

Установа адукацыі
«БЕЛАРУСКІ ДЗЯРЖАЎНЫ ТЭХНАЛАГІЧНЫ УНІВЕРСІТЭТ»

Г.М. ХВЯСЬКО

ТЭАРЭТЫЧНАЯ МЕХАНІКА

Практыкум

У 2-х частках

Частка 1

*Дапушчана Міністэрствам адукацыі Рэспублікі Беларусь у якасці
вучэбнага дапаможніка для студэнтаў тэхнічных спецыяльнасцей
устаноў, якія забяспечваюць атрыманне вышэйшай адукацыі*

Мінск 2004

УДК 531
ББК 22.21
Х 30

Рэцэнзенты:
кафедра тэарэтычнай механікі Беларускага нацыянальнага
тэхнічнага універсітета (загадчык кафедры доктар
фізіка-матэматычных навук, прафесар А.У. Чыгарэў);
прафесар кафедры інжынернай графікі Беларускага дзяржаўнага
універсітета інфарматыкі і радыёэлектронікі,
доктар тэхнічных навук В.М. Сурын

Хвясько Г.М.

Х 30 Тэарэтычнае механіка. Практыкум: У 2 ч. Ч. 1: Вучэбны дапаможнік для студэнтаў тэхнічных спецыяльнасцей / Г.М. Хвясько.— Мн.: БДТУ, 2004.— 187 с.: іл.

ISBN 985-434-273-5

Практыкум змяшчае трынаццаць заданняў па статыцы і дванаццаць па кінематыцы.

На кожнаму заданию прыведзены прыклады рашэнняў, дадзены неабходныя парады па прымененню тэорыі ў канкрэтных задачах. Прыведзеная колькасць варыянтаў заданняў дазваляе фарміраваць разліковыя работы па статыцы і кінематыцы для студэнтаў вочнай і завочнай форм навучання вышэйшых тэхнічных навучальных установ.

УДК 531
ББК 22.21

ISBN 985-434-273-5 (ч. 1)
ISBN 985-434-272-7

© Хвясько Г.М., 2004
© Установа адукацыі
«Беларускі дзяржаўны
тэхналагічны універсітэт»,
2004

ПРАДМОВА

Нельга пераацаніць уклад тэарэтычнай механікі ў падрыхтоўку інжынераў самых розных спецыяльнасцей. Яе законы і вывады шырока выкарыстоўваюцца ў такіх дысцыплінах, як супраціўленне матэрыялаў, тэорыя механізмаў і машын, дэталі машын, і многіх спецыяльных дысцыплінах.

Якаснае засваенне курса тэарэтычнай механікі прадугледжае, акрамя добрых ведаў тэарэтычнага матэрыялу, валоданне цвёрдымі навыкамі рашэння задач. Ніякая дадатковая колькасць задач, рэшаных самастойна студэнтам па ўсіх раздзелах курса, не будзе лішняю.

Змешчаныя заданні дазваляюць фарміраваць разліковыя работы па статыцы і кінематыцы для студэнтаў розных спецыяльнасцей вочнай і завочнай форм навучання.

Практыкум змяшчае трынаццаць заданняў па статыцы і два наццаць — па кінематыцы, кожнае заданне мае трыццаць варыянтаў. У складанні задач задання С-2 прыняў удзел дацэнт Э.Г. Гецэвіч.

Прыклады выканання заданняў або неабходныя парады па рашэнню задач даюць студэнтам магчымасць працаўваць над выкананнем заданняў самастойна. Наборы варыянтаў заданняў для разліковых работ прыведзены адпаведна шыфрам студэнтаў у табліцы, размашчанай у канцы дапаможніка.

Ва ўсіх заданнях статыкі, акрамя тых, дзе іншае абумоўлена ў тэксле, цела лічыцца аднародным пры вызначэнні месца занадходжання яго цэнтра цяжару. У тэксле і на рэсунках абазначэнні вектарных величынь ад скалярных адрозніваюцца больш тоўстым шрыфтам.

Аўтар выказвае шчырую падзяку рэктару БДТУ прафесару І.М. Жарскаму за дзейную падтрымку выдання дапаможніка, а таксама загадчыку кафедры тэарэтычнай механікі БДТУ прафесару В.С. Віхрэнку і загадчыку кафедры паліграфіі БДТУ прафесару М.І. Кулаку за вялікую дапамогу ў падрыхтоўцы рукапісу дапаможніка да выдання.

СТАТИКА

1. Плоская сістэма сіл

Сыходная сістэма сіл

Заданне С-1

Вызначэнне рэакцый апор і нагрузкак у стрыжнях плоскай фермы

Несвабодная плоская ферма знаходзіцца ў стане раўнавагі пад уздзеяннем сілы $F=5$ кН, якая прыкладзена ў вузле фермы. Вызначыць рэакцыі апор фермы і нагрузкі ва ўсіх стрыжнях.

Схемы фермаў і неабходныя даныя прыведзены на рыс. 1 – 3.

Прыклад разшэння задання С-1

Дадзена: схема фермы (рыс. 4), $F=2$ кН, $\alpha=30^\circ$. Вызначыць рэакцыі апор і нагрузкі ў стрыжнях.

Рашэнне. Разглядаем раўнавагу фермы ABC . На яе накладзены дзве сувязі: нерухомы цыліндрычны шарнір у пункце A і бязважкі стрыжань OB у пункце B . Адкінем умоўна сувязі і заменім іх рэакцыямі сувязей. Рэакцыя R_B бязважкага стрыжня накіравана ўздоўж яго. На ферму, як на адно цвёрдае цела дзейнічаюць тры непаралельныя сілы (F , R_A , R_B), лініі дзеяння якіх згодна з тэарэмаю аб трох сілах перасякаюцца ў адным пункце. Дакладна ведаем накірункі сілы F і рэакцыі R_B бязважкага стрыжня OB . Знаходзім пункт M перасячэння ліній дзеяння дзвюх названых сіл. Праз пункт M і пункт A пройдзе лінія дзеяння рэакцыі R_A нерухомага цыліндрычнага шарніра. Паказваем рэакцыю R_A . Бачым, што ферма ABC знаходзіцца ў раўнавазе пад уздзеяннем плоскай сыходнай сістэмы сіл. Паказваем восі каардынат Bxu і запісваем ураўненні раўнавагі згодна з ўмовамі раўнавагі атрыманай сістэмы сіл.

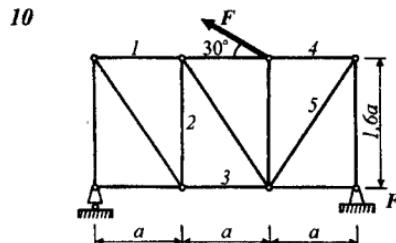
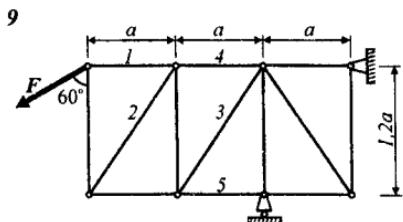
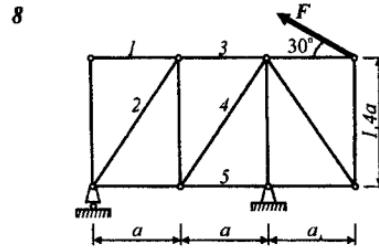
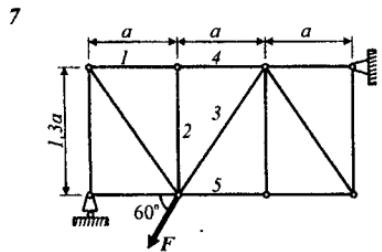
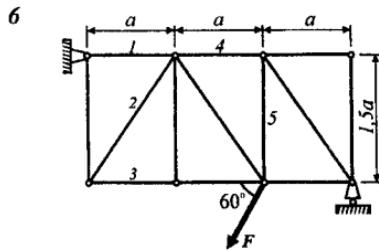
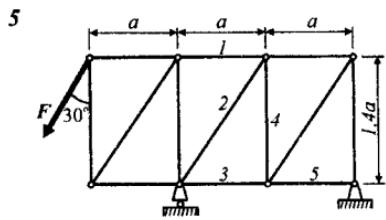
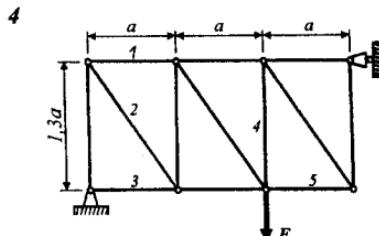
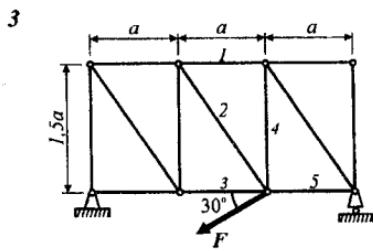
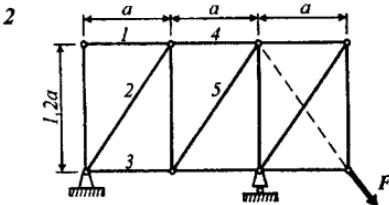
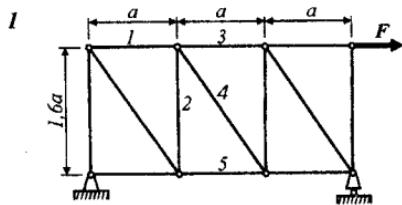


Рис. 1

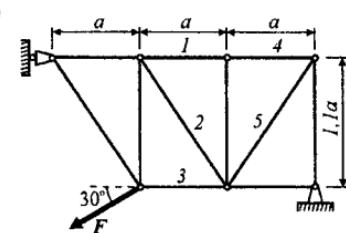
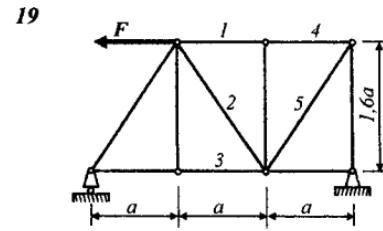
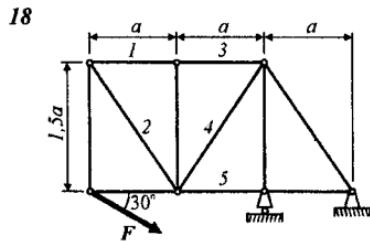
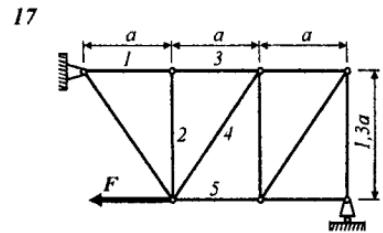
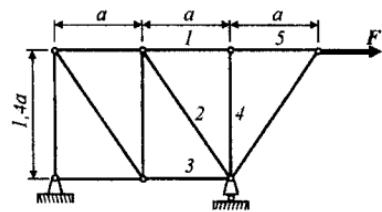
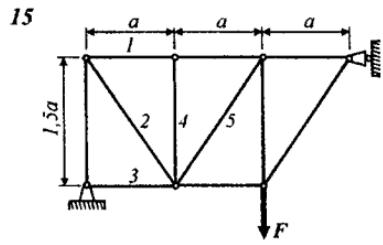
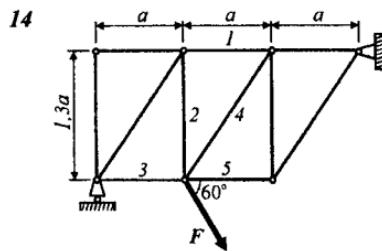
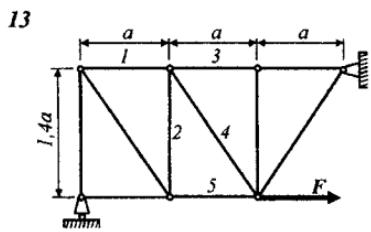
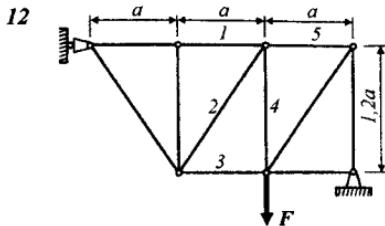
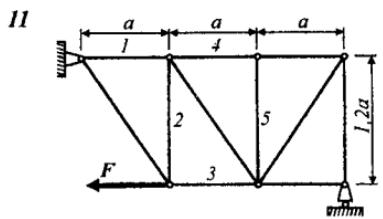


Рис. 2

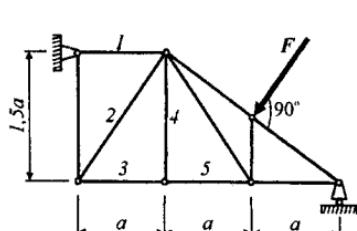
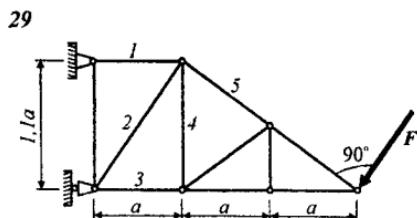
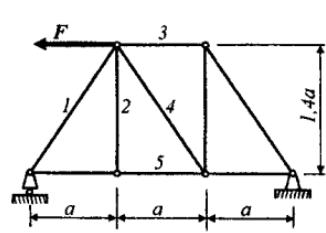
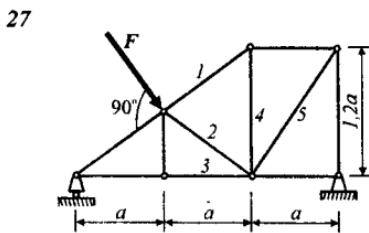
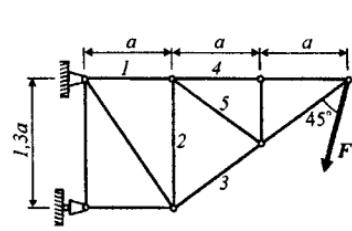
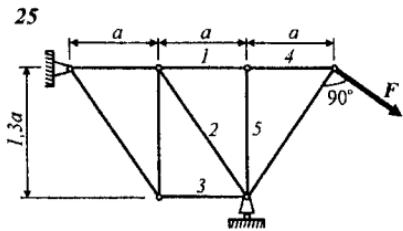
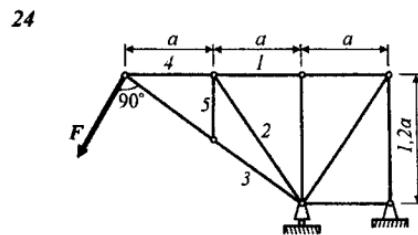
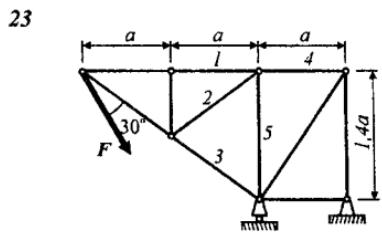
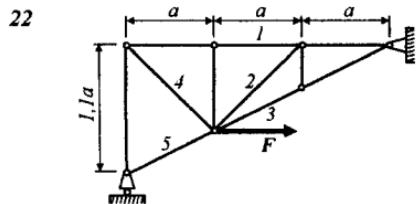
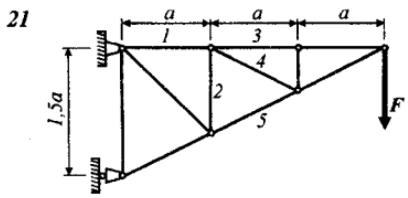


Рис. 3

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad R_A \sin \varphi - R_B \cos \alpha - F \cos(\alpha + \beta) = 0 ;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad R_A \cos \varphi + R_B \sin \alpha - F \sin(\alpha + \beta) = 0 .$$

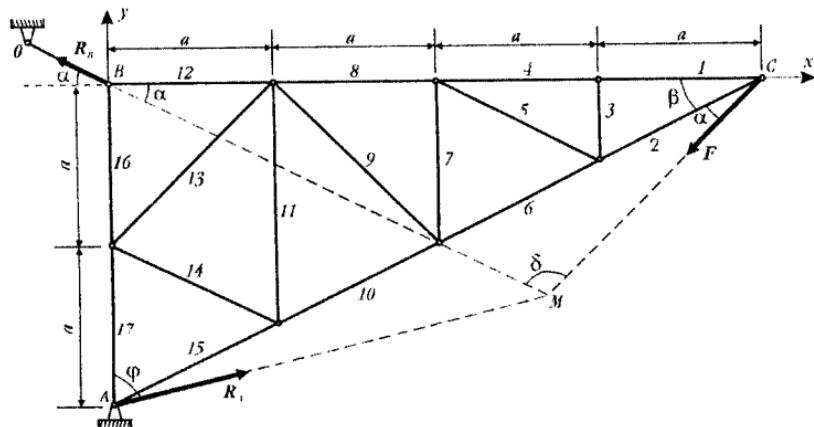
Падлічым спачатку вуглы β і φ .

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2a}{4a} = 0,5, \quad \beta = 26,57^\circ .$$

Па тэарэме сінусаў у трохвугольніку BCM знайдзем старану BM .

$$\frac{BC}{BM} = \frac{\sin \delta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad \delta = 180^\circ - \alpha - (\alpha + \beta) = 93,43^\circ ;$$

$$BM = BC \frac{\sin 56,57^\circ}{\sin 93,43^\circ} = 4a \frac{0,835}{0,998} = 3,347a.$$



Рыс. 4

З трохвугольніка ABM па тэарэме косінусаў знаходзім старану AM .

$$AM = \sqrt{(AB)^2 + (BM)^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos(90^\circ - \alpha)},$$

$$AM = \sqrt{4a^2 + 11,2a^2 - 6,69a^2} = 2,917a.$$

Па тэарэме сінусаў у трохвугольніку ABM знайдзем вугал φ .

$$\frac{AM}{BM} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin \varphi}, \quad \sin \varphi = \frac{BM}{AM} \sin 60^\circ = \frac{3,347a}{2,917a} \cdot 0,866 = 0,994;$$

$$\varphi = 83,54^\circ.$$

Цяпер маем магчымасць падставіць значэнні трыганаметрычных функцыяў ва ўраўненні раўнавагі і вызначыць рэакцыі R_A і R_B .

$$\begin{cases} R_A \cdot 0,994 - R_B \cdot 0,866 - 2 \cdot 0,551 = 0, \\ R_A \cdot 0,112 + R_B \cdot 0,5 - 2 \cdot 0,834 = 0. \end{cases}$$

Памножым другое ўраўненне на 1,732 з мэтаю выраўняць каэфіцыенты пры R_B і складзём пачленна першае і другое ўраўненні.

$$\begin{cases} R_A \cdot 0,994 - R_B \cdot 0,866 - 1,102 = 0, \\ R_A \cdot 0,194 + R_B \cdot 0,866 - 2,889 = 0. \end{cases}$$

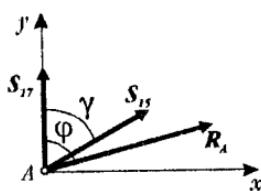
$$R_A \cdot 1,188 - 3,991 = 0, \quad R_A = 3,36 \text{ кН};$$

$$3,36 \cdot 0,994 - R_B \cdot 0,866 - 1,102 = 0;$$

$$0,866R_B = 2,238, \quad R_B = 2,58 \text{ кН}.$$

Для вызначэння нагрузкак у стрыжнях фермы будзем па чарзе разглядаць раўнавагу вузлоў фермы. Пры гэтым парадак разгляду вузла будзе дыктавацца патрабаваннем наяўнасці ўздзеяння на вузел не больш за дзве невядомыя сілы (маем магчымасць для плоскай сыходнай сістэмы сіл скласці толькі два незалежныя ўраўненні раўнавагі).

Разгледзім раўнавагу вузла А. На яго накладзены тры сувязі: нерухомы цыліндрычны шарнір, бязважкія стрыжні 15 і 17. Рэакцыя шарніра R_A падлічана. Рэакцыі стрыжняў накіроўваем уздоўж іх, мяркуючы пры гэтым, што яны расцягнутыя. У стане раўнавагі знаходзіцца плоская сыходная сістэма сіл.



$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad R_A \sin \varphi + S_{15} \sin \gamma = 0;$$

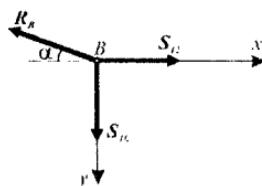
$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad R_A \cos \varphi + S_{15} \cos \gamma + S_{17} = 0;$$

$$\gamma = 90^\circ - \beta = 63,43^\circ.$$

$$\begin{cases} 3,36 \cdot 0,994 + S_{15} \cdot 0,894 = 0, \\ 3,36 \cdot 0,112 + S_{15} \cdot 0,447 + S_{17} = 0. \end{cases}$$

$$S_{15} = -3,73 \text{ kH}, \quad S_{17} = 1,29 \text{ kH}.$$

Атрыманы адмоўны адказ сведчыць аб тым, што на самай справе стрыжань 15 сціснуты.



Разгледзім раўнавагу вузла B . На яго накладзены трох сувязі: бязважкія стрыжні 12, 16 і OB .

Рэакцыя R_B стрыжня OB падлічана. Паказваем рэакцыі ўсіх стрыжняў і атрымліваем плоскую сыходную сістэму сіл, якая ўраўнаважана.

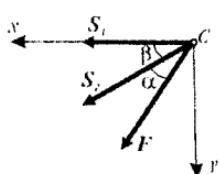
$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad S_{12} - R_B \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad S_{16} - R_B \sin \alpha = 0.$$

Падставім вядомыя значэнні і знайдзем S_{12} і S_{16} .

$$S_{12} = R_B \cos \alpha = 2,58 \cdot 0,866 = 2,23 \text{ kH}.$$

$$S_{16} = R_B \sin \alpha = 2,58 \cdot 0,5 = 1,29 \text{ kH}.$$



Разгледзім раўнавагу вузла C . На яго накладзены дзве сувязі: бязважкія стрыжні 1 і 2. Паказваем рэакцыі S_1 і S_2 стрыжняў. Разам з вядомаю сілаю F яны ўтварылі плоскую сыходную сістэму сіл, якая знаходзіцца ў стане раўнавагі.

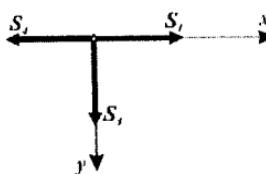
$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad S_1 + S_2 \cos \beta + F \cos(\alpha + \beta) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad S_2 \sin \beta + F \sin(\alpha + \beta) = 0.$$

Падставім вядомыя значэнні і падлічым S_1 і S_2 .

$$S_2 = -\frac{F \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} = -\frac{2 \cdot 0,834}{0,447} = -3,73 \text{ кН};$$

$$S_1 = -S_2 \cos \beta - F \cos(\alpha + \beta) = 3,73 \cdot 0,894 - 2 \cdot 0,551 = 2,23 \text{ кН}.$$

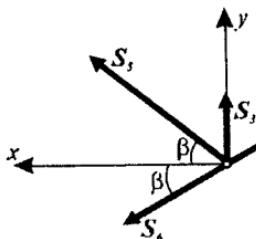


З адказаў відаць, што стрыжань 1 расцягнуты, а стрыжань 2 – сціснуты. Разгледзім раўнавагу вузла, на які накладзены 3 сувязі: бязважкія стрыжні 1, 3, 4. Пакажам рэакцыі сувязей. У стане раўнавагі знаходзіцца плоская сыходная сістэма сіл.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad S_1 - S_4 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad S_3 = 0.$$

$$S_4 = S_1 = 2,23 \text{ кН}, \quad S_3 = 0.$$



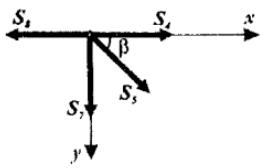
Стрыжань 3 не нагружаны.
Разгледзім раўнавагу вузла, на які накладзены 4 сувязі: бязважкія стрыжні 2, 3, 5, 6. Пакажам рэакцыі сувязей. У раўнаваге знаходзіцца плоская сыходная сістэма сіл.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad S_5 \cos \beta + S_6 \cos \beta - S_2 \cos \beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad S_5 \sin \beta - S_6 \sin \beta + S_3 + S_2 \sin \beta = 0.$$

$$\begin{cases} S_5 + S_6 = -3,73, \\ S_5 - S_6 = 3,73. \end{cases}$$

$$2S_5 = 0, \quad S_5 = 0, \quad S_6 = -3,73 \text{ кН}.$$

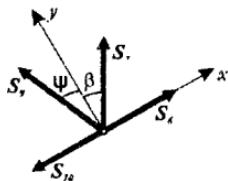


Разгледзім раўнавагу вузла, на які накладзены 4 сувязі: бязважкія стрыжні 4, 5, 7, 8. Пакажам рэакцыі сувязей. Атрымалі плоскую сыходную сістэму сіл, якая знаходзіцца ў стане раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad S_4 + S_5 \cos \beta - S_8 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad S_7 + S_5 \sin \beta = 0.$$

$$\begin{cases} S_4 - S_8 = 0, & S_8 = S_4 = 2,23 \text{ кН}. \\ S_7 = 0; & S_7 = 0. \end{cases}$$



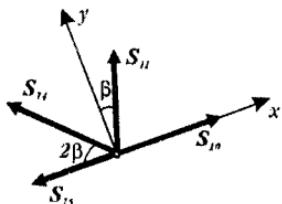
Разгледзім раўнавагу вузла, на які накладзены 4 сувязі: бязважкія стрыжні 6, 7, 9, 10. Пакажам рэакцыі сувязей. У раўнавазе знаходзіцца плоская сыходная сістэма сіл.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad S_6 + S_7 \sin \beta - S_9 \sin \psi - S_{10} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad S_7 \cos \beta + S_9 \cos \psi = 0.$$

$$\begin{cases} S_6 - S_9 \sin \psi - S_{10} = 0, \\ S_9 \cos \psi = 0. \end{cases}$$

$$S_9 = 0. \quad S_{10} = S_6 = -3,73 \text{ кН}.$$



Разгледзім раўнавагу вузла, на які накладзены 4 сувязі: бязважкія стрыжні 10, 11, 14, 15. Пакажам рэакцыі сувязей. У стане раўнавагі знаходзіцца плоская сыходная сістэма сіл.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad S_{10} - S_{15} + S_{11} \sin \beta - S_{14} \cos 2\beta = 0;$$

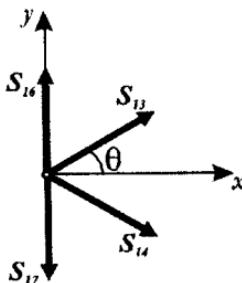
$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad S_{11} \cos \beta + S_{14} \sin 2\beta = 0.$$

Падставім лікавыя значэнні вядомых велічынь і знайдзем S_{11} і S_{14} .

$$\begin{cases} -3,73 + 3,73 + S_{11} \cdot 0,447 - S_{14} \cdot 0,6 = 0, \\ S_{11} \cdot 0,894 + S_{14} \cdot 0,8 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,447S_{11} - 0,6S_{14} = 0, \\ 0,894S_{11} + 0,8S_{14} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0,745S_{11} - S_{14} = 0, \\ 1,117S_{11} + S_{14} = 0. \end{cases}$$

$$1,862S_{11} = 0, \quad S_{11} = 0, \quad S_{14} = 0.$$



Разгледзім раўнавагу вузла, на які накладзены 4 сувязі: бязважкія стрыжні 16,13,14,17. Пакажам рэакцыі сувязей. У стане раўнавагі знаходзіцца плоская сыходная сістэма сіл. З чатырох сіл ведаем тры: S_{16} , S_{17} , S_{14} , прычым $S_{14}=0$. Тады S_{13} знаходзім з аднаго ўраўнення.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad S_{13} \cos \theta = 0, \quad S_{13} = 0.$$

Заданне С-2

Вызначэнне рэакцый сувязей цела

1. Бязважкія стрыжні AB і AC злучаны шарнірна са сцяною і паміж сабою (рыс. 5). У вузле A прымацаваны трос, які перакінуты праз блок D і ўтрымлівае груз вагою 100 Н. Вызначыць нагрузкі ў стрыжнях і рэакцыю восі блока, калі $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 80^\circ$, $\gamma = 100^\circ$.

2. Бязважкія стрыжні AB і AC злучаны шарнірна са сцяною і паміж сабою (рыс. 5). На восі шарніра A размешчаны блок, памеры якога можна не ўлічваць. Прас блок перакінуты трос, адзін канец якога прымацаваны да сцяны, а другі ўтрымлівае груз

вагою $G = 200$ Н. Вызначыць нагрузкі ў стрыжнях, калі $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 110^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.

3. Каток, вага якога 800 Н і радыус 30 см, знаходзіцца ў спакоі на гарызантальний плоскасці (рыс. 5). Вызначыць найменшую сілу Q , накіраваную пад вуглом $\alpha=15^\circ$, якая забяспечыць перакочванне катка праз перашкоду вышынёю $h=10$ см, і рэакцыю выступу B . Апісаць залежнасць сілы Q ад вышыні перашкоды h пры фіксаваным вугле α і залежнасць Q ад вугла α пры фіксаваным значэнні h .

4. Цяжкі цыліндр, радыус якога 0,5 м і вага 600 Н, знаходзіцца ў спакоі на нахіленай пад вуглом β паверхні (рыс. 5). Ад качэння ўніз цыліндр утрымліваецца выступам, вышыня якога $h=20$ см. Вызначыць найменшы вугал β , пры якім цыліндр скоціцца ўніз, і рэакцыю выступу пры гэтым. Устанавіць сувязь паміж вуглом β і радыусам цыліндра r пры яго перакочванні праз выступ.

5. Аднародны бруск AB , вага якога 180 Н і даўжыня 1 м, прымацаваны да апоры A , а ў пункце B да яго прывязаны трос, перакінуты праз блок D (рыс. 5). Якую сілу Q належыць прыкладці ў пункце E троса, каб утрымаць бруск у раўнавазе? Вызначыць пры гэтым рэакцыі шарніра A і восі блока D , калі $AB=AD$, $\alpha=20^\circ$, $\beta=40^\circ$.

6. Неаднародная бэлька AB , вага якой 800 Н, замацавана шарнірна ў пункце B . Бэльку ўтрымлівае ў гарызантальным становішчы трос AD , прымацаваны ў пункце A (рыс. 5). Знайсці нацяг троса і рэакцыю шарніра B , калі $AB=150$ см, $\alpha=60^\circ$, адлегласць ад пункта B да цэнтра цяжару бэлькі $CB=50$ см.

7. Аднародны прамавугольны бруск $ADCB$, вага якога 120 Н, знаходзіцца ў спакоі на гарызантальнай пляцоўцы, на якой у пункце B ёсць невялікі выступ (рыс. 5). Знайсці найменшую сілу Q , якую неабходна прыкладці да бруска ў пункце A , каб перакуціць яго паваротам вакол выступу B , і рэакцыю выступу пры гэтым, калі $AB=100$ см, $BC=50$ см, $\alpha=10^\circ$.

8. Адзін канец аднароднага бруска вагою 100 Н апіраецца на гладкую вертыкальную сцяну, а другі – падтрымліваецца тросам, прымацаваным да сцяны ў пункце C (рыс. 5). Вызначыць рэакцыі сувязей, накладзеных на бруск пры $\alpha=60^\circ$. Знайсці залежнасць рэакцыі сцяны ад вугла α .

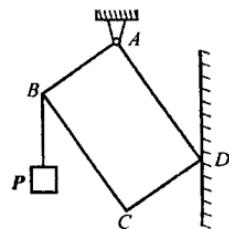
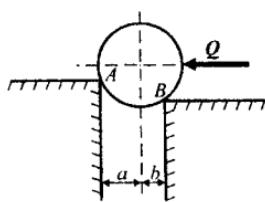
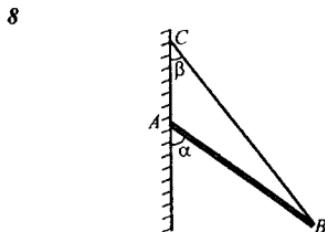
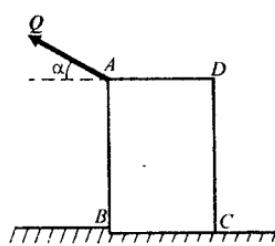
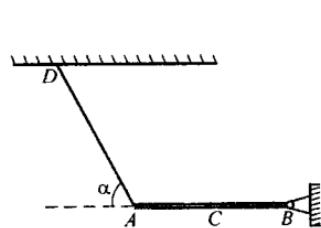
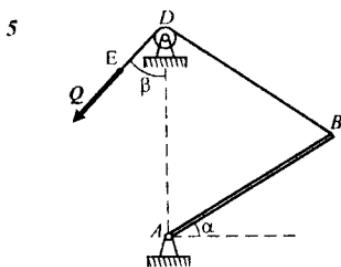
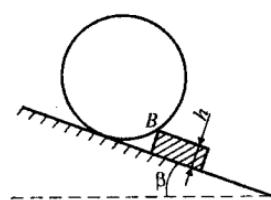
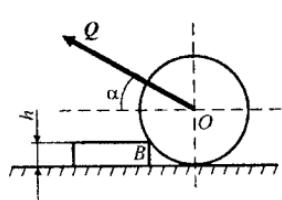
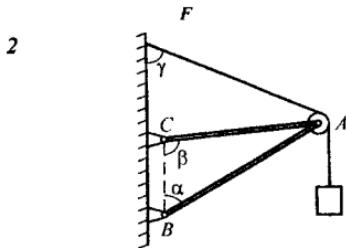
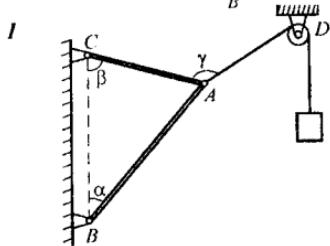


Рис. 5

9. Рэзервуар цыліндырчной формы, вага якога 1500 Н і радыус 80 см, апіраецца на нерухомыя выступы A і B . Рэзервуар знаходзіцца пад уздзейннем ветравога ціску, раўнадзейная якога Q накіравана ўздоўж гарызантальнага дыяметра цыліндра (рыс. 5). Разглядаючы раўнавагу папярочнага сячэння рэзервуара як цвёрдага цела, знайсці рэакцыі выступаў A і B пры $Q=200$ Н, а таксама найменшае значэнне сілы Q , пры якой рэзервуар павернецца вакол выступу A і закоціцца на гарызантальную пляцоўку. $a=60$ см, $b=35$ см.

10. Бязважкая прамавугольная пласціна замацавана шарнірна ў пункце A , а ў пункце D апіраецца на вертыкальную гладкую сцяну (рыс. 5). У пункце B да пласціны падвешаны груз, вага якога 70 Н. Вызначыць рэакцыі сувязей, накладзеных на пласціну, калі $CD=40$ см, $AD=80$ см.

11. Цыліндр, вага якога 100 Н і радыус 25 см, апіраецца на вертыкальную сцяну і на бруск AB (рыс. 6). Бруск AB прыматацаваны ў пункце A шарнірна да сцяны, а другім канцом свабодна апіраецца на вертыкальную сцяну. Не ўлічаючы вагу бруска і трэнне на апорных паверхнях, вызначыць рэакцыі сувязей бруска, калі $AB=100$ см, $\alpha=30^\circ$.

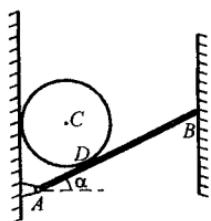
12. Па гладкім стрыжні AB можа рухацца кольца D , да якога прыматацаваны два тросы аднолькавай даўжыні: $AOD=DO_1B=AB=60$ см (рыс. 6). Па тросах могуць перамяшчацца бязважкія блокі, якія нясуць грузы вагой $P=20$ Н і Q . Вызначыць пры раўнавазе сістэмы ціск кольца на стрыжань і вагу груза Q , калі $DB=20$ см.

13. Бязважкая бэлька AB замацавана шарнірна ў пункце B і праз рухомы шарнір апіраецца на гладкую гарызантальную паверхню (рыс. 6). У пункце C бэлькі на яе дзейнічае сіла $F=160$ Н пад вуглом $\alpha=40^\circ$. Вызначыць рэакцыі апор бэлькі, калі $AC=0,4$ м, $CB=0,6$ м.

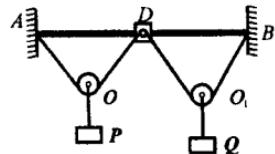
14. Бруск AB шарнірна замацаваны ў пункце B , а другім канцом апіраецца на гладкую крывалінейную паверхню (рыс. 6). Даўгачная да паверхні ў пункце A складае вугал $\beta=30^\circ$ з бруском. На бруск у пункце C дзейнічае пад вуглом $\alpha=80^\circ$ сіла $F=240$ Н. Вызначыць рэакцыі апор, калі $AC=0,5$ м, $CB=0,6$ м.

