_1.$$

Патэнцыяльныя энергіі спружын, каэфіцыенты жорсткасці якіх c_1 і c_2:

$$\Pi_{1\text{спр}} = \frac{c_1\lambda_1^2}{2} = \frac{400 \cdot (0{,}4\varphi_1)^2}{2} = 32\varphi_1^2,$$

$$\Pi_{2\text{спр}} = \frac{c_2\lambda_2^2}{2} = \frac{600\cdot(2\varphi_1)^2}{2} = 1200\varphi_1^2 .$$

Для спружыны, каэфіцыент жорсткасці якой c_3, патэнцыяльная энергія падлічваецца з улікам таго, што ў стане раўнавагі механічнай сістэмы спружына мела статычную дэфармацыю $\lambda_{\text{ст}}$. Пасля павароту звяна 1 на вугал φ_1 дэфармацыя спружыны

$$\lambda_3 = \lambda_{\text{ст}} + DD_1 = \lambda_{\text{ст}} + 0{,}45\varphi_1.$$

У гэтым выпадку патэнцыяльная энергія спружыны адносна стану раўнавагі падлічваецца па формуле

$$\Pi_{3\text{спр}} = \frac{c_3\lambda_3^2}{2} - \frac{c_3\lambda_{\text{ст}}^2}{2} = \frac{c_3}{2}(\lambda_3^2 - \lambda_{\text{ст}}^2) =$$

$$= \frac{c_3}{2}(\lambda_{\text{ст}}^2 + 0{,}9\lambda_{\text{ст}}\cdot\varphi_1 + 0{,}2025\varphi_1^2 - \lambda_{\text{ст}}^2) =$$

$$= \frac{c_3}{2}(0{,}9\lambda_{\text{ст}}\cdot\varphi_1 + 0{,}2025\varphi_1^2).$$

Патэнцыяльная энергія звёнаў механічнай сістэмы ў полі сіл цяжару вызначаецца па формуле

$$\Pi = \pm G\cdot h = \pm mgh ,$$

дзе h – вертыкальнае перамяшчэнне цэнтра цяжару цела пры павароце звяна 1 на вугал φ_1.

Пры пад'ёме цэнтра цяжару $\Pi > 0$, пры апусканні $\Pi < 0$.

$$h_1 = C_1C_1' = \varphi_1.$$

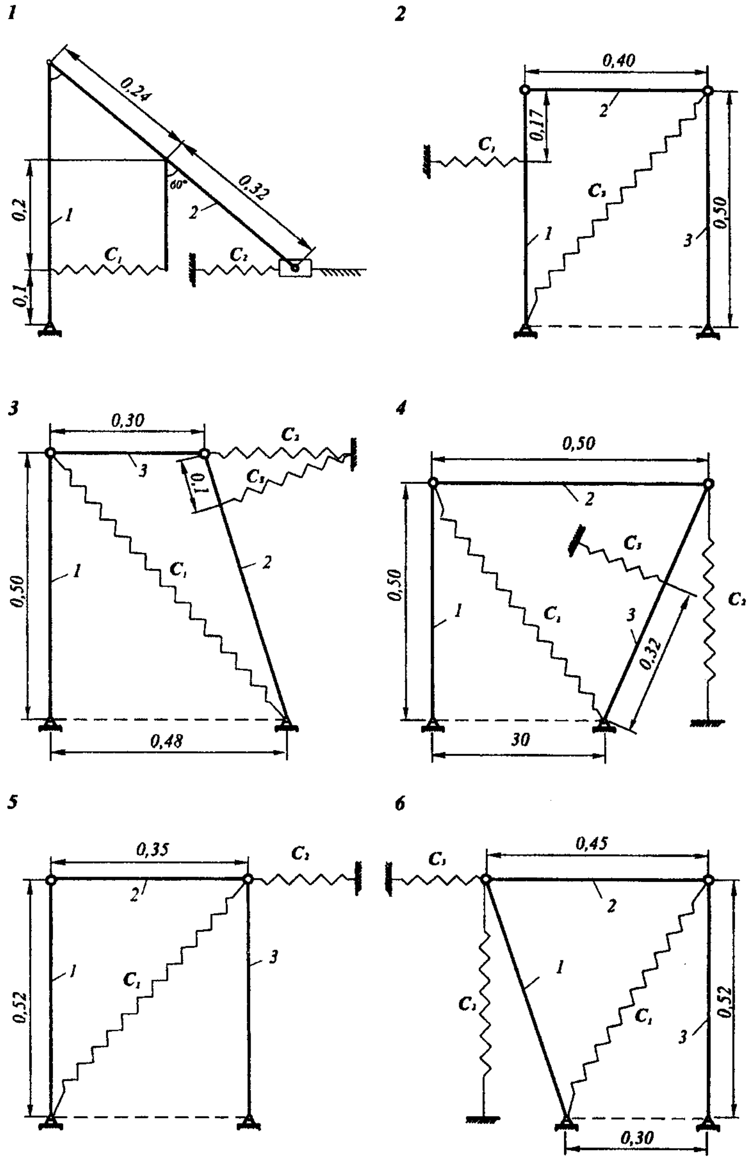
У трохвугольніку ADC_v пункт A перамяшчаецца па вертыкалі на $h_A = AA_1$, а пункт D па вертыкалі не перамяшчаецца ўвогуле. Таму сярэдзіна звяна 2 будзе мець вертыкальнае перамяшчэнне ў два разы меншае за перамяшчэнне пункта A.

$$h_2 = 0{,}5h_A = 0{,}5\cdot 0{,}8\varphi_1 = 0{,}4\varphi_1 .$$

Патэнцыяльная энергія звёнаў механічнай сістэмы

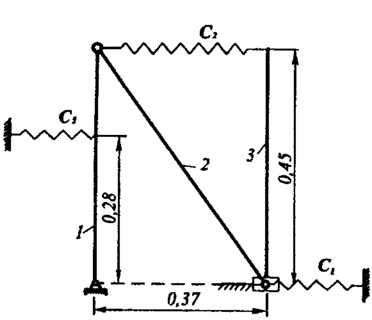
$$\Pi_1 = -m_1gh_1 = -m_1g\varphi_1 = -5\cdot 9{,}81\cdot\varphi_1 = -49{,}05\varphi_1 ,$$

$$\Pi_2 = -m_2gh_2 = -m_2g\cdot 0{,}4\varphi_1 = -6\cdot 9{,}81\cdot 0{,}4\varphi_1 = -23{,}54\varphi_1 .$$

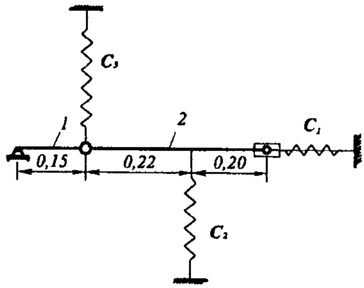

1
0,24
0,32
60°
0,2
0,1
1
2
C_1
C_2
2
0,40
0,17
0,50
C_1
C_2
1
2
3
3
0,30
0,1
0,50
0,48
C_1
C_2
C_3
1
2
3
4
0,50
0,50
0,32
30
C_1
C_2
C_3
1
2
3
5
0,35
0,52
C_1
C_2
1
2
3
6
0,45
0,52
0,30
C_1
C_2
C_3
1
2
3

Рыс. 85

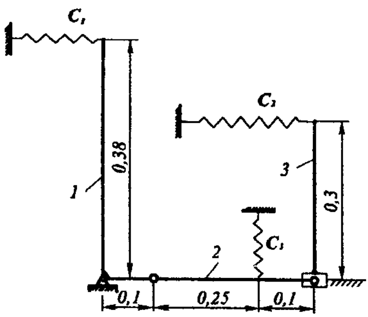
7



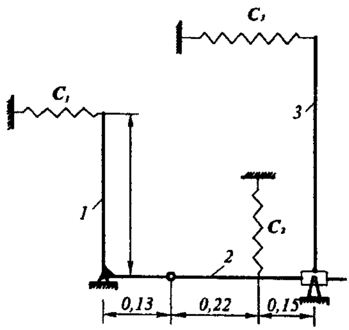
8



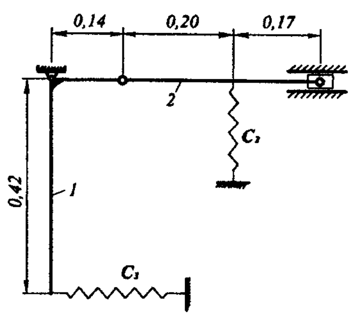
9



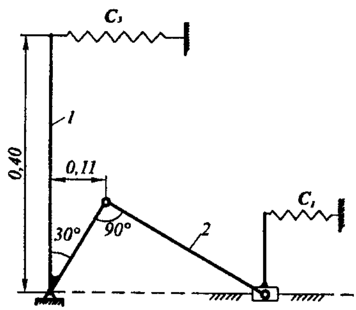
10



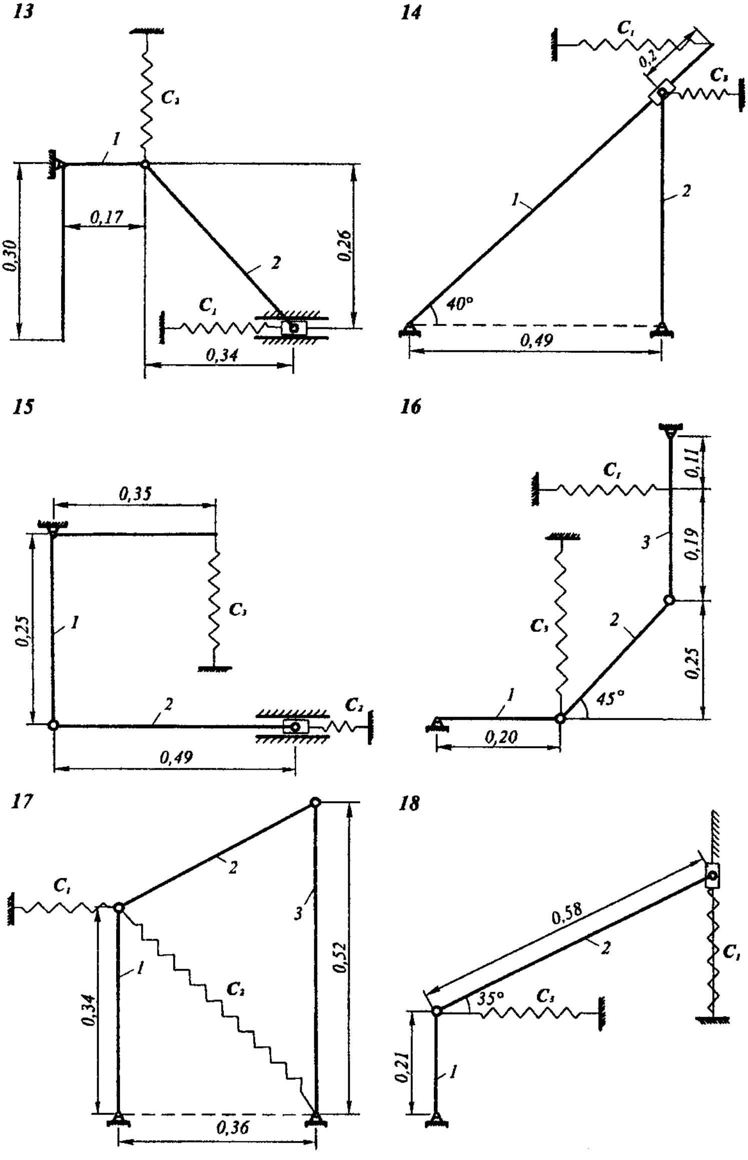
11



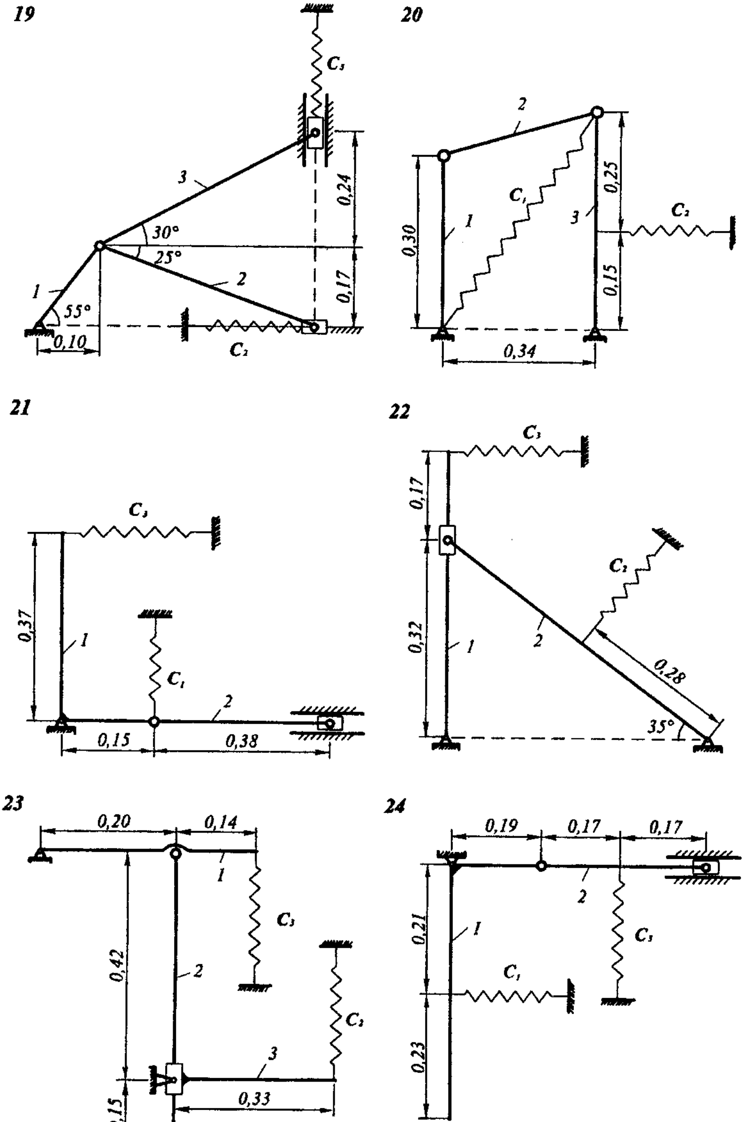
12



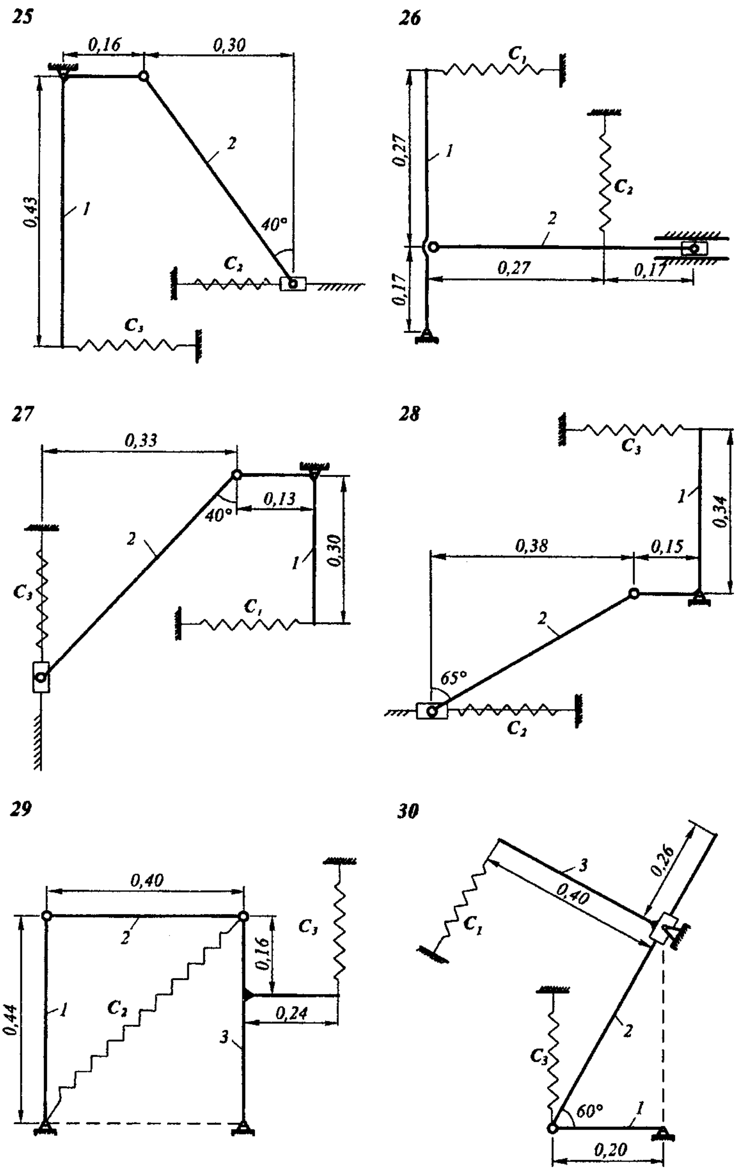
Рыс. 86


13
C₃
1
0,17
0,30
0,26
2
C₁
0,34
14
C₁
0,2
C₃
1
2
40°
0,49
15
0,35
C₃
0,25
1
2
C₂
0,49
16
0,11
C₁
0,19
3
C₃
2
0,25
1
45°
0,20
17
C₁
2
3
1
C₂
0,34
0,52
0,36
18
0,58
2
C₁
35°
C₃
0,21
1

Рыс. 87


19
C₃
0,24
3
30°
25°
0,17
2
1
55°
0,10
C₂
20
2
0,25
C₁
C₂
0,30
1
3
0,15
0,34
21
C₃
0,37
1
C₁
2
0,15
0,38
22
C₃
0,17
C₂
0,32
1
2
0,28
35°
23
0,20
0,14
1
C₃
0,42
2
C₂
3
0,33
0,15
24
0,19
0,17
0,17
2
0,21
1
C₃
C₁
0,23

Рыс. 88


25
0,16
0,30
0,43
1
2
40°
C_2
C_3
26
C_1
0,27
1
C_2
2
0,27
0,17
0,17
27
0,33
0,13
40°
2
0,30
1
C_3
C_1
28
C_3
1
0,34
0,38
0,15
2
65°
C_2
29
0,40
2
0,16
C_3
0,44
1
C_2
0,24
3
30
3
0,26
0,40
C_1
2
C_3
60°
1
0,20

Рыс. 89

Патэнцыяльная энергія механічнай сістэмы адносна становішча раўнавагі

$$\Pi = \Pi_{1спр} + \Pi_{2спр} + \Pi_{3спр} + \Pi_1 + \Pi_2 =$$

$$= 32\varphi_1^2 + 1200\varphi_1^2 + \frac{c_3}{2}(0{,}9\lambda_{ст}\cdot\varphi_1 + 0{,}2025\varphi_1^2) - 49{,}05\varphi_1 - 23{,}54\varphi_1 =$$

$$= 1232\varphi_1^2 + \frac{c_3}{2}(0{,}9\lambda_{ст}\cdot\varphi_1 + 0{,}2025\varphi_1^2) - 72{,}59\varphi_1 .$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_1} = 2464\varphi_1 + 0{,}45c_3\lambda_{ст} + 0{,}2025c_3\varphi_1 - 72{,}59 .$$

У стане раўнавагі пры $\varphi_1 = 0$ атрыманая вытворная роўная нулю. На падставе гэтага маем:

$$0{,}45c_3\lambda_{ст} - 72{,}59 = 0 .$$

Тады $\Pi = 1232\varphi_1^2 + 0{,}10125c_3\varphi_1^2 = (1232 + 0{,}10125c_3)\varphi_1^2$.

Падлічым другую вытворную па абагульненай каардынаце ад патэнцыяльнай энергіі механічнай сістэмы.

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi_1^2} = 2464 + 0{,}2025c_3 .$$

Згодна з тэарэмаю Лагранжа – Дырыхле, стан раўнавагі ўстойлівы, калі

$$2464 + 0{,}2025c_3 > 0.$$

У дадзеным выпадку ўмова ўстойлівасці стану раўнавагі выконваецца пры любым значэнні c_3.

Заданне Д-18

Свабодныя ваганні механічнай сістэмы з адною ступенню свабоды

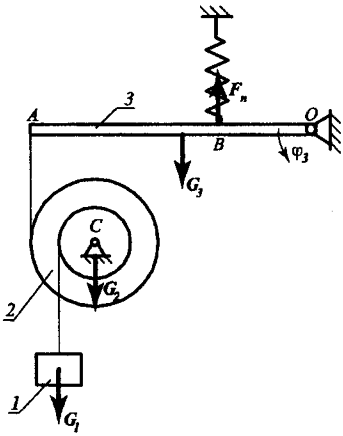
Для механічнай сістэмы з адною ступенню свабоды (рыс. 91–95) з дапамогаю ураўнення Лагранжа 2 роду атрымаць дыферэнцыяльнае ўраўненне малых ваганняў. Вылічыць цыклічную частату і перыяд малых ваганняў механічнай сістэмы з улікам даных, прыведзеных у табл. 19.

Лічыць, што аднародны дыск не праслізгвае па апорнай паверхні і адносна троса. Рычаг *OA* прыняць за аднародны стрыжань. *c* — каэфіцыент жорсткасці спружыны, i_{cx} — радыус інерцыі неаднародных катка або блока. На рысунках ва ўсіх варыянтах паказаны стан раўнавагі механічнай сістэмы.

Табліца 19

Варыянт	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	OA, м	OB, м	r_2, м	R_2, м	i_{cx}, м	c, Н/м
1	1	2	3	0,85	0,30		0,20		1800
2	2	3	4	0,90	0,30		0,22		2500
3	3	4	5	0,95	0,60		0,18		2000
4	2	4	3	0,80	0,55		0,17		2100
5	3	4	5	0,76	0,62		0,16		1600
6	1	3	2	0,92	0,60		0,20		2500
7	2	5	3	0,90	0,70		0,22		2400
8	3	4	5	1,00	0,30		0,24		2200
9	1	5	2	0,80	0,25	0,14	0,20	0,16	2300
10	2	4	3	1,10	0,75		0,22		2000
11	3	4	5	1,20	0,55		0,18		1800
12	4	5	3	0,96	0,32		0,20		1900
13	1	3	2	1,00	0,30		0,16		2200
14	2	5	3	0,88	0,60		0,17		2100
15	3	4	2	0,95	0,65		0,18		2300
16	1	5	3	0,90	0,70	0,15	0,20	0,17	2000
17	2	4	3	0,86	0,62	0,12	0,18	0,15	1900
18	3	5	3	1,00	0,50	0,13	0,19	0,16	2500
19	4	6	5	1,10	0,45	0,14	0,20	0,17	1600
20	2	4	3	0,95	0,30	0,15	0,22	0,18	1700
21	1	3	2	0,84	0,56	0,16	0,22	0,19	1800
22	2	5	3	0,90	0,60	0,17	0,23	0,20	1900
23	3	4	5	1,00	0,30	0,13	0,20	0,16	1500
24	4	2	3	0,80	0,45		0,16		2400
25	1	5	2	0,76	0,44	0,14	0,22	0,18	2000
26	2	4	3	0,90	0,70	0,15	0,21	0,17	1800
27	3	2	5	0,94	0,24		0,20		1700
28	1	4	2	1,00	0,72	0,16	0,20	0,18	1900
29	2	5	3	0,85	0,60	0,17	0,21	0,19	2600
30	1	3	2	0,92	0,62	0,12	0,18	0,15	2400

З дапамогаю ўраўнення Лагранжа 2 роду атрымаць дыферэнцыяльнае ўраўненне малых ваганняў механічнай сістэмы з адною ступенню свабоды (рыс. 90). Вылічыць цыклічную частату і перыяд малых ваганняў механічнай сістэмы, калі вядома, што $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 3$ кг, $m_3 = 4$ кг, $OA = 0{,}7$ м, $OB = 0{,}3$ м, $r_2 = 0{,}1$ м, $R_2 = 0{,}2$ м, $i_{cx} = 0{,}16$ м, $c = 2000$ Н/м.



Рыс. 90

Р а ш э н н е. Малыя ваганні механічнай сістэмы, якая мае адну ступень свабоды, адбываюцца адносна стану раўнавагі сістэмы пад уздзеяннем кансерватыўных сіл $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{G}_3$, $\boldsymbol{F}_п$.

За абагульненую каардынату механічнай сітэмы прымем вугал павароту φ_3 звяна OA. Знойдзем статычную дэфармацыю $\lambda_{ст}$ спружыны, якая мае месца ў стане раўнавагі сістэмы. Для гэтага выкарыстаем тэарэму Лагранжа – Дырыхле.

У стане раўнавагі механічнай сістэмы

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_3} = 0 .$$

Вызначым патэнцыяльную энергію механічнай сістэмы пры паварoце звяна OA на малы вугал φ_3, пры гэтым лічым, што дэфармацыя спружыны павялічыцца ад нуля да λ.

$$\Pi = -G_3 \cdot h_3 + \frac{c\lambda^2}{2} - G_1 \cdot h_1 ,$$

дзе h_3 – вертыкальнае перамяшчэнне цэнтра цяжару стрыжня OA пры яго паварoце на вугал φ_3;

h_1 – перамяшчэнне ўніз грузу 1 за кошт павароту стрыжня OA на вугал φ_3;

λ – дэфармацыя спружыны, атрыманая пры паварoце стрыжня OA на вугал φ_3.

$$h_3 = \varphi_3 \cdot \frac{OA}{2}; \quad h_1 = \varphi_3 \cdot \frac{OA \cdot r_2}{R_2}; \quad \lambda = \varphi_3 \cdot OB .$$

$$\Pi = -m_3 g \cdot \frac{OA}{2} \cdot \varphi_3 + \frac{c}{2} \cdot \varphi_3^2 \cdot (OB)^2 - m_1 g \cdot \frac{OA \cdot r_2}{R_2} \cdot \varphi_3 .$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_3} = -m_3 g \cdot \frac{OA}{2} + c\varphi_3 (OB)^2 - m_1 g \cdot \frac{OA \cdot r_2}{R_2} = 0 .$$

Адсюль атрымаем значэнне абагульненай каардынаты φ_3, якое адпавядае стану раўнавагі механічнай сістэмы.

$$-4 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}35 + 2000 \cdot \varphi_3 \cdot 0{,}09 - 2 \cdot 9{,}81 \frac{0{,}7 \cdot 0{,}1}{0{,}2} = 0 .$$

$$-13{,}73 + 180\varphi_3 - 6{,}87 = 0 \qquad \varphi_3 = 0{,}114 \text{ рад.}$$

Стан раўнавагі ўстойлівы, калі $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_3}\right)_{\varphi_3 = 0{,}114} > 0$. У дадзеным выпадку $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_3} = 180 > 0$, таму вызначаны стан раўнавагі ўстойлівы. Пры гэтым спружына расцягнута на велічыню

$$\lambda_{\text{ст}} = \varphi_3 \cdot OB = 0{,}114 \cdot 0{,}3 = 0{,}034 \text{ м}.$$

Прымем, што на рысунку паказаны стан раўнавагі сістэмы (звяно OA гарызантальнае). Малыя ваганні будуць адбывацца адносна стану раўнавагі. Пры гэтым вугал φ_3 мяняецца ў абодвух накірунках на малую велічыню і груз 1 таксама перамяшчаецца па вертыкалі на малую велічыню адносна стану раўнавагі.

Для апісання руху механічнай сістэмы прыменім ураўненне Лагранжа другога роду.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = Q_{\varphi_3}.$$

Запішам выраз кінетычнай энергіі механічнай сістэмы ў выглядзе функцыі абагульненай скорасці $\dot{\varphi}_3$.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{I_c \omega_2^2}{2} + \frac{I_0 \omega_3^2}{2}.$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi}_3, \quad I_0 = \frac{m_3 (\mathrm{OA})^2}{3} = \frac{4 \cdot 0{,}49}{3} = 0{,}65 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

$$\omega_2 = \frac{v_A}{R_2} = \frac{\dot{\varphi}_3 \cdot \mathrm{OA}}{R_2} = \dot{\varphi}_3 \frac{0{,}7}{0{,}2} = 3{,}5\dot{\varphi}_3,$$

$$I_c = m_2 \cdot i_{cx}^2 = 3 \cdot 0{,}16^2 = 0{,}077 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

$$v_1 = \omega_2 \cdot r_2 = 3{,}5\dot{\varphi}_3 \cdot 0{,}1 = 0{,}35\dot{\varphi}_3.$$

$$T = \frac{2 \cdot (0{,}35\dot{\varphi}_3)^2}{2} + \frac{0{,}077 \cdot (3{,}5\dot{\varphi}_3)^2}{2} + \frac{0{,}65 \cdot \dot{\varphi}_3^2}{2} =$$

$$= 0{,}12\dot{\varphi}_3^2 + 0{,}47\dot{\varphi}_3^2 + 0{,}32\dot{\varphi}_3^2 = 0{,}91\dot{\varphi}_3^2.$$

Падлічым вытворныя, якія ўваходзяць у склад ураўнення Лагранжа.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} = 1{,}82\dot{\varphi}_3\,, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3}\right) = 1{,}82\ddot{\varphi}_3\,, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = 0\,.$$

Абагульненую сілу Q_{φ_3}, якая адпавядае абагульненай каардынаце φ_3, можам вылічыць праз патэнцыяльную энергію, якую запішам для механічнай сістэмы, выбраўшы за нулявы ўзровень стан яе раўнавагі.