15. Аднародная пласціна ў выглядзе прамавугольнага трохвугольніка ABC прыматацавана да сцяны шарнірам C і апіраецца на гладкую нахіленую паверхню ў пункце A , пры гэтым катэт BC гарызантальны (рыс. 6). Вага пласціны 180 Н, $AB=0,5$ м, $BC=0,9$ м. Вызначыць рэакцыі сувязей у пунктах A і C , калі $\alpha=55^\circ$.

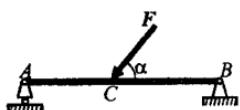
11



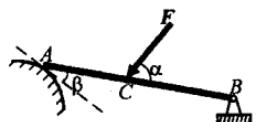
12



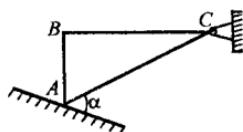
13



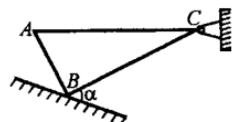
14



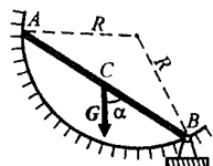
15



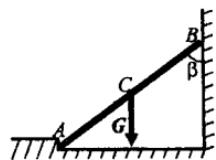
16



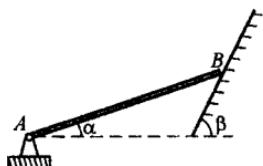
17



18



19



20

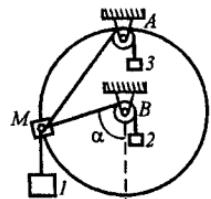


Рис. 6

16. Аднародны прамавугольны трохвугольнік ABC знаходзіцца ў раўнавазе і апіраецца прамым вуглом B на нахіленую гладкую паверхню, якая складае вугал $\alpha=70^\circ$ з катэтам BC (рыс. 6). У пункце C трохвугольнік прымацаваны шарнірна да сцяны так, што гіпатэнузу AC гарызантальна. Вызначыць рэакцыі сувязей, калі вага трохвугольніка 150 Н , $AB=0,5 \text{ м}$, $BC=0,8 \text{ м}$.

17. Бэлька AB , вага якой 250 Н , а даўжыня $AB=2AC=100 \text{ см}$, замацавана шарнірна ў пункце B (рыс. 6). Нерухомая акружнасць, радыус якой $R=70 \text{ см}$, праходзіць праз канцы бэлькі, утвараючы для яе апорную гладкую крывалінейную паверхню ў пункце A . Вызначыць рэакцыі апор бэлькі, калі $\alpha=50^\circ$.

18. Бэлька AB , вага якой 200 Н , апіраецца канцом B на гладкую вертыкальную сцяну. Ад праслізгвання па гарызантальнай паверхні яе ўтрымлівае ў пункце A выступ (рыс. 6). Вызначыць рэакцыі сувязей, калі $AC=0,6 \text{ м}$, $CB=0,7 \text{ м}$, $\beta=70^\circ$.

19. Аднародны бруск AB , вага якога 180 Н і даўжыня 120 см , адным канцом прымацаваны шарнірам да апоры A , а другім — апіраецца на гладкую нахіленую паверхню (рыс. 6). Вызначыць рэакцыі сувязей, калі $\alpha=25^\circ$, $\beta=65^\circ$.

20. На гладкую драцянью акружнасць, якая знаходзіцца ў вертыкальнай плоскасці, надзета бязважкае кольца M , да якога на тросе прымацаваны груз 1 (рыс. 6). Два другія тросы з грузамі 2 і 3 таксама прымацаваны да кольца і перакінуты праз блокі A і B , якія знаходзяцца ў цэнтры акружнасці і ў найвышэйшым яе пункце. Вызначыць вугал α і рэакцыю акружнасці пры раўнавазе кольца, калі сілы цяжару грузаў $G_1=30 \text{ Н}$, $G_2=10 \text{ Н}$, $G_3=20 \text{ Н}$. Знайсці таксама рэакцыі восей блокаў A і B .

21. Стрыжань AB , вагу якога не ўлічваем, прымацаваны шарнірамі: у пункце A — да нерухомай паверхні, у пункце B — да паўзуна, які надзеты на гладкі гарызантальны нерухомы стрыжань (рыс. 7). У пункце C да стрыжня прымацаваны трос, перакінуты праз блок D , на канцы якога вісіць груз вагою 280 Н . Вызначыць рэакцыі шарніраў A і B і рэакцыю восі блока D , калі $BC=55 \text{ см}$, $CA=50 \text{ см}$, $\alpha=45^\circ$, $\beta=50^\circ$.

22. Груз M , вага якога 30 Н , знаходзіцца ў раўнавазе на гладкай цыліндрычнай паверхні (рыс. 7). Ніткі, прывязаныя да груза і перакінутыя праз блокі A і B , утрымліваюць на канцах грузы M_1 і M_2 . Не ўлічваючы памеры груза M і блокаў, вызначыць вагу груза M_2 і

рэакцыю цыліндрыйчнай паверхні, калі $\alpha=60^\circ$, вага груза M_1 роўная 20 Н, AB – гарызантальны дыяметр цыліндра. Знайсці таксама значэнне сілы цяжару груза M , пры якой ён адрываецца ад апорнай паверхні.

23. Бязважкія стрыжні 1, 2 і 3, злучаныя шарнірна паміж сабою і з нерухомымі апорамі ў пунктах D і C , знаходзяцца ў раўнавазе пад уздзеяннем сіл P і Q (рыс. 7). Знайсці значэнне сілы Q і нагрузкі ў стрыжнях, калі $P=40$ Н, $\alpha=90^\circ$, $\beta=120^\circ$, $\varphi=60^\circ$, $\gamma=45^\circ$. Вызначыць таксама найменшае значэнне вугла γ , пры якім канструкцыя губляе раўнавагу незалежна ад велічыні сілы Q .

24. Аднародны бруск AB , вага якога 120 Н, прыматацаваны шарнірам да вертыкальнай сцяны (рыс. 7). У зададзеным становішчы ён утрымліваецца тросам BD . Вызначыць нацяг троса і рэакцыю шарніра, калі $\alpha=70^\circ$, $\beta=50^\circ$. Знайсці таксама залежнасць нацягу троса ад вугла β пры яго змяненні.

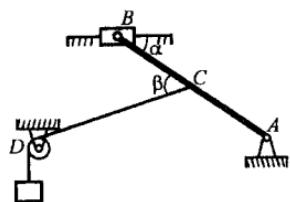
25. Аднародны бруск AB , вага якога 120 Н, шарнірна прыматацаваны да сцяны ў пункце A і складае з вертыкаллю вугал $\alpha=40^\circ$ (рыс. 7). У пункце D брус апіраецца на гладкі край слупа. Вызначыць рэакцыі накладзеных на брус сувязей, калі $BD=0,25 AB$. У якім месцы брус павінен апірацца на выступ, каб рэакцыя шарніра A была накіравана ўздоўж AB ?

26. Аднародны бруск AB , вага якога 200 Н, утрымліваецца ў стане раўнавагі тросамі AO і BO , якія прывязаны да нерухомай апоры O (рыс. 7). Вызначыць нацяг тросаў і іх выніковае ўздзеянне на апору O , калі $\alpha=20^\circ$, $\beta=30^\circ$. Як будзе змяніцца нацяг тросаў пры павелічэнні вуглоў α і β ?

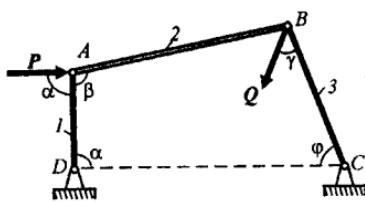
27. Бязважкі стрыжань AB канцом A ўпіраецца ў гладкую вертыкальную сцяну і ў пункце C апіраецца на гладкі выступ другой сцяны (рыс. 7). Да канца B стрыжня прыматацаваны шнур з грузам, вага якога 25 Н. Пад якім вуглом α да сцяны стрыжань будзе знаходзіцца ў стане раўнавагі, калі $\alpha=0,5$ м, $AB=3$ м. Знайсці рэакцыі сувязей у пунктах A і C геаметрычным і аналітычным спосабамі.

28. На вертыкальны гладкі стрыжань AB надзета муфта M , вага якой 4 Н. Да муфты прыматацаваны трос, перакінуты праз блок D , які мае на канцы груз вагою 6 Н. Знайсці вугал α , рэакцыю стрыжня і рэакцыю восі блока пры раўнавазе муфты. Вызначыць залежнасць вугла α ад велічыні груза.

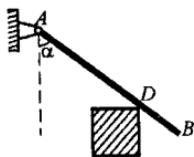
21



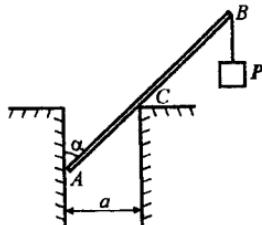
23



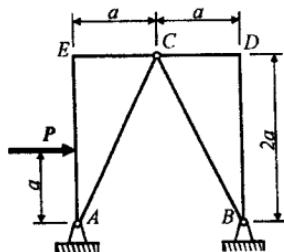
25



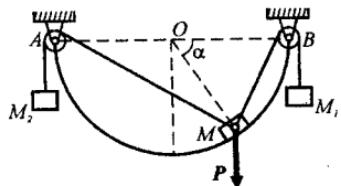
27



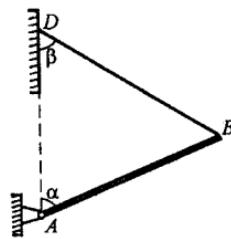
29



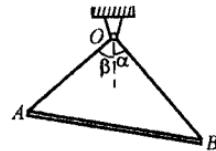
22



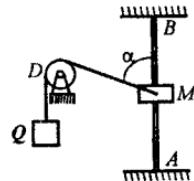
24



26



28



30

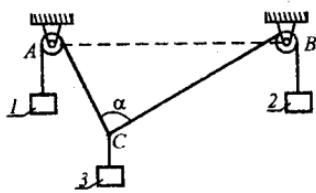


Рис. 7

29. Бязважкая шарнірная арка, у склад якой уваходзяць часткі AEC і CDB , звязаны паміж сабою шарнірам C , утрымліваеца нерухомымі шарнірнымі апорамі A і B (рыс. 7). Вызначыць рэакцыі апор і ўзаемны ціск частак аркі ў шарніры C , калі на арку перпендыкулярна да стараны AE дзейнічае раўнадзейная ветравой нагрузкі $P=200$ Н.

30. Праз блокі A і B , восі якіх знаходзяцца на гарызантальнай лініі, перакінута нітка, да канцоў якой прывязаны грузы 1 і 2, а ў прамежкавым пункце C падвешаны груз 3 (рыс. 7). Не ўлічваючы трэнне і памеры блокаў, вызначыць пры раўнавазе сістэмы вагу груза 3, а таксама рэакцыі восей блокаў, калі $P_1=8$ Н, $P_2=6$ Н, $\alpha=120^\circ$.

Прыклад рашэння задання С-2

Прамавугольная аднародная пліта $ABCD$, вага якой 150 Н, прымацавана да нерухомай паверхні шарнірам A , вакол восі якога можа паварочвацца ў вертыкальной плоскасці (рыс. 8). У пункце C да пліты прымацаваны трос, перакінуты праз блок E . На канцы троса вісіць груз. У стане раўнавагі старана AB пліты адхілена ад вертыкала на вугал $\beta=25^\circ$. Вызначыць рэакцыю шарніра A , вагу груза і рэакцыю восі блока E , калі $AB=0,4$ м, $BC=0,6$ м, $\alpha=40^\circ$.

Рашэнне. Разглядаем раўнавагу пліты $ABCD$. На яе накладзены дзве сувязі: нерухомы цыліндрычны шарнір у пункце A і трос у пункце C . Рэакцыю троса, прыкладзеную да пліты (сіла T), паказваем уздоўж яго.

Сіла цяжару пліты (сіла G) прыкладзена ў цэнтры цяжару, на перасячэнні дыяганалей прамавугольніка (пункт K). Да кладны накірунак рэакцыі шарніра (сіла R_A) невядомы, але яго можна вызначыць на падставе тэарэмы аб трох сілах. У разглядаемым выпадку лініі дзеяння трох непаралельных сіл, што прыкладзены да пліты ў стане яе раўнавагі, павінны перасякацца ў адным пункце (пункт O). Па лініях дзеяння сіл G і T знаходзім пункт O , а потым праз яго і пункт A праводзім лінію дзеяння рэакцыі шарніра R_A і паказваем да кладны накірунак рэакцыі R_A . Вызначаем вуглы, неабходныя для далейшага рашэння задачы.

$$\alpha_2 = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 50^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{AB}{BC} = \frac{0,4}{0,6} = 0,667, \quad \alpha_1 = 33,69^\circ.$$

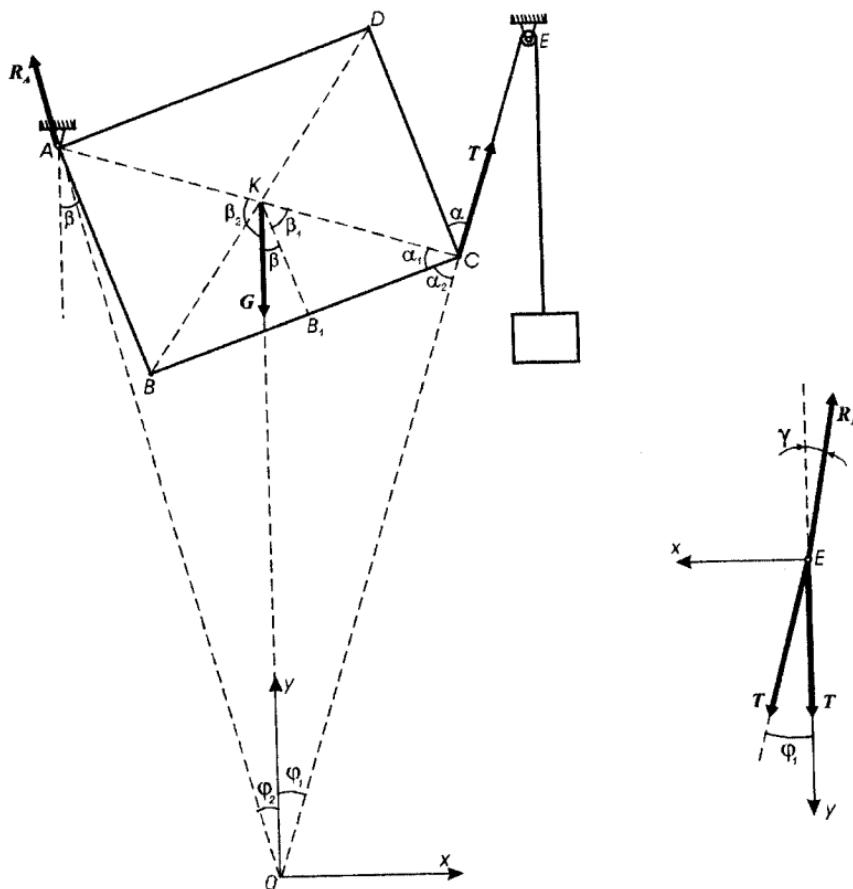


Рис. 8

у прямавугольним трохвугольніку KB_1C вугал
 $\beta_1=90^\circ-\alpha_1=56,31^\circ$.
 Тады ў трохвугольніку OKC

$$KC = 0,5AC = 0,5\sqrt{AB^2 + BC^2} = 0,5\sqrt{0,4^2 + 0,6^2} = 0,36 \text{ м.}$$

$$\angle OKC = \beta + \beta_1 = 81,31^\circ; \quad \angle KCO = \alpha_1 + \alpha_2 = 83,69^\circ.$$

$$\angle \varphi_1 = 180^\circ - 81,31^\circ - 83,69^\circ = 15^\circ.$$

Па тэарэме сінусаў

$$\frac{KC}{KO} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad KO = \frac{KC \cdot \sin 83,69^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{0,36 \cdot 0,994}{0,259} = 1,38 \text{ м.}$$

У трохвугольніку AOK

$$\angle \beta_2 = 180^\circ - \beta - \beta_1 = 180^\circ - 25^\circ - 56,31^\circ = 98,69^\circ.$$

Па тэарэме косінусаў

$$\begin{aligned} AO &= \sqrt{AK^2 + KO^2 - 2 \cdot AK \cdot KO \cdot \cos \beta_2} = \\ &= \sqrt{0,36^2 + 1,38^2 + 2 \cdot 0,36 \cdot 1,38 \cdot 0,151} = \\ &= \sqrt{0,1296 + 1,9 + 0,15} = \sqrt{2,1796} = 1,48 \text{ м.} \end{aligned}$$

Па тэарэме сінусаў

$$\frac{AK}{AO} = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \beta_2}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{AK \cdot \sin \beta_2}{AO} = \frac{0,36 \cdot 0,989}{1,48} = 0,24;$$

$$\varphi_2 = 13,9^\circ.$$

Выбіраем восі каардынат з пачаткам у пункце O .

Запісваєм ураўненні раўнавагі плоскай сыходнай сістэмы сіл.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad T \sin \varphi_1 - R_A \sin \varphi_2 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad T \cos \varphi_1 + R_A \cos \varphi_2 - G = 0.$$

Рашаем атрыманую сістэму ўраўненняў.

$$\begin{cases} T \cdot 0,259 - R_A \cdot 0,24 = 0, \\ T \cdot 0,966 + R_A \cdot 0,971 - 150 = 0. \end{cases}$$

З першага ўраўнення атрымаеам выраж для T :

$$T = R_A \cdot \frac{0,24}{0,259} = 0,927 \cdot R_A.$$

Падставім у другое ўраўненне і знайдзем R_A .

$$0,927R_A \cdot 0,966 + R_A \cdot 0,971 - 150 = 0;$$

$$1,866R_A = 150, \quad R_A = 80,4 \text{ H};$$

$$T = 0,927 \cdot 80,4 = 74,5 \text{ H}.$$

Вага груза роўная нацягу троса.

$$P = T = 74,5 \text{ H}.$$

Для вызначэння рэакцыі восі блока E разглядаем раўнавагу блока. У сувязі з тым, што памеры блока не ўлічваем, паказваем усе сілы прыкладзенымі ў адным пункце E . Нацяг троса злева і справа ад блока адноўлькавы і роўны T (рыс. 8). Рэакцыя восі R_E накіравана ўверх пад невядомым вуглом γ да вертыкалі. Атрымалі плоскую сыходную сістэму ўраўнаважаных сіл. Выбіраем восі каардынат Exy . Запісваєм ураўненні раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad T \sin \varphi_1 - R_E \sin \gamma = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad T \cos \varphi_1 + T - R_E \cos \gamma = 0.$$

Рашаем атрыманую сістэму ўраўненняў.

$$\begin{cases} 74,5 \cdot 0,259 - R_E \sin \gamma = 0, \\ 74,5 \cdot 0,966 + 74,5 - R_E \cos \gamma = 0. \end{cases}$$

$$R_E \sin \gamma = 19,3, \quad R_E \cos \gamma = 146,5.$$

Узвядзём роўнасці ў квадрат і складзём.

$$R_E^2 = 372,5 + 21462,3 = 21834,8;$$

$$R_E = 147,8 \text{ H}.$$

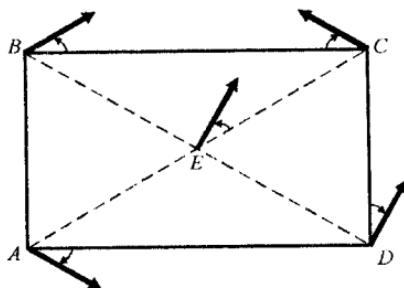
Плоская адвольная сістэма сіл

Заданне С-3

*Прыведзенне плоскай адвольнай сістэмы сіл
да прасцейшага віду*

Прывесці плоскую адвольную сістэму сіл F_1, F_2, \dots, F_5 , прыкладзеную да прамавугольнай пласціны $ABCD$, да прасцейшага віду. Задачу неабходна решытка, выкарыстоўваючы рыс. 9 і даныя адпаведнага варыянта ў табл. 1 (вуглы α дадзены ў градусах, памеры пласціны – у метрах). Значенні сіл для ўсіх варыянтаў адолькавыя:

$$F_1=100 \text{ H}, F_2=200 \text{ H}, F_3=300 \text{ H}, F_4=400 \text{ H}, F_5=500 \text{ H}.$$



Рыс. 9

Табліца 1

| Варыянт | Сілы, прыкладзенныя ў пунктах пад вуглом | | | | | | | | | | AB | BC | Цэнтр прывядзення |
|---------|--|------------|-------|------------|-------|------------|-------|------------|-------|------------|-----|-----|-------------------|
| | F_1 | α_1 | F_2 | α_2 | F_3 | α_3 | F_4 | α_4 | F_5 | α_5 | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 1 | A | 30 | B | 45 | C | 60 | D | 90 | E | 120 | 0,5 | 0,8 | E |
| 2 | B | 45 | C | 60 | D | 90 | E | 150 | A | 135 | 0,6 | 0,9 | A |
| 3 | C | 60 | D | 90 | E | 120 | A | 0 | B | 150 | 0,7 | 1,0 | B |
| 4 | D | 120 | E | 210 | A | 135 | B | 30 | C | 180 | 0,8 | 1,2 | C |
| 5 | E | 135 | A | 120 | B | 150 | C | 45 | D | 210 | 0,9 | 1,3 | D |
| 6 | A | 150 | B | 135 | C | 180 | D | 60 | E | 225 | 1,0 | 1,4 | E |
| 7 | B | 180 | C | 150 | D | 210 | E | 90 | A | 240 | 0,5 | 0,7 | A |
| 8 | C | 210 | D | 180 | E | 225 | A | 120 | B | 270 | 0,6 | 0,8 | B |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|----|---|-----|---|-----|---|-----|---|-----|----|-----|-----|-----|----|
| 9 | D | 240 | E | 210 | A | 240 | B | 135 | C | 300 | 0,7 | 0,9 | C |
| 10 | E | 270 | A | 225 | B | 270 | C | 150 | D | 0 | 0,8 | 1,0 | D |
| 11 | A | 300 | B | 240 | C | 300 | D | 180 | E | 30 | 0,9 | 1,1 | E |
| 12 | B | 30 | C | 270 | D | 0 | E | 210 | A | 45 | 1,0 | 1,2 | C |
| 13 | C | 45 | D | 300 | E | 30 | A | 225 | B | 60 | 1,1 | 1,3 | A |
| 14 | D | 60 | E | 30 | A | 45 | B | 240 | C | 90 | 1,2 | 1,4 | B |
| 15 | E | 90 | A | 45 | B | 60 | C | 270 | D | 120 | 1,3 | 1,5 | C |
| 16 | A | 120 | B | 60 | C | 90 | D | 300 | E | 135 | 1,6 | 1,8 | D |
| 17 | B | 135 | C | 90 | D | 120 | E | 30 | A | 150 | 1,4 | 1,6 | A |
| 18 | C | 150 | D | 120 | E | 135 | A | 0 | B | 180 | 1,5 | 1,7 | B |
| 19 | D | 180 | E | 135 | A | 150 | B | 45 | C | 210 | 1,7 | 1,9 | C |
| 20 | E | 210 | A | 150 | B | 180 | C | 60 | D | 240 | 0,5 | 0,9 | D |
| 21 | A | 225 | B | 180 | C | 210 | D | 90 | E | 270 | 0,6 | 1,0 | E |
| 22 | B | 240 | C | 210 | D | 225 | E | 120 | A | 300 | 0,7 | 1,1 | B |
| 23 | C | 270 | D | 225 | E | 240 | A | 135 | B | 0 | 0,8 | 1,2 | C |
| 24 | D | 300 | E | 240 | A | 270 | B | 150 | C | 30 | 0,9 | 1,3 | D |
| 25 | E | 30 | A | 270 | B | 300 | C | 180 | D | 45 | 1,0 | 1,4 | E |
| 26 | A | 45 | B | 300 | C | 30 | D | 210 | E | 225 | 1,1 | 1,5 | A |
| 27 | B | 60 | C | 30 | D | 45 | E | 225 | A | 90 | 1,2 | 1,6 | B |
| 28 | C | 90 | D | 45 | E | 60 | A | 240 | B | 120 | 1,3 | 1,7 | C |
| 29 | D | 120 | E | 60 | A | 90 | B | 270 | C | 150 | 1,4 | 1,8 | D |
| 30 | E | 135 | A | 90 | B | 120 | C | 300 | D | 180 | 1,5 | 1,9 | E |

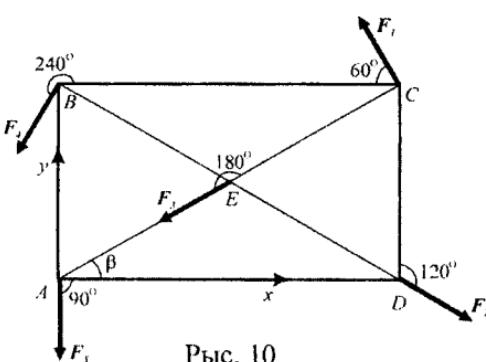
Прыклад расчэння задання C-3

Дадзена:

$$F_1 = 100 \text{ H} \left(C, \alpha_1 = 60^\circ \right), \quad F_2 = 200 \text{ H} \left(D, \alpha_2 = 120^\circ \right),$$

$$F_3 = 300 \text{ H} \left(E, \alpha_3 = 180^\circ \right), \quad F_4 = 400 \text{ H} \left(B, \alpha_4 = 240^\circ \right),$$

$$F_5 = 500 \text{ H} \left(A, \alpha = 90^\circ \right), \quad AB = 1 \text{ м}, \quad BC = 2 \text{ м}.$$



Цэнтр прывядзення — A .

Рашэнне. З улікам рыс. 9 і таго, што дадзена, паказваеам дакладны накірунак усіх сіл, прыкладзеных да пласціны (рыс. 10).

Выбіраем сістэму восей каардынат Axy .

Прыводзім сістэму сіл да цэнтра A . Спачатку вызначым галоўны вектар \mathbf{R}' плоскай адвольнай сістэмы сіл па яго праекцыях на восі каардынат.

$$R'_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = -F_1 \cos 60^\circ + F_2 \cos 30^\circ - F_3 \cos \beta - F_4 \cos 60^\circ;$$

$$R'_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = F_1 \sin 60^\circ - F_2 \sin 30^\circ - F_3 \sin \beta - F_4 \cos 30^\circ - F_5.$$

Знаходзім па вядомых старанах пласціны значэнні $\sin \beta$ і $\cos \beta$.

$$\sin \beta = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447; \quad \cos \beta = \frac{AD}{AC} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,894.$$

$$R'_{x_0} = -100 \cdot 0,5 + 200 \cdot 0,866 - 300 \cdot 0,894 - 400 \cdot 0,5 = -345;$$

$$R'_{y_0} = 100 \cdot 0,866 - 200 \cdot 0,5 - 300 \cdot 0,447 - 400 \cdot 0,866 - 500 = -993,9;$$

$$R' = \sqrt{(R'_{x_0})^2 + (R'_{y_0})^2} = \sqrt{119025 + 987837} = 1052 \text{ Н.}$$

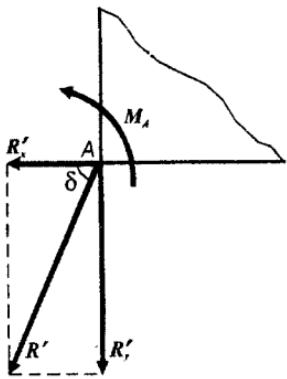
Вызначым галоўны момант плоскай адвольнай сістэмы сіл адносна пункта A .

$$M_A = \sum_{k=1}^n m_A(\mathbf{F}_k) = F_1 \cos 60^\circ \cdot 1 + F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2 - F_2 \sin 30^\circ \cdot 2 + \\ + F_4 \sin 30^\circ \cdot 1,$$

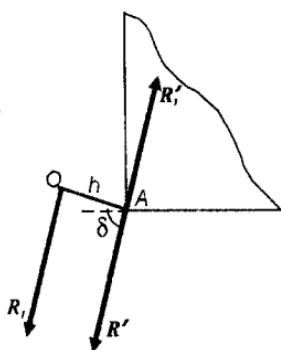
$$M_A = 100 \cdot 0,5 + 100 \cdot 0,866 \cdot 2 - 200 \cdot 0,5 \cdot 2 + 400 \cdot 0,5 = 223,2 \text{ Нм.}$$

$$\cos \delta = \frac{R'_x}{R'} = \frac{345}{1052} = 0,328, \quad \delta = 70,85^\circ.$$

Атрымалі замест плоскай адвольнай сістэмы сіл галоўны вектар \mathbf{R}' і галоўны момант M_A (рыс. 11). У гэтым выпадку сістэму можна прывесці яшчэ да больш простага віду.



Рыс. 11



Рыс. 12

Прадставім галоўны момант у выглядзе пары сіл, момант якой роўны M_A , а сілы, што ўтвараюць пару, роўныя па модулю галоўнаму вектару R' . Плячо такой пары роўнае

$$h = \frac{M_A}{R'} = \frac{223,2}{1052} = 0,212 \text{ м.}$$

Пакажам (рыс. 12) пару сіл (R_1, R'_1) такім чынам, каб яна дзейнічала, як і галоўны момант M_A (супраць гадзіннікаўскім стрэлкі), і адна сіла R'_1 пары сіл была накіравана ў адваротны бок галоўнаму вектару R' .

У пункце A цяпер прыкладзены дзве роўныя і накіраваныя ў процылеглыя бакі сілы. Яны эквівалентныя нулью, і іх можна адкінуць ад пласціны. Замест раней дадзенай плоскай адвольнай сістэмы сіл атрымалі эквівалентную замену ў выглядзе адной сілы R_1 , якая прыкладзена ў пункце O , роўная па модулю і накіравана так, як і галоўны вектар R' . Сіла R_1 з'яўляецца раўнадзейнай дадзенай плоскай адвольнай сістэмы сіл. Сілу R_1 перанясём уздоўж яе лініі дзеяння ў пункт A_1 пласціны. Адлегласць

$$AA_1 = \frac{OA}{\cos \delta} = \frac{0,212}{0,328} = 0,646 \text{ м.}$$

Заданне С-4

*Вызначэнне рэакцый апор цвёрдага цела
пры ўздеянні плоскай адвольной сістэмы сіл*

Рама, паказаная на рыс. 14–16, знаходзіцца ў раўнавазе пад уздзеяннем прыкладзеных да яе сіл. Вызначыць рэакцыі апор рамы. Ва ўсіх варыянтах значэнні нагрузкі адноўкаўся:

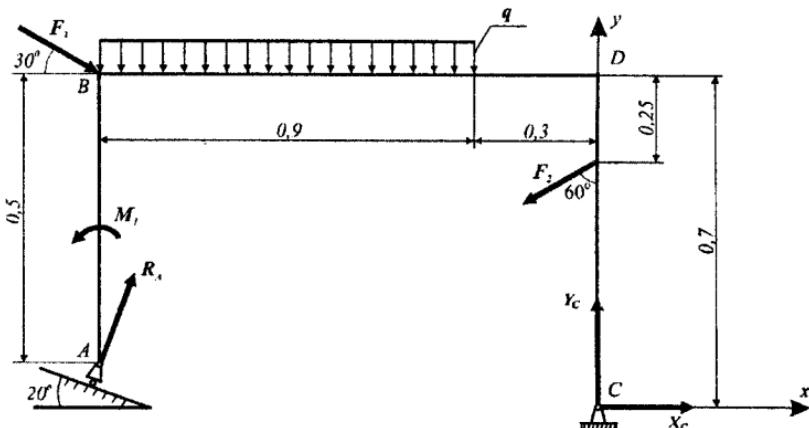
$$F_1 = 100 \text{ Н}, F_2 = 200 \text{ Н}, q = 50 \text{ Н/м}, M_1 = 40 \text{ Нм}, M_2 = 80 \text{ Нм}.$$

Памеры рамы дадзены ў метрах.

Прыклад разшэння задання С-4

Рама (рыс. 13) знаходзіцца ў раўнавазе пад уздзеяннем сіл $F_1=100 \text{ Н}$, $F_2=200 \text{ Н}$, размеркаванай нагрузкі інтэнсіўнасцю $q=50 \text{ Н/м}$ і моманту $M_1=40 \text{ Нм}$. Вызначыць рэакцыі апор рамы.

Рашэнне. Разглядаем раўнавагу рамы $ABDC$. На яе накладзены дзве сувязі: у пункце A — рухомы цыліндрычны шарнір, у пункце C — нерухомы цыліндрычны шарнір. Адкідваем умоўна сувязі і замест іх паказваем рэакцыі сувязей: R_A , Y_C , X_C . У стане раўнавагі знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл.



Рыс. 13

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad X_C - F_2 \sin 60^\circ + F_1 \cos 30^\circ + R_A \sin 20^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad Y_C - F_2 \cos 60^\circ - q \cdot 0,9 - F_1 \sin 30^\circ + R_A \cos 20^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_C(\mathbf{F}_k) = 0.$$

$$F_2 \sin 60^\circ \cdot 0,45 + q \cdot 0,9 \cdot 0,75 + F_1 \sin 30^\circ \cdot 1,2 - \\ - F_1 \cos 30^\circ \cdot 0,7 + M_1 - R_A \cos 20^\circ \cdot 1,2 - R_A \sin 30^\circ \cdot 0,2 = 0.$$

Падстаўляем лікавыя значэнні вядомых велічынь і з ураўненняў раўнавагі знаходзім рэакцыі сувязей R_A, X_C, Y_C .

$$\begin{cases} X_C - 200 \cdot 0,866 + 100 \cdot 0,866 + R_A \cdot 0,342 = 0 \\ Y_C - 200 \cdot 0,5 - 50 \cdot 0,9 - 100 \cdot 0,5 + R_A \cdot 0,94 = 0 \\ 200 \cdot 0,866 \cdot 0,45 + 50 \cdot 0,9 \cdot 0,75 + 100 \cdot 0,5 \cdot 1,2 - \\ - 100 \cdot 0,866 \cdot 0,7 + 40 - R_A \cdot 0,94 \cdot 1,2 - R_A \cdot 0,5 \cdot 0,2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_C - 173,2 + 86,6 + 0,342R_A = 0 \\ Y_C - 100 - 45 - 50 + 0,94R_A = 0 \\ 77,94 + 33,75 + 60 - 60,62 + 40 - 1,128R_A - 0,1R_A = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_C - 86,6 + 0,342R_A = 0 \\ Y_C - 195 + 0,94R_A = 0 \\ 151,07 - 1,228R_A = 0. \end{cases}$$

$$R_A = 123 \text{ H}, X_C = 44,5 \text{ H}, Y_C = 79,4 \text{ H}.$$

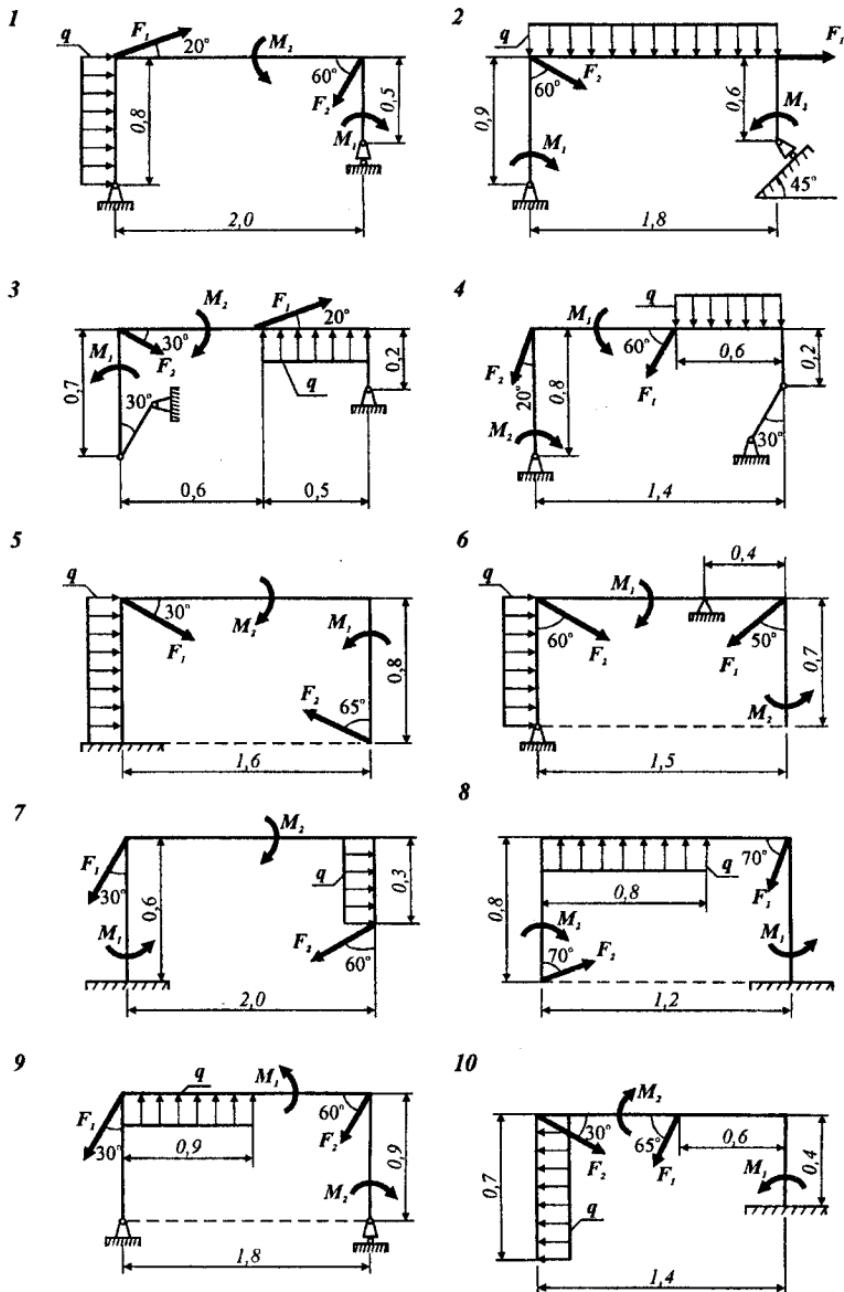
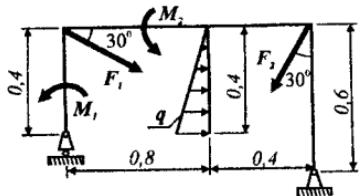
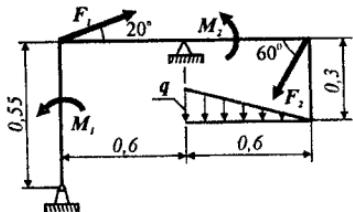


Рис. 14

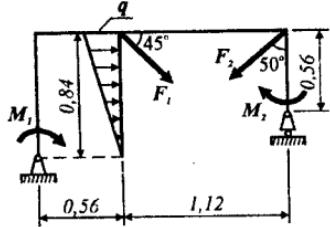
11



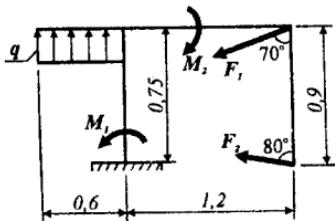
13



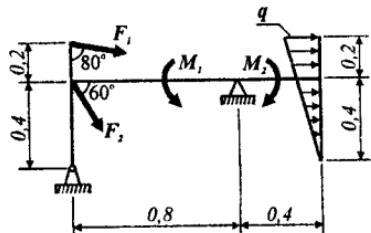
15



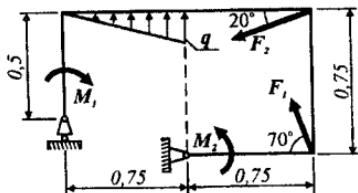
17



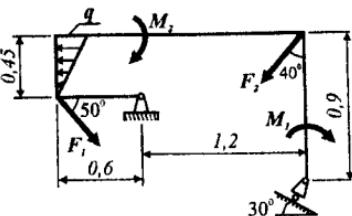
19



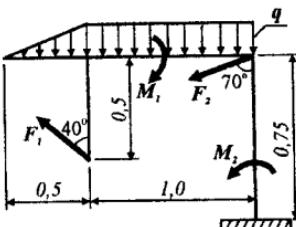
12



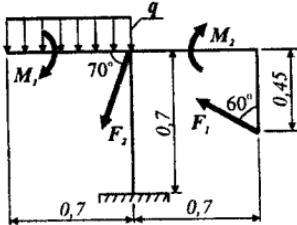
14



16



18



20

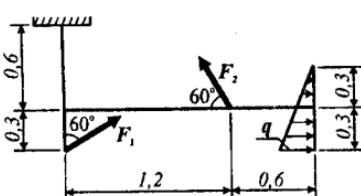
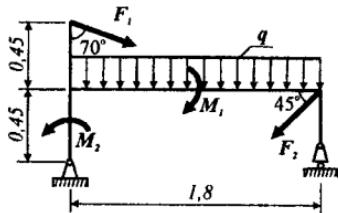
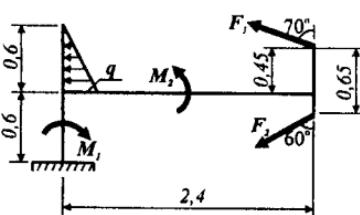


Рис. 15

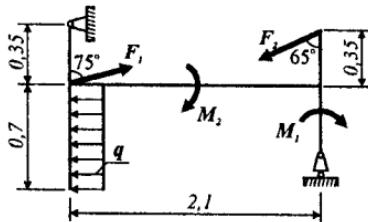
21



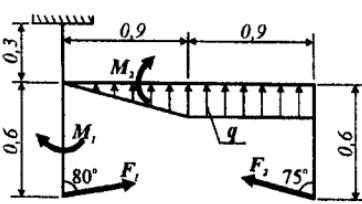
22



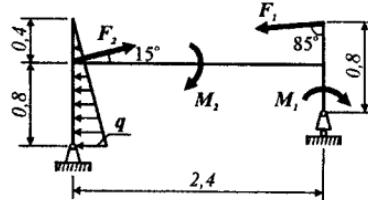
23



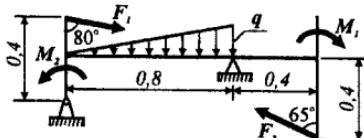
24



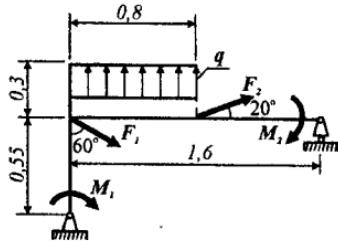
25



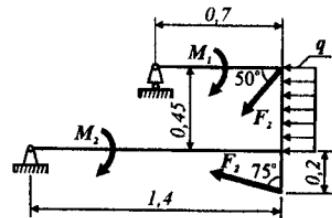
26



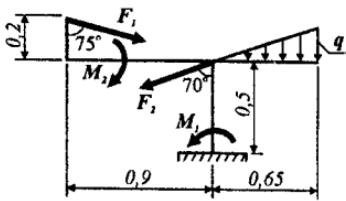
27



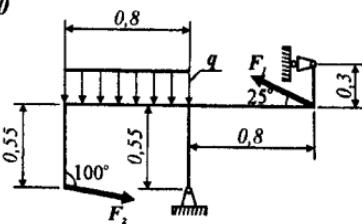
28



29



30



Заданне С-5

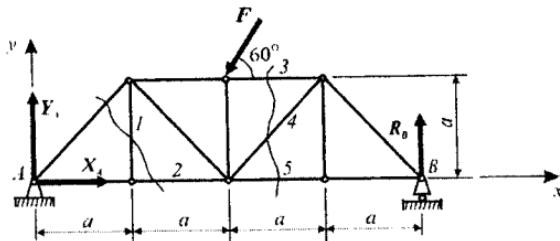
Вызначэнне нагрузкі у стрыжнях плоскай фермы способам Рытэра

Вылічыць способам Рытэра нагрузкі ў пранумараваных стрыжнях фермы (рыс. 1-3). На ўсіх рисунках $F=2000$ Н.

Прыклад разшэння задання С-5

У дадзенай ферме (рыс. 17) вылічыць способам Рытэра нагрузкі ў стрыжнях 1, 2, 3, 4, 5. $F=2000$ кН.

Рашэнне. Разглядаем спачатку раўнавагу фермы як аднаго цвёрдага цела і вызначаем рэакцыі апор A і B . У нерухомым цыліндрычным шарніры A невядомую рэакцыю паказываем у выглядзе дзвюх складовых X_A і Y_A , а ў рухомым цыліндрычным шарніры B – перпендыкулярна да апорнай пляцоўкі.



Рыс. 17

У раўнавазе знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл. Восі каардынат выбіраем з пачаткам у пункце A . Запісваєм ураўненні раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad X_A - F \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad Y_A - F \sin 60^\circ + R_B = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(F_k) = 0 \quad R_B \cdot 4a + F \cos 60^\circ \cdot a - F \sin 60^\circ \cdot 2a = 0;$$

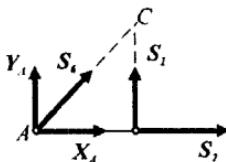
$$R_B = \frac{1}{4}(F \sin 60^\circ \cdot 2 - F \cos 60^\circ) = \frac{1}{4}(2 \cdot 0,866 \cdot 2 - 2 \cdot 0,5) = 0,616 \text{ кН};$$

$$X_A = F \cos 60^\circ = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ кН};$$

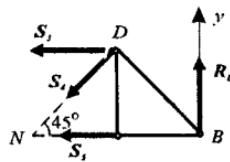
$$Y_A = F \sin 60^\circ - R_B = 2 \cdot 0,866 - 0,616 = 1,116 \text{ кН}.$$

Нагрузкі ў стрыжнях 1, 2, 3, 4, 5 падлічым спосабам Рытэра. Для гэтага зробім сячэнне фермы праз стрыжні 1 і 2 і разгледзім раўнавагу левай часткі фермы (рыс. 18).

Стрыжні лічым расцягнутымі, таму нагрузкку ў перарэзаных стрыжнях паказваем уздоўж іх ад вузлоў, у якіх гэтыя стрыжні замацаваны. У раўнавазе знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл. Запісваєм такія ўраўненні раўнавагі, з якіх адразу можна вылічыць патрэбную невядомую сілу.



Рыс. 18



Рыс. 19

$$\sum_{k=1}^n m_A(\mathbf{F}_k) = 0 \quad S_1 \cdot a = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_C(\mathbf{F}_k) = 0 \quad S_2 \cdot a + X_A \cdot a - Y_A \cdot a = 0.$$

$$\text{Тады } S_1 = 0, \quad S_2 = Y_A - X_A = 1,116 - 1 = 0,116 \text{ кН}.$$

Для вызначэння S_3 , S_4 , S_5 зробім сячэнне фермы па адпаведных стрыжнях. Разгледзім раўнавагу правай часткі фермы (рыс. 19). Зноў лічым стрыжні расцягнутымі. У раўнавазе знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл. Запісваєм зручныя для падліку невядомых сіл ураўненні раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^n m_N(\mathbf{F}_k) = 0 \quad S_3 \cdot a + R_B \cdot 2a = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad R_B - S_4 \sin 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_D(\mathbf{F}_k) = 0 \quad R_B \cdot a - S_5 \cdot a = 0.$$

Тады

$$S_3 = -2R_B = -2 \cdot 0,616 = -1,232 \text{ кН};$$

$$S_4 = \frac{R_B}{\sin 45^\circ} = \frac{0,616}{0,707} = 0,871 \text{ кН};$$

$$S_5 = R_B = 0,616 \text{ кН.}$$

З адказаў відаць, што стрыжань 1 не нагружаны, стрыжні 2, 4, 5 — расцягнутыя (адказы са знакам “плюс”, што пацвярджае меркаванне аб іх расцяжэнні), стрыжань 3 — сціснуты (адказ з “мінусам”).

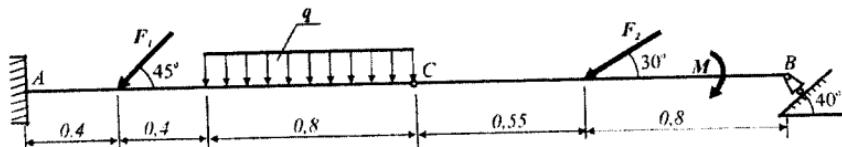
Заданне С-6

Вызначэнне рэакцый апор састаўной бэлькі

Знайсці рэакцыі апор і ўзаемны ціск у прамежным шарніры састаўной бэлькі, якая знаходзіцца ў раўнавазе. Схемы бэлек паказаны на рис. 22–24 (памеры ў м), значэнні нагрузкі прыведзены ў табл. 2.

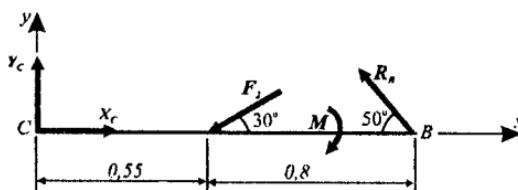
Прыклад разшэння задання С-6

Састаўная бэлька AB (рис. 20) знаходзіцца ў раўнавазе пад уздзеяннем дадзеных нагрузкак. Вызначыць рэакцыі апор і ўзаемны ціск у прамежным шарніры C . Памеры паказаны ў метрах, $F_1=100 \text{ Н}$, $F_2=200 \text{ Н}$, $M=50 \text{ Нм}$, $q=40 \text{ Н/м}$.



Рыс. 20

Рашэнне. Разглядаем раўнавагу бэлькі CB . На яе накладзены дзве сувязі: у пункце B — рухомы цыліндрычны шарнір, у пункце C — нерухомы цыліндрычны шарнір. Замест сувязей паказваем рэакцыі сувязей і атрымліваем разліковую схему бэлькі CB (рыс. 21).



Рыс. 21

Табліца 2

| Варыянт | $F_1, \text{Н}$ | $F_2, \text{Н}$ | $M, \text{Нм}$ | $q, \text{Н/м}$ | Варыянт | $F_1, \text{Н}$ | $F_2, \text{Н}$ | $M, \text{Нм}$ | $q, \text{Н/м}$ |
|---------|-----------------|-----------------|----------------|-----------------|---------|-----------------|-----------------|----------------|-----------------|
| 1 | 100 | 190 | 30 | 15 | 16 | 140 | 170 | 80 | 60 |
| 2 | 120 | 200 | 35 | 20 | 17 | 130 | 140 | 85 | 55 |
| 3 | 130 | 220 | 40 | 25 | 18 | 120 | 130 | 90 | 50 |
| 4 | 140 | 230 | 45 | 30 | 19 | 110 | 120 | 95 | 45 |
| 5 | 150 | 240 | 50 | 35 | 20 | 100 | 110 | 75 | 40 |
| 6 | 160 | 250 | 55 | 40 | 21 | 200 | 100 | 70 | 35 |
| 7 | 170 | 240 | 60 | 45 | 22 | 190 | 110 | 65 | 30 |
| 8 | 180 | 230 | 65 | 50 | 23 | 180 | 120 | 60 | 25 |
| 9 | 190 | 220 | 70 | 55 | 24 | 170 | 130 | 55 | 20 |
| 10 | 200 | 150 | 75 | 60 | 25 | 160 | 140 | 50 | 15 |
| 11 | 190 | 160 | 80 | 65 | 26 | 150 | 200 | 45 | 10 |
| 12 | 180 | 210 | 85 | 70 | 27 | 140 | 190 | 40 | 65 |
| 13 | 170 | 200 | 90 | 75 | 28 | 130 | 180 | 35 | 70 |
| 14 | 160 | 190 | 95 | 80 | 29 | 120 | 170 | 30 | 75 |
| 15 | 150 | 180 | 100 | 85 | 30 | 110 | 160 | 25 | 80 |

У раўнавазе знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл. Выбіраем восі каардынат з пачаткам у пункце С. Запісваєм ураўненні раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad X_C - F_2 \cos 30^\circ - R_B \cos 50^\circ = 0;$$

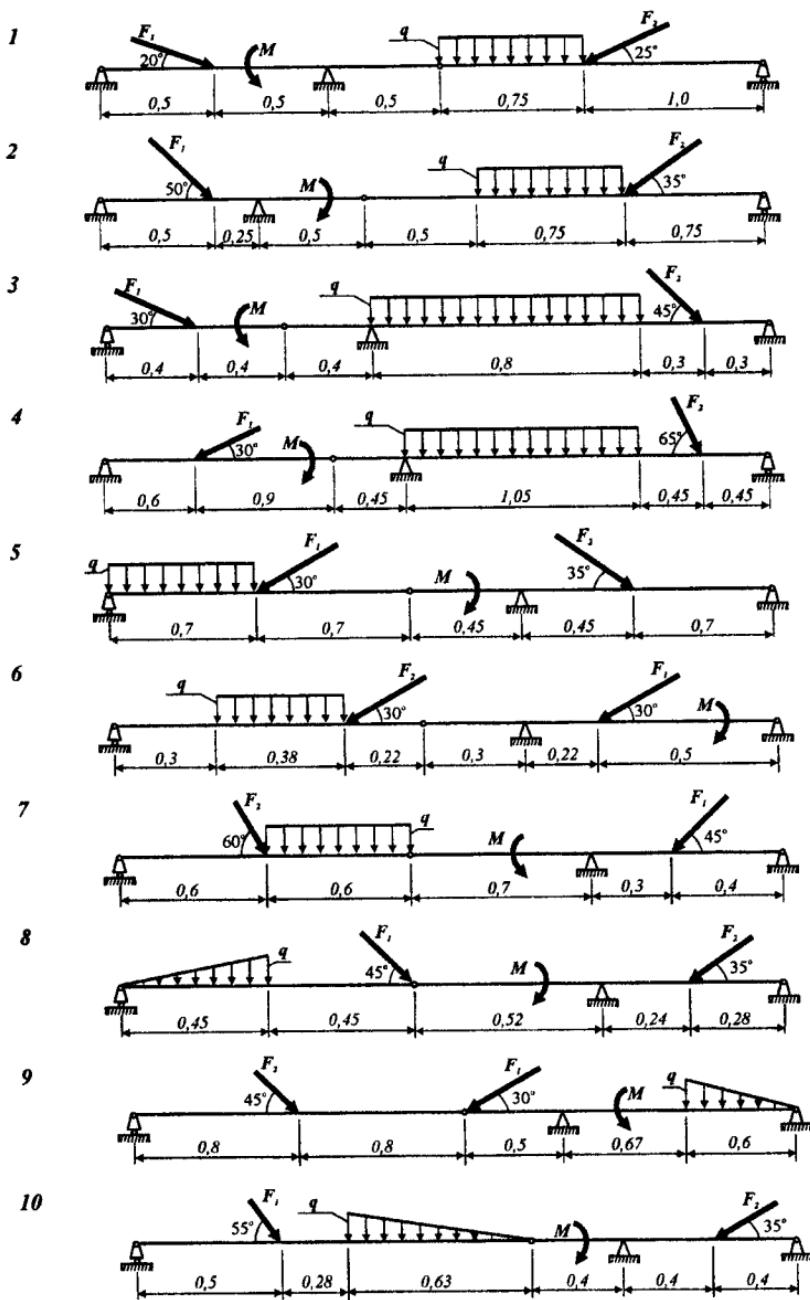


Рис. 22

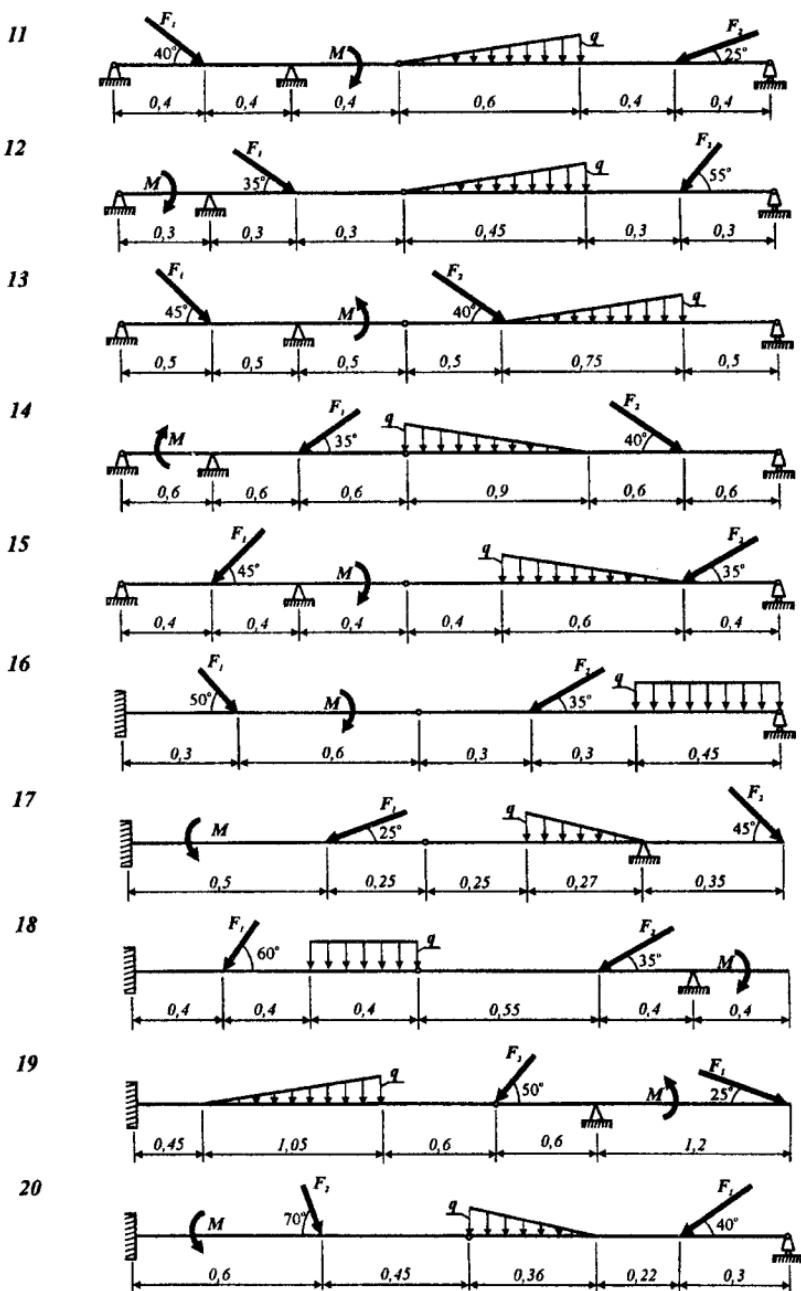


Рис. 23

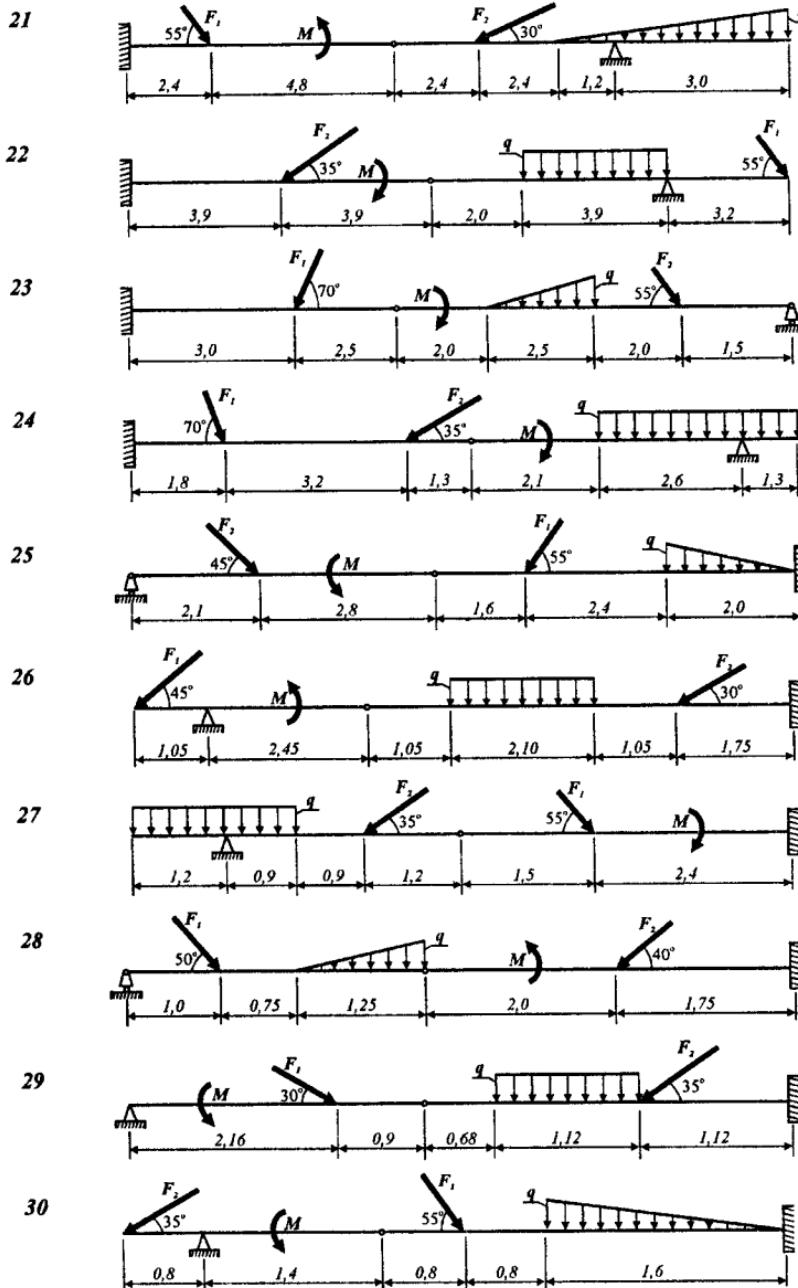


Рис. 24

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad Y_C - F_2 \sin 30^\circ + R_B \sin 50^\circ = 0;$$

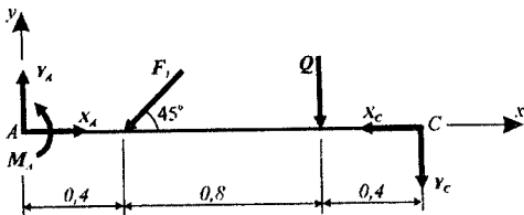
$$\sum_{k=1}^n m_C(F_k) = 0 \quad -F_2 \sin 30^\circ \cdot 0,55 - M + R_B \sin 50^\circ \cdot 1,35 = 0.$$

З ураўненняў раўнавагі знаходзім невядомыя рэакцыі сувязей:
 R_B , X_C , Y_C .

$$R_B = \frac{F_2 \sin 30^\circ \cdot 0,55 + M}{\sin 50^\circ \cdot 1,35} = \frac{200 \cdot 0,5 \cdot 0,55 + 50}{0,766 \cdot 1,35} = 101,54 \text{ H};$$

$$X_C = F_2 \cos 30^\circ + R_B \cos 50^\circ = 200 \cdot 0,866 + 101,54 \cdot 0,643 = 238,49 \text{ H};$$

$$Y_C = F_2 \sin 30^\circ - R_B \sin 50^\circ = 200 \cdot 0,5 - 101,54 \cdot 0,766 = 22,22 \text{ H}.$$



Рыс. 25

Разглядаем раўнавагу бэлькі AC . На яе накладзены дзве сувязі: у пункце A — нерухомая замацоўка, у пункце C — нерухомы цыліндрычны шарнір. Замест сувязей паказваем іх рэакцыі і атрымліваем разліковую схему бэлькі AC (рыс. 25). Пры гэтым улічваем, што вектарная сума ўнутраных сіл бэлькі AB у шарніры C роўная нулю. Таму рэакцыі ў шарніры C , прыкладзенія да розных бэлек, павінны быць накіраваны ў процілеглыя бакі. Размеркаваную нагрузкку замянім раўнадзейнаю сілаю Q .

У раўнавазе знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл. Выбіраем восі каардынат з початкам у пункце A . Запісваем ураўненні раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad X_A - F_1 \cos 45^\circ - X_C = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad Y_A - F_1 \sin 45^\circ - Q - Y_C = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(F_k) = 0 \quad M_A - F_1 \sin 45^\circ \cdot 0,4 - Q \cdot 1,2 - Y_C \cdot 1,6 = 0.$$

З ураўненняў раўнавагі знаходзім невядомыя рэакцыі сувязей: X_A , Y_A , M_A .

$$M_A = F_1 \sin 45^\circ \cdot 0,4 + Q \cdot 1,2 + Y_C \cdot 1,6 = 100 \cdot 0,707 \cdot 0,4 + 40 \cdot 0,8 \cdot 1,2 + \\ + 22,22 \cdot 1,6 = 28,28 + 38,4 + 35,55 = 102,23 \text{ Нм}.$$

$$X_A = F_1 \cos 45^\circ + X_C = 100 \cdot 0,707 + 238,49 = 309,19 \text{ Н};$$

$$Y_A = F_1 \sin 45^\circ + Q + Y_C = 100 \cdot 0,707 + 40 \cdot 0,8 + 22,22 = 124,92 \text{ Н}.$$

Праверка. Запішам адно ўраўненне раўнавагі для састаўной бэлькі AB .

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad X_A - F_1 \cos 45^\circ - F_2 \cos 30^\circ - R_B \cos 50^\circ = 0; \\ 309,19 - 100 \cdot 0,707 - 200 \cdot 0,866 - 101,54 \cdot 0,643 = 0; \\ 0 = 0.$$

Роўнасць пацвердзілася. Значыць, рэакцыі сувязей падлічаны правільна.

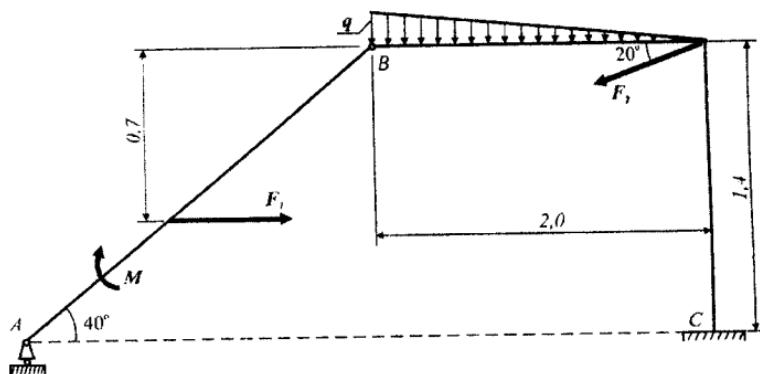
Заданне С-7 Вызначэнне рэакцый апор у сістэме двух цел

Канструкцыя, якая ўяўляе сабою сістэму двух цел, знаходзіцца ў раўнавазе пад уздзеяннем сіл (рыс. 27, 28, 29). Значэнні нагрузкак прыведзены ў табл. 3, памеры на схемах дадзены ў метрах. Вызначыць рэакцыі сувязей.

Прыклад решэння задання С-7

Састаўная рама ABC (рыс. 26) складзена з дзвюх частак, аб'яднаных паміж сабою нерухомым шарнірам B . Рама знаходзіцца ў раўнавазе пад уздзеяннем: сіл $F_1=300 \text{ Н}$, $F_2=450 \text{ Н}$, мо-

манту пары сіл $M = 120$ Нм, размеркаванай нагруззкі інтэнсіўнасці $q = 80$ Н/м. Вызначыць рэакцыі сувязей, накладзеных на раму.



Рыс. 26

Р а ш э н н е . Разглядаем раўнавагу бэлькі AB , часткі ўсёй канструкцыі ABC . На бэльку AB накладзены дзве сувязі: у пункце A — рухомы цыліндрычны шарнір, у пункце B — нерухомы цыліндрычны шарнір. На разліковый схеме бэлькі (рыс. 30) паказываем усе дадзенныя сілы і рэакцыі адкінутых сувязей, якія дзеяньчыцаюць на бэльку.

Табліца 3

| Варыянт | F_1 , Н | F_2 , Н | M , Нм | q , Н/м | α , град | β , град |
|---------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------------|----------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 500 | 200 | 100 | 80 | 70 | 20 |
| 2 | 550 | 400 | 120 | 60 | 20 | 35 |
| 3 | 600 | 450 | 130 | 40 | 60 | 25 |
| 4 | 650 | 500 | 160 | 50 | 30 | 40 |
| 5 | 700 | 550 | 180 | 30 | 25 | 50 |
| 6 | 750 | 600 | 200 | 20 | 35 | 70 |
| 7 | 400 | 650 | 220 | 70 | 40 | 45 |
| 8 | 450 | 700 | 240 | 60 | 45 | 30 |
| 9 | 300 | 750 | 250 | 90 | 30 | 40 |
| 10 | 350 | 800 | 230 | 80 | 50 | 25 |
| 11 | 200 | 850 | 220 | 70 | 60 | 35 |
| 12 | 250 | 900 | 210 | 90 | 20 | 30 |
| 13 | 800 | 350 | 200 | 40 | 60 | 60 |

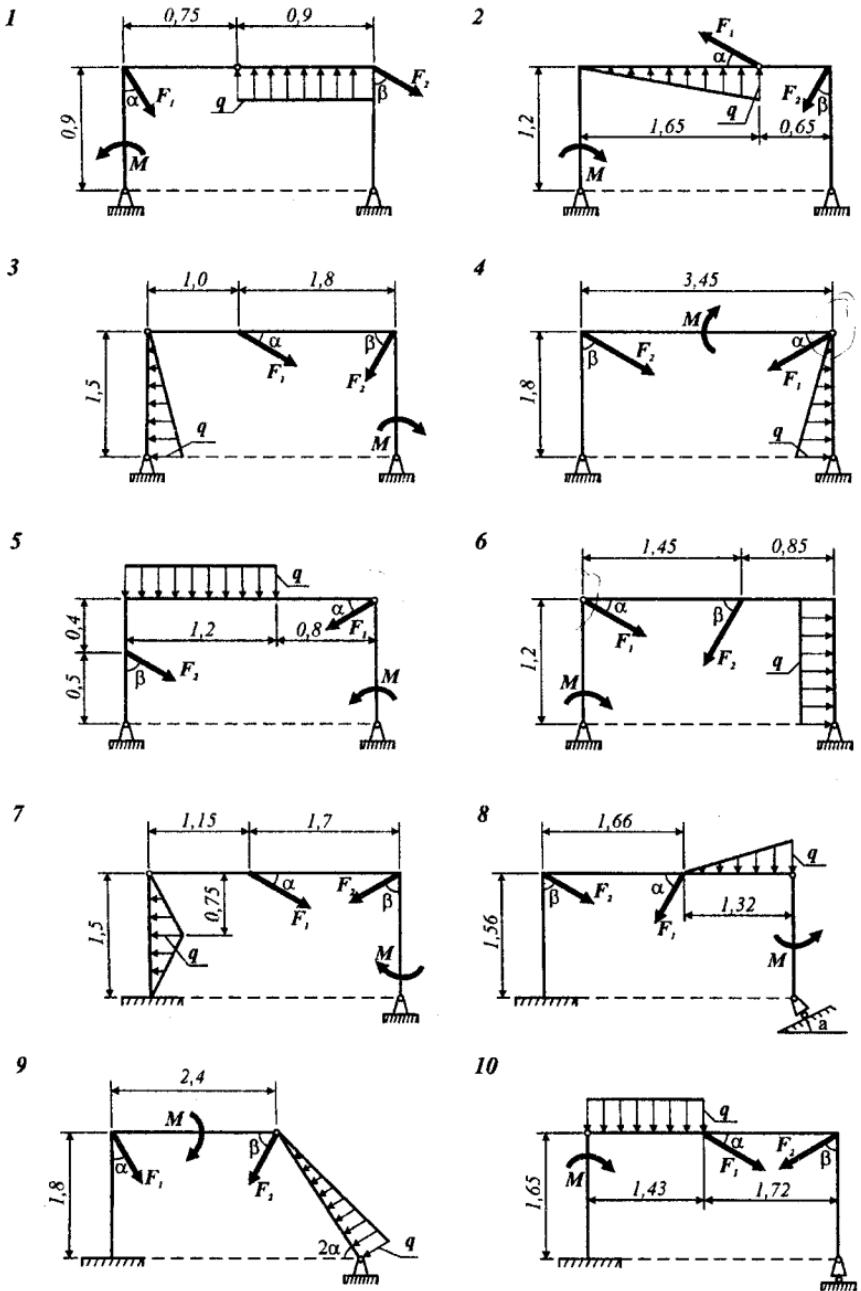


Рис. 27

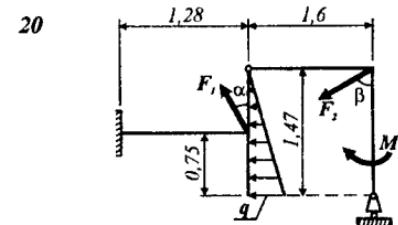
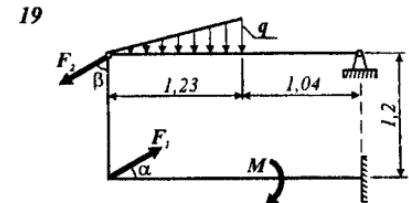
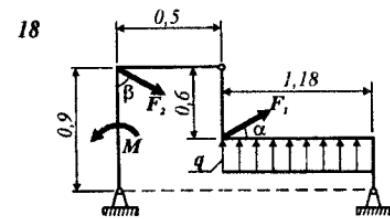
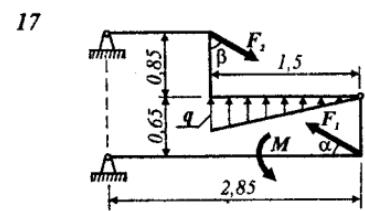
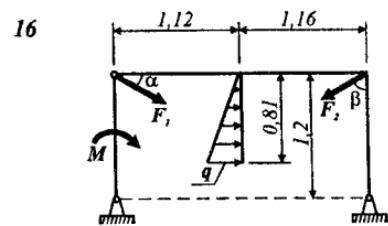
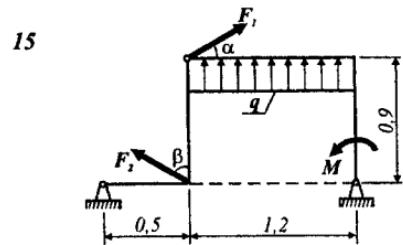
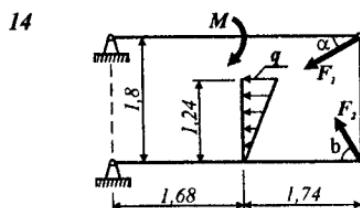
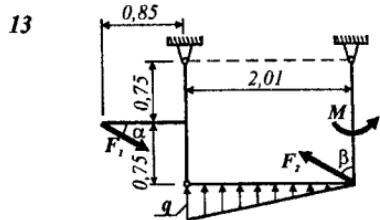
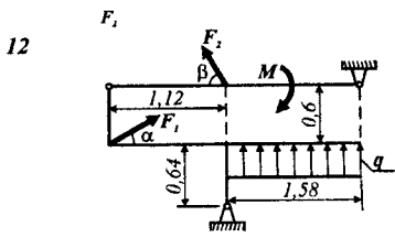
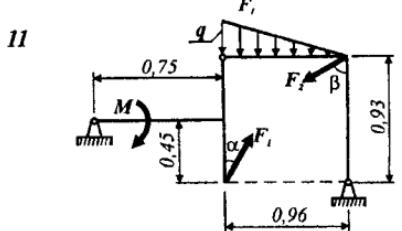
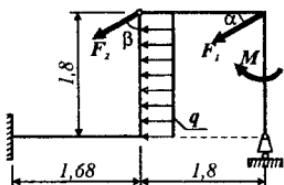
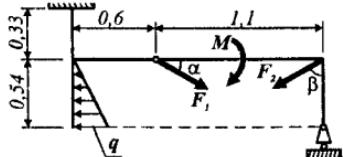