$$\Pi = \frac{c}{2}\left(\lambda_2^2 - \lambda_1^2\right) - G_3 h_3 - G_1 h_1\,.$$

$$\lambda_1 = \lambda_{ст}, \quad \lambda_2 = \lambda_{ст} + \lambda, \quad \lambda = \varphi_3 \cdot OB = 0{,}3\varphi_3.$$

$$h_3 = \varphi_3 \cdot 0{,}5 \cdot OA = 0{,}35\varphi_3\,, \quad h_1 = \varphi_3 \frac{OA \cdot r_2}{R_2} = 0{,}35\varphi_3\,.$$

$$\Pi = 1000(0{,}09\varphi_3^2 + 0{,}034^2 + 2 \cdot 0{,}3\varphi_3 \cdot 0{,}034 - 0{,}034^2) - 4 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}35\varphi_3 -$$
$$- 2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}35\varphi_3 = 90\varphi_3^2 + 20{,}5\varphi_3 - 13{,}7\varphi_3 - 6{,}8\varphi_3 = 90\varphi_3^2\,.$$

$$Q_{\varphi_3} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_3} = -180\varphi_3\,.$$

Падставім атрыманыя выразы абагульненай сілы і вытворных ад кінетычнай энергіі ва ўраўненне Лагранжа.

$$1{,}82\ddot{\varphi}_3 = -180\varphi_3\,.$$

Дыферэнцыяльнае ўраўненне малых ваганняў механічнай сістэмы мае наступны выгляд:

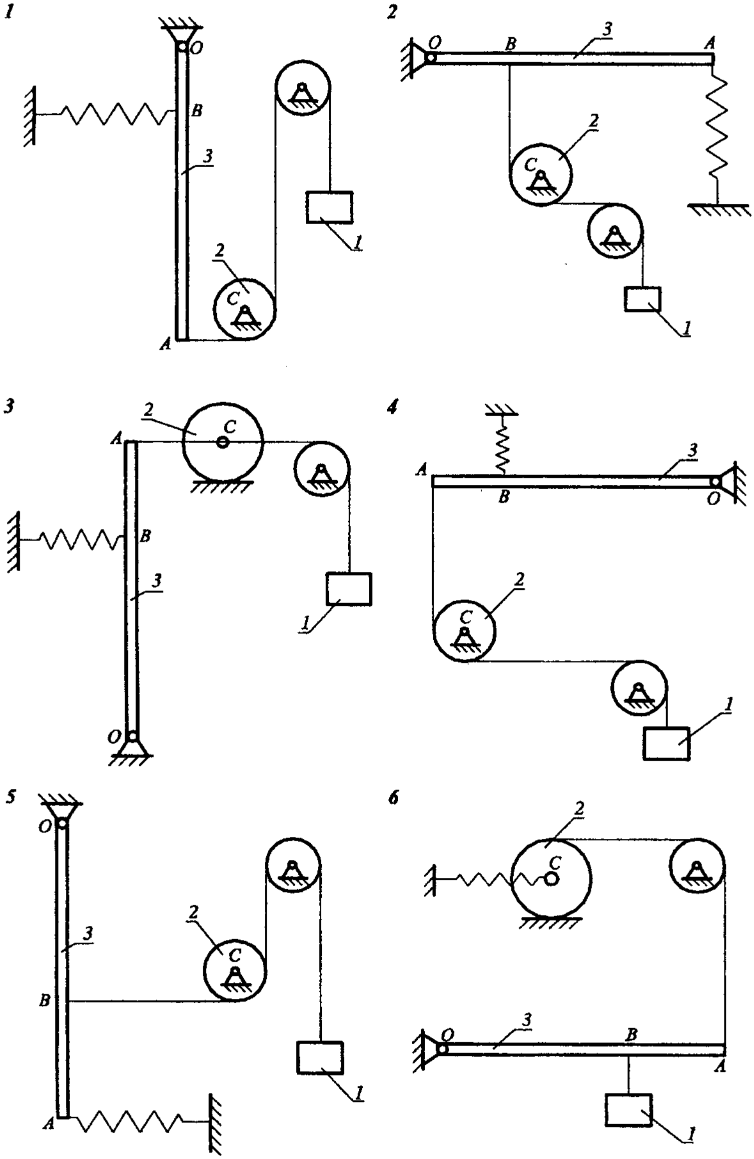
$$\ddot{\varphi}_3 + 98{,}9\varphi_3 = 0\,.$$

Цыклічная частата малых ваганняў механічнай сістэмы

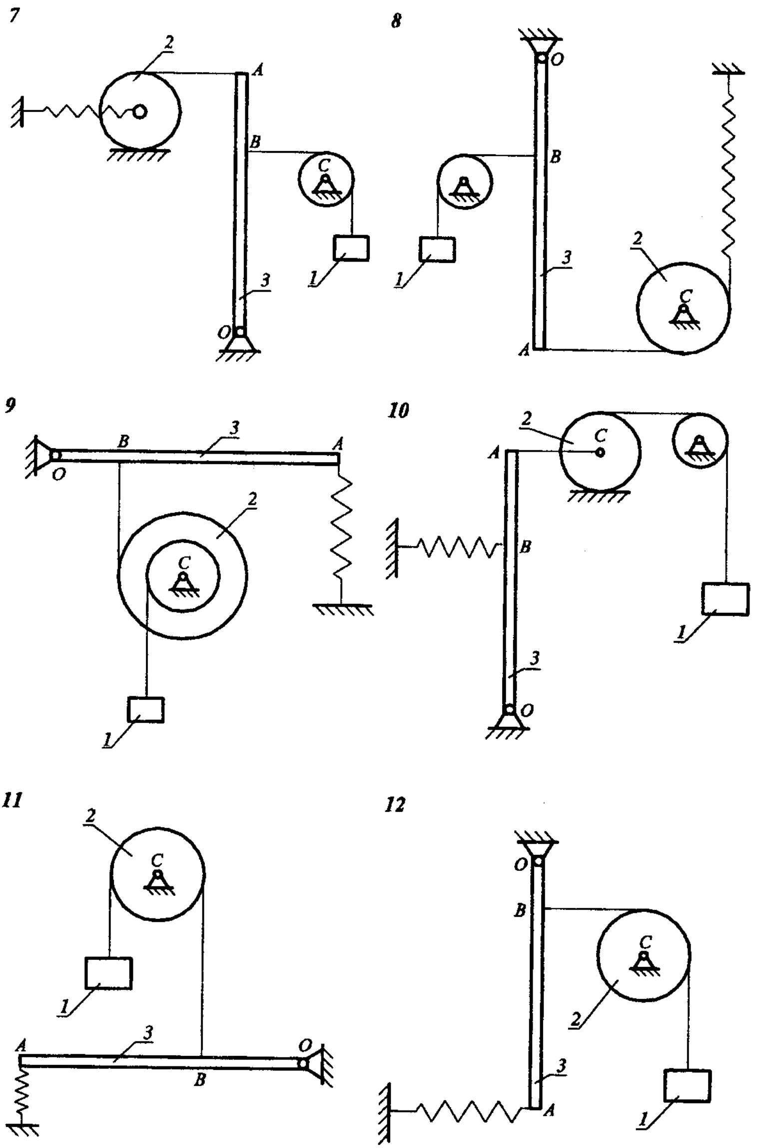
$$k = \sqrt{98{,}9} = 9{,}9\ \text{с}^{-1}.$$

Перыяд малых ваганняў механічнай сістэмы

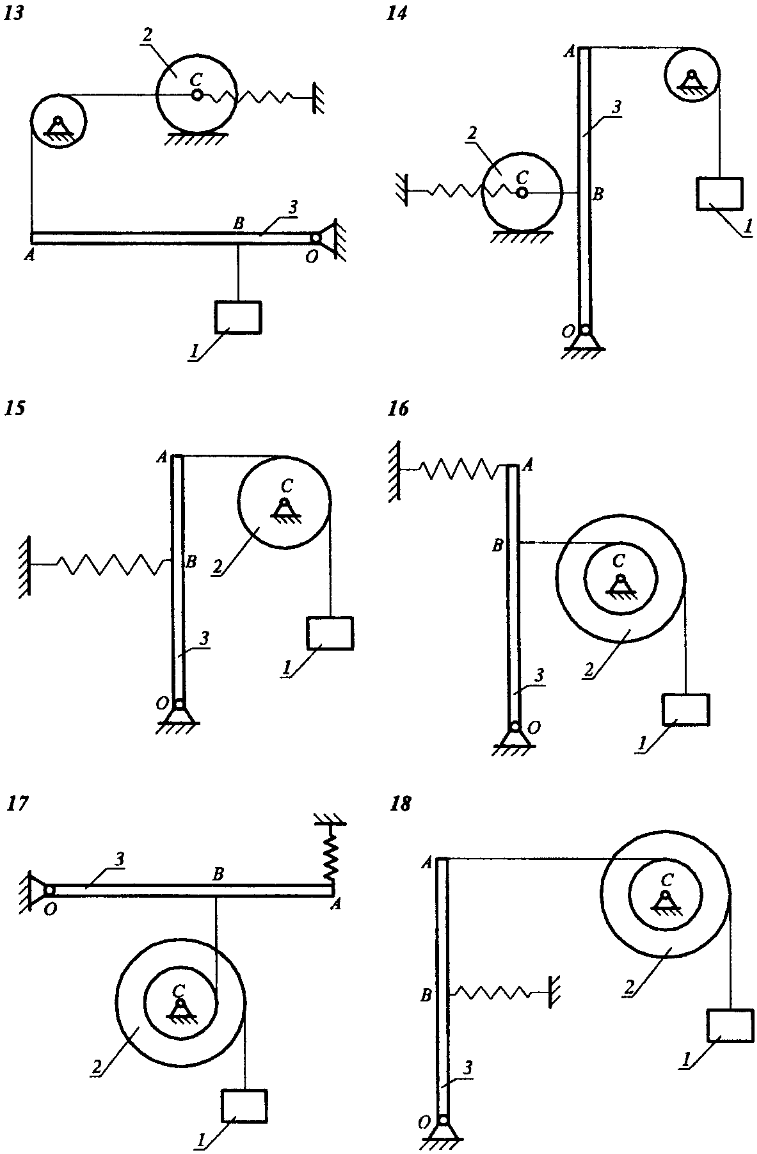
$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{6{,}28}{9{,}9} = 0{,}6\ \text{с}.$$



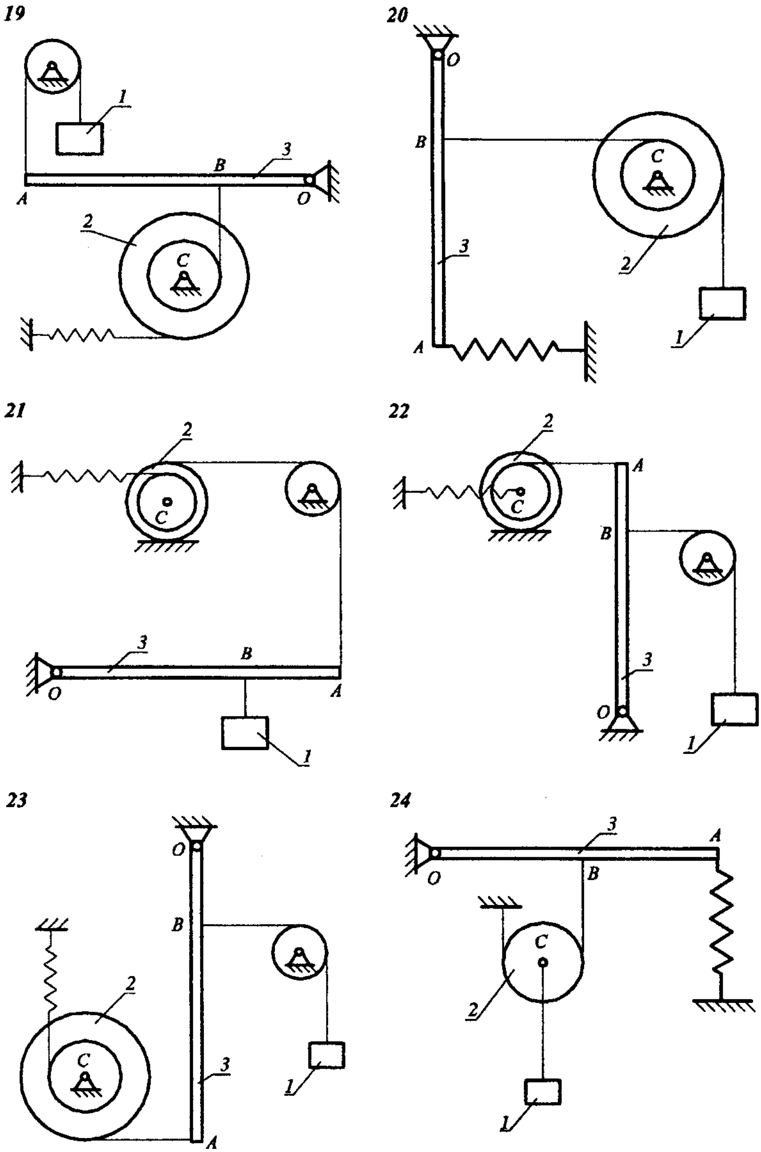
Рыс. 91


7
2
A
B
C
1
3
O
8
O
B
1
3
2
C
A
9
B
3
A
O
2
C
1
10
2
C
A
B
1
3
O
11
2
C
1
A
3
O
B
12
O
B
C
2
3
A
1

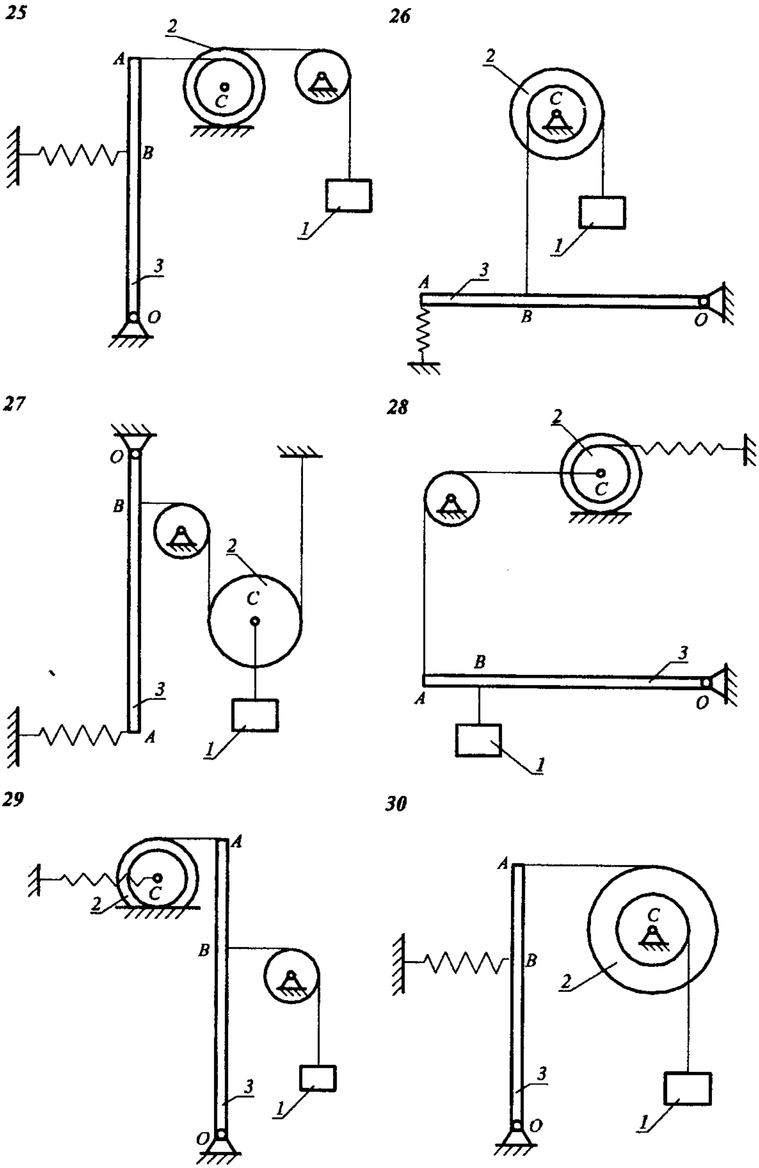
Рыс. 92


13
2
C
B
3
A
O
1
14
A
3
2
C
B
1
O
15
A
C
B
2
3
1
O
16
A
B
C
2
3
O
1
17
3
B
O
A
C
2
1
18
A
C
B
2
3
1
O

Рыс. 93



Рыс. 94



Рыс. 95

Заданне Д-19

Свабодныя ваганні механічнай сістэмы з дзвюма ступенямі свабоды

Вызначыць частоты малых свабодных ваганняў і формы галоўных ваганняў механічнай сістэмы з дзвюма ступенямі свабоды (рыс. 98–102). Сілы супраціўлення, масы спружын не ўлічваць. Каткі і блокі лічыць аданароднымі дыскамі, усе рычагі — тонкімі аднароднымі стрыжнямі, стрыжні 4 — бязважкімі. Качэнне колаў па нерухомых паверхнях адбываецца без праслізгвання, тросы па блоках і колах таксама не праслізгваюць. На рысунках механічныя сістэмы паказаны ў стане раўнавагі.