Рис. 28

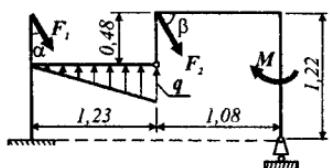
21



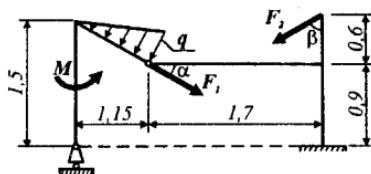
22



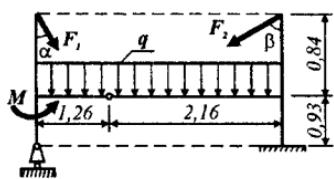
23



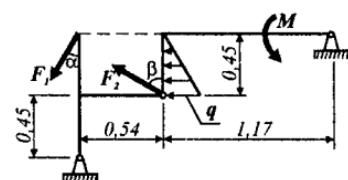
24



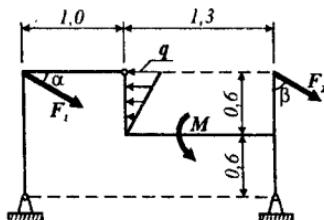
25



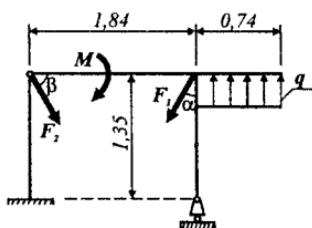
26



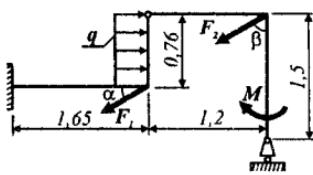
27



28



29



30

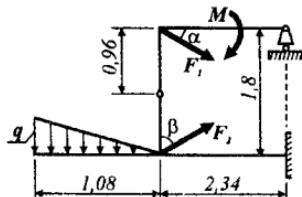


Рис. 29

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----|-----|-----|-----|----|----|----|
| 14 | 850 | 300 | 110 | 50 | 40 | 55 |
| 15 | 900 | 250 | 190 | 80 | 10 | 25 |
| 16 | 100 | 650 | 120 | 40 | 45 | 54 |
| 17 | 150 | 700 | 110 | 44 | 20 | 75 |
| 18 | 200 | 750 | 100 | 48 | 30 | 23 |
| 19 | 250 | 800 | 130 | 52 | 30 | 17 |
| 20 | 300 | 600 | 140 | 56 | 47 | 45 |
| 21 | 350 | 550 | 160 | 60 | 35 | 28 |
| 22 | 400 | 500 | 150 | 64 | 40 | 37 |
| 23 | 450 | 300 | 170 | 68 | 67 | 52 |
| 24 | 500 | 350 | 180 | 72 | 66 | 59 |
| 25 | 550 | 400 | 125 | 76 | 68 | 72 |
| 26 | 600 | 450 | 115 | 80 | 33 | 30 |
| 27 | 650 | 250 | 105 | 84 | 43 | 25 |
| 28 | 700 | 200 | 135 | 88 | 48 | 25 |
| 29 | 750 | 150 | 145 | 92 | 29 | 30 |
| 30 | 800 | 100 | 155 | 96 | 30 | 64 |

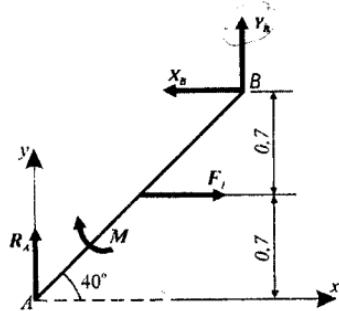
У раўнавазе знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл.
Запісваем ураўненні раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad F_1 - X_B = 0;$$

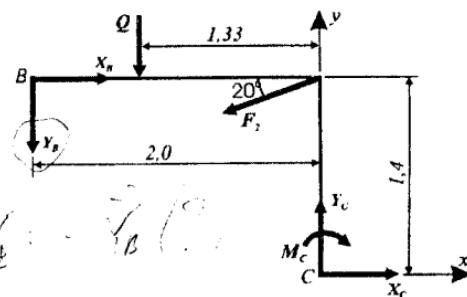
$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad R_A + Y_B = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_B(F_k) = 0 \quad -R_A \cdot 1,4 \operatorname{ctg} 40^\circ - M + F_1 \cdot 0,7 = 0.$$

Вызначаем невядомыя рэакцыі R_A , X_B , Y_B .



Рыс. 30



Рыс. 31

$$R_A = \frac{F_1 \cdot 0,7 - M}{1,4 \operatorname{ctg} 40^\circ} = \frac{300 \cdot 0,7 - 120}{1,4 \cdot 1,192} = 53,93 \text{ Н};$$

$$X_B = F_1 = 300 \text{ Н}, \quad Y_B = -R_A = -53,93 \text{ Н.}$$

Разгледзім раўнавагу правай часткі рамы. На яе накладзены дзве сувязі: нерухомы цыліндрычны шарнір у пункце B і нерухомая замацоўка — у пункце C . На разліковай схеме рамы BC (рыс. 31) паказваем дадзенныя сілы і рэакцыі адкінутых сувязей, якія дзейнічаюць на бэльку.

Пры гэтым складовыя рэакцыі шарніра B паказваем абавязко-ва процілегла тым накірункам, што былі выбраны для складовых рэакцыі ў гэтым шарніры для левай часткі канструкцыі (вектарная сума сіл узаемадзеяння двух цел паміж сабою павінна быць роўнай нулю). Размеркаваную нагрузкзу замяняем раўнадзеянаю сілаю Q . У раўнавазе знаходзіца плоская адвольная сістэма сіл. Запісваем ураўненні раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad X_C + X_B - F_2 \cos 20^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad Y_C - Y_B - Q - F_2 \sin 20^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_C(\mathbf{F}_k) = 0 \quad Y_B \cdot 2 - X_B \cdot 1,4 + Q \cdot 1,33 + F_2 \cos 20^\circ \cdot 1,4 - M_C = 0.$$

Вызначаем невядомыя рэакцыі X_C, Y_C, M_C .

$$X_C = F_2 \cos 20^\circ - X_B = 450 \cdot 0,94 - 300 = 123 \text{ Н};$$

$$Y_C = F_2 \sin 20^\circ + Q + Y_B = 450 \cdot 0,342 + \frac{80 \cdot 2}{2} - 53,93 = 179,97 \text{ Н};$$

$$\begin{aligned} M_C &= Y_B \cdot 2 - X_B \cdot 1,4 + Q \cdot 1,33 + F_2 \cos 20^\circ \cdot 1,4 = \\ &= 53,93 \cdot 2 - 300 \cdot 1,4 + \frac{80 \cdot 2}{2} \cdot 1,33 + 450 \cdot 0,94 \cdot 1,4 = 170,74 \text{ Нм}. \end{aligned}$$

Праверка.

$$\sum_{k=1}^n m_B(\mathbf{F}_k) = 0 \quad -Q \cdot 0,67 - F_2 \sin 20^\circ \cdot 2 + Y_C \cdot 2 + X_C \cdot 1,4 - M_C = 0;$$

$$-\frac{80 \cdot 2}{2} \cdot 0,67 - 450 \cdot 0,342 \cdot 2 + 179,97 \cdot 2 + 123 \cdot 1,4 - 170,74 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Разлікі выкананы правільна.

Заданне С-8

Раўнавага цела з улікам трэння

1–20. Вызначыць межы змянення велічыні сілы F , якую неабходна прыкладці да цела для забеспечэння яго раўнавагі на нахіленай паверхні (рыс. 33,34). Даныя ў табл. 4, дзе G — вага цела, f — каэфіцыент трэння слізгання цела на нахіленай паверхні, δ — каэфіцыент трэння качэння кола па нахіленай паверхні.

Табліца 4

| Варыянт | $G, \text{Н}$ | $R, \text{м}$ | $r, \text{м}$ | $a, \text{м}$ | $b, \text{м}$ | $\delta, \text{мм}$ | f | $\alpha, \text{град.}$ | $\beta, \text{град.}$ |
|---------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------------|------|------------------------|-----------------------|
| 1 | 500 | 0,25 | | | | 0,4 | 0,20 | 10 | 15 |
| 2 | 450 | 0,30 | | | | 0,3 | 0,15 | 15 | 25 |
| 3 | 400 | 0,35 | 0,25 | | | 0,2 | 0,25 | 20 | 45 |
| 4 | 350 | 0,32 | 0,20 | | | 0,4 | 0,18 | 20 | 15 |
| 5 | 300 | 0,28 | 0,15 | | | 0,8 | 0,22 | 10 | 10 |
| 6 | 480 | 0,40 | | | | 0,5 | 0,24 | 15 | 20 |
| 7 | 370 | 0,38 | 0,25 | | | 0,7 | 0,30 | 20 | 25 |
| 8 | 420 | 0,30 | 0,20 | | | 0,6 | 0,16 | 22 | 40 |
| 9 | 330 | 0,36 | | | | 0,9 | 0,17 | 25 | 28 |
| 10 | 500 | 0,34 | | | | 0,2 | 0,28 | 23 | 62 |
| 11 | 490 | | 0,36 | 0,46 | | | 0,25 | 28 | 35 |
| 12 | 480 | | 0,32 | 0,44 | | | 0,22 | 26 | 28 |
| 13 | 470 | | 0,30 | 0,42 | | | 0,24 | 24 | 16 |
| 14 | 460 | | 0,28 | 0,40 | | | 0,20 | 25 | 20 |
| 15 | 450 | | 0,26 | 0,38 | | | 0,18 | 26 | 18 |
| 16 | 440 | | 0,24 | 0,36 | | | 0,19 | 30 | 16 |
| 17 | 430 | | 0,22 | 0,34 | | | 0,16 | 24 | 20 |
| 18 | 420 | | 0,20 | 0,32 | | | 0,15 | 35 | 18 |
| 19 | 410 | | 0,28 | 0,42 | | | 0,17 | 28 | 30 |
| 20 | 400 | | 0,30 | 0,46 | | | 0,21 | 25 | 20 |

21. Вызначыць:

- а) максімальную адлегласць h , пры якой будзе адбывацца праслізгванне ўтулкі ўніз, $l=0,1 \text{ м}$, каэфіцыент трэння слізгання ўтулкі на стойцы $f=0,1$;

б) максімальную даўжыню ўтулкі l , пры якой яна не будзе спаўзаць ўніз $h=0,42$ м, $f=0,1$ (рыс. 35).

22. Вызначыць каэфіцыент трэння слізгання f паміж целамі 1 і 2, калі цела 1 знаходзіцца ў спакоі, а цела 2 рухаецца ўправа. $G=120$ Н, $Q=1000$ Н, $\alpha=27^\circ$ (рыс. 35).

23. Кола, вага якога $G=150$ Н і радыус $R=0,35$ м, раўнамерна коціцца без праслізгвання пад уздзеяннем пары сіл з момантам $M=180$ Нм. З цэнтрам кола праз шарнір звязаны стрыжань $AB=1$ м з паўзуном, які рухаецца ўздоўж накіравальных. Вызначыць каэфіцыент трэння слізгання ў накіравальных, калі вядома, што каэфіцыент трэння качэння кола $\delta=0,1$ мм. (рыс. 35).

24. Штанга AB вагою $G=75$ Н падымаецца раўнамерна ўверх пад уздзеяннем сілы $P=180$ Н. Вызначыць найбольшую велічыню вугла α паміж штангаю і накірункам сілы P , пры якім магчымы названы рух штангі. Каэфіцыент трэння паміж штангаю AB і накіравальнымі $f=0,12$, $a=0,4$ м, $b=0,6$ м. (рыс. 35).

25. Прамалінейны рычаг 1 раўнамерна падымае штангу 2, вага якога $G_2=150$ Н. Каэфіцыент трэння слізгання паміж штангаю 2 і яе накіравальнымі $f_2=0,18$, паміж канцом штангі і рычагом — $f_1=0,15$, $a=0,6$ м, $b=0,6$ м. Вызначыць, пры якім вугле α рух штангі 2 будзе немагчымы (рыс. 35).

26. Крывашыпна-паўзунны механізм размешчаны ў вертыкальной плоскасці. Улічаючы вагу $G=100$ Н толькі паўзуна, вызначыць значэнні моманту M , пры якіх магчымы пад'ём і апусканне паўзуна ў прыведзеным становішчы механізма. $OA=0,2$ м, $AB=1$ м, $\alpha=40^\circ$, каэфіцыент трэння слізгання паўзуна па накіравальных $f=0,17$ (рыс. 35).

27. Да паўзуна 3 крывашыпна-паўзуннага механізма, вага якога $G_3=600$ Н, прыкладзена сіла $P=12$ кН. Каэфіцыент трэння слізгання паўзуна па накіравальных $f=0,13$. Вызначыць момант M , які неабходна прыкладзіць да крывашыпа 1, каб забяспечыць раўнамернае перамяшчэнне паўзуна 3. $l_1=0,2$ м, $l_2=0,6$ м, $\alpha=90^\circ$ (рыс. 35).

28. У механізме (рыс. 35) клін 1 рухаецца па гарызанталі, а плунжэр 2 пры гэтym рухаецца па вертыкалі. Вага плунжэра $G_2=60$ Н, каэфіцыенты трэння слізгання: паміж клінам і гарызантальную плоскасцю — $f_1=0,1$, паміж клінам і плунжэрам — $f_2=0,12$, паміж плунжэрам і яго накіравальнымі — $f_3=0,15$. Вугал $\alpha=15^\circ$.

Вызначыць значэнні сілы P , якую неабходна прыкладсці да кліна 1, каб забяспечыць раўнамерны пад'ём і апусканне плунжэра.

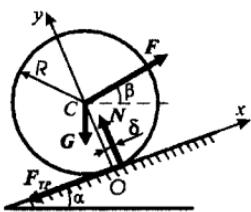
29. Вызначыць сілу P , неабходную для пераадолення су-праціўлення Q : а) з улікам сіл трэння; б) без уліку сіл трэння. $Q=1200 \text{ Н}$, $\alpha_1=10^\circ$, $\alpha_2=15^\circ$, каэфіцыенты трэння слізгання: паміж клінам і нахіленай паверхнію — $f_{13}=0,1$, паміж клінам і плунжэрам — $f_{12}=0,12$, паміж плунжэрам і яго накіравальными — $f_{23}=0,2$ (рыс. 35).

30. Вызначыць сілу P , неабходную для пераадолення супраціўлення Q : а) з улікам сіл трэння; б) без уліку сіл трэння. $Q=9 \text{ кН}$, $\alpha=20^\circ$, каэфіцыенты трэння слізгання: паміж клінам і вертыкальнаю плоскасцю — $f_{13}=0,12$, паміж клінам і плунжэрам — $f_{12}=0,15$, паміж плунжэрам і гарызантальнымі накіравальными — $f_{23}=0,17$ (рыс. 35).

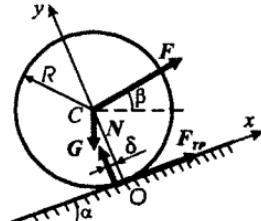
Прыклад разшэння задання С-8

Вызначыць межы змянення велічыні сілы F пры раўнавазе катка на нахіленай паверхні (рыс. 32). $G=200 \text{ Н}$, $f=0,2$, $\delta=0,5 \text{ мм}$, $R=0,3 \text{ м}$, $\alpha=20^\circ$, $\beta=30^\circ$.

а)



б)



Рыс. 32

Рашэнне. Разгледзім раўнавагу катка на нахіленай паверхні з улікам трэння качэння і слізгання ў выпадку, калі ён раўнамерна рухаецца ўправа без праслізгвання (рыс. 32а). Рэакцыю нягладкай апорнай паверхні паказываем у выглядзе дзвюх складовых: \mathbf{N} і $\mathbf{F}_{\text{тр}}$. Сіла \mathbf{N} паказана на адлегласці δ ад цэнтра катка з улікам руху ўправа. У раўнавазе знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл. Запісваем ураўненні раўнавагі.

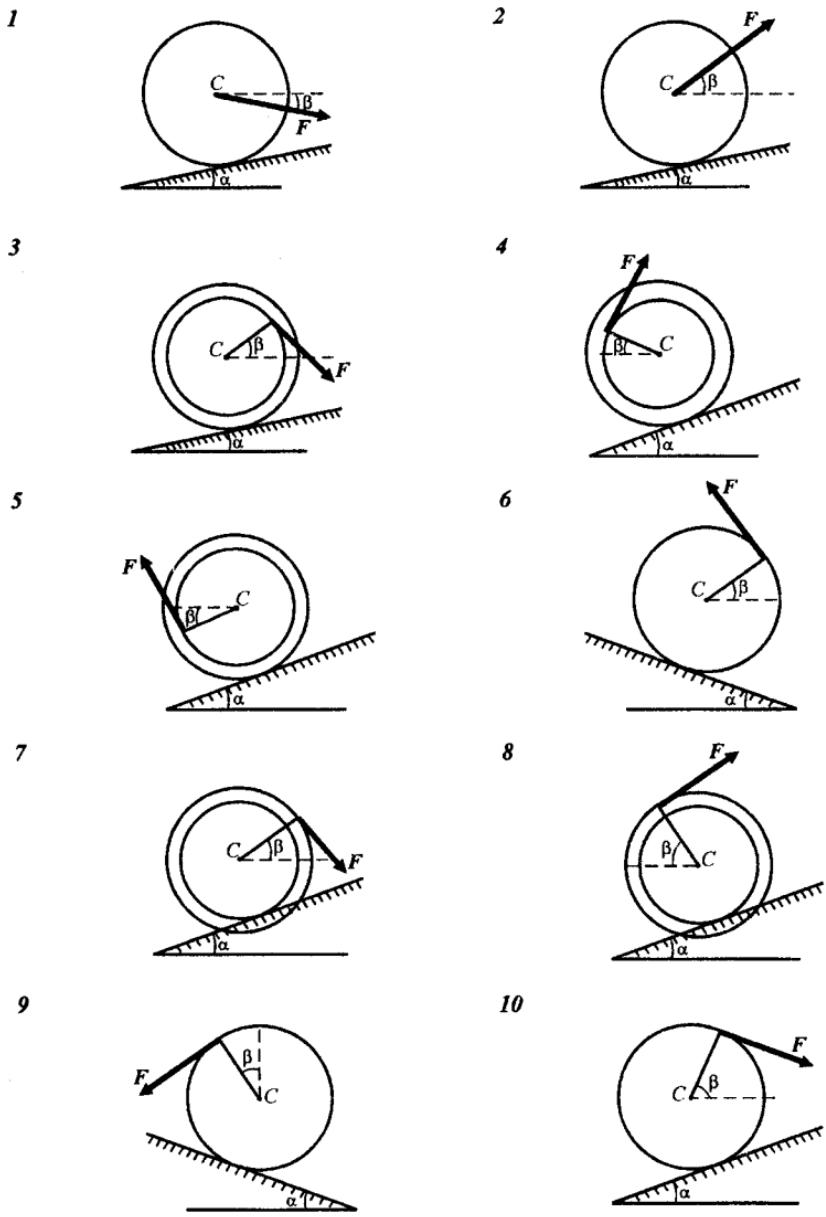
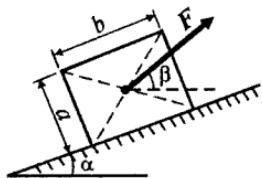
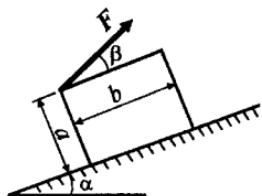


Рис. 33

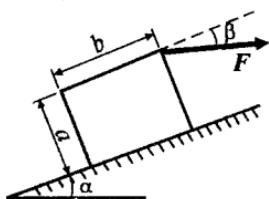
II



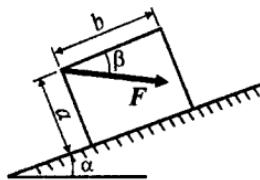
12



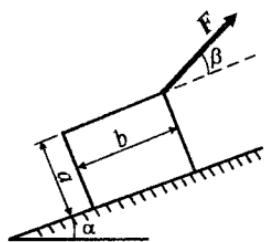
13



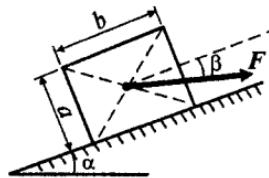
14



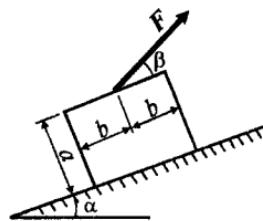
15



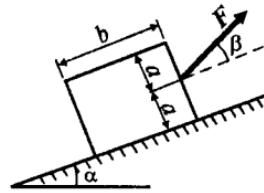
16



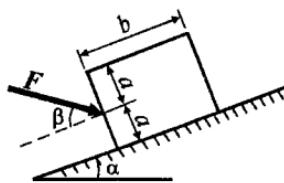
17



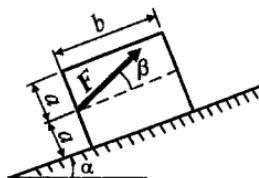
18



19

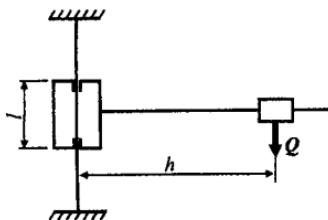


20

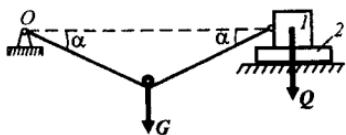


Рыс. 34

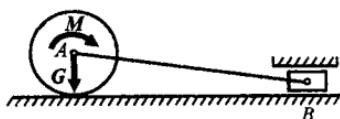
21



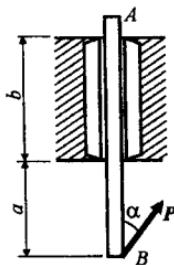
22



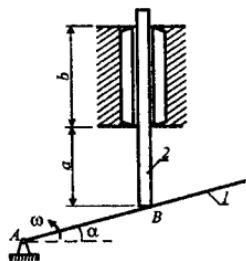
23



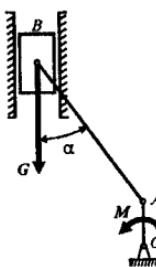
24



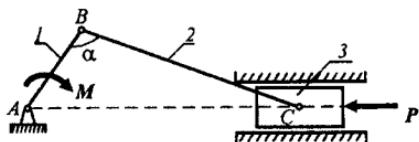
25



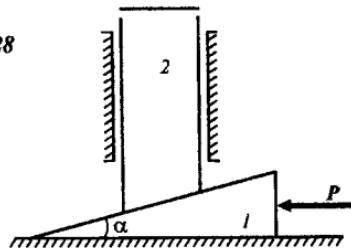
26



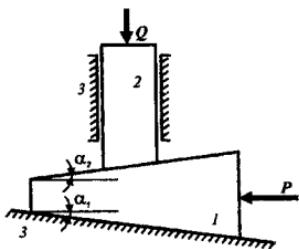
27



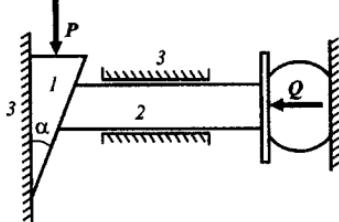
28



29



30



Рыс. 35

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad F \cos 10^\circ - G \sin 20^\circ - F_{tp} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad F \sin 10^\circ - G \cos 20^\circ + N = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_0(F_k) = 0 \quad N \cdot \delta - F \cos 10^\circ \cdot R + G \sin 20^\circ \cdot R = 0.$$

$$\begin{cases} F \cdot 0,985 - 68,4 - F_{tp} = 0 \\ F \cdot 0,174 - 187,9 + N = 0 \\ N \cdot 0,0005 - F \cdot 0,295 + 20,52 = 0. \end{cases}$$

$$N = 187,9 - 0,174 F;$$

$$0,094 - 0,000087 F - 0,295 F + 20,52 = 0;$$

$$20,614 = 0,295087 F;$$

$$F = 69,86 \text{ H}, \quad N = 175,74 \text{ H};$$

$$F_{tp} = 68,81 - 68,4 = 0,41 \text{ H}.$$

$$F_{tp,max} = f \cdot N = 0,2 \cdot 175,74 = 35,15 \text{ H}.$$

Параўнанне F_{tp} і $F_{tp,max}$ дае падставу для выводу, што, як і меркавалі, праслізгвання не назіраецца: $F_{tp} < F_{tp,max}$.

Цяпер разгледзім раўнавагу катка ў выпадку, калі ён раўнамерна рухаецца ўлева (рыс. 32б).

У раўнавазе знаходзіцца плоская адвольная сістэма сіл. Запісваем ураўненні раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad F \cos 10^\circ + F_{tp} - G \sin 20^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad F \sin 10^\circ - G \cos 20^\circ + N = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_0(F_k) = 0 \quad G \sin 20^\circ \cdot R - F \cos 10^\circ \cdot R - N \cdot \delta = 0.$$

$$\begin{cases} F \cdot 0,985 + F_{\text{tp}} - 68,4 = 0 \\ F \cdot 0,174 - 187,9 + N = 0 \\ 20,52 - F \cdot 0,295 - N \cdot 0,0005 = 0. \end{cases}$$

$$N = 187,9 - 0,174 F;$$

$$20,52 - 0,295 F - 0,094 + 0,000087 F = 0;$$

$$20,43 = 0,294913 F, \quad F = 69,27 \text{ H},$$

$$N = 175,85 \text{ H};$$

$$F_{\text{tp}} = 0,17 \text{ H}.$$

$$F_{\text{tp,max}} = f \cdot N = 0,2 \cdot 175,85 = 35,17 \text{ H}.$$

$F_{\text{tp}} < F_{\text{tp,max}}$, праслізгвання няма.

Такім чынам, раўнавага катка на нахіленай нягладкай паверхні ў разгледжаным прыкладзе будзе назірацца пры выбранных значэннях сілы F у межах ад 69,27 H да 69,86 H.

2. Прасторавая сістэма сіл

Сыходная сістэма сіл

Заданне С-9

Вызначэнне нагрузкак у стрыжнях прасторавай канструкцыі

На вузлы A і B прасторавай канструкцыі дзейнічаюць сілы P і Q . Вызначыць нагрузкі ў шасці бязважкіх стрыжнях, з якіх з дапамогаю шарніраў утворана дадзеная канструкцыя (рыс. 37–39, табл. 5).

Прыклад рашэння задання С-9

Дадзена: $P=100 \text{ H}$, $Q=200 \text{ H}$, $\alpha=60^\circ$, $\beta=30^\circ$.

Вызначыць нагрузкі ў шасці бязважкіх стрыжнях прасторавай канструкцыі (рыс. 36).

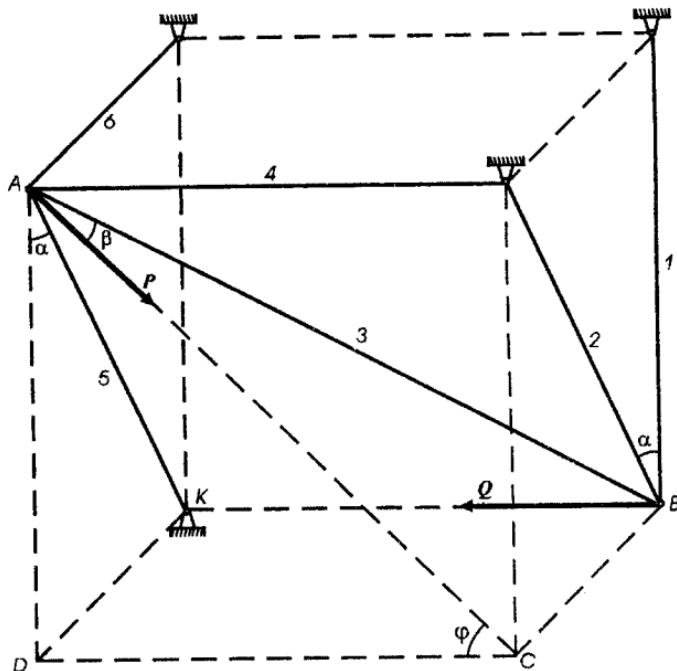


Рис. 36

Таблица 5

| Вары- янт | P , Н | Q , Н | α , град | β , град | Вары- янт | P , Н | Q , Н | α , град | β , град |
|--------------|---------|---------|-----------------|----------------|--------------|---------|---------|-----------------|----------------|
| 1 | 100 | 180 | 25 | 40 | 16 | 250 | 330 | 60 | 30 |
| 2 | 110 | 190 | 70 | 35 | 17 | 240 | 190 | 55 | 25 |
| 3 | 120 | 200 | 40 | 60 | 18 | 230 | 180 | 45 | 70 |
| 4 | 130 | 210 | 30 | 25 | 19 | 220 | 170 | 65 | 45 |
| 5 | 140 | 220 | 35 | 30 | 20 | 210 | 160 | 50 | 35 |
| 6 | 150 | 230 | 60 | 50 | 21 | 200 | 150 | 40 | 50 |
| 7 | 160 | 240 | 65 | 35 | 22 | 190 | 140 | 55 | 60 |
| 8 | 170 | 250 | 45 | 30 | 23 | 180 | 130 | 50 | 65 |
| 9 | 180 | 260 | 70 | 60 | 24 | 170 | 120 | 45 | 35 |
| 10 | 190 | 270 | 40 | 50 | 25 | 160 | 110 | 35 | 55 |
| 11 | 200 | 280 | 50 | 45 | 26 | 150 | 100 | 60 | 30 |
| 12 | 210 | 290 | 35 | 55 | 27 | 140 | 200 | 65 | 40 |
| 13 | 220 | 300 | 30 | 40 | 28 | 130 | 210 | 45 | 35 |
| 14 | 230 | 310 | 65 | 30 | 29 | 120 | 220 | 50 | 45 |
| 15 | 240 | 320 | 55 | 35 | 30 | 110 | 230 | 55 | 60 |

Р а ш э н е . Разглядаем спачатку раўнавагу вузла B (у ім змацавана меншая чым у вузле A колькасць стрыжняў). На вузел B накладзены тры сувязі — бязважкія стрыжні 1, 2, 3. Пазбаўляемся ўмоўна ад сувязей, а замест іх пакажам рэакцыі сувязей. Пры гэтым лічым, што ўсе стрыжні расцягнутыя. Таму рэакцыі стрыжняў, прыкладзенны да вузла B , паказваем ад вузла ўздоўж стрыжняў (рыс. 40а)

У раўнавазе знаходзіцца прасторавая сыходная сістэма сіл. Запісваєм ураўненні раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad S_2 \sin \alpha + S_3 \sin \beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad S_3 \cos \beta \cdot \cos \varphi + Q = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0 \quad S_1 + S_2 \cos \alpha + S_3 \cos \beta \cdot \sin \varphi = 0.$$

Каб рашыць атрыманую сістэму ўраўненняў, неабходна, акрамя дадзеных вуглоў α і β , вызначыць вугал φ . Карыстаючыся рис. 36. З прамавугольнага трохвугольніка ABC маем: $CB=AC \cdot \operatorname{tg} \beta$. $DK=CB$. У прамавугольным трохвугольніку ADK катэт $AD=DK \cdot \operatorname{ctg} \alpha$. Тады $AD=AC \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.

Цяпер маем магчымасць вызначыць вугал φ у прамавугольным трохвугольніку ADC .

$$\sin \varphi = \frac{AD}{AC} = \frac{AC \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{AC} = 0,577 \cdot 0,577 = 0,333,$$

$$\varphi = 19,45^\circ.$$

Падставім усе вядомыя велічыні ў сістэму ўраўненняў і атрымаем значэнні S_1 , S_2 , S_3 .

$$\begin{cases} S_2 \cdot 0,866 + S_3 \cdot 0,5 = 0, \\ S_3 \cdot 0,866 \cdot 0,943 + 200 = 0, \\ S_1 + S_2 \cdot 0,5 + S_3 \cdot 0,866 \cdot 0,333 = 0. \end{cases}$$

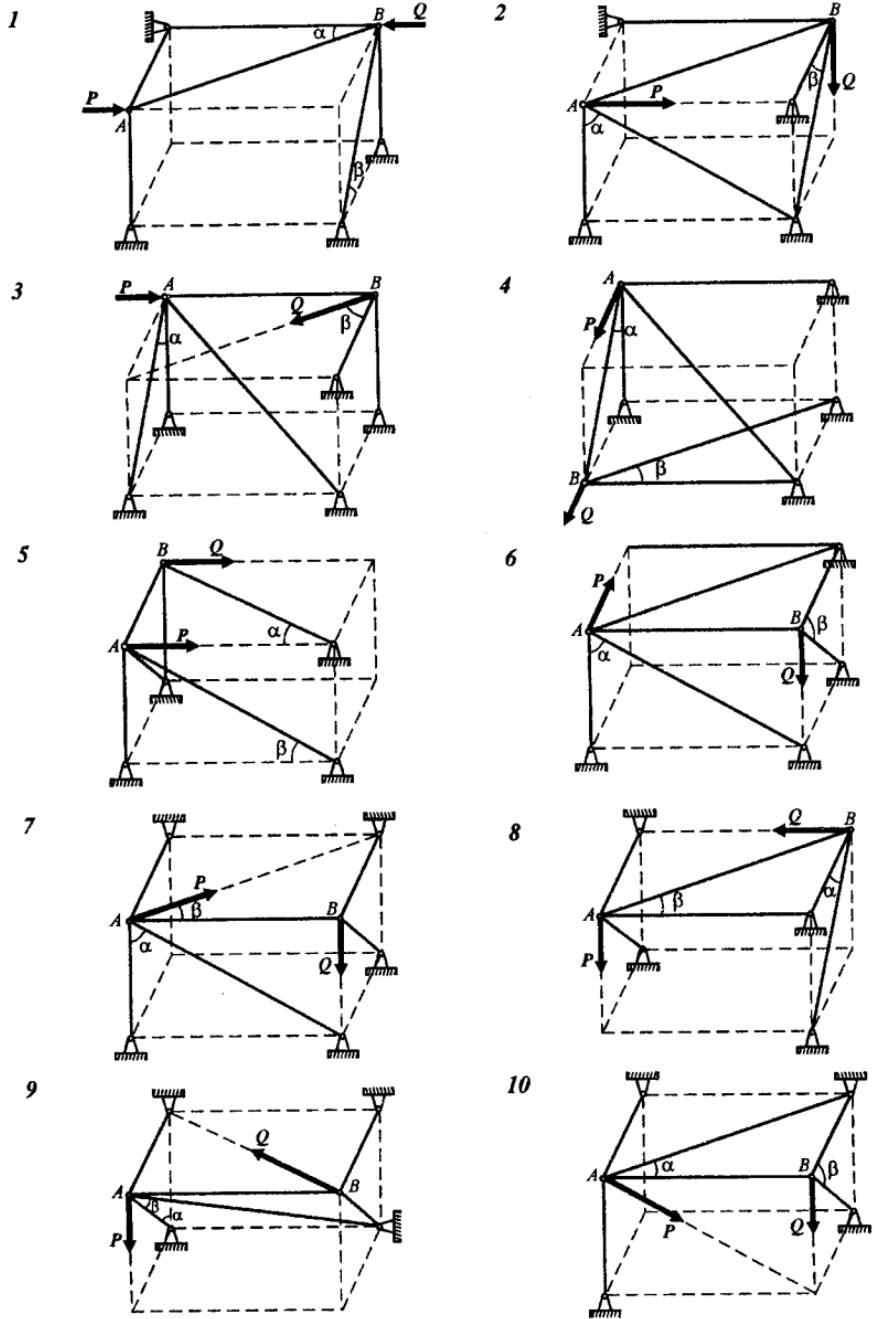
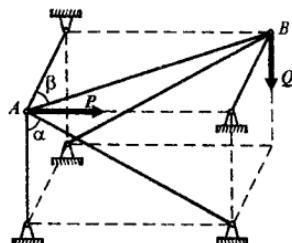
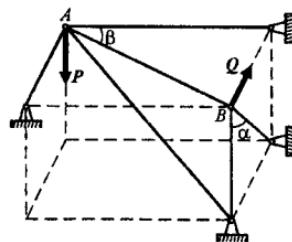


Рис. 37

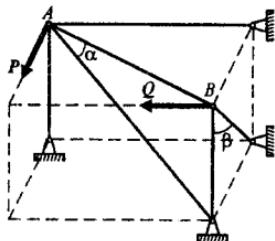
11



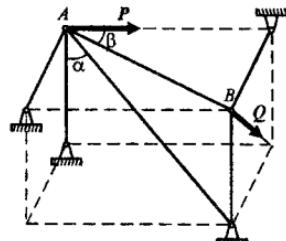
12



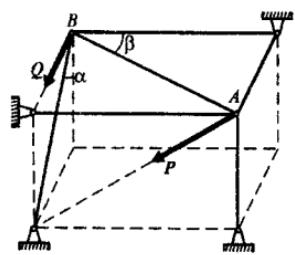
13



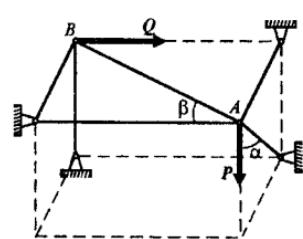
14



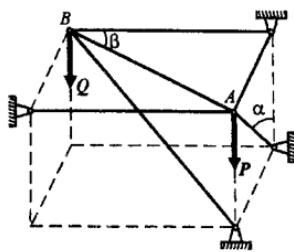
15



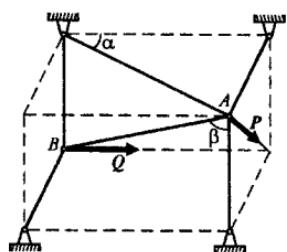
16



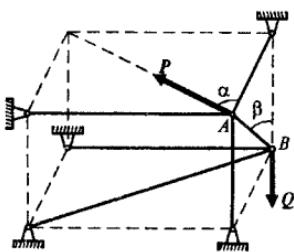
17



18



19



20

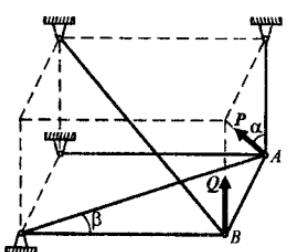
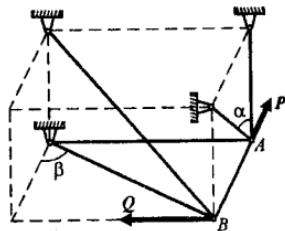
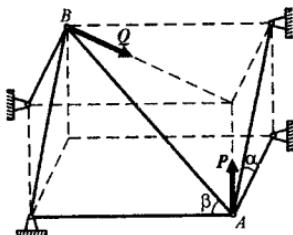


Рис. 38

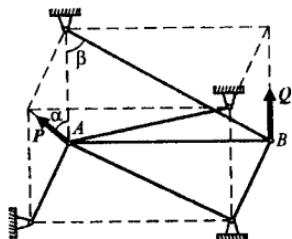
21



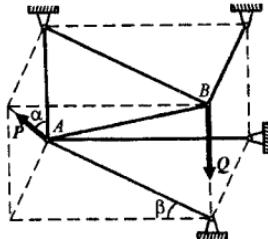
22



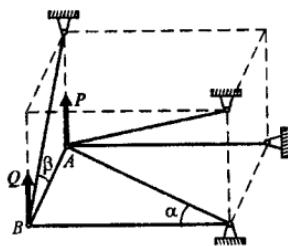
23



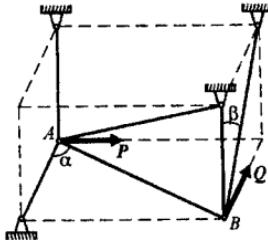
24



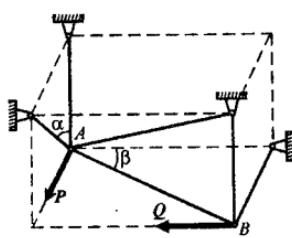
25



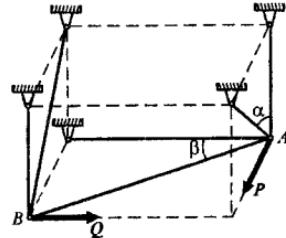
26



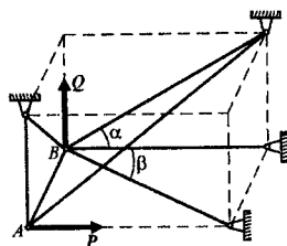
27



28



29



30

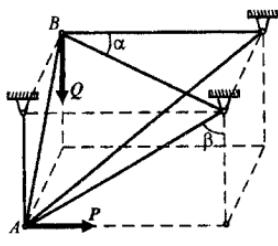


Рис. 39

$$S_3 = -\frac{200}{0,817} = -244,8 \text{ H};$$

$$S_2 = -S_3 \cdot \frac{0,5}{0,866} = 244,8 \cdot 0,577 = 141,2 \text{ H};$$

$$S_1 = -S_2 \cdot 0,5 - S_3 \cdot 0,288 = -141,2 \cdot 0,5 + 244,8 \cdot 0,288 = 0.$$

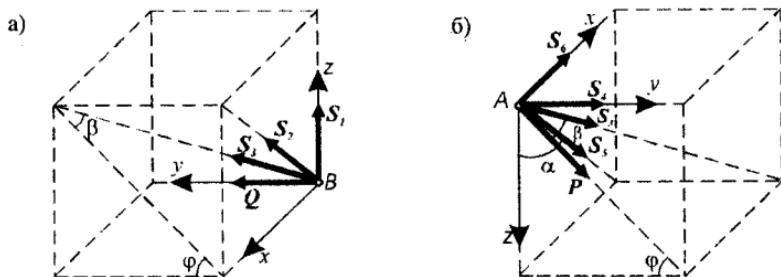


Рис. 40

Розглядаємо ра́йнавагу вузла A . На яго накладзены 4 сувязі – бязважкія стрыжні 3, 4, 5, 6. Паказваєм рэакцыі стрыжняў ад вузла A па стрыжнях (рыс. 40б). У ра́йнавазе знаходзіцца прасторавая сыходная сістэма сіл. Запісваем ураўненні ра́йнавагі.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad S_3 \sin \beta + S_5 \sin \alpha + S_6 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad S_3 \cos \beta \cdot \cos \varphi + S_4 + P \cos \varphi = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0 \quad S_3 \cos \beta \sin \varphi + S_5 \cos \alpha + P \sin \varphi = 0.$$

Падставім усе вядомыя велічыні ў сістэму ўраўненняў і атрымаем значэнні S_4 , S_5 , S_6 .

$$\begin{cases} -244,8 \cdot 0,5 + S_5 \cdot 0,866 + S_6 = 0 \\ -244,8 \cdot 0,866 \cdot 0,943 + S_4 + 100 \cdot 0,943 = 0 \\ -244,8 \cdot 0,866 \cdot 0,333 + S_5 \cdot 0,5 + 100 \cdot 0,333 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -122,4 + S_5 \cdot 0,866 + S_6 = 0 \\ -199,9 + S_4 + 94,3 = 0 \\ -70,6 + S_5 \cdot 0,5 + 33,3 = 0. \end{cases}$$

$$S_4 = 105,6 \text{ H}, \quad S_5 = 74,6 \text{ H}, \quad S_6 = 57,8 \text{ H}.$$

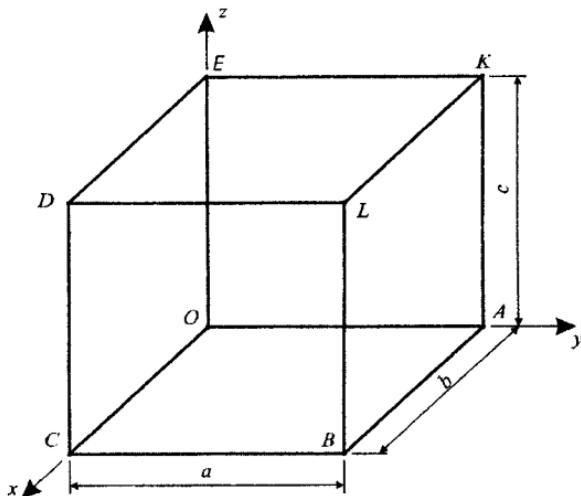
Нагрузкі стрыжняў 2, 4, 5, 6 атрыманы са знакам “плюс”. Гэта азначае, што пералічаныя стрыжні расцягнутыя. Нагрузка стрыжня 3 атрымана са знакам “мінус”. Гэта азначае, што стрыжань 3 сціснуты. Стыржань 1 не нагружаны ўвогуле, ён – “нулявы” стрыжань. Яго роля – забяспечваць нязменнасць формы канструкцыі.

Прасторавая адвольная сістэма сіл

Заданне С-10

Прывядзенне прасторавай адвольнай сістэмы сіл да прасцейшага віду

Вызначыць галоўны вектар і галоўны момант дадзенай сістэмы сіл адносна цэнтра O . Вырашыць, да якога прасцейшага віду прыводзіцца гэтая сістэма. Памеры паралелепіпеда (рыс. 41), пункты, у якіх прыкладзены сілы, іх модулі і накірункі дадзены ў табл. 6.



Рыс. 41

Таблиця 6

| Варіант | Параметри паралелепіпеда, см | | | $F_1=10 \text{ Н}$ | | | $F_2=20 \text{ Н}$ | | | $F_3=30 \text{ Н}$ | | | $F_4=40 \text{ Н}$ | | |
|---------|------------------------------|----------|----------|----------------------|-----------|----------------------|--------------------|----------------------|-----------|----------------------|-----------|----------------------|--------------------|----------------------|-----------|
| | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | пункт, у якім прыкл. | накірунок | пункт, у якім прыкл. | накірунок | пункт, у якім прыкл. | накірунок | пункт, у якім прыкл. | накірунок | пункт, у якім прыкл. | накірунок | пункт, у якім прыкл. | накірунок |
| 1 | 40 | 60 | 30 | <i>E</i> | <i>EK</i> | <i>K</i> | <i>KA</i> | <i>A</i> | <i>AD</i> | <i>B</i> | <i>BD</i> | | | | |
| 2 | 45 | 55 | 35 | <i>K</i> | <i>KL</i> | <i>L</i> | <i>LB</i> | <i>B</i> | <i>BE</i> | <i>C</i> | <i>CE</i> | | | | |
| 3 | 50 | 50 | 40 | <i>L</i> | <i>LD</i> | <i>D</i> | <i>DC</i> | <i>C</i> | <i>CO</i> | <i>B</i> | <i>BE</i> | | | | |
| 4 | 55 | 45 | 45 | <i>D</i> | <i>DA</i> | <i>E</i> | <i>EO</i> | <i>O</i> | <i>OA</i> | <i>B</i> | <i>BK</i> | | | | |
| 5 | 40 | 40 | 50 | <i>E</i> | <i>EK</i> | <i>K</i> | <i>KB</i> | <i>B</i> | <i>BE</i> | <i>C</i> | <i>CD</i> | | | | |
| 6 | 45 | 60 | 55 | <i>K</i> | <i>KL</i> | <i>L</i> | <i>LC</i> | <i>C</i> | <i>CD</i> | <i>D</i> | <i>DA</i> | | | | |
| 7 | 50 | 55 | 60 | <i>L</i> | <i>LD</i> | <i>D</i> | <i>DO</i> | <i>B</i> | <i>BE</i> | <i>A</i> | <i>AK</i> | | | | |
| 8 | 55 | 50 | 30 | <i>D</i> | <i>DE</i> | <i>E</i> | <i>EA</i> | <i>A</i> | <i>AD</i> | <i>B</i> | <i>BL</i> | | | | |
| 9 | 60 | 45 | 35 | <i>E</i> | <i>EO</i> | <i>B</i> | <i>BE</i> | <i>A</i> | <i>AC</i> | <i>C</i> | <i>CD</i> | | | | |
| 10 | 50 | 40 | 40 | <i>K</i> | <i>KA</i> | <i>A</i> | <i>AC</i> | <i>C</i> | <i>CO</i> | <i>O</i> | <i>OL</i> | | | | |
| 11 | 55 | 60 | 45 | <i>L</i> | <i>LB</i> | <i>B</i> | <i>BE</i> | <i>O</i> | <i>OA</i> | <i>A</i> | <i>AL</i> | | | | |
| 12 | 60 | 55 | 50 | <i>D</i> | <i>DC</i> | <i>C</i> | <i>CA</i> | <i>A</i> | <i>AB</i> | <i>B</i> | <i>BE</i> | | | | |
| 13 | 40 | 50 | 55 | <i>E</i> | <i>EA</i> | <i>O</i> | <i>OB</i> | <i>B</i> | <i>BC</i> | <i>C</i> | <i>CD</i> | | | | |
| 14 | 45 | 45 | 60 | <i>K</i> | <i>KA</i> | <i>A</i> | <i>AB</i> | <i>B</i> | <i>BO</i> | <i>O</i> | <i>OD</i> | | | | |
| 15 | 60 | 40 | 30 | <i>L</i> | <i>LB</i> | <i>B</i> | <i>BC</i> | <i>C</i> | <i>CA</i> | <i>A</i> | <i>AD</i> | | | | |
| 16 | 40 | 60 | 35 | <i>D</i> | <i>DC</i> | <i>C</i> | <i>CO</i> | <i>O</i> | <i>OB</i> | <i>B</i> | <i>BE</i> | | | | |
| 17 | 45 | 55 | 40 | <i>O</i> | <i>OL</i> | <i>E</i> | <i>EK</i> | <i>K</i> | <i>KL</i> | <i>L</i> | <i>LC</i> | | | | |
| 18 | 50 | 50 | 45 | <i>A</i> | <i>AD</i> | <i>K</i> | <i>KL</i> | <i>L</i> | <i>LD</i> | <i>D</i> | <i>DO</i> | | | | |
| 19 | 55 | 45 | 50 | <i>B</i> | <i>BE</i> | <i>L</i> | <i>LD</i> | <i>D</i> | <i>DE</i> | <i>E</i> | <i>EA</i> | | | | |
| 20 | 60 | 40 | 55 | <i>C</i> | <i>CD</i> | <i>D</i> | <i>DE</i> | <i>B</i> | <i>BE</i> | <i>K</i> | <i>KB</i> | | | | |
| 21 | 55 | 45 | 60 | <i>O</i> | <i>OL</i> | <i>A</i> | <i>AK</i> | <i>K</i> | <i>KD</i> | <i>L</i> | <i>LC</i> | | | | |
| 22 | 50 | 60 | 55 | <i>A</i> | <i>AB</i> | <i>B</i> | <i>BL</i> | <i>L</i> | <i>LD</i> | <i>D</i> | <i>DA</i> | | | | |
| 23 | 45 | 40 | 50 | <i>B</i> | <i>BC</i> | <i>C</i> | <i>CD</i> | <i>D</i> | <i>DA</i> | <i>E</i> | <i>EA</i> | | | | |
| 24 | 40 | 50 | 45 | <i>C</i> | <i>CO</i> | <i>O</i> | <i>OL</i> | <i>E</i> | <i>EK</i> | <i>K</i> | <i>KB</i> | | | | |
| 25 | 45 | 55 | 40 | <i>O</i> | <i>OD</i> | <i>D</i> | <i>DL</i> | <i>L</i> | <i>LB</i> | <i>B</i> | <i>BE</i> | | | | |
| 26 | 50 | 45 | 35 | <i>A</i> | <i>AE</i> | <i>E</i> | <i>ED</i> | <i>D</i> | <i>DC</i> | <i>B</i> | <i>BE</i> | | | | |
| 27 | 55 | 50 | 30 | <i>B</i> | <i>BK</i> | <i>K</i> | <i>KE</i> | <i>E</i> | <i>EO</i> | <i>D</i> | <i>DA</i> | | | | |
| 28 | 60 | 40 | 35 | <i>C</i> | <i>CL</i> | <i>L</i> | <i>LK</i> | <i>K</i> | <i>KA</i> | <i>A</i> | <i>AD</i> | | | | |
| 29 | 55 | 45 | 40 | <i>O</i> | <i>OB</i> | <i>B</i> | <i>BA</i> | <i>A</i> | <i>AK</i> | <i>K</i> | <i>KC</i> | | | | |
| 30 | 50 | 60 | 45 | <i>A</i> | <i>AC</i> | <i>C</i> | <i>CK</i> | <i>B</i> | <i>BL</i> | <i>L</i> | <i>LD</i> | | | | |

Приклад рашэння задання С-10

Дадзена: паралелепіпед (рыс. 41) з параметрамі: $a=0,6 \text{ м}$, $b=0,5 \text{ м}$, $c=0,4 \text{ м}$; сілы: $F_1=10 \text{ Н}$, $F_2=6 \text{ Н}$, $F_3=8 \text{ Н}$, $F_4=15 \text{ Н}$; пункты, у

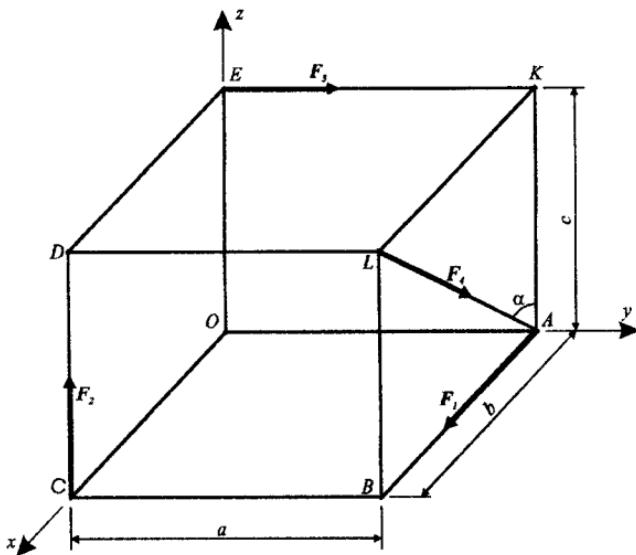
якіх прыкладзены сілы, адпаведна A, C, E, L ; накірункі сіл: AB, CD, EK, LA .

Вызначыць галоўны вектар і галоўны момант сістэмы сіл адносна цэнтра O . Да якога прасцейшага віду прыводзіцца гэтая сістэма?

Рашэнне. Будуем у маштабе па дадзеных памерах паралепіпед. Паказваем сістэму сіл (рыс. 42).

Знойдзем велічыню вугла α .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{c} = 1,25, \quad \alpha = 51,35^\circ.$$



Рыс. 42

Прасторавая адвольная сістэма сіл спрошчваецца з дапамогаю методыкі прывядзення сістэмы сіл да адзінага цэнтра.

Галоўны вектар R' прасторавай адвольнай сістэмы сіл вызначаем па яго праекцыях на восі каардынат.

$$R'_x = \sum_{k=1}^4 F_{kx} = F_1 - F_4 \sin \alpha = 10 - 15 \cdot 0,781 = -1,7 \text{ H};$$

$$R'_y = \sum_{k=1}^4 F_{ky} = F_3 = 8 \text{ H};$$

$$R'_z = \sum_{k=1}^4 F_{kz} = F_2 - F_4 \cos \alpha = 6 - 15 \cdot 0,625 = -3,4 \text{ H}.$$

Модуль галоўнага вектара роўны

$$R' = \sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2 + (R'_z)^2} = \sqrt{2,89 + 64 + 11,56} = 8,9 \text{ H}.$$

Падлічым накіравальныя косінусы галоўнага вектара (косінусы вуглоў паміж галоўнымі вектарамі і дадатнымі на-кірункамі восей каардынат), а па іх значэннях атрымаем адпаведныя вуглы.

$$\cos(\mathbf{R}', i) = \frac{R'_x}{R'} = -\frac{1,7}{8,9} = -0,191, \quad \alpha_1 = 101^\circ;$$

$$\cos(\mathbf{R}', j) = \frac{R'_y}{R'} = \frac{8}{8,9} = 0,899, \quad \beta_1 = 26^\circ;$$

$$\cos(\mathbf{R}', k) = \frac{R'_z}{R'} = -\frac{3,4}{8,9} = -0,382, \quad \gamma_1 = 112,5^\circ.$$

Модуль і накірунак галоўнага моманту просторавай адвольнай сістэмы сіл адносна пачатку каардынат (цэнтра O) падлічым па яго праекцыях на восі каардынат (галоўных момантах сістэмы сіл адносна восей каардынат).

$$M_{ox} = M_x = \sum_{k=1}^4 m_x(\mathbf{F}_k) = -F_3 \cdot c - F_4 \cdot \cos \alpha \cdot a = \\ = -8 \cdot 0,4 - 15 \cdot 0,625 \cdot 0,6 = -8,8 \text{ Нм};$$

$$M_{oy} = M_y = \sum_{k=1}^4 m_y(\mathbf{F}_k) = -F_2 \cdot b = -6 \cdot 0,5 = -3 \text{ Нм}.$$

$$M_{oz} = M_z = \sum_{k=1}^4 m_z(\mathbf{F}_k) = -F_1 \cdot a + F_4 \sin \alpha \cdot a = \\ = -10 \cdot 0,6 + 15 \cdot 0,781 \cdot 0,6 = 1 \text{ Нм}.$$

Модуль галоўнага моманту дадзенай сістэмы сіл адносна цэнтра O роўны

$$M_o = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2} = \sqrt{77,44 + 9 + 1} = 9,35 \text{ Нм.}$$

Падлічым накіравальныя косінусы вектара \mathbf{M}_o , а па іх значэннях атрымаем вуглы, якія ўтварае вектар \mathbf{M}_o з дадатнымі наకірункамі восей каардынат.

$$\cos(\mathbf{M}_o, i) = \frac{M_{ox}}{M_o} = -\frac{8,8}{9,35} = -0,941, \quad \alpha_2 = 160,3^\circ;$$

$$\cos(\mathbf{M}_o, j) = \frac{M_{oy}}{M_o} = -\frac{3}{9,35} = -0,321, \quad \beta_2 = 108,7^\circ;$$

$$\cos(\mathbf{M}_o, k) = \frac{M_{oz}}{M_o} = \frac{1}{9,35} = 0,107, \quad \gamma_2 = 83,9^\circ.$$

Такім чынам, дадзеную прасторавую адвольную сістэму сіл можна замяніць эквівалентнаю сістэмай ў выглядзе галоўнага вектара \mathbf{R}' і галоўнага моманту \mathbf{M}_o , прыкладзеных у цэнтры прывядзення O і накіраваных згодна вызначаным вуглам.

Для канчатковага магчымага спрошчвання атрыманай сістэмы неабходна вызначыць вугал паміж вектарамі \mathbf{R}' і \mathbf{M}_o .

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \cos(\mathbf{R}', \mathbf{M}_o) = \frac{R'_x \cdot M_x + R'_y \cdot M_y + R'_z \cdot M_z}{R' \cdot M_o} = \\ &= \frac{1,7 \cdot 8,8 - 8 \cdot 3 - 3,4 \cdot 1}{8,9 \cdot 9,35} = -0,149. \end{aligned}$$

Тады $\phi = 98,6^\circ$.

У гэтым выпадку ($\phi \neq 90^\circ$) сістэма сіл прыводзіцца да дынамічнай (сілавой) шрубы ў выглядзе галоўнага вектара \mathbf{R}' і нақіраванага ўздоўж яго найменшага з магчымых для розных цэнтраў прывядзення галоўнага моманту \mathbf{M}'_o . У дадзеным прыкладзе вектар \mathbf{M}'_o будзе нақіраваны ў адваротны бок вектару $\mathbf{R}' (\phi > 90^\circ)$.

Велічыня вектара M'_o вызначаецца як праекцыя M_o на лінію дзеяння вектара R' .

$$M'_o = M_o \cdot \cos(180^\circ - \varphi) = 9,35 \cdot 0,149 = 1,4 \text{ Нм.}$$

Вось, уздоўж якой накіраваны вектары, што ўтвараюць дынамічную шрубу, знаходзіцца ад цэнтра O на адлегласці

$$h = \frac{M_o \sin \varphi}{R'} = \frac{9,35 \cdot 0,989}{8,9} = 1,04 \text{ м.}$$

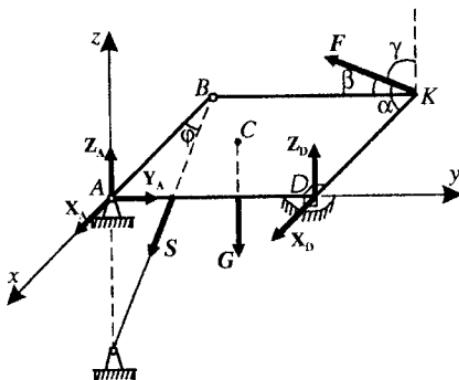
Заданне С-11

Вызначэнне рэакцый сувязей, накладзеных на цвёрдае цела

Механічныя сістэмы, паказаныя на рис. 44–46, знаходзяцца ў раўнавазе пад уздзеяннем прыкладзеных да іх сіл. Выбраць аб'ект раўнавагі (цвёрдае цела) і вызначыць рэакцыі накладзеных на яго сувязей. Неабходныя даныя па кожнаму рисунку прыведзены ў табл. 7.

Прыклад решэння задання С-11

Вызначыць рэакцыі сувязей, накладзеных на аднародную гарызантальную прамавугольную пласціну (рис. 43). $AB=0,4$ м, $AD=0,6$ м, $G=50$ Н, $F=100$ Н, $\alpha=60^\circ$, $\beta=70^\circ$, $\varphi=50^\circ$.



Рыс. 43

Р а ш э н н е . Разглядаем раўнавагу пласціны $ABKD$. На яе на-кладзены трох сувязі: у пункце A – нерухомы сферычны шарнір, у пункце D – пятля (нерухомы ціліндрычны шарнір), у пункце B – бязважкі стрыжань.

Табліца 7

| Ва- ры- янт | Даныя аднаведных варыянтаў |
|-------------------|---|
| 1 | $P=200 \text{ H}, \alpha=35^\circ$ |
| 2 | $Q=120 \text{ H}, P=300 \text{ H}, \beta=30^\circ, AM=AB=0,5 \text{ м}, BK=0,2 \text{ м}, EM=KD=0,3 \text{ м}, CM=0,2 \text{ м}$ |
| 3 | $F=40 \text{ H}, \alpha=130^\circ, AD=0,7 \text{ м}, DC=1,0 \text{ м}, CB=0,8 \text{ м}, KC=0,5 \text{ м}$ |
| 4 | $F_1=80 \text{ H}, F_2=60 \text{ H}, M=50 \text{ Нм}, CB=0,6 \text{ м}, AB=0,4 \text{ м}, AO=0,5 \text{ м}$ |
| 5 | $P=20 \text{ H}, \alpha=40^\circ, \beta=50^\circ$ |
| 6 | $M=80 \text{ Нм}, \alpha=50^\circ, AC=0,4 \text{ м}, CK=0,5 \text{ м}, KB=0,6 \text{ м}, EK=0,2 \text{ м}$ |
| 7 | $P=30 \text{ H}, \alpha=40^\circ, \beta=45^\circ$ |
| 8 | $M=90 \text{ Нм}, \alpha=70^\circ, AC=0,3 \text{ м}, NK=0,2 \text{ м}, CN=0,6 \text{ м}, NB=0,3 \text{ м}$ |
| 9 | $P=50 \text{ H}, \alpha=20^\circ, \beta=40^\circ$ |
| 10 | $F=30 \text{ H}, \alpha=40^\circ, AN=0,3 \text{ м}, ND=0,4 \text{ м}, CD=0,2 \text{ м}, DB=0,4 \text{ м}$ |
| 11 | $OA=0,4 \text{ м}, AB=0,6 \text{ м}, BC=0,8 \text{ м}, M_1=50 \text{ Нм}, M_2=30 \text{ Нм}, \alpha=60^\circ$ |
| 12 | $AN=0,5 \text{ м}, NK=0,7 \text{ м}, KB=0,6 \text{ м}, DK=0,2 \text{ м}, M=40 \text{ Нм}, \alpha=60^\circ, \beta=70^\circ$ |
| 13 | $AC=0,4 \text{ м}, CD=0,5 \text{ м}, DB=0,3 \text{ м}, NC=0,2 \text{ м}, F=80 \text{ H}, \alpha=60^\circ, \beta=40^\circ$ |
| 14 | $AD=0,8 \text{ м}, ND=0,3 \text{ м}, DB=0,1 \text{ м}, BM=0,3 \text{ м}, MK=0,5 \text{ м}, F=70 \text{ H}, \alpha=60^\circ$ |
| 15 | $F_1=F_2=F_3=50 \text{ H}, M_1=M_2=60 \text{ Нм}, \alpha=20^\circ, \beta=40^\circ, \varphi=30^\circ, OA=0,8 \text{ м}, AB=BD=0,5 \text{ м}$ |
| 16 | $AB=0,9 \text{ м}, BD=0,4 \text{ м}, P=80 \text{ H}, \alpha=70^\circ, \beta=50^\circ$ |
| 17 | $OA=0,4 \text{ м}, AB=0,6 \text{ м}, AD=0,45, G=125 \text{ H}, \varphi=25^\circ$ |
| 18 | $AK=0,3 \text{ м}, AC=0,4 \text{ м}, CB=0,5 \text{ м}, R=0,2 \text{ м}, \alpha=60^\circ, \beta=50^\circ, \varphi=40^\circ, P=80 \text{ H}$ |
| 19 | $OA=AD=1,2 \text{ м}, AB=AC=0,3 \text{ м}, F_1=F_3=50 \text{ H}, M=40 \text{ Нм}, \alpha=25^\circ, \varphi=40^\circ, \beta=50^\circ$ |
| 20 | $OA=0,4 \text{ м}, OB=0,6 \text{ м}, F=200 \text{ H}, M=80 \text{ Нм}, \beta=35^\circ, \varphi=30^\circ,$ |
| 21 | $AC=0,6 \text{ м}, CD=0,5 \text{ м}, DB=0,3 \text{ м}, T_1=2t_1=50 \text{ H}, T_2=2t_2, R=2r=0,2 \text{ м}, \alpha=50^\circ$ |
| 22 | $F=50 \text{ H}, P=60 \text{ H}, \beta=60^\circ, \varphi=70^\circ, \alpha=50^\circ, \delta=60^\circ$ |
| 23 | $AB=0,7 \text{ м}, BD=0,4 \text{ м}, P=60 \text{ H}, F=45 \text{ H}, \alpha=60^\circ, \delta=50^\circ, \varphi=30^\circ$ |
| 24 | $AB=0,8 \text{ м}, BK=0,3 \text{ м}, P=50 \text{ H}, F=90 \text{ H}, \alpha=50^\circ, \beta=60^\circ, \varphi=55^\circ$ |
| 25 | $AB=0,6 \text{ м}, BC=0,4 \text{ м}, M_1=40 \text{ Нм}, M_2=30 \text{ Нм}, M_3=20 \text{ Нм}, F=70 \text{ H}, \alpha=25^\circ$ |
| 26 | $OA=0,7 \text{ м}, AB=0,3 \text{ м}, \alpha=20^\circ, \beta=60^\circ, F=60 \text{ H}, P=90 \text{ H}, \varphi=35^\circ$ |
| 27 | $OA=0,8 \text{ м}, OB=0,4 \text{ м}, P=80 \text{ H}, F=70 \text{ H}, \alpha=20^\circ, \gamma=35^\circ$ |
| 28 | $OA=0,7 \text{ м}, AB=0,5 \text{ м}, KD=0,2 \text{ м}, P=60 \text{ H}, F=40 \text{ H}, \alpha=30^\circ, \varphi=20^\circ$ |
| 29 | $OA=0,6 \text{ м}, OB=0,5 \text{ м}, \varphi=45^\circ, G=120 \text{ H}, M=40 \text{ Нм}$ |
| 30 | $OA=0,8 \text{ м}, OB=0,4 \text{ м}, G=100 \text{ H}, \alpha=30^\circ, \varphi=70^\circ$ |

Вызвалем пласціну ад сувязей і замест іх паказваем рэакцыі сувязей: у пункце A — трох складовыя рэакцыі X_A, Y_A, Z_A , у пункце D — дзве складовыя рэакцыі X_D, Z_D , у пункце B — рэакцыю S . Атрымалі просторавую адвольную сістэму сіл, якая знаходзіцца ў раўнавазе. Запісваєм умовы і ўраўненні раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad X_A + X_D + S \cos \varphi + F \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad Y_A - F \cos \beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0 \quad Z_A + Z_D - S \sin \varphi - G + F \cos \gamma = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_x(\mathbf{F}_k) = 0 \quad Z_D \cdot AD - G \cdot 0,5AD + F \cos \gamma \cdot AD = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_y(\mathbf{F}_k) = 0 \quad F \cos \gamma \cdot DK - G \cdot 0,5 \cdot DK - S \sin \varphi \cdot DK = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_z(\mathbf{F}_k) = 0 \quad -X_D \cdot AD + F \cos \beta \cdot AB - F \cos \alpha \cdot AD = 0.$$

Для вызначэння $\cos \gamma$ карыстаецца роўнасцю

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \text{ адкуль } \cos \gamma = 0,796.$$

Падлічым значэнні невядомых рэакцый сувязей.

$$X_D = F \cos \beta \cdot \frac{AB}{AD} - F \cos \alpha = 100 \left(\cos 70^\circ \cdot \frac{0,4}{0,6} - \cos 60^\circ \right) = \\ = 100(0,342 \cdot 0,667 - 0,5) = -27,2 \text{ H};$$