Усе неабходныя даныя знаходзяцца ў табл. 20.

Табліца 20

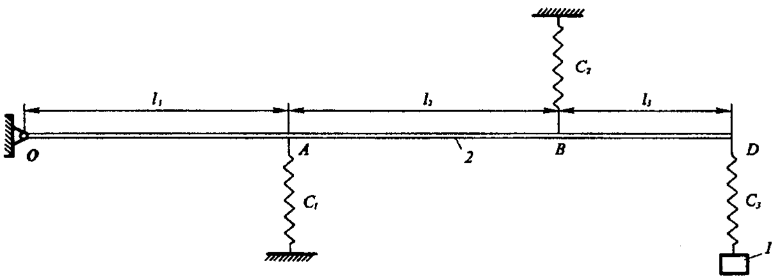
Вары-янт	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	c_1, Н/м	c_2, Н/м	c_3, Н/м	l_1, м	l_2, м	l_3, м	r_2, м
1	5	3	2	3000	4200	1500	0,45	0,52	0,38	0,20
2	6	2		3200	2000	2400	0,56	0,40	0,28	
3	7	2	3	3300	4000	2600	0,44	0,36	0,26	0,12
4	8	4	3	3500	3800	2800	0,28	0,50	0,36	0,16
5	9	5	4	3700	3600	3000	0,45	0,48	0,27	0,17
6	10	6	4	3900	3700	3200	0,60	0,35	0,25	0,19
7	4	3	1	2500	3000	1500	0,44	0,42	0,34	0,20
8	5	7		2800	3200	3000	0,65	0,55	0,40	
9	2	5		2300	3500	3200	0,85	0,40	0,90	
10	6	4	3	2500	3600	3400	0,40	0,65	0,35	0,14
11	7	5	2	2700	3800	1800	0,90	0,30	0,65	0,18
12	2	8	3	2900	4000	2000	0,75	0,20	0,50	
13	9	4	2	3000	3900	2100	0,85	0,32	0,50	0,17
14	10	2	3	3100	3800	2200	0,70	0,26	0,24	
15	5	6		3200	3700	2300	0,65	0,40	0,35	
16	6	3		3300	3600	2400	0,34	0,55	0,40	
17	3	4	7	3400	3500	2500	0,44	0,54	0,30	0,16
18	8	3	2	3500	2600		0,86	0,30	0,44	0,15
19	9	4		3600	2700	3400	0,45	0,50	0,35	
20	2	10	3	3700	3300	2800	0,35	0,35	0,55	
21	3	5	8	2900	3200	3800	0,36	0,48	0,32	0,19
22	9	4	2	3800	3100	2900	0,32	0,42	0,20	0,20
23	5	6	2	3900	3000	2800	0,20	0,40	0,30	

Заканчэнне табл. 20

Варыянт	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	c_1, Н/м	c_2, Н/м	c_3, Н/м	l_1, м	l_2, м	l_3, м	r_2, м
24	10	6	3	4000	3000		0,60	0,25	0,32	0,22
25	2	3	5	2700	4100	2900	0,30	0,45	0,30	0,14
26	3	6	4	2600	4200	3000	0,40	0,42	0,38	
27	7	5	2	4300	3100	2500	0,45	0,38	0,40	0,17
28	4	5	10	2400	3200	4400	0,40	0,76		0,18
29	8	3	1	3300	4500	2300	0,40	0,50	0,20	0,19
30	9	6	2	3400	2200	4600	0,80	0,40	0,50	

Прыклад рашэння задання Д-19

Вызначыць частоты малых свабодных ваганняў і формы галоўных ваганняў механічнай сістэмы (рыс. 96), калі вядома, што $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 0{,}4$ м, $l_3 = 0{,}2$ м, маса грузу $m_1 = 1$ кг, маса аднароднага стрыжня $m_2 = 4$ кг, каэфіцыенты жорсткасці спружын: $c_1 = 3000$ Н/м, $c_2 = 5000$ Н/м, $c_2 = 4000$ Н/м.



Рыс. 96

Р а ш э н н е. У стане раўнавагі рычаг *OD* займае гарызантальнае становішча. Пры гэтым спружына з каэфіцыентам жорсткасці c_1 сціснута на $\lambda_{ст1}$, спружына з каэфіцыентам жорсткасці c_2 расцягнута на $\lambda_{ст2}$, спружына з каэфіцыентам жорсткасці c_3, да якой прымацаваны груз, расцягнута на велічыню $\lambda_{ст3}$.

Механічная сістэма мае дзве ступені свабоды. За абагульненыя каардынаты прымем: φ — вугал павароту рычага *OD* ад стану раўнавагі, z — вертыкальнае адхіленне грузу 1 ад стану раўнавагі.

Пры дадатных значэннях абагульненых каардынат механічная сістэма зойме становішча, якое паказана на рыс. 97.

Каб запісаць ураўненні Лагранжа для разглядаемай кансерватыўнай сістэмы, неабходна падлічыць яе кінетычную і патэнцыяльную энергіі.

Кінетычная энергія сістэмы складаецца з кінетычных энергій рычага OD і грузу 1.

$$T = \frac{I_0\omega_2^2}{2} + \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

Момант інерцыі стрыжня 2 адносна восі вярчэння O

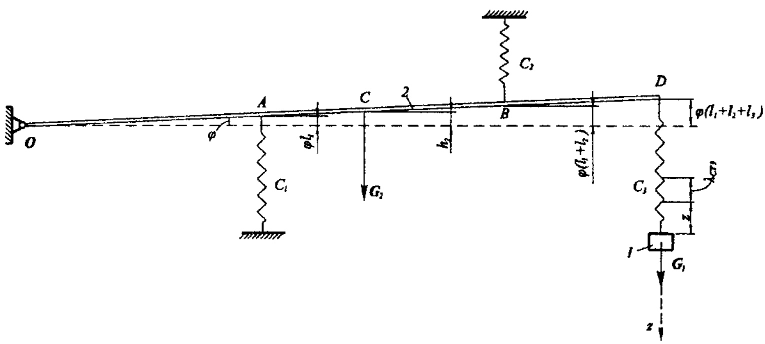
$$I_0 = \frac{m_2(l_1 + l_2 + l_3)^2}{3} = \frac{4 \cdot 1^2}{3} = 1{,}33 \text{ кг·м}^2.$$

Вуглавая скорасць ω_2 рычага OD роўная абагульненай скорасці $\dot{\varphi}$. Скорасць грузу v_1 роўная абагульненай скорасці $\dot{z}$.

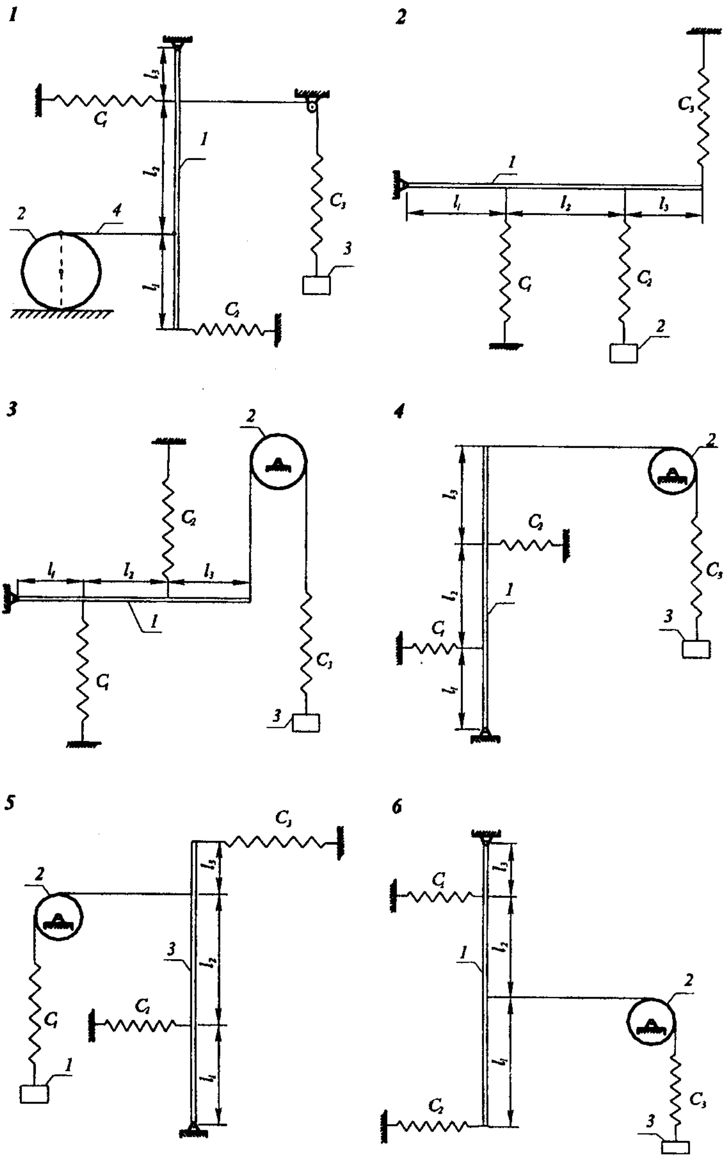
Тады кінетычная энергія механічнай сістэмы

$$T = 0{,}67\dot{\varphi}^2 + 0{,}5\dot{z}^2.$$

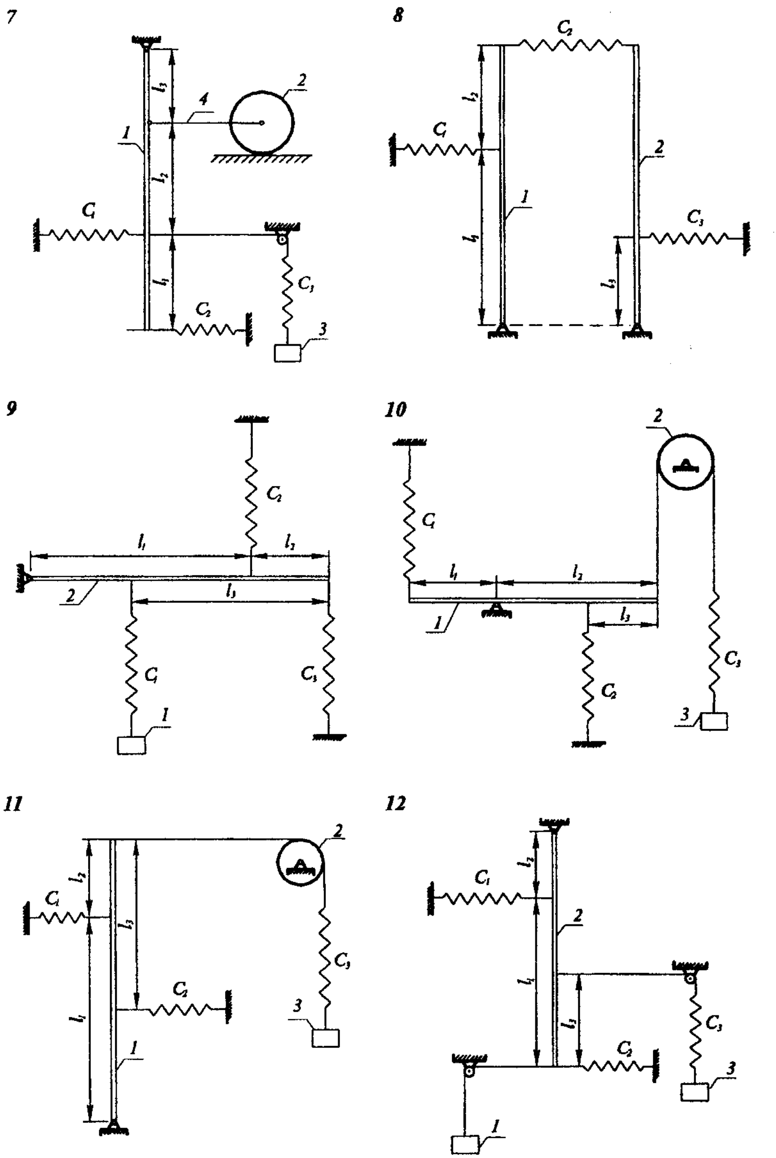
Патэнцыяльная энергія сістэмы роўная рабоце кансерватыўных сіл (сіл цяжару і пругкіх сіл спружын) пры перамяшчэнні сістэмы з адхіленага становішча (рыс. 97) у нулявое (стан раўнавагі, рыс. 96).