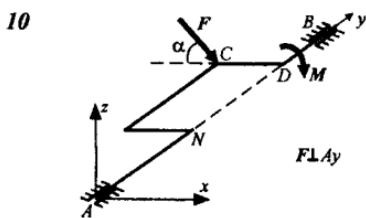
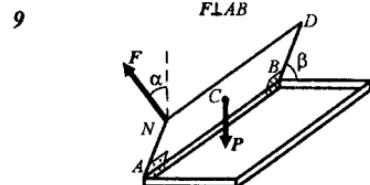
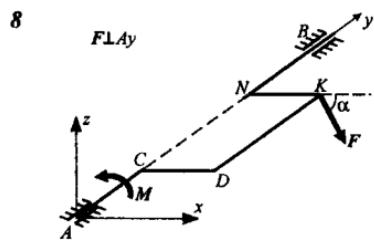
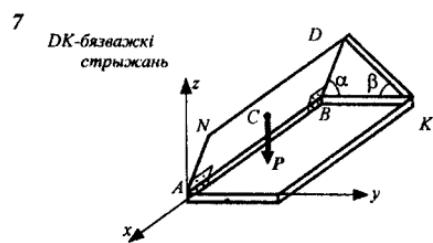
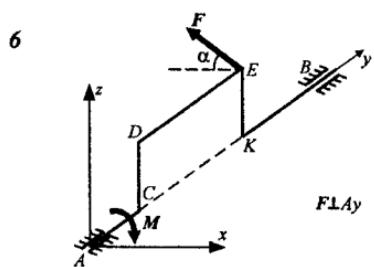
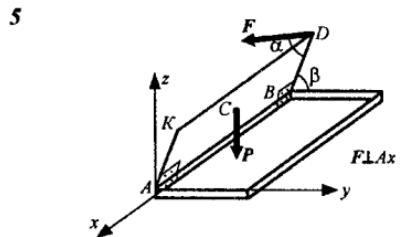
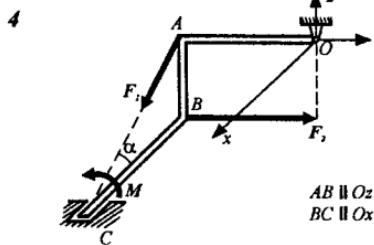
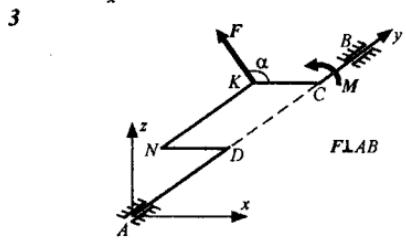
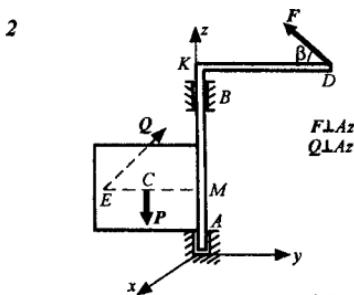
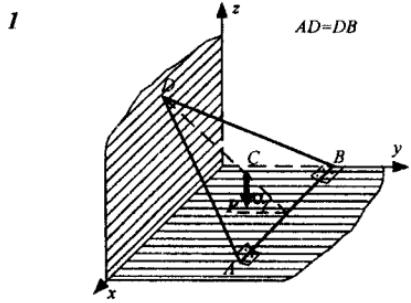
$$S = \frac{F \cos \gamma - 0,5G}{\sin \varphi} = \frac{100 \cdot 0,796 - 0,5 \cdot 50}{0,766} = 71,3 \text{ H};$$

$$Z_D = 0,5G - F \cos \gamma = 0,5 \cdot 50 - 100 \cdot 0,796 = -54,6 \text{ H}.$$

$$Z_A = -Z_D + S \sin \varphi + G - F \cos \gamma = 54,6 + 71,3 \cdot 0,766 + \\ + 50 - 100 \cdot 0,796 = 79,6 \text{ H};$$

$$Y_A = F \cos \beta = 100 \cdot 0,342 = 34,2 \text{ H};$$

$$X_A = -X_D - S \cos \varphi - F \cos \alpha = 27,2 - 71,3 \cdot 0,643 - 100 \cdot 0,5 = -68,6 \text{ H}.$$



Рыс. 44

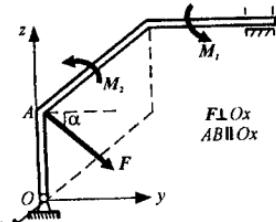
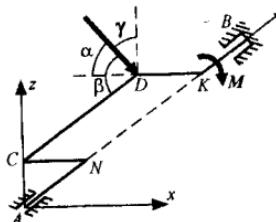
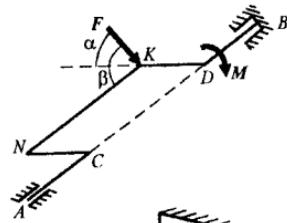
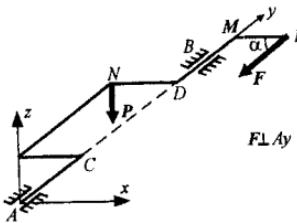
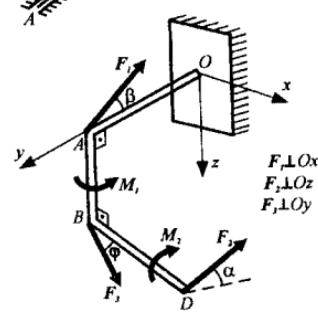
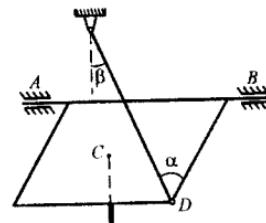
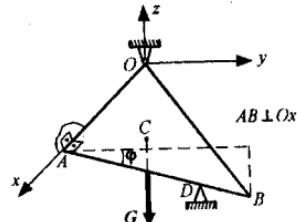
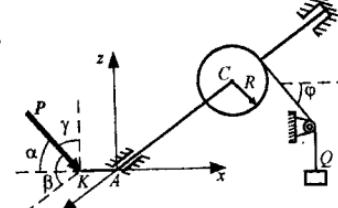
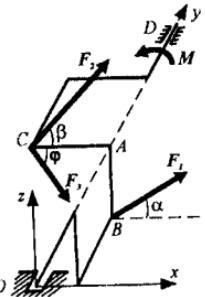
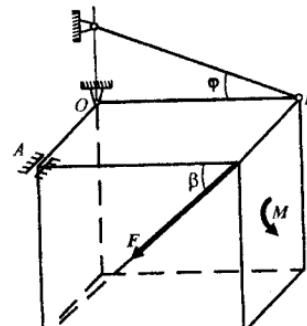
- 11** 
 $F \perp Ox$
 $AB \parallel Ox$
- 12** 
 α
 β
 γ
- 13** 
 α
 β
 N
 C
- 14** 
 $F \perp Ay$
- 15** 
 $F_1 \perp Ox$
 $F_2 \perp Oz$
 $F_3 \perp Oy$
- 16** 
- 17** 
 $AB \perp Ox$
- 18** 
 P
 α
 β
 γ
 R
 Q
- 19** 
 α
 β
 φ
- 20** 

Рис. 45

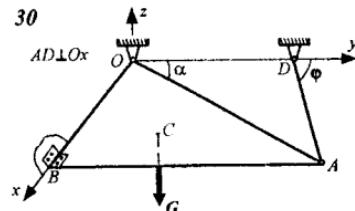
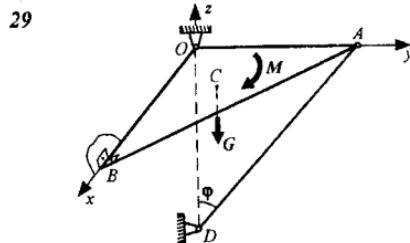
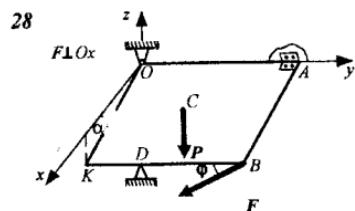
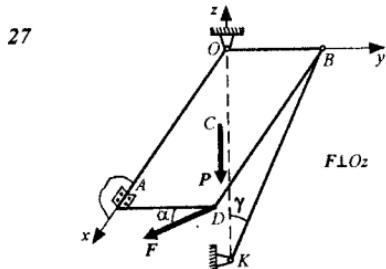
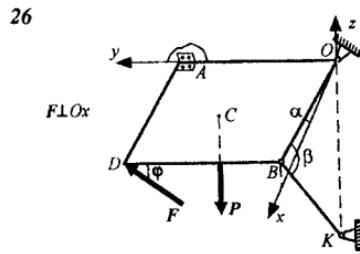
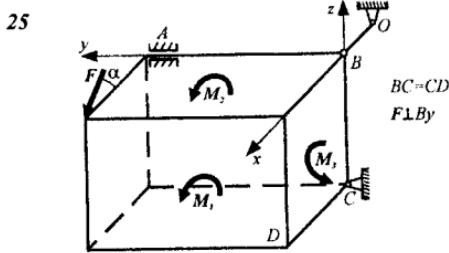
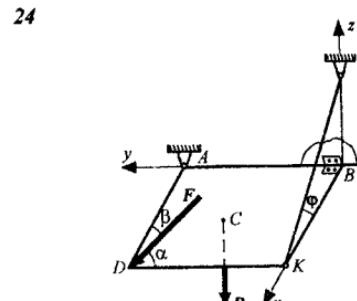
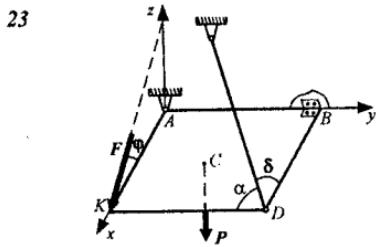
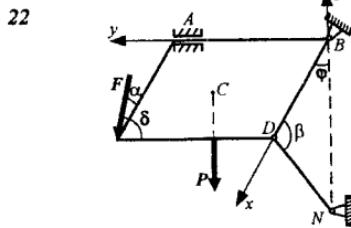
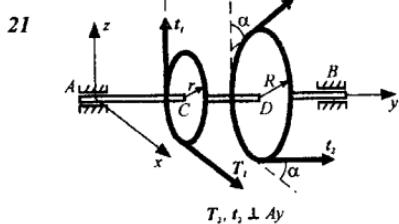


Рис. 46

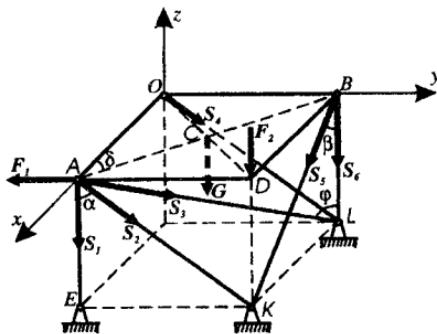
Заданне С-12

*Вызначэнне рэакцыі бязважкіх стрыжняў,
якія падтрымліваюць прамавугольную пліту*

Вызначыць рэакцыі бязважкіх стрыжняў, якія падтрымліваюць тонкую аднародную гарызантальную пліту, вага якой G , пры ўздзеянні на яе сіл F_1 і F_2 (рыс. 48–50). Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 8.

Прыклад разшэння задання С-12

Тонкая аднародная прамавугольная гарызантальная пліта, вага якой 200 Н, падтрымліваецца ў раўнавазе шасцю бязважкімі стрыжнямі (рыс. 47). На пліце дзейнічаюць сілы: $F_1=100$ Н, $F_2=150$ Н. Вызначыць рэакцыі стрыжняў, калі $\alpha=50^\circ$, $\beta=40^\circ$.



Рыс. 47

Рашэнне. Разгледзім раўнавагу пліты $AOBD$. На яе накладзены шэсць сувязей у выглядзе бязважкіх стрыжняў.

Табліца 8

| Варыант | $G, \text{Н}$ | $F_1, \text{Н}$ | $F_2, \text{Н}$ | $\alpha, \text{град}$ | $\beta, \text{град}$ |
|---------|---------------|-----------------|-----------------|-----------------------|----------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 150 | 100 | 120 | 30 | 65 |
| 2 | 160 | 110 | 140 | 32 | 63 |
| 3 | 170 | 120 | 160 | 35 | 60 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|----|-----|-----|-----|----|----|
| 4 | 180 | 130 | 150 | 37 | 58 |
| 5 | 190 | 140 | 130 | 40 | 55 |
| 6 | 200 | 150 | 170 | 42 | 53 |
| 7 | 210 | 160 | 180 | 45 | 50 |
| 8 | 220 | 170 | 190 | 48 | 47 |
| 9 | 150 | 180 | 110 | 50 | 45 |
| 10 | 160 | 190 | 120 | 52 | 43 |
| 11 | 170 | 100 | 130 | 55 | 40 |
| 12 | 180 | 110 | 140 | 58 | 37 |
| 13 | 190 | 120 | 150 | 60 | 35 |
| 14 | 200 | 130 | 160 | 62 | 33 |
| 15 | 210 | 140 | 170 | 65 | 30 |
| 16 | 220 | 150 | 180 | 30 | 50 |
| 17 | 150 | 160 | 110 | 32 | 47 |
| 18 | 160 | 170 | 120 | 35 | 45 |
| 19 | 170 | 180 | 130 | 37 | 52 |
| 20 | 180 | 190 | 140 | 40 | 55 |
| 21 | 190 | 100 | 150 | 43 | 58 |
| 22 | 200 | 110 | 160 | 45 | 60 |
| 23 | 210 | 120 | 170 | 50 | 62 |
| 24 | 220 | 130 | 180 | 53 | 65 |
| 25 | 150 | 140 | 110 | 55 | 42 |
| 26 | 160 | 150 | 120 | 57 | 40 |
| 27 | 170 | 160 | 140 | 60 | 38 |
| 28 | 180 | 170 | 130 | 63 | 35 |
| 29 | 190 | 180 | 150 | 65 | 30 |
| 30 | 200 | 190 | 160 | 67 | 33 |

Прымянем прынцып вызвалення ад сувязей і паказваем прыкладзеныя ў пунктах пліты A , O і B рэакцыі сувязей — рэакцыі стрыжняў, накіраваныя ад пліты ўздоўж іх. Тым самым уяўляем, што ўсе стрыжні расцягнутыя. Акрамя невядомых рэакцый сувязей, на пліту дзеянічаюць трох вядомыя сілы: сіла цяжару G , да-дзеныя сілы F_1 і F_2 . Бачым, што да пліты прыкладзена ўраўнаважаная прасторавая адвольная сістэма сіл. Запісваем згодна з умовамі раўнавагі для атрыманай сістэмы сіл шэсць ураўненняў раўнавагі.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad -S_3 \sin \varphi \cdot \cos \delta + S_5 \sin \beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad S_2 \sin \alpha + S_3 \sin \varphi \cdot \sin \delta + S_4 \sin \alpha - F_1 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0 \quad -S_1 - S_2 \cos \alpha - S_3 \cos \varphi - S_4 \cos \alpha -$$

$$-S_5 \cos \beta - S_6 - G - F_2 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_x(\mathbf{F}_k) = 0 \quad -S_5 \cos \beta \cdot OB - S_6 \cdot OB - F_2 \cdot OB - G \cdot 0,5 \cdot OB = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_y(\mathbf{F}_k) = 0 \quad S_1 \cdot AO + S_2 \cos \alpha \cdot AO + S_3 \cos \varphi \cdot AO +$$

$$+ F_2 \cdot AO + G \cdot 0,5 \cdot AO = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_z(\mathbf{F}_k) = 0 \quad S_2 \sin \alpha \cdot AO + S_3 \sin \varphi \cdot \sin \delta \cdot AO -$$

$$- S_5 \sin \beta \cdot OB - F_1 \cdot AO = 0.$$

Праз вядомыя вуглы α і β падлічым сінусы і косінусы вуглоў φ і δ , а таксама знайдзем суадносіны паміж AO і OB .

$$AE = DK = BL, EK = AD = OB = AE \cdot \operatorname{tg} \alpha, KL = BD = AO = BL \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Тады ў трохвугольніку AOB

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{OB}{AO} = \frac{AE \cdot \operatorname{tg} \alpha}{BL \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} 50^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ} = \frac{1,192}{0,839} = 1,421.$$

$$\delta = 54,86^\circ, \sin \delta = 0,818, \cos \delta = 0,576.$$

$$AB = \frac{AO}{\cos \delta} = \frac{BL \cdot \operatorname{tg} \beta}{\cos \delta} = BL \frac{0,839}{0,576} = 1,457 \cdot BL.$$

Цяпер з трохвугольніка ABL

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AB}{BL} = \frac{1,457 \cdot BL}{BL} = 1,457.$$

$$\varphi = 55,53^\circ, \sin \varphi = 0,824, \cos \varphi = 0,566.$$

$$OB = AO \cdot \operatorname{tg} \delta = AO \cdot 1,421.$$

Падстаўляем усе вядомыя і падлічаныя значэнні велічынь у шэсць ураўненняў раўнавагі.

$$-S_3 \cdot 0,824 \cdot 0,576 + S_5 \cdot 0,643 = 0; \tag{1}$$

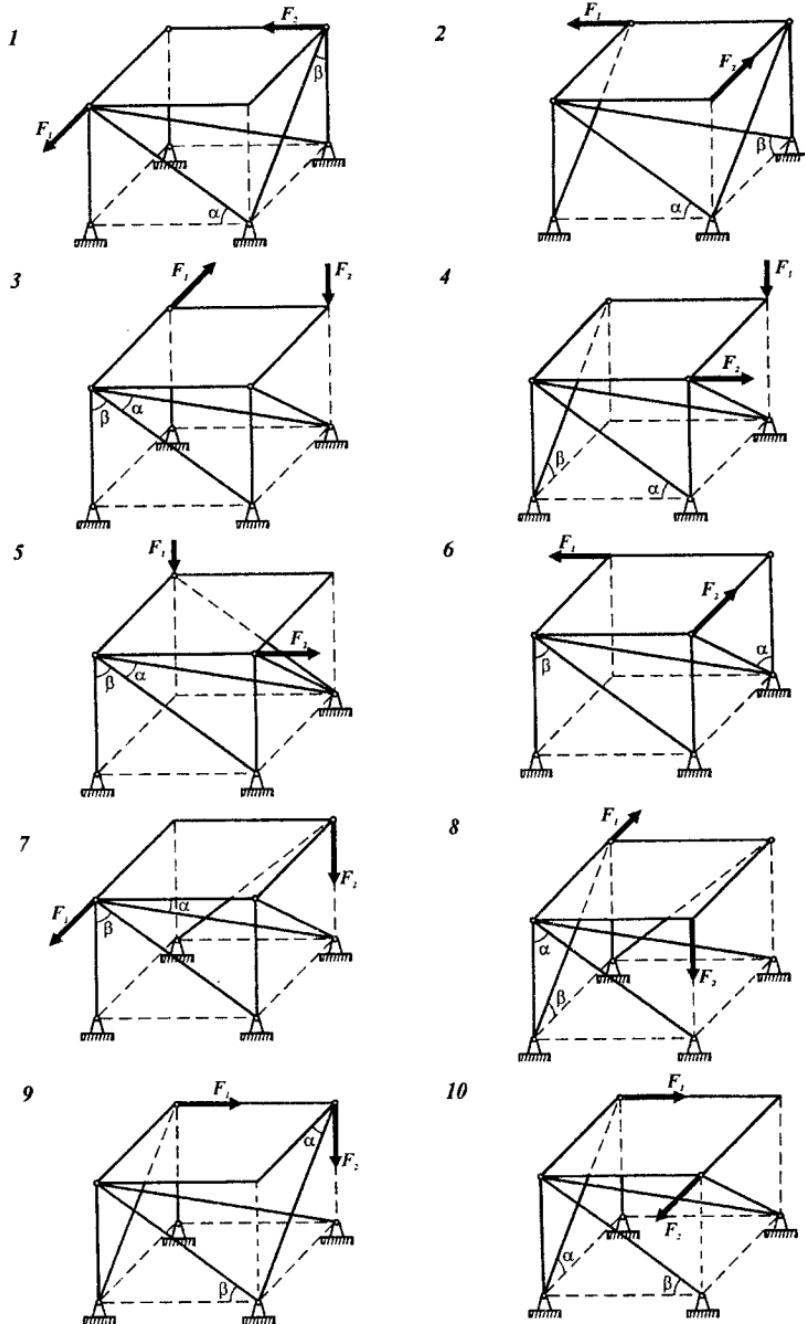


Рис. 48

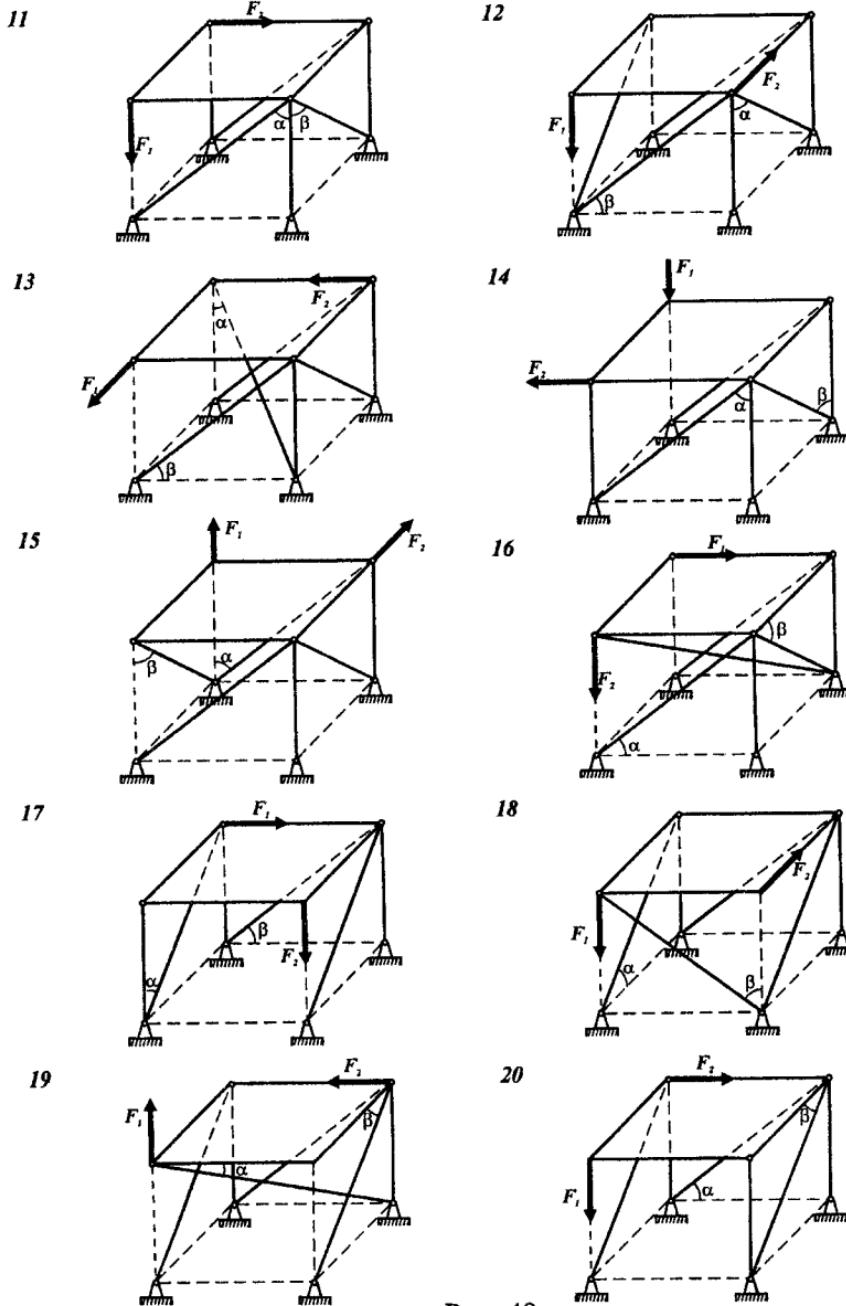
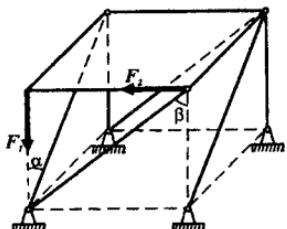
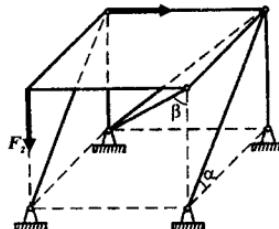


Рис. 49

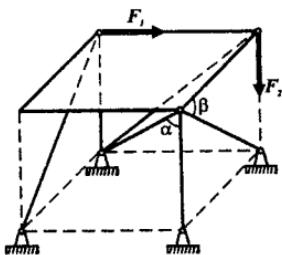
21



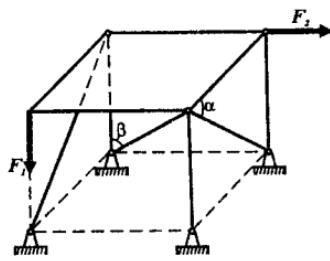
22



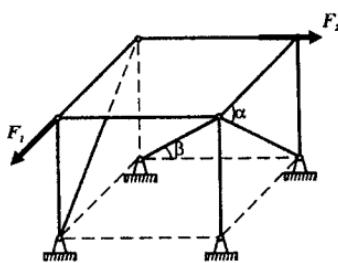
23



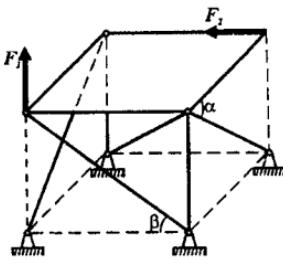
24



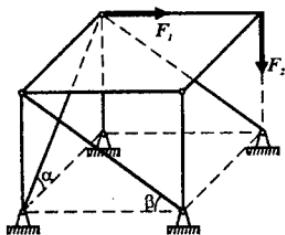
25



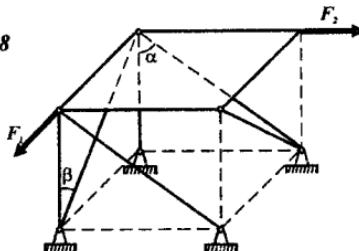
26



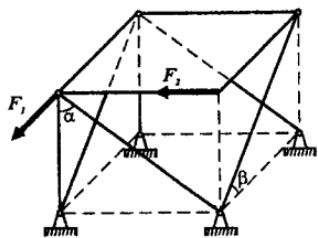
27



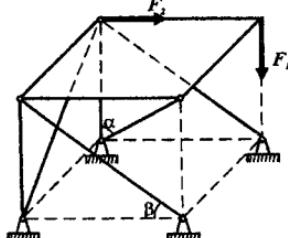
28



29



30



Рыс. 50

$$S_2 \cdot 0,766 + S_3 \cdot 0,824 \cdot 0,818 + S_4 \cdot 0,766 - 100 = 0; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} -S_1 - S_2 \cdot 0,643 - S_3 \cdot 0,566 - S_4 \cdot 0,643 - S_5 \cdot 0,766 - \\ - S_6 - 200 - 150 = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$-S_5 \cdot 0,766 - S_6 - 150 - 200 \cdot 0,5 = 0; \quad (4)$$

$$S_1 + S_2 \cdot 0,643 + S_3 \cdot 0,566 + 150 + 200 \cdot 0,5 = 0; \quad (5)$$

$$S_2 \cdot 0,766 + S_3 \cdot 0,824 \cdot 0,818 - S_5 \cdot 0,643 \cdot 1,421 - 100 = 0. \quad (6)$$

З ураўнення (1):

$$S_5 = 0,738S_3.$$

З ураўнення (4):

$$S_6 = -0,565S_3 - 250.$$

З ураўнення (6):

$$S_2 = \frac{1}{0,766} (100 + S_3 \cdot 0,674 - S_3 \cdot 0,674) = 130,5 \text{ H}.$$

З ураўнення (2):

$$S_3 = \frac{1}{0,674} (-100 - S_4 \cdot 0,766 + 100) = -1,136S_4.$$

З ураўнення (5):

$$S_1 = -0,643S_2 + 0,643S_4 - 250 = -333,9 + 0,643S_4.$$

Тады

$$S_5 = -0,738 \cdot 1,136S_4 = -0,838S_4;$$

$$S_6 = 0,565 \cdot 1,136S_4 - 250 = 0,642S_4 - 250.$$

Знайдзеныя выразы для S_1, S_2, S_3, S_5, S_6 падставім ва ўраўненне (3) і знайдзем S_4 .

$$333,9 - 0,643S_4 - 83,9 + 0,643 \cdot S_4 - 0,643 \cdot S_4 +$$

$$+ 0,642 \cdot S_4 - 0,642 \cdot S_4 + 250 - 350 = 0,$$

$$S_4 = 233,3 \text{ H}.$$

Цяпер лёгка атрымаць астатнія значэнні рэакцый сувязей.

$$S_3 = -265 \text{ Н}, S_1 = -183,9 \text{ Н}, S_5 = -195,5 \text{ Н}, S_6 = -100,2 \text{ Н}.$$

$$\text{А раней атрымалі } S_2 = 130,5 \text{ Н.}$$

З адказаў відаць, што з шасці стрыжняў у расцягнутым стане знаходзяцца толькі стрыжні 2 і 4.

3. Цэнтр цяжару

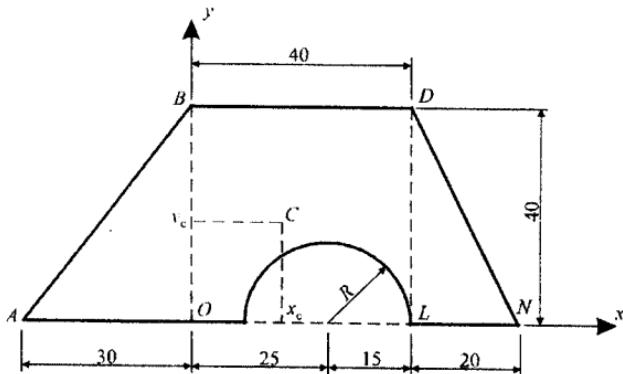
Заданне С-13

Вызначэнне месца знаходжання цэнтра цяжару плоскага цела

Вызначыць каардынаты цэнтра цяжару тонкай аднароднай пласціны (рыс. 52—54). Неабходныя дадзеныя прыведзены ў табл. 9 (памеры ў см.).

Прыклад разшэння задання С-13

Вызначыць каардынаты цэнтра цяжару тонкай аднароднай пласціны, якая паказана на рыс. 51 (памеры ў см.).



Рыс. 51

Рашэнне. Пласціну $ABDN$ дзелім на часткі, для якіх вядомы месца знаходжанні цэнтраў цяжару. У дадзеным выпадку гэта

будуць трохвугольнікі ABO і DLN , прамавугольник $OBDL$ і палова круга. Карыстаючыся метадам адмоўных плошчаў, таму плошчу паловы круга, які выразаны з прамавугольніка, лічым адмоўнаю.

Табліца 9

| Варыянт | OA | AB | BB_1 | BC | CD | R | OE | DN | CC_1 |
|---------|------|------|--------|------|------|-----|------|------|--------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 30 | 20 | 10 | 25 | 20 | 24 | | 6 | |
| 2 | 30 | 40 | | | 15 | 10 | 45 | | |
| 3 | 29 | 25 | | | 25 | 14 | 21 | 20 | |
| 4 | 29 | 30 | | 25 | 9 | 14 | 25 | 29 | 20 |
| 5 | 28 | 30 | 15 | 20 | 14 | 10 | | 28 | |
| 6 | 28 | 40 | 10 | 26 | 28 | 15 | 21 | | |
| 7 | 30 | 26 | | | 10 | 13 | 66 | 27 | 20 |
| 8 | 13 | | | | 17 | 17 | 65 | | 30 |
| 9 | 7 | 65 | | 27 | 32 | 23 | | 42 | |
| 10 | 30 | 16 | 10 | | 19 | 12 | 65 | 15 | |
| 11 | 16 | | | | 50 | | 14 | 48 | |
| 12 | 30 | 22 | | | 24 | | 18 | 64 | |
| 13 | | | 8 | 47 | 8 | 20 | 45 | | |
| 14 | | 33 | 13 | | 65 | 17 | | 13 | |
| 15 | 18 | 21 | | | 11 | 18 | 47 | | |
| 16 | | 17 | | | 15 | 13 | | 52 | 25 |
| 17 | 49 | 13 | | | 49 | 17 | 17 | | |
| 18 | 30 | 38 | 14 | | | 16 | 65 | | |
| 19 | | 47 | | | 11 | 19 | 11 | | 22 |
| 20 | | | 26 | 15 | 48 | 16 | 14 | | |
| 21 | 30 | 40 | 19 | 17 | | 12 | 53 | 18 | 30 |
| 22 | 29 | 42 | 11 | 18 | | 17 | 65 | | 20 |
| 23 | 30 | 50 | 15 | 18 | | 20 | 64 | | 25 |
| 24 | 65 | 22 | 6 | 29 | | 16 | 30 | 49 | 15 |
| 25 | 64 | 22 | 10 | 25 | | 17 | 13 | 47 | 13 |
| 26 | 30 | 18 | 35 | 16 | 14 | 15 | 50 | | 15 |
| 27 | 30 | 21 | | 24 | 19 | 13 | | 21 | |
| 28 | 23 | 42 | | 22 | 7 | 14 | | 56 | |
| 29 | 22 | 25 | | 18 | 22 | 11 | | | |
| 30 | 14 | 6 | | 50 | 25 | 13 | 34 | 20 | |

Вага кожнай часткі аднароднай пласціны прапарцыянальна яе плошчы. Таму каардынаты цэнтра цяжару такой пласціны ў выбранай сістэме каардынат Oxy вызначаем па формулах, якія ўтрымліваюць не вагу частак пласціны і агульную вагу, а плошчы A_k і агульную плошчу A .

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n A_k x_k}{A}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n A_k y_k}{A}.$$

Падлічым плошчу кожнай выбранай часткі пласціны.
Плошча трохвугольніка ABO

$$A_1 = \frac{30 \cdot 40}{2} = 600 \text{ см}^2.$$

Плошча прамавугольніка $OBDL$

$$A_2 = 40 \cdot 40 = 1600 \text{ см}^2.$$

Плошча трохвугольніка DLN

$$A_3 = \frac{40 \cdot 20}{2} = 400 \text{ см}^2.$$

Плошча паловы круга радыуса $R=15$ см

$$A_4 = -\frac{\pi R^2}{2} = -\frac{3,14 \cdot 15^2}{2} = -353,25 \text{ см}^2.$$

Плошча пласціны

$$A = 600 + 1600 + 400 - 353,25 = 2246,75 \text{ см}^2.$$

Падлічым каардынаты цэнтраў цяжару кожнай часткі пласціны.

$$x_1 = -\frac{AO}{3} = -\frac{30}{3} = -10 \text{ см}; \quad y_1 = \frac{OB}{3} = \frac{40}{3} = 13,3 \text{ см}$$

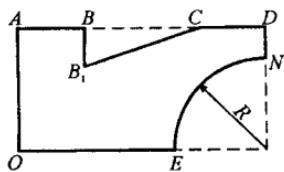
$$x_2 = \frac{OL}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ см}, \quad y_2 = \frac{OB}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ см}.$$

$$x_3 = OL + \frac{LN}{3} = 40 + \frac{20}{3} = 46,7 \text{ см}, \quad y_3 = \frac{LC}{3} = \frac{40}{3} = 13,3 \text{ см}.$$

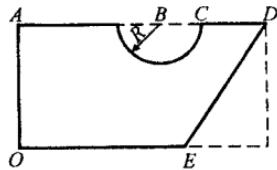
$$x_4 = 25 \text{ см}, \quad y_4 = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi} = \frac{4 \cdot 15}{3 \cdot 3,14} = 6,4 \text{ см}.$$

Цяпер маем магчымасць вызначыць каардынаты цэнтра цяжару пласціны.