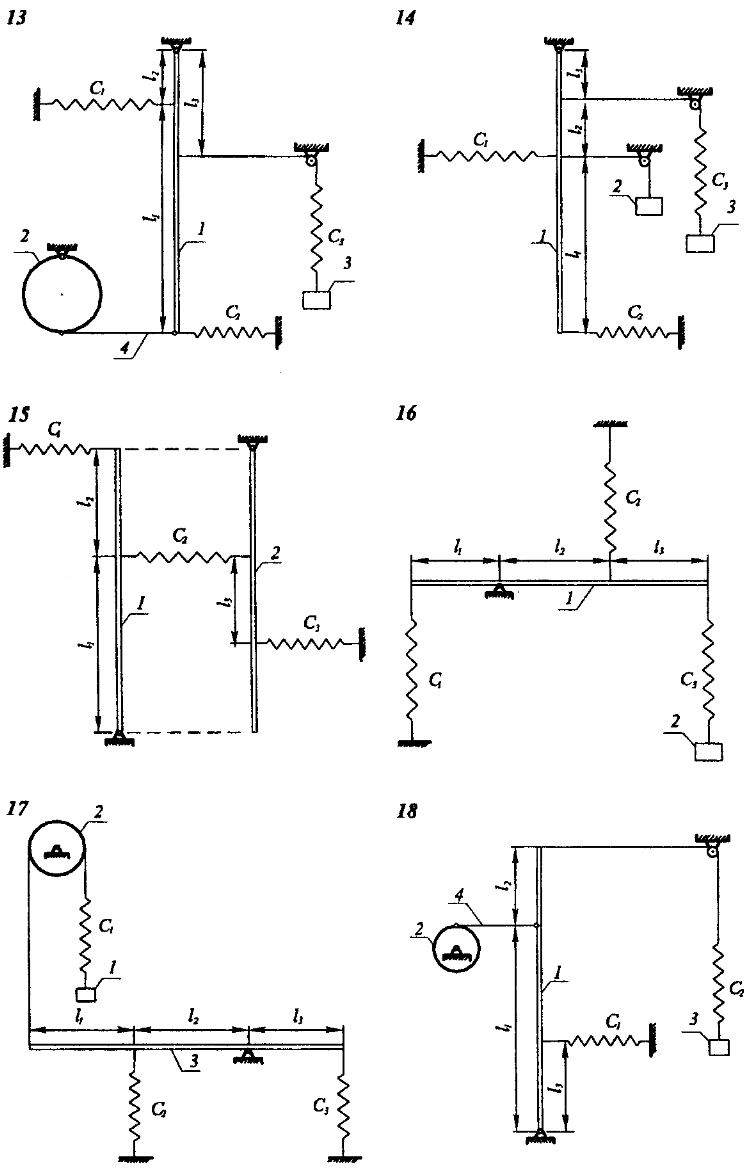
Рыс. 97



Рыс. 98

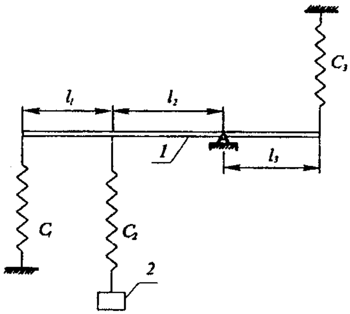


Рыс. 99

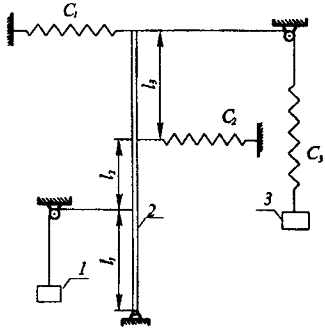


Рыс. 100

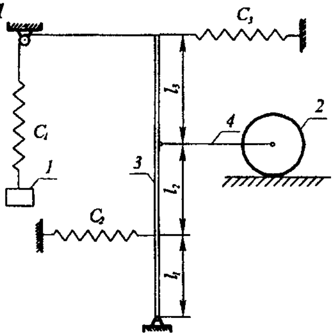
19



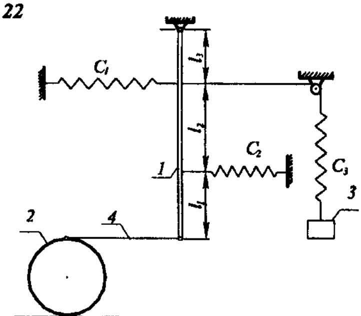
20



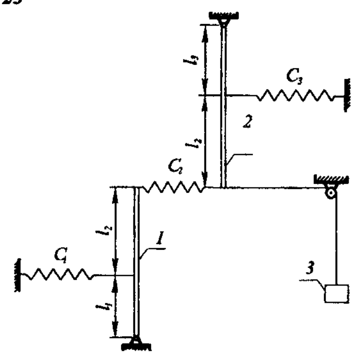
21



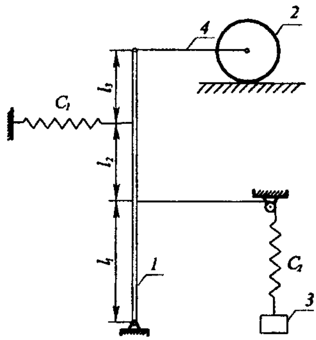
22



23

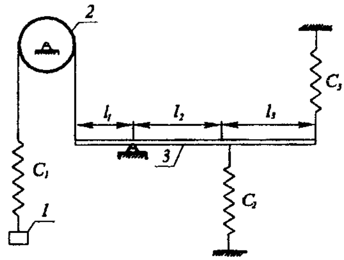


24

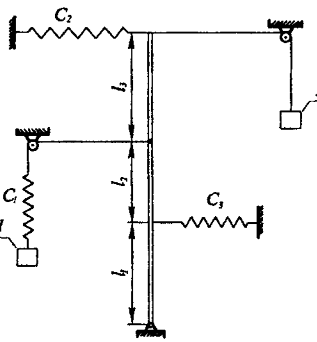


Рыс. 101

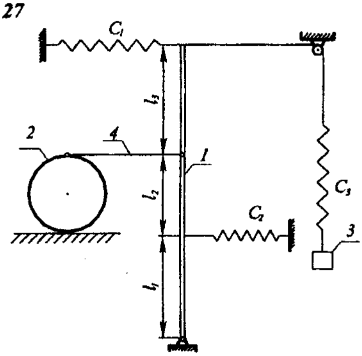
25



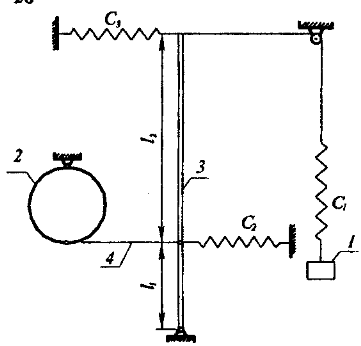
26



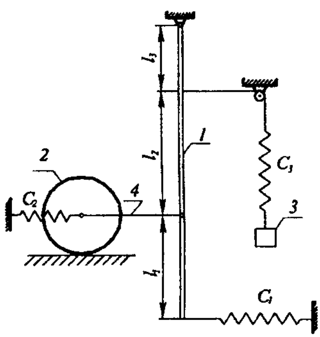
27



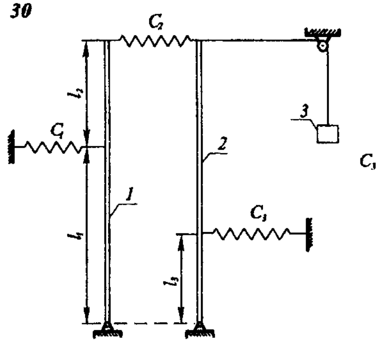
28



29



30



Рыс. 102

Патэнцыяльная энергія рычага

$$\Pi_2 = G_2 \cdot h_2 = m_2 g\varphi \frac{l_1 + l_2 + l_3}{2} = 4 \cdot 9{,}81 \cdot \varphi \cdot 0{,}5 = 19{,}62\varphi .$$

Патэнцыяльная энергія грузу

$$\Pi_1 = -G_1 z = -m_1 g z = -1 \cdot 9{,}81 \cdot z = -9{,}81 z .$$

Патэнцыяльная энергія спружыны 1

$$\Pi_{c1} = \frac{c_1}{2}\left(\lambda_1^2 - \lambda_{\text{ст}1}^2\right) = \frac{c_1}{2}\left(\varphi \cdot l_1 - \lambda_{\text{ст}1}\right)^2 - \frac{c_1}{2}\lambda_{\text{ст}1}^2 =$$

$$= 1500(\varphi^2 \cdot 0{,}16 - 0{,}8\varphi \cdot \lambda_{\text{ст}1}) = 240\varphi^2 - 1200\varphi \cdot \lambda_{\text{ст}1} .$$

Патэнцыяльная энергія спружыны 2

$$\Pi_{c2} = \frac{c_2}{2}\left(\lambda_2^2 - \lambda_{\text{ст}2}^2\right) = \frac{c_2}{2}\left(\varphi \cdot (l_1 + l_2) - \lambda_{\text{ст}2}\right)^2 - \frac{c_2}{2}\lambda_{\text{ст}2}^2 =$$

$$= 2500(0{,}64\varphi^2 - 1{,}6\varphi \cdot \lambda_{\text{ст}2}) = 1600\varphi^2 - 4000\varphi \cdot \lambda_{\text{ст}2} .$$

Патэнцыяльная энергія спружыны 3

$$\Pi_{c3} = \frac{c_3}{2}\left(\varphi \cdot (l_1 + l_2 + l_3) + \lambda_{\text{ст}3} + z\right)^2 - \frac{c_3}{2}\lambda_{\text{ст}3}^2 =$$

$$= 2000(\varphi^2 + z^2 + 2\varphi \cdot \lambda_{\text{ст}3} + 2\varphi z + 2z\lambda_{\text{ст}3}) =$$

$$= 2000\varphi^2 + 2000z^2 + 4000\varphi \cdot \lambda_{\text{ст}3} + 4000\varphi \cdot z + 4000z \cdot \lambda_{\text{ст}3}) .$$

Патэнцыяльная энергія механічнай сістэмы

$$\Pi = \Pi_2 + \Pi_1 + \Pi_{c1} + \Pi_{c2} + \Pi_{c3} =$$

$$= 19{,}62\varphi - 9{,}81z + 240\varphi^2 - 1200\varphi \cdot \lambda_{\text{ст}1} + 1600\varphi^2 - 4000\varphi \cdot \lambda_{\text{ст}2} +$$

$$+ 2000\varphi^2 + 2000z^2 + 4000\varphi \cdot \lambda_{\text{ст}3} + 4000\varphi \cdot z + 4000z \cdot \lambda_{\text{ст}3} =$$

$$= 3840\varphi^2 + 2000z^2 + 19{,}62\varphi - 9{,}81z + 4000\varphi \cdot z -$$

$$-1200\varphi \cdot \lambda_{\text{ст}1} - 4000\varphi \cdot \lambda_{\text{ст}2} + 4000\varphi \cdot \lambda_{\text{ст}3} + 4000z \cdot \lambda_{\text{ст}3} .$$

З умовы раўнавагі сістэмы пад уздзеяннем кансерватыўных сіл атрымаем:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}\right)_{\substack{\varphi=0\\ z=0}} = 19{,}62 - 1200\lambda_{\text{ст}1} - 4000\lambda_{\text{ст}2} + 4000\lambda_{\text{ст}3} = 0\,;$$

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)_{\substack{z=0\\ \varphi=0}} = -9{,}81 + 4000\lambda_{\text{ст}3} = 0\,.$$

З улікам атрыманых роўнасцей патэнцыяльная энергія сістэмы

$$\Pi = 3840\varphi^2 + 2000z^2 + 4000\varphi\cdot z\,.$$

Раней атрымалі

$$T = 0{,}67\dot{\varphi}^2 + 0{,}5\dot{z}^2\,.$$

Для кансерватыўнай сістэмы ўраўненні Лагранжа маюць выгляд:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}\,;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}\,.$$

Падлічым неабходныя вытворныя.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 1{,}34\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 7680\varphi + 4000z\,,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = \dot{z}, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = 4000z + 4000\varphi\,.$$

Падставім атрыманыя вытворныя ва ўраўненні Лагранжа.

$$1{,}34\ddot{\varphi} = -7680\varphi - 4000z\,;$$

$$\ddot{z} = -4000z - 4000\varphi\,.$$

Маем дыферэнцыяльныя ўраўненні свабодных ваганняў дадзенай механічнай сістэмы:

$$1{,}34\ddot{\varphi} + 7680\varphi = -4000z\,;$$

$$\ddot{z} + 4000z = -4000\varphi\,.$$

Прыватныя рашэнні гэтых ураўненняў маюць выгляд

$$\varphi = A\sin(kt+\alpha);$$

$$z = B\sin(kt+\alpha).$$

Адносіны абагульненых каардынат

$$\mu = \frac{\varphi}{z} = \frac{A}{B}.$$

Тады

$$\varphi = \mu z = \mu B\sin(kt+\alpha);$$

$$z = B\sin(kt+\alpha).$$

Велічыня μ характарызуе формы галоўных ваганняў і называецца каэфіцыентам размеркавання.

Падставім выразы φ і z у дыферэнцыяльныя ўраўненні свабодных ваганняў сістэмы.

$$-1{,}34\mu Bk^2\sin(kt+\alpha)+7680\mu B\sin(kt+\alpha) = -4000B\sin(kt+\alpha);$$

$$-Bk^2\sin(kt+\alpha)+4000B\sin(kt+\alpha) = -4000\mu B\sin(kt+\alpha).$$

Пасля відавочных скарачэнняў маем:

$$-1{,}34\mu k^2+7680\mu = -4000;$$

$$-k^2+4000 = -4000\mu.$$

Значэнне μ з другога ўраўнення падстаўляем у першае і атрымліваем ураўненне частот.

$$\mu = \frac{k^2-4000}{4000};$$

$$\mu(7680-1{,}34k^2)+4000 = 0;$$

$$\frac{k^2-4000}{4000}(7680-1{,}34k^2)+4000 = 0;$$

$$(k^2-4000)(7680-1{,}34k^2)+4000^2 = 0.$$

Пасля перамнажэння і прывядзення падобных членаў ураўненне частот прымае выгляд біквадратнага ўраўнення:

$$1{,}34k^4 - 13040k^2 + 1472 \cdot 10^4 = 0.$$

Знаходзім квадраты каранёў атрыманага ўраўнення.

$$k_{1,2}^2 = \frac{13040 \pm \sqrt{13040^2 - 4 \cdot 1{,}34 \cdot 1472 \cdot 10^4}}{2{,}68} = \frac{13040 \pm 9546{,}8}{2{,}68};$$

$$k_1^2 = 8427{,}9, \quad k_2^2 = 1303{,}4.$$

Тады частоты свабодных ваганняў механічнай сістэмы

$$k_1 = 91{,}8\text{с}^{-1}, \quad k_2 = 36{,}1\text{с}^{-1}.$$

Каэфіцыенты размеркавання, якія адпавядаюць атрыманым частотам:

$$\mu_1 = \frac{8427{,}9 - 4000}{4000} = 1{,}107 \text{ рад/м};$$

$$\mu_2 = \frac{1303{,}4 - 4000}{4000} = -0{,}674 \text{ рад/м}.$$

Ураўненні, якія вызначаюць першае галоўнае ваганне:

$$\varphi_1 = 1{,}107 B_1 \sin(91{,}8t + \alpha_1);$$

$$z_1 = B_1 \sin(91{,}8t + \alpha_1).$$

Ураўненні, якія вызначаюць другое галоўнае ваганне:

$$\varphi_2 = -0{,}674 B_2 \sin(36{,}1t + \alpha_2);$$

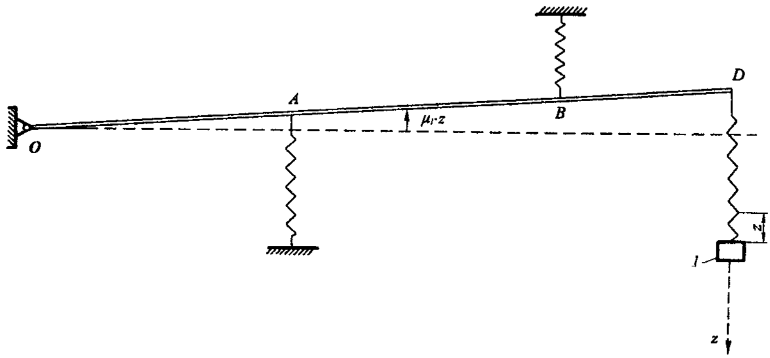
$$z_2 = B_2 \sin(36{,}1t + \alpha_2).$$

Агульныя рашэнні дыферэнцыяльных ураўненняў свабодных ваганняў разглядаемай механічнай сістэмы ўяўляюць сабою сумы адпаведных прыватных рашэнняў:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 1{,}107 B_1 \sin(91{,}8t + \alpha_1) - 0{,}674 B_2 \sin(36{,}1t + \alpha_2);$$

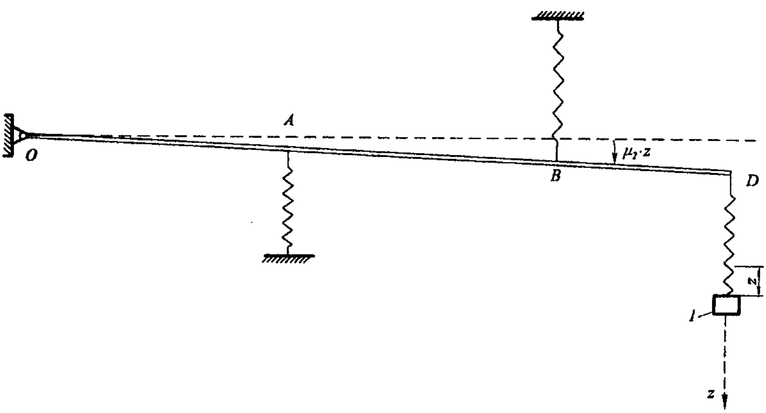
$$z = z_1 + z_2 = B_1 \sin(91{,}8t + \alpha_1) + B_2 \sin(36{,}1t + \alpha_2).$$

Канстанты інтэгравання B_1, B_2, α_1, α_2 могуць быць вызначаны па пачатковых умовах руху механічнай сістэмы. Паколькі ў заданні не патрабуецца атрымаць ураўненні руху сістэмы, то і пачатковыя ўмовы руху не дадзены.



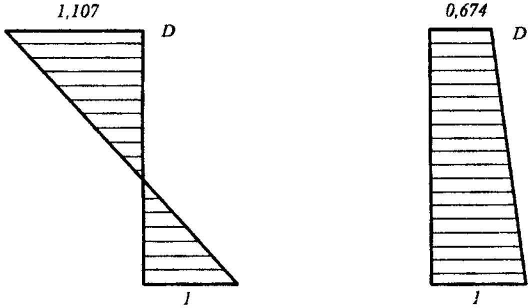
Рыс. 103. Першае галоўнае ваганне механічнай сістэмы:
$k_1 = 91{,}8\text{с}^{-1}$, $\mu_1 = 0{,}01107$ рад/см

Каэфіцыенты размеркавання $\mu_1 = 0{,}01107$ рад/см і $\mu_2 = -0{,}00674$ рад/см паказваюць, што ў першым галоўным ваганні (рыс. 103) з частатою $k_1 = 91{,}8\text{с}^{-1}$ перамяшчэнню грузу 1 на 1 см уніз адпавядае паварот рычага *OD* супраць гадзіннікавай стрэлкі на вугал 0,01107 рад, а ў другім галоўным ваганні (рыс. 104) з частатою $k_2 = 36{,}1\text{с}^{-1}$ перамяшчэнню грузу 1 на 1 см уніз адпавядае паварот рычага *OD* па гадзіннікавай стрэлцы на вугал 0,00674 рад.



Рыс. 104. Другое галоўнае ваганне механічнай сістэмы:
$k_2 = 36{,}1\text{с}^{-1}$, $\mu_2 = -0{,}00674$ рад/см

Формы ваганняў можна паказаць у выглядзе графікаў (рыс. 105). Параўноўваем перамяшчэнні грузу 1 і пункта D рычага OD.



Рыс. 105

У першым галоўным ваганні пры перамяшчэнні грузу 1 уніз на 1 см пункт $Д$ перамяшчаецца ўверх на велічыню $\mu_1 \cdot (l_1 + l_2 + l_3) = = 0{,}01107 \cdot 100 = 1{,}107$ см (груз 1 і пункт D знаходзяцца ў процілеглых фазах).

У другім галоўным ваганні пры перамяшчэнні грузу 1 уніз на 1 см пункт D перамяшчаецца таксама ўніз на велічыню $\mu_2 \cdot (l_1 + l_2 + l_3) = 0{,}00674 \cdot 100 = 0{,}674$ см (груз 1 і пункт D знаходзяцца ў адной фазе).

Заданне Д-20

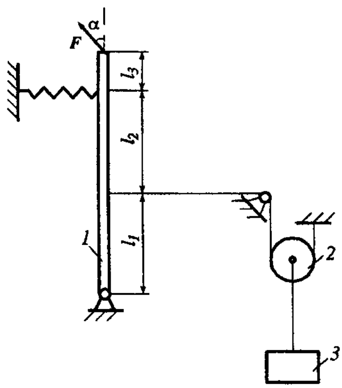
Вымушаныя ваганні механічнай сістэмы з адною ступенню свабоды

На механічную сістэму (рыс. 107–111), паказаную на ўсіх рысунках у стане раўнавагі, у некаторы момант пачынае дзейнічаць нязменная па велічыні сіла $\boldsymbol{F}$, якая мяняе накірунак у плоскасці чарцяжа па закону $\alpha = \omega t$. Атрымаць ураўненне вымушаных ваганняў механічнай сістэмы. Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 21. Цела 1 лічыць аднародным стрыжнем, для неаднародных блокаў і каткоў дадзены радыусы інерцыі i_{2x}, астатнія блокі і каткі лічыць аднароднымі дыскамі. Спружына, каэфіцыент жорсткасці якой c, у стане раўнавагі механічнай сістэмы мае статычную дэфармацыю.

Прыклад рашэння задання Д-20

Атрымаць ураўненне вымушаных ваганняў механічнай сістэмы, якая паказана на рыс. 106 у стане раўнавагі, калі вядома, што $m_1 = 10$ кг, $m_2 = 3$ кг, $m_3 = 1$ кг, $l_1 = 0{,}5$ м, $l_2 = 0{,}25$ м, $l_3 = 0{,}15$ м, $c = 1500$ н/м, У некаторы момант на стрыжань 1 пачынае дзейнічаць сіла $F = 15$ Н, $\alpha = 2\pi t$ (рад).

Р а ш э н н е. Механічная сістэма мае адну ступень свабоды. За абагульненую каардынату прымем вугал павароту φ_1 стрыжня 1.



Рыс. 106

Тады ўраўненне Лагранжа мае выгляд

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi_1}.$$

Кінетычная энергія механічнай сістэмы ў час руху

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Кінетычная энергія аднароднага стрыжня 1, які ўдзельнічае ў вярчальным руху,

$$T_1 = \frac{I_1\omega_1^2}{2} = \frac{m_1 l^2 \dot{\varphi}_1^2}{3 \cdot 2} = \frac{10}{6} \cdot 0{,}9^2 \cdot \dot{\varphi}_1^2 = 1{,}35\dot{\varphi}_1^2.$$

Кінетычная энергія рухомага блока 2, які ўдзельнічае ў плоскапаралельным руху,

$$T_2 = \frac{m_2 v_{c_2}^2}{2} + \frac{I_{c_2} \cdot \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 \dot{\varphi}_1^2 l_1^2}{2 \cdot 4} + \frac{m_2 r_2^2 \cdot \dot{\varphi}_1^2 l_1^2}{2 \cdot 4 \cdot r_2^2} = \frac{m_2}{4} \dot{\varphi}_1^2 l_1^2 =$$

$$= \frac{3}{4} \dot{\varphi}_1^2 \cdot 0{,}25 = 0{,}375 \dot{\varphi}_1^2 .$$

Кінетычная энергія грузу 3, які рухаецца пастунальна,

$$T_3 = \frac{m_3 v_3^2}{2} = \frac{m_3 \dot{\varphi}_1^2 l_1^2}{2 \cdot 4} = \frac{m_3 l_1^2}{8} \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1 \cdot 0{,}25}{8} \dot{\varphi}_1^2 = 0{,}031 \dot{\varphi}_1^2 .$$

Кінетычная энергія механічнай сістэмы

$$T = 1{,}35 \dot{\varphi}_1^2 + 0{,}375 \dot{\varphi}_1^2 + 0{,}031 \dot{\varphi}_1^2 = 1{,}756 \dot{\varphi}_1^2 .$$

Атрымаем неабходныя вытворныя для левай часткі ўраўнення Лагранжа.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = 3{,}512 \dot{\varphi}_1 ; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = 3{,}512 \ddot{\varphi}_1 ; \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0 .$$

Абагульненая сіла Q_{φ_1}, якая адпавядае абагульненай каардынаце φ_1 і ўлічвае кансерватыўныя сілы і адхіляючую сілу, мае наступны выраз:

$$Q_{\varphi_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} + Q_F .$$

Патэнцыяльную энергію П механічнай сістэмы падлічым як суму работ кансерватыўных сіл (сіл цяжару і пругкай сілы спружыны) на перамяшчэнні з адхіленага становішча (стрыжань павернуты ўправа на вугал φ_1) на нулявы ўзровень, за які прымаем стан раўнавагі сістэмы.

$$\Pi = -G_1 \frac{l_1 + l_2 + l_3}{2} (1 - \cos\varphi_1) - (G_2 + G_3) \frac{l_1}{2} \varphi_1 +$$

$$+ \frac{c}{2} [(\lambda_{\text{ст}} + (l_1 + l_2)\varphi_1)^2 - \lambda_{\text{ст}}^2] = -10 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}45 (1 - \cos\varphi_1) -$$

$$-4\cdot 9{,}81\cdot 0{,}25\varphi_1+750[2\cdot\lambda_{ст}\cdot 0{,}75\varphi_1+0{,}75^2\cdot\varphi_1^2]=$$

$$=-44{,}14(1-\cos\varphi_1)-9{,}81\varphi_1+750[1{,}5\lambda_{ст}\cdot\varphi_1+0{,}56\varphi_1^2].$$

У формуле раскладання для cos φ_1 абмяжуемся двума першымі членамі:

$$\cos\varphi_1=1-\frac{\varphi_1^2}{2!}+\ldots$$

$$\Pi=-44{,}14(1-1+\frac{\varphi_1^2}{2})-9{,}81\varphi_1+750(1{,}5\lambda_{ст}\cdot\varphi_1+0{,}56\varphi_1^2)=$$

$$=-22{,}07\varphi_1^2-9{,}81\varphi_1+750(1{,}5\lambda_{ст}\cdot\varphi_1+0{,}56\varphi_1^2).$$

У стане спакою

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_1}\right)_{\varphi_1=0}=0.$$

На падставе гэтай умовы знойдзем статычную дэфармацыю спружыны $\lambda_{ст}$ у стане спакою механічнай сістэмы.

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_1}=-44{,}14\varphi_1-9{,}81+750(1{,}5\lambda_{ст}+1{,}12\varphi_1).$$

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_1}\right)_{\varphi_1=0}=-9{,}81+1125\lambda_{ст}=0. \qquad \lambda_{ст}=0{,}00872\text{ м.}$$

Тады патэнцыяльная энергія сістэмы

$$\Pi=-22{,}07\varphi_1^2-9{,}81\varphi_1+750(1{,}5\cdot 0{,}00872\varphi_1+0{,}56\varphi_1^2)=$$

$$=-22{,}07\varphi_1^2-9{,}81\varphi_1+9{,}81\varphi_1+420\varphi_1^2=397{,}93\varphi_1^2).$$

Абагульненую адхіляючую сілу Q_F вызначым праз элементарную работу сілы F на перамяшчэнні, якое адпавядае варыяцыі абагульненай каардынаты φ_1.

$$Q_F=\frac{-F\sin\alpha\cdot(l_1+l_2+l_3)\delta\varphi_1}{\delta\varphi_1}=-15\sin 2\pi t\cdot 0{,}9=-13{,}5\sin 2\pi t.$$

Абагульненая сіла $Q\varphi_1$, якая ўлічвае кансерватыўныя сілы і адхіляючую сілу,

$$Q_{\varphi_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} + Q_F = -795{,}86\varphi_1 - 13{,}5\sin 2\pi t\,.$$

Цяпер можам запісаць ураўненне Лагранжа для разглядаемай механічнай сістэмы.

$$3{,}512\ddot{\varphi}_1 = -795{,}86\varphi_1 - 13{,}5\sin 2\pi t\,.$$

Або $\ddot{\varphi}_1 + 226{,}6\varphi_1 = -3{,}84\sin 2\pi t$.

Атрымалі лінейнае дыферэнцыяльнае ўраўненне другога парадку з пастаяннымі каэфіцыентамі, неаднароднае, якое апісвае ваганні механічнай сістэмы.

Агульнае рашэнне неаднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення

$$\varphi_1 = \overline{\varphi}_1 + \varphi_1^*,$$

дзе $\overline{\varphi}_1$ — агульнае рашэнне аднароднага ўраўнення;

φ_1^* — прыватнае рашэнне неаднароднага ўраўнення.

Знаходзім рашэнне $\overline{\varphi}_1$ ураўнення $\ddot{\varphi}_1 + 226{,}6\varphi_1 = 0$.

Характарыстычнае ўраўненне $z^2 + 226{,}6 = 0$.

Карані характарыстынага ўраўнення

$$z_1 = 15{,}05i, \quad z_2 = -15{,}05i.$$

Тады $\overline{\varphi}_1 = C_1\cos 15{,}05t + C_2\sin 15{,}05t$.

Прыватнае рашэнне неаднароднага ўраўнення мае выгляд:

$$\varphi_1^* = B\sin(2\pi t + \beta)\,.$$

Падставім φ_1^* у атрыманае раней лінейнае дыферэнцыяльнае ўраўненне і падлічым канстанты B і β.

$$\dot{\varphi}_1^* = B2\pi\cos(2\pi t + \beta), \quad \ddot{\varphi}_1^* = -4B\cdot\pi^2\sin(2\pi t + \beta)\,.$$

$$-4B\cdot\pi^2\sin(2\pi t + \beta) + B\sin(2\pi t + \beta) = -3{,}84\sin 2\pi t\,.$$

$$B(1 - 4\pi^2)\cdot\sin(2\pi t + \beta) = -3{,}84\sin 2\pi t\,.$$

$$B(1 - 4\pi^2)\cdot(\sin 2\pi t\cdot\cos\beta + \cos 2\pi t\cdot\sin\beta) = -3{,}84\sin 2\pi t\,.$$

Згодна з метадам нявызначаных каэфіцыентаў можам скласці наступную сістэму ураўненняў:

$$\begin{cases} B(1-4\pi^2)\cos\beta = -3{,}84, \\ B(1-4\pi^2)\sin\beta = 0. \end{cases}$$

Адкуль $\sin\beta = 0$, $\cos\beta = 1$.