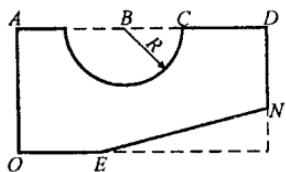
1



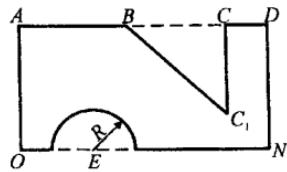
2



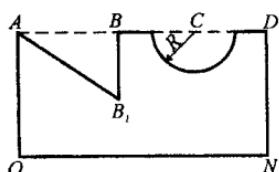
3



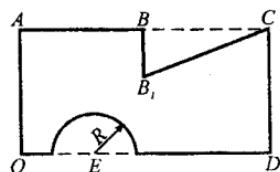
4



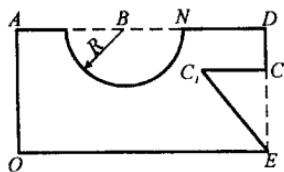
5



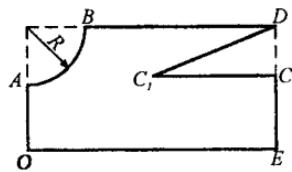
6



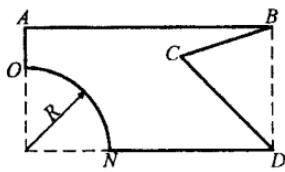
7



8



9



10

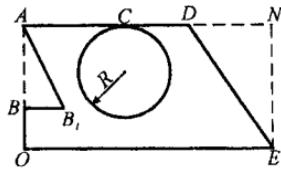
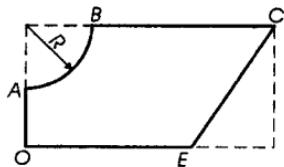
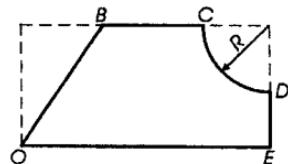


Рис. 52

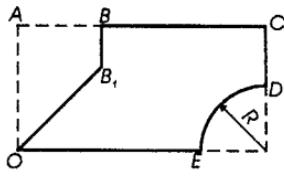
11



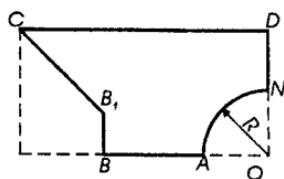
12



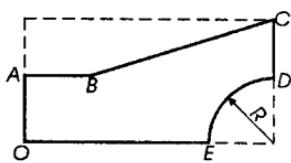
13



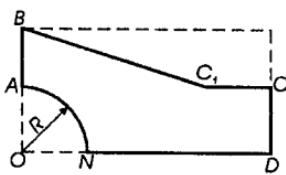
14



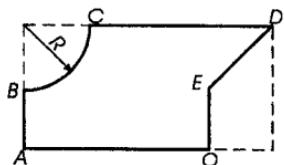
15



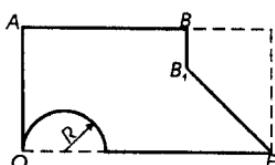
16



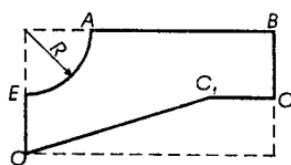
17



18



19



20

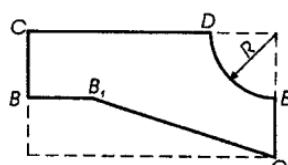


Рис. 53

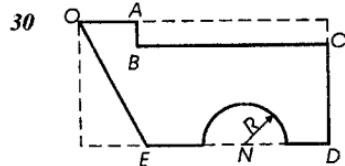
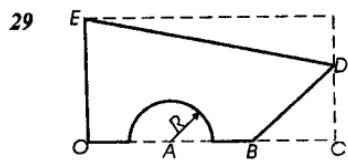
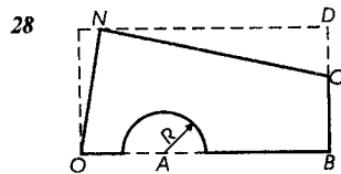
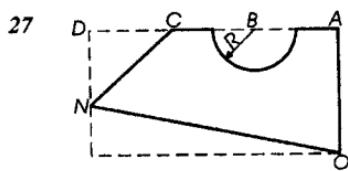
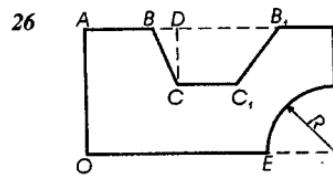
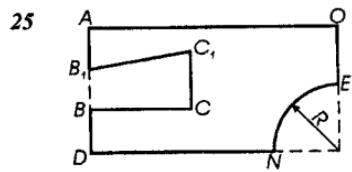
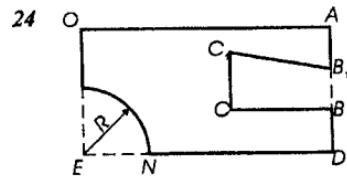
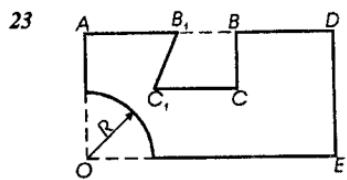
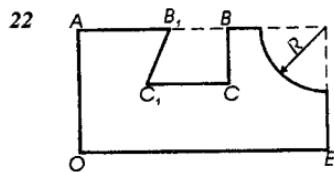
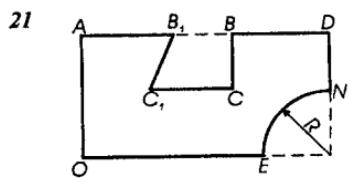


Рис. 54

$$x_C = \frac{600 \cdot (-10) + 1600 \cdot 20 + 400 \cdot 46,7 - 353,25 \cdot 25}{2246,75} =$$

$$= \frac{-6000 + 32000 + 18680 - 8831,25}{2246,75} = 16 \text{ см.}$$

$$y_C = \frac{600 \cdot 13,3 + 1600 \cdot 20 + 400 \cdot 13,3 - 353,25 \cdot 6,4}{2246,75} =$$

$$= \frac{7980 + 32000 + 5320 - 2260,8}{2246,75} = 19 \text{ см.}$$

На рыс. 51 паказваю згодна атрыманых каардынат месца занходжанне цэнтра цяжару C .

1. Кінематыка пункта

Заданне К-1

*Вызначэнне траекторыі, скорасці і паскарэння
пункта па вядомых ураўненнях яго руху*

Па ўраўненнях руху пункта $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ атрымаць ураўненне яго траекторыі; вызначыць скорасць, тангенцыяльнае і нармальнае паскарэнні пункта, радыус кривізны траекторыі ў момант часу t . Паказаць на рысунку траекторыю пункта, вектары скорасці і паскарэння ў момант t . Вызначыць характар руху пункта па траекторыі. Неабходныя даныя змешчаны ў табл. 10 (каардынаты – у м, час – у с).

Прыклад разшэння задання К-1

Дадзена: $x = 2t^2 + 3t - \ln|t+1|$ (м);

$y = 4t - 3$ (м); $\tau = 5$ с.

Вызначыць: ураўненне траекторыі пункта; скорасць, паскарэнне, яго складовыя, радыус кривізны траекторыі ў момант t ; паказаць траекторыю пункта, скорасць і паскарэнне ў момант t ; вызначыць характар руху пункта па траекторыі.

Рашэнне. Ураўненне траекторыі пункта атрымаем, калі знайдзем залежнасць $x=f(y)$, выключаючы пры гэтым час t .

$$t = \frac{y+3}{4}; \quad x = \frac{(y+3)^2}{8} + \frac{3}{4}(y+3) - \ln\left|\frac{y+7}{4}\right|.$$

Атрыманая роўнасць з'яўляецца ўраўненнем траекторыі пункта. Скорасць пункта знайдзем па яе праекцыях на восі каардынат.

| Варіант | $x = f_1(t)$ | $y = f_2(t)$ | τ |
|---------|--|---|--------|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | $2t^2 + t + 3$ | $4 - 3t$ | 2 |
| 2 | $3 \sin \frac{\pi}{3} t - 4$ | $2 - 3 \cos \frac{\pi}{3} t$ | 3 |
| 3 | $5 \sin^2 \frac{\pi}{4} t + 2$ | $5 \cos^2 \frac{\pi}{4} t - 3$ | 5 |
| 4 | $4t^2 - t + \ln t + 1 $ | $3 - t$ | 1 |
| 5 | $-3 \cos \frac{\pi}{3} t + 1$ | $2 - 3 \sin \frac{\pi}{3} t$ | 6 |
| 6 | $3 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} t$ | $2 \cos^2 \frac{\pi}{4} t$ | 2 |
| 7 | $3t^2 + t - \ln t + 2 $ | $t + 2$ | 3 |
| 8 | $\frac{2}{3}t^2 + 3t - 2$ | $2t^2 + 9t + 3$ | 4 |
| 9 | $1 + t + t^2$ | $5t - 4$ | 1 |
| 10 | $\frac{1}{3} \sin \pi t + 2$ | $\frac{1}{2} \cos \pi t - 3$ | 6 |
| 11 | $t^2 + 2 \ln t + 1 $ | $0,5t^2 + \ln t + 1 $ | 2 |
| 12 | $3t - 4t^2 + 2$ | $2t - 3$ | 1 |
| 13 | $0,2 \sin 0,5\pi t$ | $0,3 \cos 0,5\pi t - 2$ | 4 |
| 14 | $\frac{1}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} t - 2$ | $\frac{2}{5} \cos^2 \frac{\pi}{3} t + 1$ | 5 |
| 15 | $0,6t + t^2 - 4$ | $0,2t + 3$ | 1 |
| 16 | $\frac{2}{3}t^2 - 2t + 3$ | $2t^2 - 6t + 1$ | 2 |
| 17 | $4t - 1$ | $0,3 \sin \pi t + 2$ | 3 |
| 18 | $0,5 \sin \frac{2}{3}\pi t + 1$ | $\frac{2}{3} \cos^2 \frac{2}{3}\pi t - 2$ | 4 |

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|----|---|------------------------------------|---|
| 19 | $0,4 \sin \frac{\pi}{2} t - \frac{2}{3}$ | $0,2 \cos \frac{\pi}{2} t + 3$ | 5 |
| 20 | $\frac{1}{3} \cos^2 2\pi t - \frac{3}{4}$ | $0,5 \sin^2 2\pi t + 1$ | 6 |
| 21 | $-0,5t^2 + 2t - 3$ | $4t - 2$ | 2 |
| 22 | $2 - 3t - 4t^2$ | $0,8 t^2 + 0,6 t - 3$ | 1 |
| 23 | $t^2 - \ln 4t + 1 $ | $2t^2 - 2 \ln 4t + 1 $ | 2 |
| 24 | $0,2t^2 + 3t - \ln t + 1 $ | $t - 1$ | 3 |
| 25 | $0,25 \sin 0,5\pi t - 2$ | $0,4 \cos^2 0,5\pi t - 3$ | 4 |
| 26 | $0,2 \cos \frac{\pi}{3} t - 0,5$ | $0,3 \sin^2 \frac{\pi}{3} t + 1$ | 5 |
| 27 | $t - 0,4t^2$ | $0,5t^2 - 1,25t + 1,5$ | 1 |
| 28 | $0,3t^2 - t + 2 \ln t + 2 $ | $0,4t - 0,5$ | 1 |
| 29 | $0,5 \sin \frac{2}{3} \pi t - 0,4$ | $0,2 + 0,3 \cos \frac{2}{3} \pi t$ | 2 |
| 30 | $2 \sin^2 2\pi t - 3$ | $\cos^2 2\pi t - 1$ | 3 |

$$v_x = \dot{x} = 4t + 3 - (t + 1)^{-1}; \quad v_y = \dot{y} = 4.$$

У момант часу $\tau = 5$ с: $v_x = 22,8$ м/с; $v_y = 4$ м/с,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(22,8)^2 + 4^2} = 23,1 \text{ м/с.}$$

Паскарэнне пункта знайдзем па яго праекцыях на восі каардынат.

$$a_x = \ddot{x} = \dot{v}_x = 4 + (t + 1)^{-2}; \quad a_y = \ddot{y} = \dot{v}_y = 0.$$

У момант часу $\tau = 5$ с: $a_x = 4,03$ м/с²; $a_y = 0$,

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 4,03 \text{ м/с}^2.$$

Тангенцыяльнае паскарэнне пункта вызначым у момант $\tau = 5$ с па праекцыях скорасці і паскарэння пункта на восі каардынат.

$$a_{\tau} = \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y}{v} = \frac{22,8 \cdot 4,03}{23,1} = 4 \text{ м/с}^2.$$

Па паскарэнні пункта і яго тангенцыяльным паскарэнні знайдзем у момант $\tau = 5$ с нармальнае паскарэнне.

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_{\tau}^2} = \sqrt{4,03^2 - 4^2} = 0,49 \text{ м/с}^2.$$

Радыус кривізны траекторыі знайдзем у момант $\tau = 5$ с па формуле

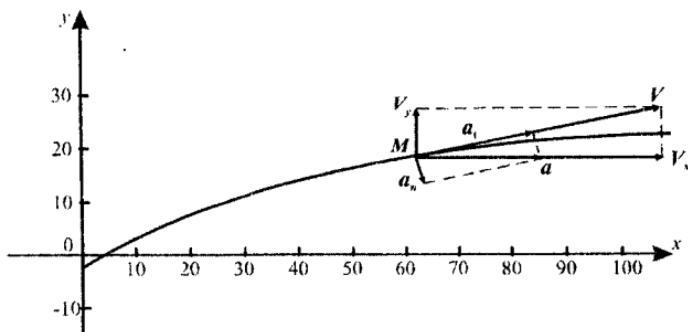
$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{23,1^2}{0,49} = 1089 \text{ м.}$$

Падлічым каардынаты пункта па ўраўненнях руху.

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----|----|-----|------|------|------|------|----|
| x | 0 | 4,3 | 12,9 | 22,6 | 42,4 | 63,2 | 88 |
| y | -3 | 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 |

Па атрыманых значэннях каардынат будуем траекторыю руху пункта у выбранных восіах каардынат Oxy (рыс. 55).

У пункце M траекторыі, адпавядайчым моманту $\tau = 5$ с, паказваем вектар скорасці і паскарэння згодна з падлічанымі праекцыямі гэтых вектараў.



Рыс. 55

Характар руху пункта па траекторыі ацэньваем па тангенцыяльным паскарэнні. З разліку відаць, што v_x , a_x і v з'яўляюцца зменнымі велічынямі. Таму a_t — зменная велічыня. Гэта азначае, што пункт рухаецца па траекторыі пераменна.

З улікам таго, што накірунак a_t супадае з накірункам v (рыс. 55), удакладняем, што рух пункта па траекторыі з'яўляецца пераменным паскораным.

Заданне К-2

Складанне ўраўнення руху пункта і вызначэнне яго скорасці і паскарэння

Для дадзенага пункта M механізма (рыс. 57–59) скласці ўраўненні руху, паказаць частку траекторыі пункта і для моманту часу t_1 знайсці скорасць і паскарэнне пункта, тангенцыяльнае і нармальнае паскарэнні і радыус кривізны траекторыі. Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 11.

Прыклад решэння задання К-2

Скласці ўраўненні руху пункта M рухомага кола планетарнага механізма (рыс. 56), паказаць частку траекторыі пункта і для моманту t_1 знайсці скорасць, поўнае, тангенцыяльнае і нармальнае паскарэнні і радыус кривізны адпаведнага пункта траекторыі.

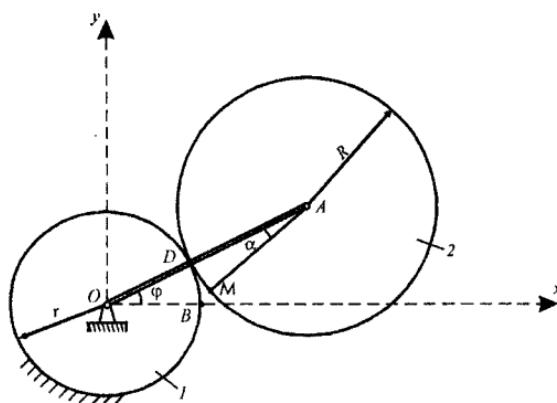
Дадзена: $r = 0,2$ м, $R = 0,3$ м, $\phi = 2t$, $t_1 = 1$ с.

Табліца 11

| Варыянт | ϕ , рад | OA , м | AB , м | CD , м | ON , м | CM , м | α , град | r_1 , м | r_2 , м | s , м | t_1 , с |
|---------|--------------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------------|-----------|-----------|----------------|-----------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | πt | 0,3 | 0,7 | 0,8 | 0,8 | 0,5 | | | | 0,4 | |
| 2 | $0,2\pi t$ | 0,2 | 0,6 | 0,7 | 0,3 | 0,4 | | | | 1,5 | |
| 3 | $0,3\pi t$ | 0,3 | 0,8 | 0,4 | 0,5 | 0,7 | | | | 1,0 | |
| 4 | $0,4\pi t$ | 0,2 | 0,6 | 0,8 | 0,4 | 0,3 | | | | 1,2 | |
| 5 | $0,1\pi t$ | 0,4 | 0,9 | 0,6 | 0,5 | 0,8 | | | | 2,0 | |
| 6 | $0,5\pi t$ | 0,3 | 0,7 | 1,3 | | 0,6 | | | | 0,8 | |
| 7 | | | | 0,8 | | 0,5 | 40 | | | $0,5\sin\pi t$ | 0,6 |
| 8 | | | | 0,9 | | 0,4 | 30 | | | $0,6\cos\pi t$ | 0,3 |
| 9 | $2t$ | | | | | | | 0,4 | 0,2 | | 1,2 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----|------------|-----|-----|---|-----|-----|-----|-----|-----|----------------|-----|
| 10 | $2,5t$ | | | | | | | 0,6 | 0,2 | | 1,0 |
| 11 | $1,5t$ | 0,5 | 1,4 | | | | | | | | 1,6 |
| 12 | $0,8t$ | 0,2 | | | | 0,1 | | | | | 0,6 |
| 13 | $0,6t$ | 0,3 | 1,2 | | | | | | | | 0,9 |
| 14 | $0,7t$ | 0,4 | | | | | 0,3 | | | | 0,8 |
| 15 | $0,2\pi t$ | 0,5 | 1,5 | | | | | | | | 1,3 |
| 16 | $0,3\pi t$ | 0,2 | 0,8 | | | | | | | | 0,7 |
| 17 | | | | | | 0,4 | | | | $2t^2$ | 1,0 |
| 18 | | | | | | 0,3 | | | | $0,7t^3$ | 0,9 |
| 19 | | | | | | 0,2 | | | | $3e^t$ | 0,6 |
| 20 | | | | | | 0,5 | | | | $0,4t$ | 1,3 |
| 21 | | 1,3 | | | | | | | | $0,2+t^2$ | 0,7 |
| 22 | | 0,7 | | | | | | | | $0,8+e^t$ | 0,5 |
| 23 | | 1,1 | | | | 60 | | | | $0,9-0,2t$ | 1,0 |
| 24 | | 0,9 | | | | 25 | | | | $1,0+0,4t^2$ | 1,2 |
| 25 | | 1,2 | | | | 30 | | | | $1,2+0,5t$ | 1,4 |
| 26 | | 0,8 | | | | | | | | $0,4t^2$ | 1,1 |
| 27 | | 1,4 | | | | 35 | | | | $0,1+0,3e^t$ | 0,6 |
| 28 | | 0,7 | | | 0,4 | | | | | $0,3\sin t$ | 1,0 |
| 29 | | 1,0 | | | | | | | | $0,2\ln 4+t $ | 1,5 |
| 30 | | 1,2 | | | 0,8 | | | | | $0,5\sin 2t$ | 2,0 |

Рашэнне. Выбіраем нерухомую сістэму адліку Oxy . Няхай пачатак восей каардынат будзе ў цэнтры O нерухомага кола. Вось Ox праводзім праз пункт B , з якім супадаў пункт M рухомага кола ў той час, калі вугал ϕ быў роўным нулю (пачатак руху). Пры ка-чэнні кола 2 па паверхні кола 1 без праслізгвання дуга DB роўная дуже DM .



Рыс. 56

$$\cup DB = \cup DM, r \cdot \varphi = \alpha \cdot R;$$

$$\alpha = \frac{r}{R} \varphi = \frac{0,2}{0,3} 2t \approx 1,33t.$$

Праз вядомыя радыусы і вуглы, якія мяняюцца з цягам часу, вызначым каардынаты пункта M кола 2 у выбранных восіах каардынат.

$$x_M = OA \cos \varphi - MA \cos(\varphi + \alpha) = (r + R) \cos 2t - R \cos(2t + 1,33t),$$

$$x_M = 0,5 \cos 2t - 0,3 \cos 3,33t;$$

$$y_M = OA \sin \varphi - MA \sin(\varphi + \alpha) = (r + R) \sin 2t - R \sin(2t + 1,33t),$$

$$y_M = 0,5 \sin 2t - 0,3 \sin 3,33t.$$

Атрыманыя выразы для x_M і y_M з'яўляюцца ўраўненнямі руху пункта M . Апісанне руху пункта M ажыщёўлена ў каардынатаій форме.

Па ўраўненнях руху $x_M = f(t)$; $y_M = g(t)$ знаходзім праекцыі скорасці і скорасць пункта M у момант t_1 .

$$v_x = \dot{x}_M = -\sin 2t + \sin 3,33t;$$

$$v_y = \dot{y}_M = \cos 2t - \cos 3,33t;$$

У момант $t_1=1$ с:

$$v_x = -\sin 2 + \sin 3,33 = -0,909 - 0,187 = -1,1 \text{ м/с};$$

$$v_y = \cos 2 - \cos 3,33 = -0,416 + 0,982 = 0,57 \text{ м/с};$$

$$v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1,21 + 0,325} = 1,24 \text{ м/с.}$$

Паскарэнне пункта M падлічым па яго праекцыях на восі каардынат.

$$a_x = \ddot{v}_x = -2 \cos 2t + 3,33 \cos 3,33t;$$

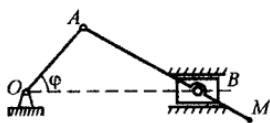
$$a_y = \ddot{v}_y = -2 \sin 2t + 3,33 \sin 3,33t.$$

- 1**
- $$OA = O_1B$$
- $$OO_1 = AB$$
- $$AC = CB$$
-
- 2**
- $$OA = O_1B$$
- $$OO_1 = AB$$
- $$AC = CB$$
-
- 3**
- $$OA = O_1B$$
- $$OO_1 = AB$$
- $$AC = CB$$
-
- 4**
- $$OA = O_1B$$
- $$OO_1 = AB$$
- $$AC = CB$$
-
- 5**
- $$OA = O_1B$$
- $$OO_1 = AB$$
- $$AC = CB$$
-
- 6**
- $$OA = O_1B$$
- $$OO_1 = AB$$
- $$AC = 0,5 CB$$
-
- 7**
-
- 8**
-
- 9** $\omega_{OA} = \omega_{AM}$
-
- 10** $\omega_{AM} = \omega_{AO}$
-

Рис. 57

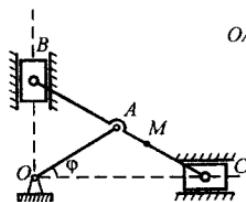
11

$$AM = 1,3 AB$$



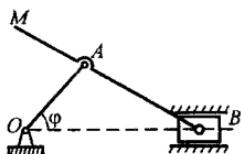
12

$$OA = BA = AC$$



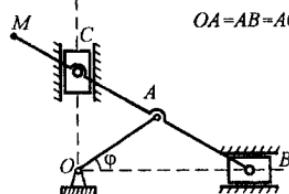
13

$$AB = 0,7 MB$$



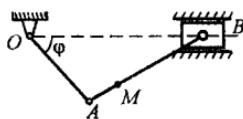
14

$$OA = AB = AC$$



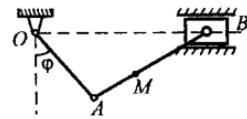
15

$$AM = 0,3 AB$$



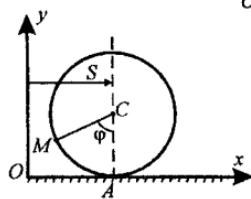
16

$$AM = 0,4 AB$$



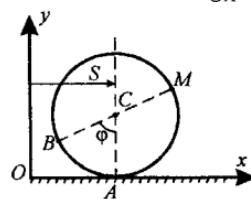
17

$$OA = \omega MA$$



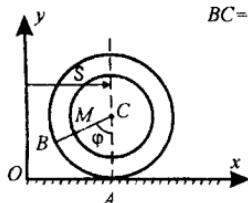
18

$$OA = \omega BA$$



19

$$OA = \omega BA \\ BC = 1,6 MC$$



20

$$OA = \omega BA \\ BC = 0,8 MC$$

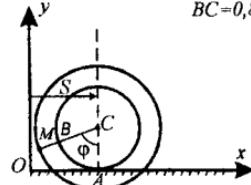
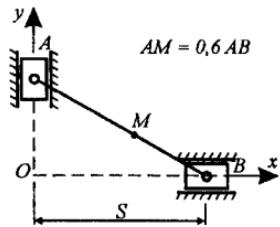
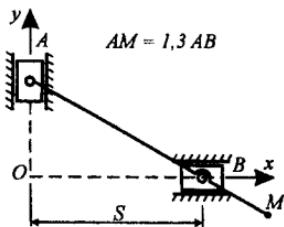


Рис. 58

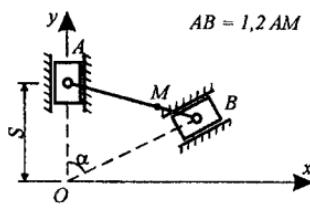
21



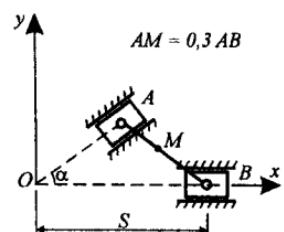
22



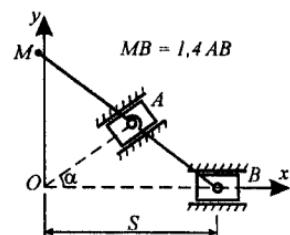
23



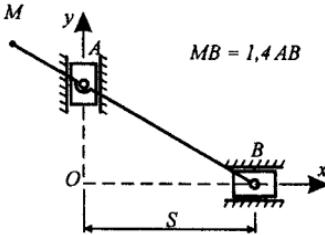
24



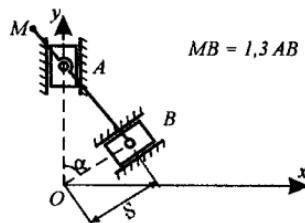
25



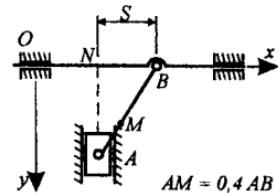
26



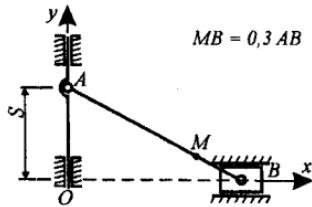
27



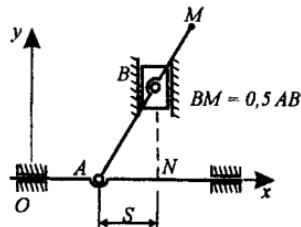
28



29



30



У момант $t_1 = 1$ с:

$$a_x = -2 \cos 2 + 3,33 \cos 3,33 = 0,832 - 3,27 = -2,44 \text{ м/с}^2;$$

$$a_y = -2 \sin 2 + 3,33 \sin 3,33 = -1,818 - 0,624 = -2,44 \text{ м/с}^2;$$

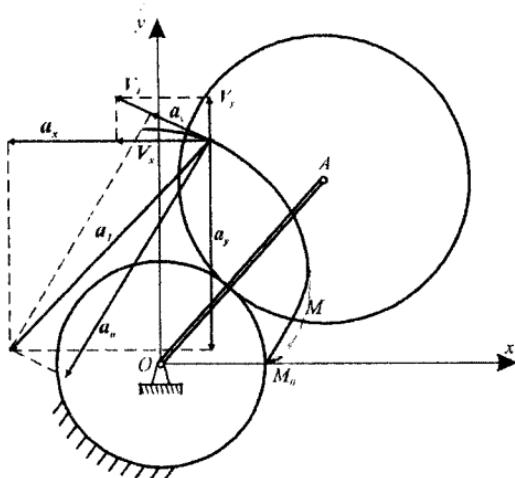
$$a_1 = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{5,95 + 5,95} = 3,45 \text{ м/с}^2.$$

Па праекцыях скорасцей і паскарэння на восі каардынат вызначаем тангенцыяльнае паскарэнне пункта M у момант t_1 .

$$a_t = \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y}{v_1} = \frac{(-1,1) \cdot (-2,44) + 0,57 \cdot (-2,44)}{1,24} = 1,04 \text{ м/с}^2.$$

Праз паскарэнне a_1 і a_t знаходзім нармальнае паскарэнне пункта M у момант t_1 .

$$a_n = \sqrt{a_1^2 - a_t^2} = \sqrt{11,9 - 1,08} = 3,29 \text{ м/с}^2.$$



Рыс. 60

Радыус кривизны траектории в момент t_1 вычисляется по формуле

$$\rho_1 = \frac{v_1^2}{a_n} = \frac{1,54}{3,29} = 0,47 \text{ м.}$$

На эпюнах руху пункта M будем частку траектории (рис. 60) ад пачатку руху (M_0) з такім разлікам, каб на ёй паказаць месца занахожданне пункта M у момент t_1 (M_1). У пункце M_1 паказваем усе вектары, якія вызначаны ў заданні.

2. Прастаяшыя рухі цвёрдага цела

Заданне К-3

*Вызначэнне скорасцей і паскарэння пунктату цела
пры паступальным і вярчальным рухах*

Вызначыць у момент $\tau = 1$ с вуглавую скорасць і вуглавое паскарэнне шківаў механізма (рис. 62–66), скорасць і паскарэнне пункта B , калі вядомы закон руху груза A . Неабходныя даныя (у м) прыведзены ў табл. 12.

Прыклад решэння задання К-3

Вызначыць у момент τ вуглавыя скорасці і вуглавыя паскарэнні шківаў механізма (рис. 61), а таксама скорасць і паскарэнне пункта B , калі вядомы закон руху груза A .

$$z = t^2 - t \text{ (м)}, r_1 = 0,1 \text{ м}, R_1 = 0,2 \text{ м}, r_2 = 0,15 \text{ м},$$

$$R_2 = 0,3 \text{ м}, R_3 = 0,25 \text{ м}, \tau = 1 \text{ с.}$$

Таблица 12

| Варыянт | r_1 | R_1 | r_2 | R_2 | r_3 | R_3 | z |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 0,20 | 0,30 | 0,15 | 0,35 | 0,10 | | $4t \sin \pi t$ |
| 2 | 0,30 | 0,35 | 0,15 | 0,20 | | 0,20 | $t - \cos \pi t$ |
| 3 | | 0,25 | 0,15 | 0,25 | 0,10 | 0,20 | $4t^3 + 2t$ |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----|------|------|------|------|------|------|-------------------|
| 4 | | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,20 | 0,25 | $3ts\sin\pi t$ |
| 5 | | 0,35 | 0,30 | 0,35 | 0,25 | 0,30 | $t^4\cos 2t$ |
| 6 | | 0,28 | 0,16 | 0,24 | 0,20 | 0,22 | $3t-r^2$ |
| 7 | 0,14 | 0,26 | 0,18 | 0,24 | 0,16 | | $\pi\sin 2\pi t$ |
| 8 | 0,16 | 0,20 | 0,15 | 0,20 | | 0,25 | $3r^2\sin\pi t$ |
| 9 | 0,18 | 0,22 | 0,14 | 0,20 | 0,18 | | $3t+r^2$ |
| 10 | 0,18 | 0,20 | 0,22 | 0,26 | 0,22 | | $r^2\cos 2t$ |
| 11 | | 0,26 | 0,20 | 0,24 | 0,15 | 0,25 | $\cos 2t-t$ |
| 12 | | 0,20 | 0,14 | 0,18 | 0,15 | 0,20 | $t^2+\sin t$ |
| 13 | 0,15 | | 0,18 | 0,24 | 0,16 | 0,24 | $t+3\sin 2t$ |
| 14 | | 0,20 | 0,24 | 0,26 | 0,18 | 0,24 | t^3-t^2+4 |
| 15 | 0,15 | 0,25 | 0,18 | 0,24 | 0,18 | | $2t^2\sin t$ |
| 16 | 0,18 | 0,26 | 0,22 | 0,26 | | 0,30 | $\cos 3t^2$ |
| 17 | 0,14 | 0,16 | 0,15 | 0,25 | | 0,26 | $\cos 2t+t^2$ |
| 18 | 0,16 | 0,20 | 0,15 | 0,25 | | 0,30 | $t^2-\sin 2t$ |
| 19 | 0,18 | 0,24 | 0,24 | 0,26 | 0,13 | | $3t^3-2t$ |
| 20 | 0,20 | 0,22 | 0,16 | 0,26 | 0,18 | | $t^2\cos 3t$ |
| 21 | 0,22 | 0,26 | 0,15 | 0,25 | 0,13 | 0,26 | t^3-t^2-4t |
| 22 | 0,15 | 0,24 | 0,18 | 0,26 | 0,21 | 0,28 | $2t^2+\cos 2t$ |
| 23 | 0,18 | 0,27 | 0,27 | 0,38 | 0,12 | 0,24 | $\cos \pi t+4t$ |
| 24 | 0,14 | 0,26 | 0,21 | 0,26 | 0,14 | 0,23 | $t^2\cos 2t$ |
| 25 | 0,10 | 0,20 | 0,14 | 0,22 | 0,15 | 0,25 | $4\cos 2t^2$ |
| 26 | 0,16 | 0,26 | 0,10 | 0,18 | 0,12 | 0,20 | $3\sin(2t+r^2)$ |
| 27 | | 0,27 | 0,15 | 0,22 | 0,20 | 0,25 | $3\cos(t-2r^2)$ |
| 28 | 0,14 | 0,26 | 0,18 | 0,24 | 0,12 | | $2t+\cos \pi t$ |
| 29 | | 0,18 | 0,16 | 0,25 | 0,14 | 0,22 | $\cos 2\pi t+t$ |
| 30 | | 0,16 | 0,18 | 0,22 | 0,15 | 0,25 | $t^2-2\sin \pi t$ |

Р а ш е н н е. Па вядомаму закону прамалінейнага паступаль-
нага руху груза A знайдзем скорасць і паскарэнне груза:

$$v_A = \dot{z} = 2t - 1; \quad a_A = \ddot{z} = 2 \text{ м/с}^2.$$

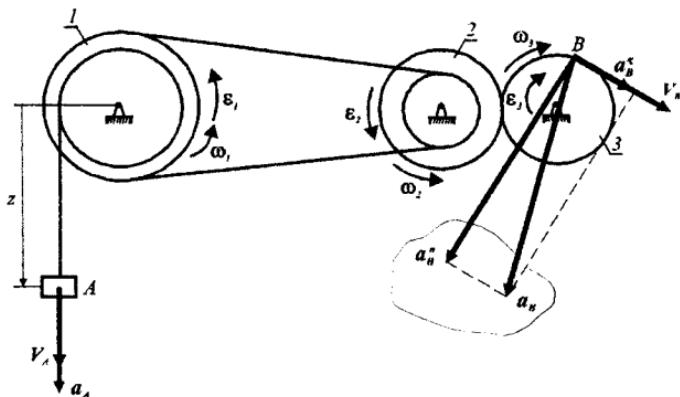
$$\text{У момант } t = 1 \text{ с} \quad v_A = 1 \text{ м/с.}$$

На рыс. 61 паказваем вектары v_A і a_A .

З улікам накірункаў вектараў скорасці і паскарэння груза A паказваем накірункі вярчэння шківаў 1, 2, 3 з вуглавымі скорас-
цямі і вуглавымі паскарэннямі.