Тады $B(1-4\pi^2) = -3{,}84$.

$$B = \frac{-3{,}84}{1-4\pi^2} = \frac{-3{,}84}{-38{,}44} = 0{,}1 \text{ рад.}$$

Такім чынам, $\varphi_1^* = 0{,}1\sin 2\pi t$.

Агульнае рашэнне лінейнага дыферэнцыяльнага ўраўнення

$$\varphi_1 = C_1\cos 15{,}05t + C_2\sin 15{,}05t + 0{,}1\sin 2\pi t.$$

Канстанты інтэгравання знойдзем па пачатковых умовах руху сістэмы. У момант $t_0 = 0$: $\varphi_1 = 0$, $\dot{\varphi}_1 = 0$.

$$\dot{\varphi}_1 = -15{,}05C_1\sin 15{,}05t + 15{,}05C_2\cos 15{,}05t + 0{,}1\cdot 6{,}28\cos 6{,}28t.$$

Падставім пачатковыя значэнні t, φ_1 і $\dot{\varphi}_1$ у выразы φ_1 і $\dot{\varphi}_1$. Атрымаем два алгебраічныя ўраўненні:

$$\begin{cases} 0 = C_1, \\ 0 = 15{,}05C_2 + 0{,}628. \end{cases}$$

З іх атрымаем: $C_1 = 0$, $C_2 = -0{,}417$.

Такім чынам,

$$\varphi_1 = -0{,}417\sin 15{,}05t + 0{,}1\sin 6{,}28t.$$

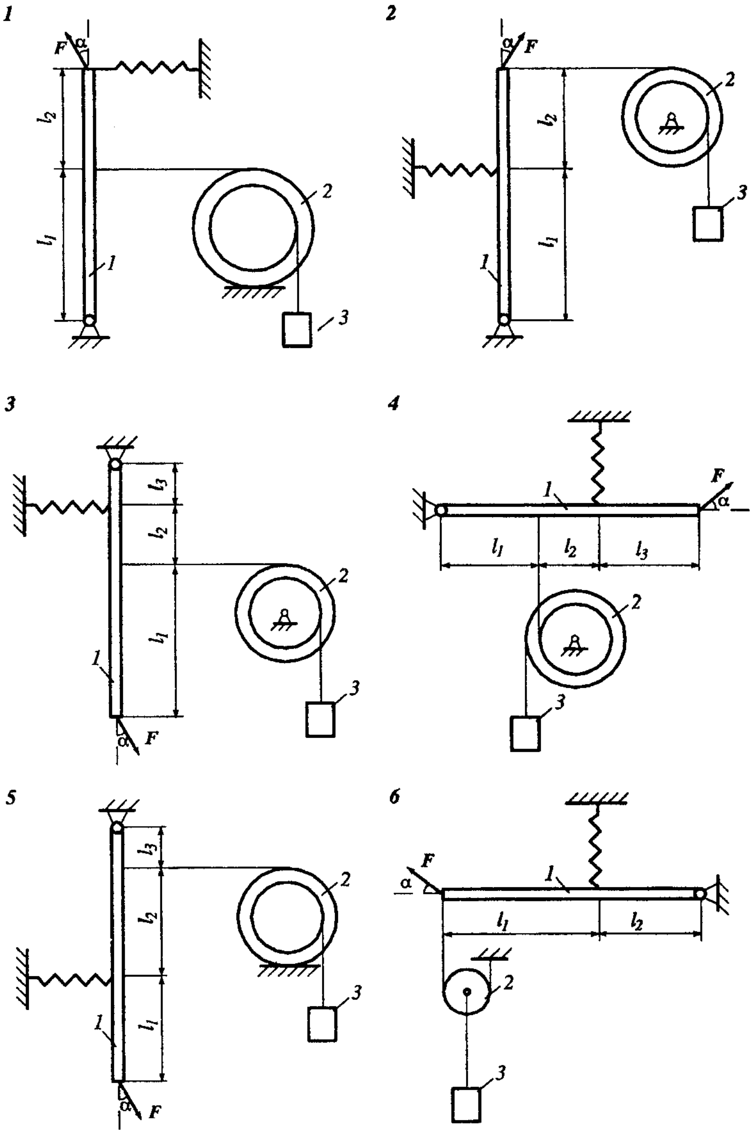
Першы член роўнасці апісвае свабодныя ваганні механічнай сістэмы з частатою $15{,}05\text{с}^{-1}$ і амплітудаю 0,417 рад, другі член роўнасці апісвае вымушаныя ваганні механічнай сістэмы з частатою $6{,}28\text{ с}^{-1}$ і амплітудаю 0,1 рад.

Ураўненне вымушаных ваганняў механічнай сістэмы

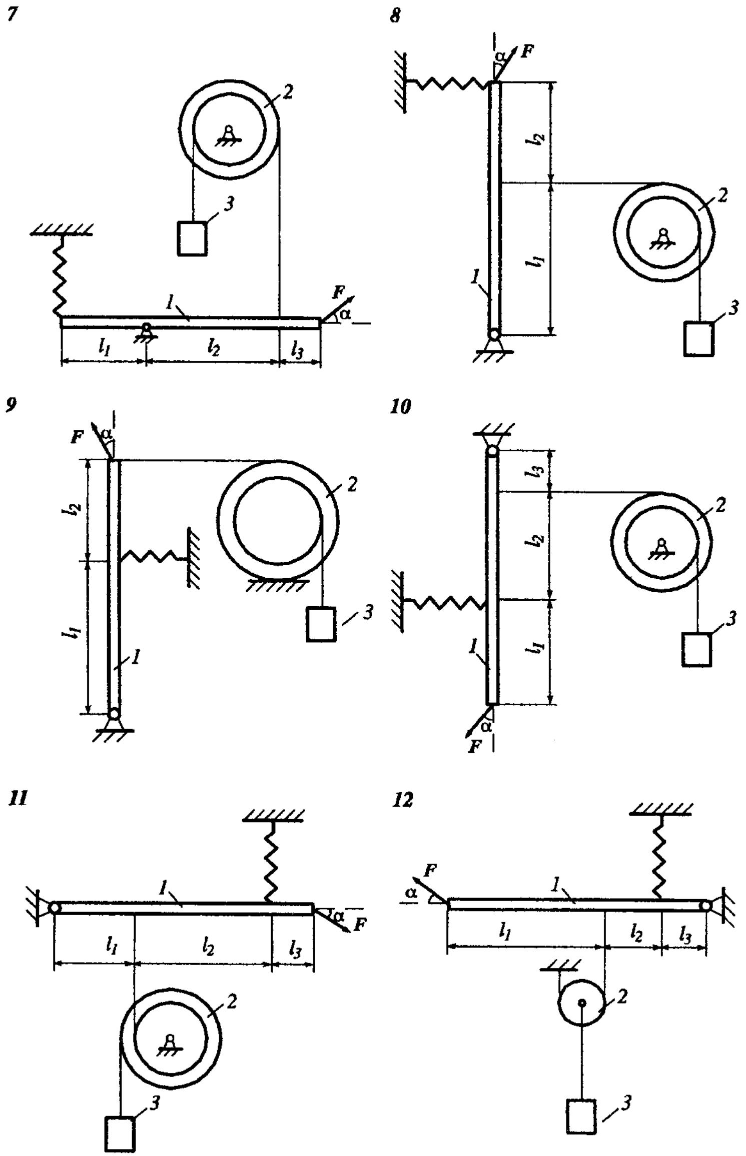
$$\varphi_1^* = 0{,}1\sin 6{,}28t.$$

Табліца 21

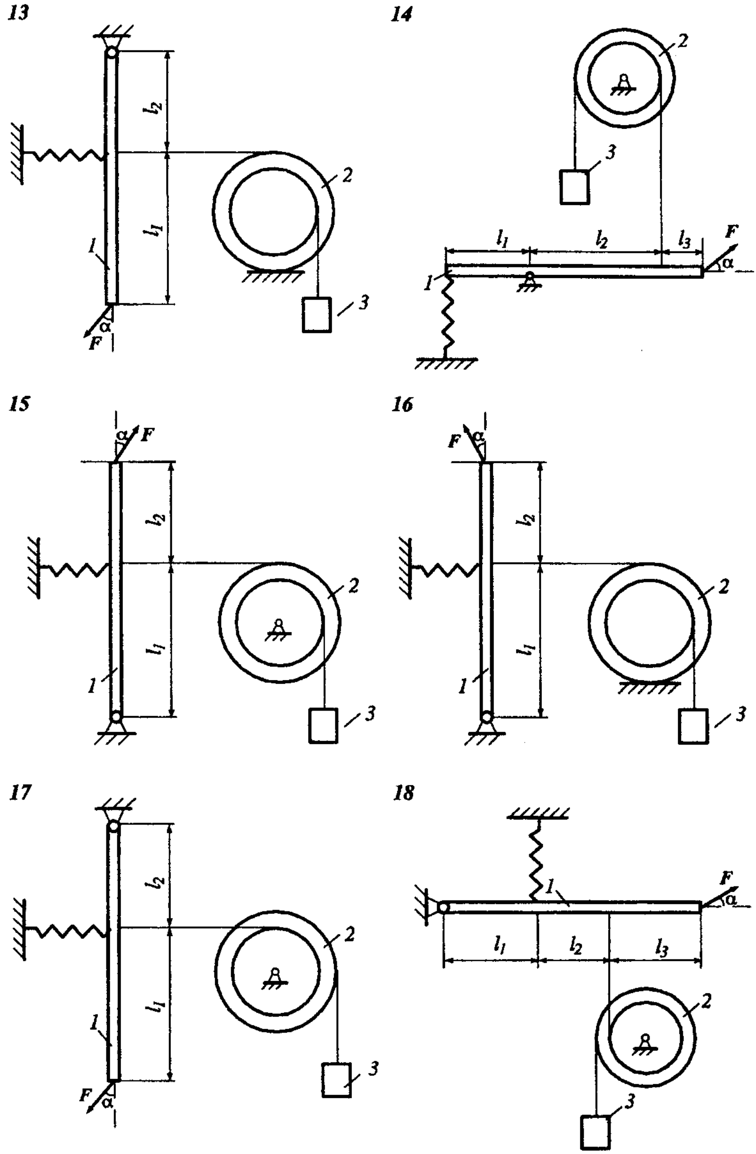
Варыянт	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	l_1, м	l_2, м	l_3, м	R_2, м	r_2, м	i_{2x}, м	c, н/м	F, Н	ω, c^{-1}
1	12	6	3	0,65	0,30		0,24	0,16	0,20	1800	15	1,2π
2	10	5	2	0,72	0,28		0,16	0,10	0,14	1600	20	1,5π
3	11	7	3	0,45	0,20	0,26	0,18	0,12	0,16	2000	25	1,75π
4	10	8	2	0,40	0,40	0,45	0,15	0,10	0,13	2600	18	2,5π
5	14	6	3	0,30	0,55	0,30	0,16	0,12	0,14	1800	20	1,5π
6	15	5	2	0,45	0,65					2800	16	1,2π
7	12	4	1	0,36	0,40	0,24	0,13	0,09	0,11	2500	22	2,4π
8	14	6	2	0,70	0,44		0,20	0,14	0,17	2200	20	1,5π
9	16	8	3	0,55	0,60		0,19	0,13	0,16	2000	19	1,4π
10	18	7	3	0,36	0,52	0,22	0,18	0,10	0,15	2600	18	1,2π
11	11	5	2	0,25	0,55	0,30	0,17	0,12	0,15	2800	15	1,5π
12	13	3	1	0,60	0,35	0,35				2000	20	1,75π
13	15	6	3	0,75	0,40		0,16	0,11	0,14	2100	30	1,4π
14	12	5	2	0,45	0,40	0,43	0,14	0,10	0,12	2800	25	1,2π
15	16	7	3	0,80	0,36		0,19	0,14	0,17	1900	15	1,5π
16	17	6	4	0,90	0,24		0,15	0,11	0,13	2200	16	1,75π
17	18	5	3	0,66	0,34		0,18	0,10	0,15	2100	18	2π
18	10	4	2	0,34	0,36	0,44	0,20	0,14	0,17	2500	20	2,2π
19	11	3	1	0,46	0,40	0,34				2400	22	2,5π
20	19	7	4	0,40	0,50	0,32	0,22	0,12	0,18	2800	24	1,2π
21	18	6	3	0,36	0,60	0,24	0,18	0,12	0,15	1600	25	1,4π
22	12	4	2	0,50	0,28	0,28	0,14	0,11	0,13	2000	15	1,5π
23	17	5	1	0,60	0,30	0,38	0,20	0,14	0,18	2200	18	1,75π
24	13	5	2	0,82	0,34					3400	20	1,3π
25	16	7	3	0,64	0,30	0,26	0,21	0,14	0,18	2400	22	1,2π
26	15	6	2	0,60	0,24	0,30	0,24	0,16	0,20	2600	16	1,4π
27	20	8	4	0,56	0,26	0,36	0,22	0,13	0,19	2800	18	1,5π
28	14	5	3	0,62	0,58		0,18	0,15	0,16	2400	20	1,75π
29	15	4	2	0,36	0,42	0,60				3000	22	2π
30	18	7	3	0,30	0,70	0,36	0,20	0,16	0,18	2600	25	1,5π


1
F
α
l_2
l_1
1
2
3
2
α
F
l_2
l_1
1
2
3
3
l_3
l_2
l_1
1
2
3
α
F
4
F
α
1
l_1
l_2
l_3
2
3
5
l_3
l_2
l_1
1
2
3
α
F
6
F
α
1
l_1
l_2
2
3

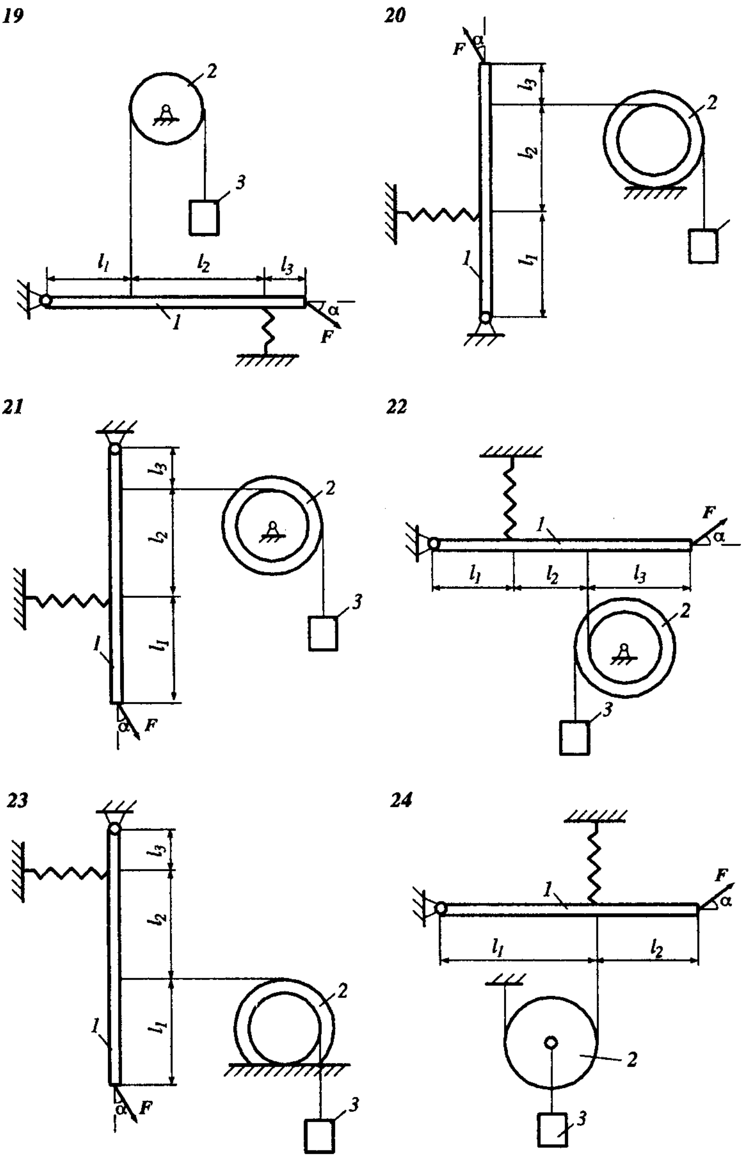
Рыс. 107



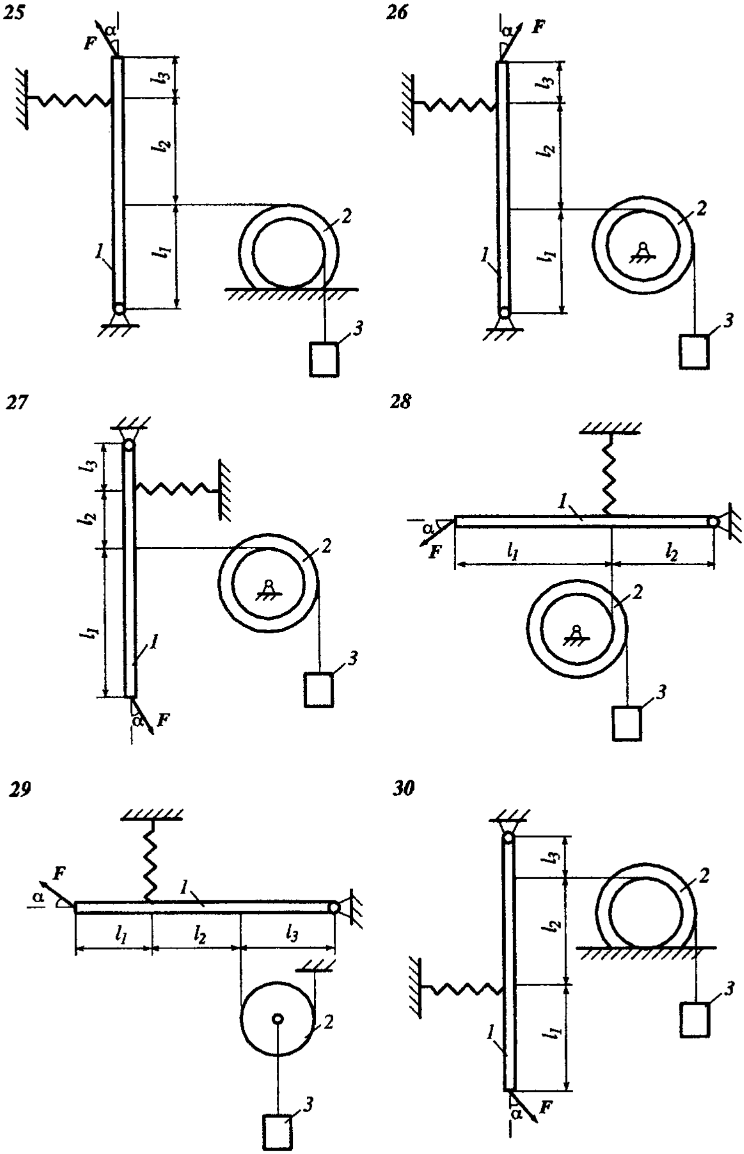
Рыс. 108



Рыс. 109



Рыс. 110



Рыс. 111

ТАБЛІЦА ВАРЫЯНТАЎ, ЯКІЯ ЎВАХОДЗЯЦЬ У РАЗЛІКОВУЮ РАБОТУ

Шыфр	Нумары заданняў									
	1 11	**2 12**	**3 13**	**4 14**	**5 15**	**6 16**	**7 17**	**8 18**	**9 19**	**10 20**
1	30	23	12	1	29	22	11	26	18	20
2	15	9	5	27	20	9	3	1	24	5
3	7	11	14	18	22	29	24	17	6	3
4	5	26	1	8	10	12	14	20	22	21
5	14	3	9	5	28	30	26	19	17	10
6	8	6	18	11	1	12	7	30	2	4
7	9	16	24	22	13	15	8	16	30	9
8	2	3	5	12	20	21	24	27	12	5
9	27	18	11	4	29	23	21	19	17	14
10	8	9	2	24	21	13	6	28	26	20
11	15	11	10	6	4	19	21	24	15	8
12	27	30	1	28	2	11	17	3	16	18
13	17	27	10	25	6	28	30	1	12	19
14	29	13	15	2	19	12	24	3	30	27
15	4	14	18	26	10	14	12	5	21	23
16	2	13	29	3	15	20	23	7	9	8
17	23	16	22	1	14	18	26	13	21	20
18	4	6	11	25	18	21	9	16	26	5
19	24	22	17	15	3	14	27	20	19	10
20	29	25	6	16	23	30	14	1	17	2
21	22	20	11	27	24	7	18	16	11	27
22	29	4	20	24	18	12	26	23	8	17
23	15	8	24	26	23	6	17	26	17	13
24	25	22	9	19	14	5	21	23	26	8
25	28	16	14	23	24	20	11	2	13	6
26	2	18	20	29	10	30	15	16	23	21
27	28	15	17	2	12	1	14	18	22	13
28	25	12	14	5	14	4	13	19	21	11
29	22	9	11	8	16	7	12	15	17	10
30	19	6	8	11	18	10	16	17	15	12
31	16	3	5	14	20	13	11	21	6	22
32	13	1	2	17	22	16	10	18	30	12
33	10	29	28	20	24	19	9	13	16	11
34	7	28	25	23	26	22	8	11	20	10
35	4	23	22	26	28	25	7	9	19	8
36	1	20	19	29	30	28	6	7	18	9
37	27	14	16	1	3	30	5	4	28	7

Шыфр	Нумары заданняў									
	1 11	2 12	3 13	4 14	5 15	6 16	7 17	8 18	9 19	10 20
38	24	11	13	4	5	1	3	6	14	2
39	21	8	10	7	9	3	2	30	13	6
40	18	5	7	10	11	8	1	29	12	4
41	15	2	4	13	7	9	30	16	11	5
42	12	19	1	14	13	7	28	15	10	3
43	9	16	27	17	15	11	26	14	8	2
44	6	13	24	20	17	14	22	12	9	1
45	3	10	21	23	19	15	24	13	7	14
46	26	7	18	25	21	17	20	11	6	13
47	12	24	13	16	11	21	23	7	10	23
48	4	13	20	5	9	22	25	23	8	7
49	28	25	27	6	24	16	5	27	15	3
50	26	14	4	29	13	2	30	12	28	8
51	11	1	30	9	2	29	8	3	27	6
52	4	28	5	6	26	4	7	25	2	9
53	24	10	1	23	4	15	29	19	25	18
54	20	30	12	2	23	21	16	9	4	15
55	17	27	9	5	29	23	14	8	3	17
56	14	24	6	8	27	25	12	7	2	18
57	11	21	3	16	4	27	10	6	1	19
58	8	18	1	14	6	29	8	5	30	20
59	5	15	26	17	8	2	6	28	29	21
60	2	12	23	20	10	4	1	27	28	22
61	25	9	20	23	12	6	4	26	27	24
62	22	6	17	26	14	8	2	25	24	23
63	19	3	14	29	16	10	30	4	26	21
64	16	1	11	3	18	12	29	2	25	22
65	13	29	8	7	20	14	28	3	23	29
66	10	26	5	19	22	16	27	1	21	30
67	7	23	2	18	24	18	26	17	22	25
68	4	20	25	16	21	26	24	18	2	23
69	1	17	22	19	28	23	25	20	3	24
70	24	14	19	22	30	25	23	21	4	26
71	21	28	16	25	5	27	22	19	20	1
72	18	25	13	28	7	29	21	22	19	2
73	15	22	10	1	9	20	19	23	18	3
74	12	18	7	4	11	22	20	24	17	5
75	9	16	4	7	13	24	18	1	15	6
76	6	13	1	10	15	26	17	2	16	7
77	3	10	24	13	17	30	16	8	14	4
78	23	7	21	16	19	28	15	3	13	8

Шыфр	Нумары заданняў									
	1 **11**	**2** **12**	**3** **13**	**4** **14**	**5** **15**	**6** **16**	**7** **17**	**8** **18**	**9** **19**	**10** **20**
79	20	4	18	19	21	29	14	5	12	9
80	17	30	15	22	23	27	13	4	11	10
81	14	27	12	25	29	23	11	6	10	13
82	11	24	9	28	25	21	12	7	8	12
83	8	21	6	2	27	19	10	9	7	11
84	5	18	3	6	1	17	9	10	4	14
85	2	15	23	8	3	16	7	11	9	17
86	22	12	20	11	5	13	8	12	16	15
87	19	9	17	14	7	11	6	13	5	16
88	16	6	14	17	9	10	5	15	3	18
89	13	3	11	20	14	9	4	16	6	19
90	10	1	8	23	13	7	3	14	2	20
91	7	29	5	26	15	4	2	17	1	21
92	4	26	2	29	17	5	1	18	3	22
93	1	9	22	3	19	2	30	20	4	23
94	21	20	19	6	23	1	29	25	5	24
95	18	17	16	9	21	30	28	19	6	25
96	15	14	13	12	25	29	27	21	7	26
97	12	11	10	15	27	28	26	22	8	29
98	21	5	19	13	6	14	20	17	15	30
99	7	20	29	18	17	19	16	28	27	20
100	18	23	8	19	26	21	24	22	9	27
101	24	10	20	11	22	20	21	24	23	21
102	9	8	7	18	29	27	25	23	1	30
103	6	5	4	21	2	26	24	25	9	27
104	3	2	1	24	4	25	23	26	10	28
105	20	25	3	27	6	24	22	28	11	1
106	17	21	6	30	8	23	20	24	12	2
107	14	7	9	4	10	22	21	29	13	3
108	11	19	12	7	14	21	18	27	15	4
109	8	30	15	10	12	20	19	1	14	5
110	5	27	18	13	16	19	17	30	17	6
111	2	24	21	16	18	17	15	3	19	7
112	19	21	24	18	20	16	14	2	22	8
113	16	18	27	22	24	15	13	4	23	9
114	13	15	30	25	22	18	12	5	24	10
115	10	12	21	28	26	14	11	6	16	12
116	19	21	12	18	13	8	17	14	9	15
117	16	10	15	16	25	12	23	26	13	22
118	28	11	24	29	14	25	1	10	26	30
119	9	27	2	8	28	3	7	29	4	5

Шыфр	Нумары заданняў									
	1 11	2 12	3 13	4 14	5 15	6 16	7 17	8 18	9 19	10 20
120	30	7	6	2	5	1	3	4	5	10
121	7	9	18	1	13	28	10	8	18	11
122	4	6	15	14	30	12	9	7	20	13
123	1	26	12	17	3	11	8	9	21	14
124	18	25	9	20	5	10	7	11	26	15
125	15	22	6	23	7	9	5	10	25	16
126	12	19	3	26	9	8	6	13	27	17
127	8	16	1	29	11	7	4	12	28	18
128	6	13	2	11	15	5	3	14	29	19
129	3	10	5	8	13	6	2	15	30	20
130	17	7	8	5	19	4	1	16	2	21
131	14	4	11	2	17	3	30	18	1	22
132	11	29	14	30	21	2	26	19	3	23
133	8	27	17	28	23	1	22	20	4	24
134	5	24	20	26	25	4	29	17	6	27
135	2	21	23	24	27	5	28	22	7	25
136	16	18	26	22	29	6	27	23	8	28
137	13	15	29	20	4	7	25	24	9	26
138	10	29	20	18	6	8	24	25	10	30
139	7	12	17	16	8	2	23	26	5	1
140	4	9	14	15	10	3	22	27	11	2
141	1	6	11	14	12	9	21	28	13	3
142	15	3	8	13	14	10	20	29	12	4
143	12	1	5	10	16	11	19	30	14	6
144	9	29	2	11	18	12	17	1	15	5
145	6	26	7	12	20	13	18	2	16	8
146	3	23	10	8	22	14	16	4	17	7
147	14	20	13	7	24	15	22	3	18	9
148	11	17	16	6	26	10	15	5	19	12
149	8	14	19	5	28	16	20	6	30	13
150	5	11	22	4	30	17	14	7	20	10

ЛІТАРАТУРА

1. Айзенберг Т.Б., Воронков И.М., Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике. М.: Высшая школа, 1968. 419 с.
2. Бать М.И. , Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: В 2 т. Т. 2. М.: Наука, 1985. 559 с.
3. Лойтянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: В 2 т. Т. 2. М.: Наука, 1983. 640 с.
4. Хвясько Г.М. Курс тэарэтычнай механікі. Мн.: БДТУ, 2000. 353 с.
5. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. СПб.: Лань, 2001. 764 с.

ЗМЕСТ

Вучэбнае выданне

Хвясько Генадзій Міхайлавіч

ТЭАРЭТЫЧНАЯ МЕХАНІКА

Практыкум

У 2-х частках

Частка 2

Рэдактар Р.М. Рабая
Камп'ютэрная вёрстка А.В. Ільчанка

Падпісана да друку 24.01.04. Фармат 60×84 $^{1}/_{16}$.
Папера афсетная. Гарнітура Таймс. Друк афсетны.
Ум. друк. арк. 11,6. Ул.-выд. арк. 10,8.
Тыраж 700 экз. Заказ 46.

Установа адукацыі
«Беларускі дзяржаўны тэхналагічны універсітэт».
220050. Мінск, Свярдлова, 13а.
ЛИ № 02330/0133255 ад 30.04.04.

Аддрукавана ў лабараторыі паліграфіі ўстановы адукацыі
«Беларускі дзяржаўны тэхналагічны універсітэт».
220050. Мінск, Свярдлова, 13.
ЛП № 02330/0056739 ад 22.01.04.

Пераплётна-брашуровачныя працэсы выкананы
ў ААТ «Паліграфкамбінат імя Я. Коласа».
220600. Мінск, Чырвоная, 23. Заказ 413.