Вуглавая скорасць і паскарэнне шківа 1:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{r_1} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ рад/с}; \quad \varepsilon_1 = \frac{a_A}{r_1} = \frac{2}{0,1} = 20 \text{ рад/с}^2.$$



Рыс. 61

У раменнаій перадачы вуглавыя скорасць і паскарэнне шківа 2 вызначаем з улікам сущносін радыусаў шківаў 1 і 2.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{R_1}; \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{r_2}{R_1};$$

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{R_1}{r_2} = 10 \frac{0,2}{0,15} = 13,3 \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{R_1}{r_2} = 20 \frac{0,2}{0,15} = 26,6 \text{ рад/с}^2.$$

У фрыкцыйнай перадачы (колы 2 і 3) аналагічна знаходзім вуглавыя скорасць і паскарэнне шківа 3:

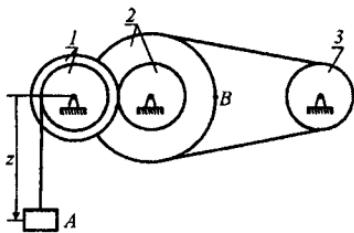
$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{R_3}{R_2}, \quad \omega_3 = \omega_2 \frac{R_2}{R_3} = 13,3 \frac{0,3}{0,25} = 16 \text{ рад/с};$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} = \frac{R_3}{R_2}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_2 \frac{R_2}{R_3} = 26,6 \frac{0,3}{0,25} = 31,9 \text{ рад/с}^2.$$

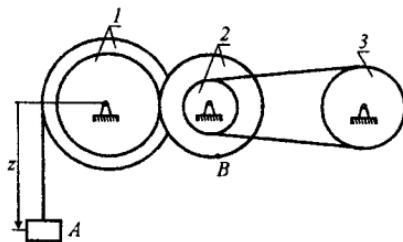
Скорасць і паскарэнне пункта B роўныя

$$v_B = \omega_3 R_3 = 16 \cdot 0,25 = 4 \text{ м/с}.$$

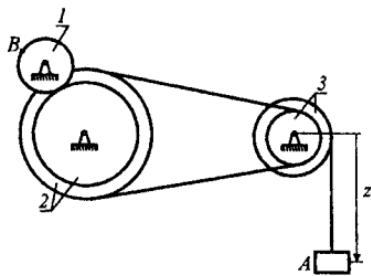
1



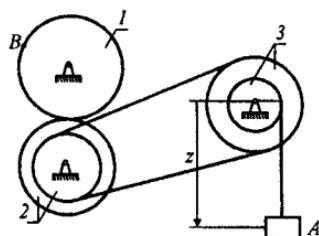
2



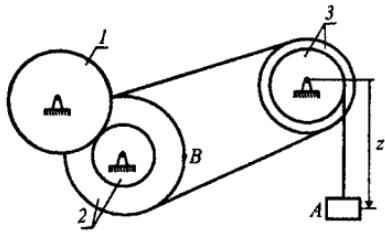
3



4



5



6

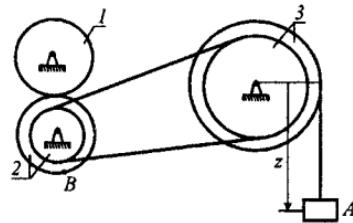
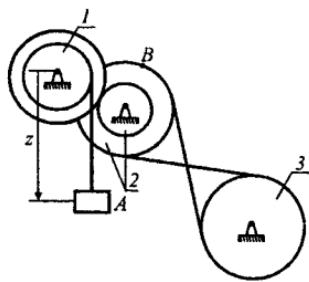
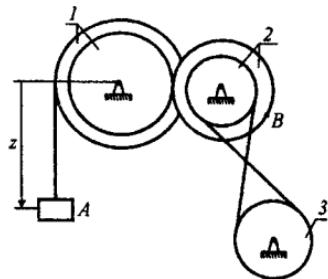


Рис. 62

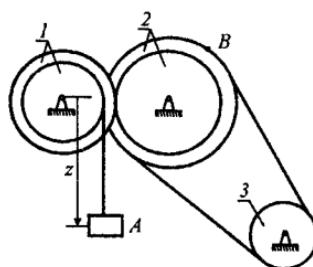
7



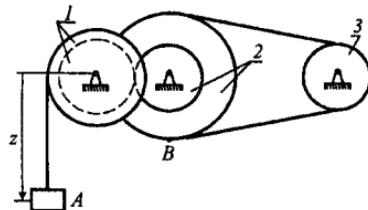
8



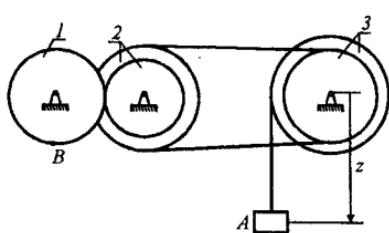
9



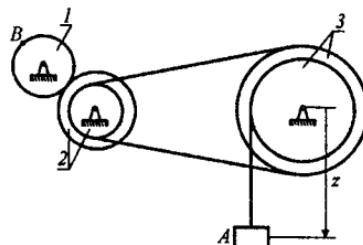
10



11

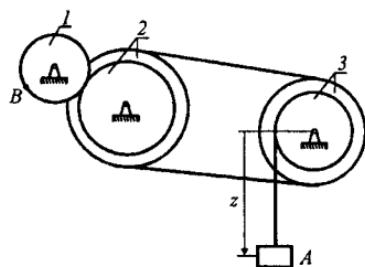


12

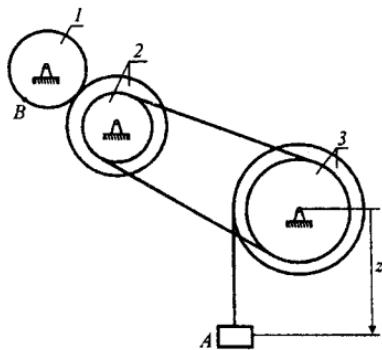


Рыс. 63

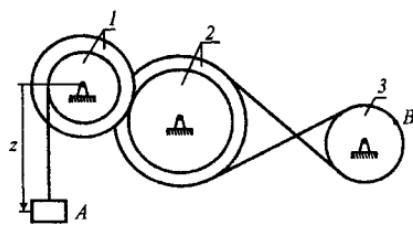
13



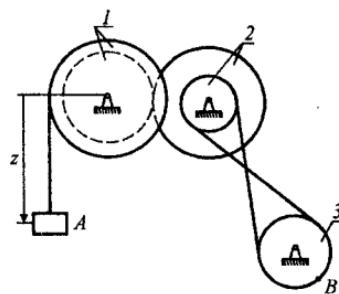
14



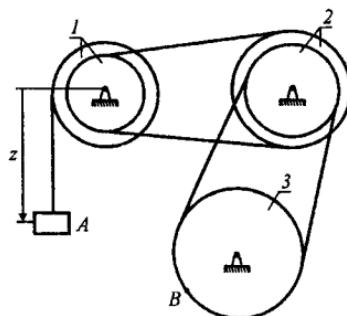
15



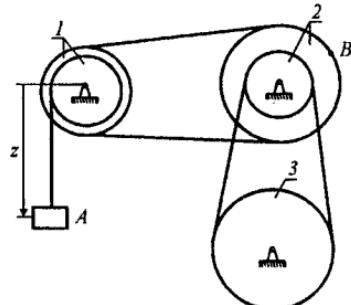
16



17

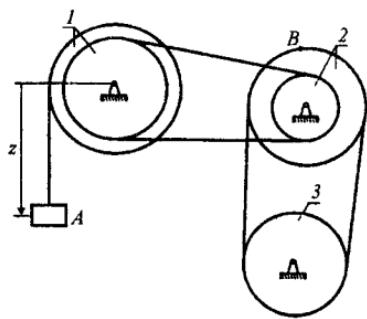


18

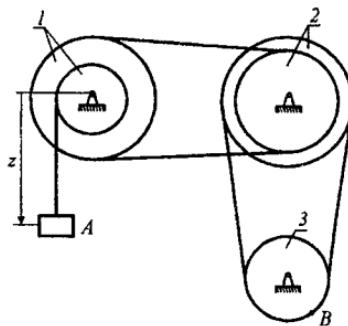


Рыс. 64

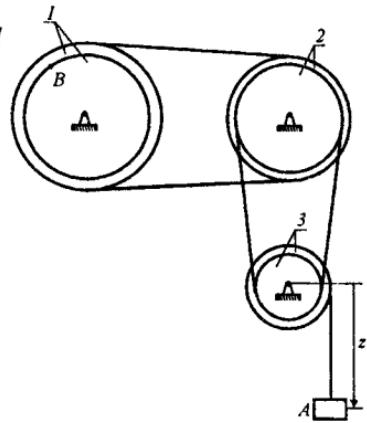
19



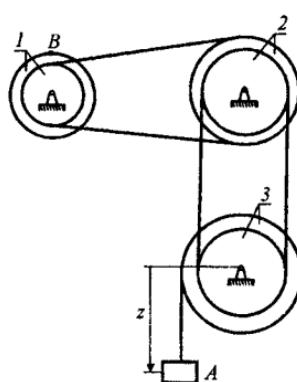
20



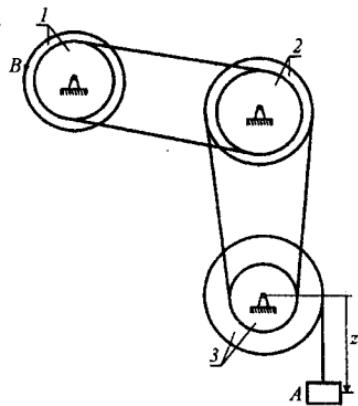
21



22



23



24

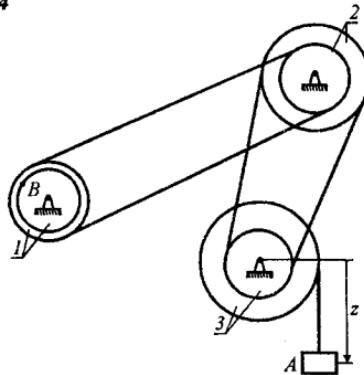


Рис. 65

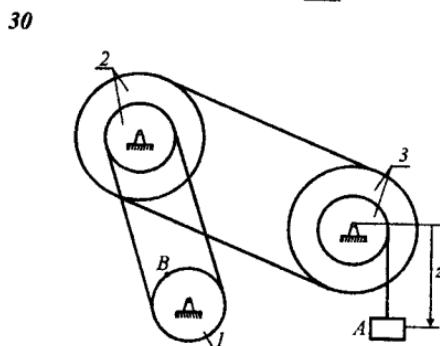
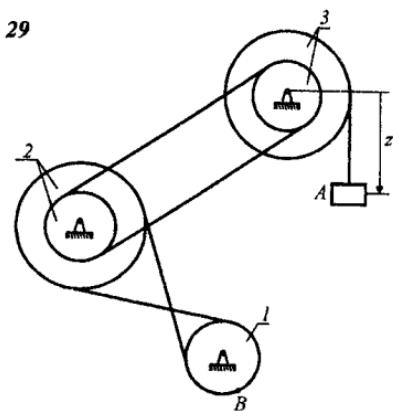
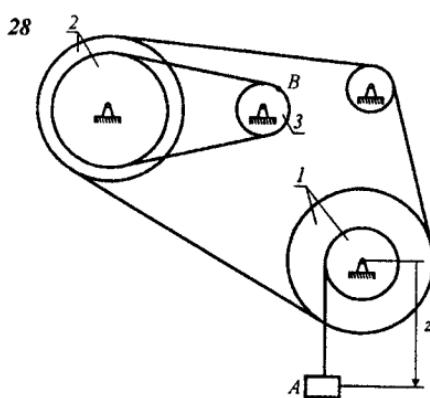
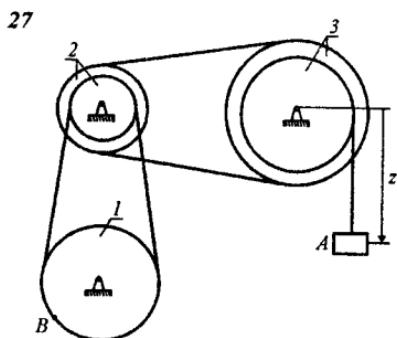
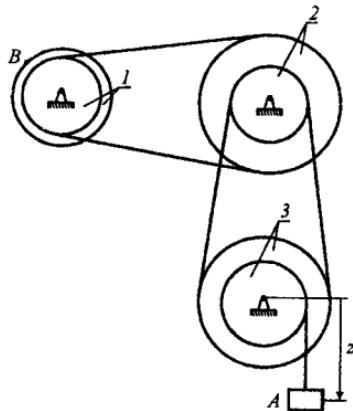
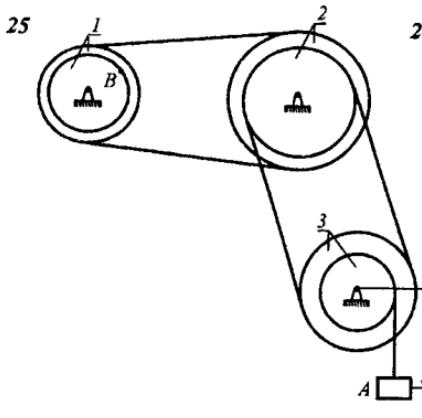


Рис. 66

$$a_B = R_3 \sqrt{\varepsilon_3^2 + \omega_3^4} = 0,25 \sqrt{1017,6 + 65536} = 64,5 \text{ м/с}^2.$$

На рис. 61 паказываем у пункце В скорасць і паскарэнні пункта.

3. Складаны рух пункта

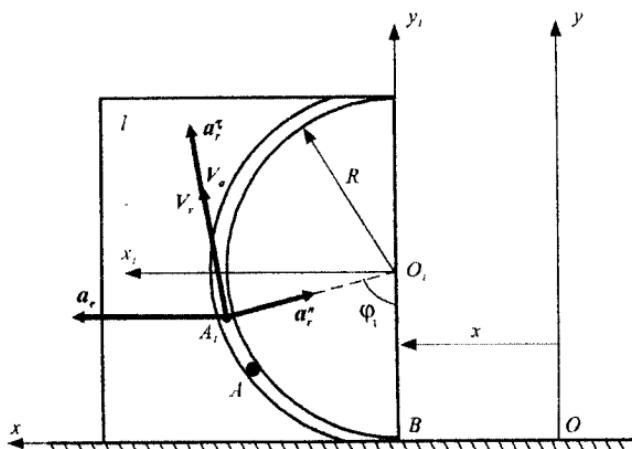
Заданне К-4

*Вызначэнне скорасці і паскарэння пункта
пры пераносным паступальным руху*

Пункт A рухаецца адносна цела 1 (рис. 68–72), якое, у сваю чаргу, рухаецца адносна нерухомых восей каардынат. Знайсці ў момант часу τ абсолютная скорасць і паскарэнне пункта A . Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 13.

Прыклад разшэння задання К-4

Пункт A (рис. 67) рухаецца па каналу адносна цела 1 па закону $s = BA = t^2 - t$ (м). Цела 1 рухаецца ўздоўж нерухомай паверхні па закону $x = 2\sin \pi t$ (м). Вызначыць у момант $\tau = 1,5$ с абсолютная скорасць і паскарэнне пункта A , калі $R = 0,5$ м.



Рыс. 67

| Варыянт | $x = x(t)$, м | $s = BA = f(t)$, м | R , м | $\varphi = \varphi(t)$, рад | τ , с |
|---------|------------------------|----------------------|---------|------------------------------|------------|
| 1 | $0,2t+0,03t^2$ | | 0,3 | $2\cos 2t$ | 1,0 |
| 2 | $0,1\sin \pi t$ | | 0,2 | $0,3t+2t^2$ | 0,8 |
| 3 | $0,3t^2+0,5t$ | | 0,4 | $0,2+\sin 0,5\pi t$ | 1,2 |
| 4 | $0,3+0,1\sin 2t$ | $0,6t^2-0,2t$ | | | 1,1 |
| 5 | $2t+\sin 0,3\pi t$ | $0,2t^2+0,4t-0,3$ | 0,8 | | 1,3 |
| 6 | $0,4t+0,2\cos 2t$ | $0,3\cos 3t$ | 0,7 | | 0,2 |
| 7 | $0,1t^2+0,3t$ | $0,4t^2-0,1t$ | 0,6 | | 1,0 |
| 8 | $0,2t\sin 0,5\pi t$ | $0,3t^2+0,1t$ | 0,5 | | 0,9 |
| 9 | $0,4t^2-0,1t+0,2$ | $0,2t+0,1\cos \pi t$ | | | 0,7 |
| 10 | $0,2t^2e^t$ | $0,3t^2+0,2t$ | | | 0,6 |
| 11 | $0,4t+0,1\sin \pi t$ | $0,2t^3+0,1t+0,3$ | | | 1,0 |
| 12 | $0,5t+0,2\sin \pi t$ | t^2-t | 0,7 | | 1,4 |
| 13 | $t^2+0,5t$ | $0,7\sin 0,4\pi t$ | 0,5 | | 1,8 |
| 14 | $0,8+2t-0,5t^2$ | | 0,3 | $0,6\cos 0,5\pi t$ | 1,2 |
| 15 | $0,7+0,3\sin 0,3\pi t$ | $0,25\cos \pi t$ | 0,2 | | 0,8 |
| 16 | $t+t^2-e^{-2t}$ | $0,6-0,3\sin t$ | 0,4 | | 0,7 |
| 17 | $0,4t^2-0,2t$ | $0,4\cos 0,3\pi t$ | 0,6 | | 0,6 |
| 18 | $1+0,6\cos 0,7t$ | $0,1+0,2\sin 2t$ | 0,8 | | 0,5 |
| 19 | $t^3-0,5t^2+t$ | $0,5\cos 0,6t^2$ | 0,9 | | 0,9 |
| 20 | $0,8\sin 3t^2+2t$ | | 1,0 | $0,8\sin 4t$ | 1,0 |
| 21 | $t^2-\sin 0,6t$ | | 0,5 | $0,7\cos 0,4t$ | 1,1 |
| 22 | $0,6t^2+t$ | $0,8\sin 0,9t$ | 0,9 | | 0,7 |
| 23 | $2t+0,3\cos 4t$ | $0,6t^2-0,3t$ | 0,4 | | 1,3 |
| 24 | $t^2+e^{0,2t}$ | $t+\cos 0,5\pi t$ | 0,6 | | 1,2 |
| 25 | $0,6t^2-0,3t$ | $1,2\sin 1,4t$ | 0,7 | | 0,9 |
| 26 | $0,7-0,2\sin t$ | $1,4\cos 0,3t$ | 0,8 | | 0,8 |
| 27 | $t+e^{0,3t}$ | $0,5+0,2\sin t$ | 0,3 | | 0,7 |
| 28 | t^3-t^2+t | $t^2-\sin 0,8t$ | 0,4 | | 0,6 |
| 29 | $t^2+0,1\sin 2t$ | $t+0,3\cos 0,1t$ | 0,2 | | 0,5 |
| 30 | $2t-t^2+1$ | $0,4+0,2\sin t$ | 0,5 | | 1,4 |

Рашэнне. Выбіраем дзве сістэмы адліку: нерухомую і рухомую. Восі каардынат Oxy , размешчаныя на нерухомай апорнай пляцоўцы, з'яўляющеца нерухомаю сістэмаму адліку. Рухомую сістэму ўтворым шляхам размяшчэння восей $O_1x_1y_1$ на целе 1. У гэтым выпадку адносны рух пункта A – рух па акружнасці, радыус якой R . Пераносным рухам пункта A з'яўляецца паступальны пра-малінейны рух цела 1 адносна нерухомых восей Oxy .

Адносны рух апісаны натуральным спосабам, закон руху $s = t^2 - t$.

Пераносны рух адбываецца па закону $x = 2\sin \pi t$.

Вызначым месцазнаходжанне пункта А на акружнасці ў момант τ .

$$s = t^2 - \tau. s_1 = \tau^2 - \tau = 2,25 - 1,5 = 0,75 \text{ м.}$$

Дузе даўжынёю s_1 адпавядыае цэнтральны вугал

$$\varphi_1 = \frac{s_1}{R} = \frac{0,75}{0,5} = 1,5 \text{ рад.}$$

У градусах: $\varphi_1 = 86^\circ$.

Абсалютная скорасць пункта A вызначаецца па тэарэме складання скорасцей у складаным руху пункта.

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r.$$

Пераносная скорасць

$$\mathbf{v}_e = \dot{x} = 2\pi \cos \pi t.$$

У момант τ пераносная скорасць

$$\mathbf{v}_e = 2\pi \cos 1,5\pi = 0.$$

Адносная скорасць

$$\mathbf{v}_r = \dot{s} = 2t - 1.$$

У момант τ адносная скорасць

$$\mathbf{v}_r = 2 \cdot 1,5 - 1 = 2 \text{ м/с.}$$

Паказываем у пункце A₁ на рыс. 67 вектар \mathbf{v}_r па датычнай да траекторыі адноснага руху пункта A у бок узрастнання дугавой каардынаты s. У вызначаны момант часу $v_e = 0$, таму абсолютная скорасць роўная адноснай скорасці пункта.

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r = 2 \text{ м/с.}$$

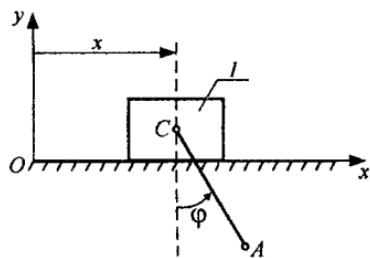
Вектар \mathbf{v}_a супадае з вектарам \mathbf{v}_r .

Абсолютнае паскарэнне пункта A вызначаецца па тэарэме складання паскарэння для прыватнага выпадку, калі пераносны рух паступальны.

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r.$$

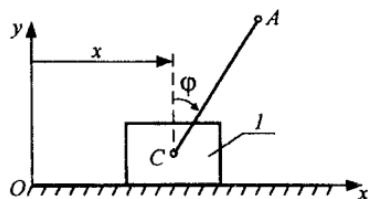
1

$$CA=R$$



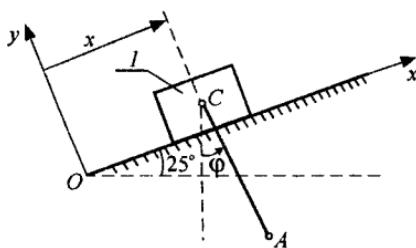
2

$$CA=R$$

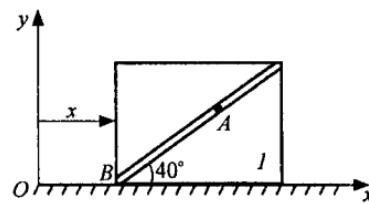


3

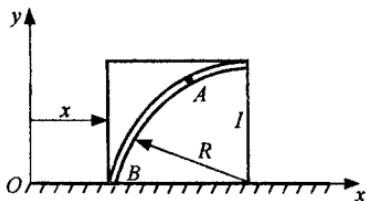
$$CA=R$$



4



5



6

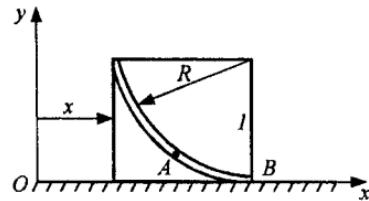
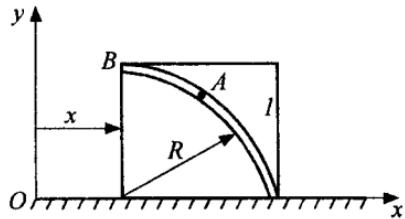
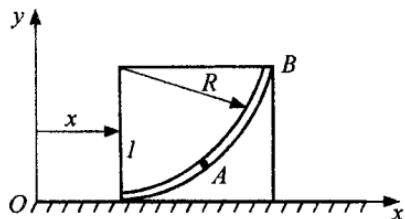


Рис. 68

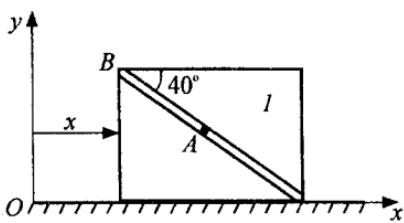
7



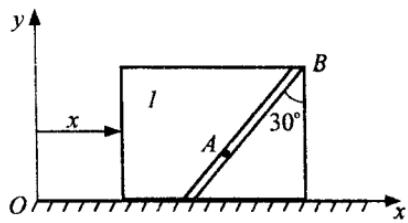
8



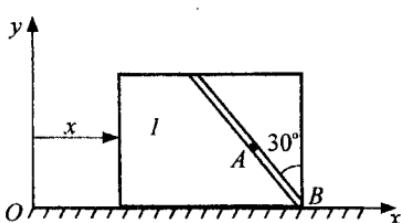
9



10



11



12

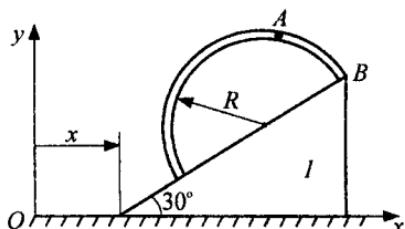
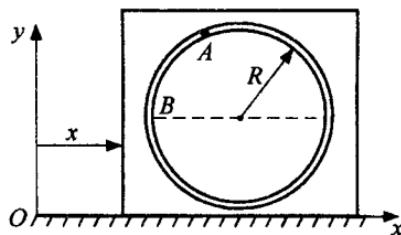
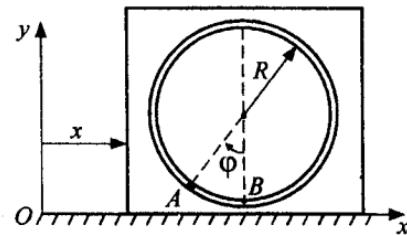


Рис. 69

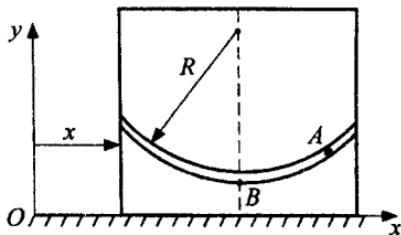
13



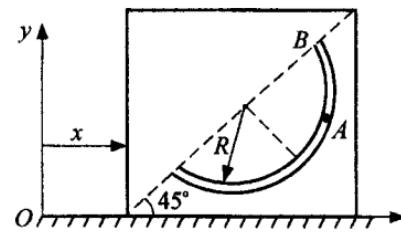
14



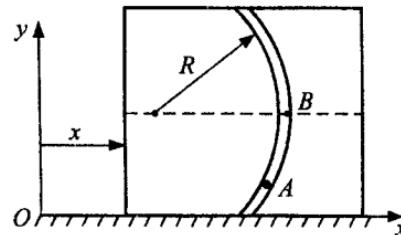
15



16



17



18

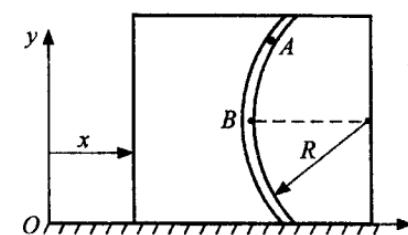
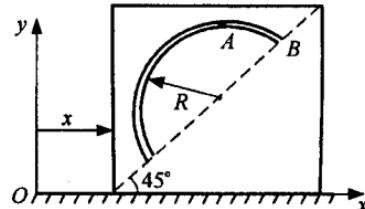
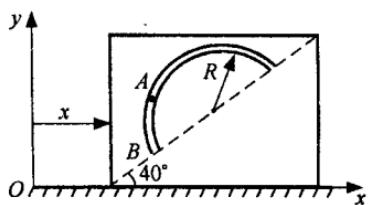
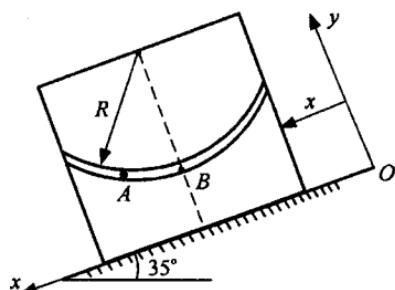
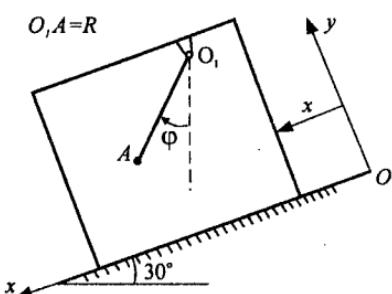
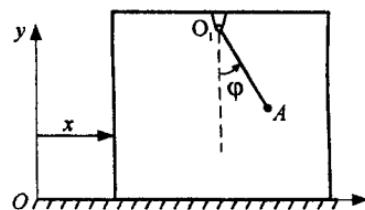
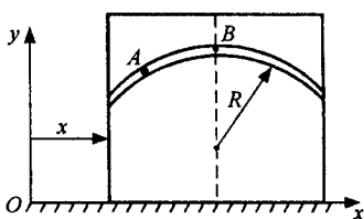
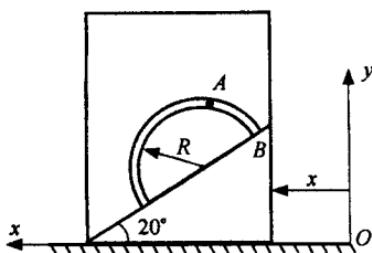


Рис. 70

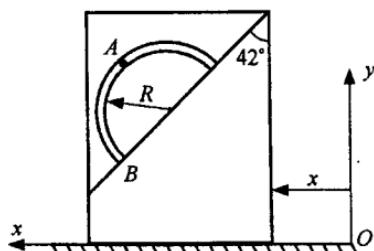
$$O_1A=R$$



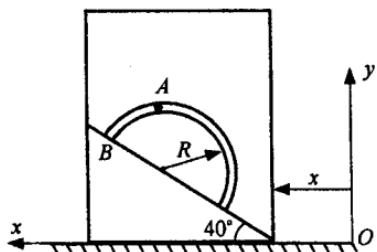
25



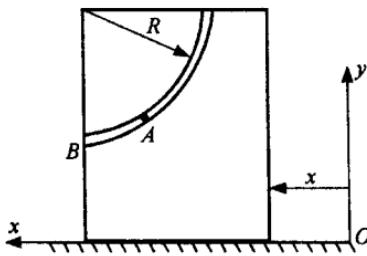
26



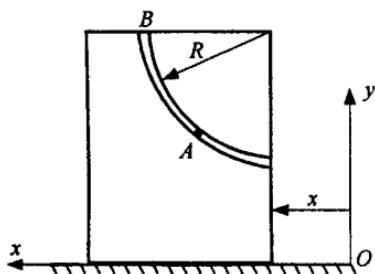
27



28



29



30

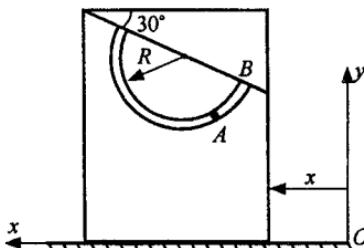


Рис. 72

Пераноснае паскарэнне

$$a_e = \ddot{x} = -2\pi^2 \sin \pi t .$$

У момант τ пераноснае паскарэнне

$$a_e = -2\pi^2 \sin 1,5\pi = 2\pi^2 = 19,7 \text{ м/с}^2.$$

Паказваєм на рис. 67 вектар a_e у пункце A_1 паралельна восі Ox у дадатным яе накірунку.

Адноснае паскарэнне мае дзве складовыя з-за адноснага крывалінейнага руху пункта A .

$$a_r = a_r^n + a_r^t .$$

Адноснае нармальнае паскарэнне

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{R} = \frac{4}{0,5} = 8 \text{ м/с}^2.$$

Вектар a_r^n накіроўваєм на рис. 67 ад пункта A_1 да цэнтра акружнасці O_1 .

Адноснае тангенцыяльнае паскарэнне

$$a_r^t = \ddot{s} = 2 \text{ м/с}^2.$$

Паказваєм a_r^t у бок узрастання дугавой каардынаты s .

Знаходзім велічыню абсалютнага паскарэння пункта A ў момант τ па праекцыях паскарэння на восіх Ox і Oy .

$$\begin{aligned} a_{ax} &= a_e + a_r^t \cos \varphi_1 - a_r^n \sin \varphi_1 = 19,7 + 2 \cdot \cos 86^\circ - 8 \sin 86^\circ = \\ &= 19,7 + 2 \cdot 0,07 - 8 \cdot 0,998 = 19,7 + 0,14 - 7,98 = 11,86 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{ay} &= a_r^t \sin \varphi_1 + a_r^n \cos \varphi_1 = 2 \sin 86^\circ + 8 \cos 86^\circ = \\ &= 2 \cdot 0,998 + 8 \cdot 0,07 = 2,56 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = \sqrt{11,86^2 + 2,56^2} = \sqrt{140,66 + 6,55} = 12,13 \text{ м/с}^2.$$

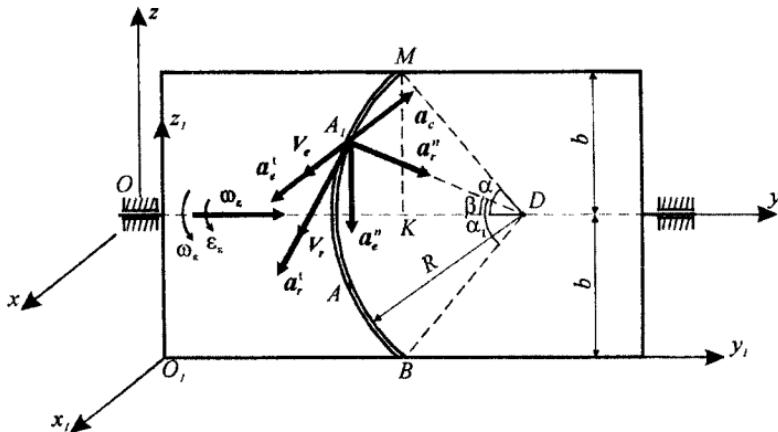
Заданне К-5

*Вызначэнне скорасці і паскарэння пункта,
каля пераносны рух вярчальны*

Цела 1 удзельнічае ў вярчальным руху ў адпаведнасці з законам $\psi = f_1(t)$ (рыс. 74–78). Пункт A рухаецца адносна цела 1 па закону $s = BA = f_2(t)$ або па закону $\varphi = f_3(t)$. Вызначыць у момант τ абсолютную скорасць і абсолютнае паскарэнне пункта A . Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 14.

Прыклад разшэння задання К-5

Прамавугольная пласціна ($b=0,3$ м) замацавана на гарызантальнай восі (рыс. 73) і верціца вакол яе па закону $\varphi = 0,5t^2$. Па каналу, які мае форму дугі акружнасці радыуса $R=0,4$ м, у плошасці пласціны рухаецца пункт A па закону $s = BA = 0,3 + 0,2\sin 0,6\pi t$ (м). У момант $\tau = 1$ с вызначыць абсолютную скорасць і абсолютнае паскарэнне пункта A .



Рыс. 73

Табліца 14

| Варыянт | $\psi = f_1(t)$, рад | $s = BA = f_2(t)$, м $\varphi = f_3(t)$, рад | AB, м | OD, м | DB, м | R , м | τ , с |
|---------|-----------------------|---|-------|-------|-------|---------|------------|
| 1 | $0,5t^2$ | $0,3\pi t^2 + t$ | 0,4 | 5 | 6 | 7 | 1 |
| 2 | πt^2 | $0,2t + t^2$ | 0,7 | 0,5 | 0,2 | | 2 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----|--------------------------------------|-----------------------------|-----|-----|-----|---|---|
| 3 | $0,4t^2 - t$ | $0,2t^2 + t$ | 0,8 | 0,3 | 0,8 | | 3 |
| 4 | $t^2 + 0,1t$ | $\sin 2t$ | 0,5 | 0,6 | 0,2 | | 1 |
| 5 | $0,3e^t + 2t$ | $0,1t^2$ | | 0,7 | 0,6 | | 2 |
| 6 | $0,2te^t$ | $0,4t + 0,1t^2$ | | 0,8 | 0,3 | | 1 |
| 7 | $0,3t^3$ | $t + 0,6t^2$ | 0,4 | 0,5 | 0,2 | | 3 |
| 8 | $0,5t^2$ | $0,5\cos 3t$ | 0,3 | 0,7 | 0,2 | | 2 |
| 9 | $0,3\pi t^2$ | $0,3 + 0,2\sin t$ | | 0,6 | 0,6 | | 3 |
| 10 | $t^3 - t^2 + 1$ | $0,5 - 0,3\sin 2t$ | | 0,8 | 0,4 | | 1 |
| 11 | $2t^2 - t$ | $0,5 \cos \frac{2}{3}\pi t$ | | | 0,4 | 2 | |
| 12 | $0,6\sin 0,5\pi t$ | $0,4t^2 - 2t + 1$ | | | 0,5 | 3 | |
| 13 | $\frac{2}{3}\pi \cos \frac{\pi}{3}t$ | $0,6\sin \frac{\pi}{4}t$ | | | 0,3 | 1 | |
| 14 | $0,2\sin 0,3t$ | $\cos 0,6\pi t$ | | | 0,4 | 2 | |
| 15 | $2t - t^2 + 3$ | $\sin 0,4\pi t$ | | | 0,6 | 3 | |
| 16 | $0,4t - t^2$ | $0,2\cos 0,3t$ | | | 0,5 | 1 | |
| 17 | $t \sin \pi t$ | $0,1t^2$ | | | 0,4 | 2 | |
| 18 | $2t + \cos t$ | $0,04t^2$ | | | 0,3 | 3 | |
| 19 | $0,6\sin^2 t$ | $0,4 - 0,3\sin t$ | | | 0,7 | 1 | |
| 20 | $0,5\cos \pi t$ | $0,5t - 0,1t^2$ | | | 0,5 | 2 | |
| 21 | $2t + \sin 0,5t$ | $0,5 + 0,3\cos t$ | | | 0,3 | 3 | |
| 22 | $0,1t^2 + t$ | $0,3t^2 + 0,2t$ | 0,5 | 0,4 | | | 1 |
| 23 | $0,4t^2 - 0,3t$ | $0,2(t^2 - t)$ | | 0,7 | | | 2 |
| 24 | $0,2\sin 3\pi t$ | $0,4t + 0,1t^2$ | | | 0,4 | 1 | |
| 25 | $0,5\cos 0,2t$ | $0,6\sin 0,4t$ | | | 0,3 | 3 | |
| 26 | $t^2 + e^t$ | $0,5 - 0,3\cos t$ | | | 0,5 | 2 | |
| 27 | $t \sin 2t$ | $0,4\sin 0,6t$ | | | 0,6 | 1 | |
| 28 | $0,7t - t^2$ | $0,2t + 0,5t^2$ | | | 0,4 | 3 | |
| 29 | $0,9t^2 - t$ | $0,6t + t^2$ | | 0,4 | | | 2 |
| 30 | $\sin 0,4t^2$ | $0,2t^2 + 0,3t$ | | 0,5 | | | 1 |

Рашэнне. Выбіраем нерухомую сістему адліку $Oxyz$, восі каардынат якой замацоўваем на нерухомых апорах восі вярчэння пласціны. Рухомую сістему адліку ўтвараем шляхам замацавання восей $O_1x_1y_1z_1$ на пласціне.

У такім выпадку адносны рух пункта A — крыва лінейны рух па дузе акружнасці радыуса R па закону $s = 0,3 + 0,2\sin 0,6\pi t$ (м). Пераносным рухам пункта A з'яўляецца вярчальны рух пласціны па закону $\phi = 0,5t^2$. Абсалютны рух пункта A ўяўляе сабою прасторавы крыва лінейны рух.

Вызначым месцазнаходжанне пункта A на дузе акружнасці радыуса R у момант τ . Дуга BM адпавядае падвоенаму цэнтральнаму вуглу α .

$$\sin \alpha = \frac{KM}{MD} = \frac{b}{R} = \frac{0,3}{0,4} = 0,75, \quad \alpha = 48,6^\circ.$$

У момант τ дуга BA роўная $s = 0,3 + 0,2 \sin 0,6\pi = 0,49$ м.

Такая даўжыня дугі акружнасці пры $R=0,4$ м адпавядае цэнтральнаму вуглу BDA_1 .

$$\alpha_t = \frac{s}{R} = \frac{0,49}{0,4} = 1,225 \text{ рад},$$

$$\alpha_1 = 1,225 \cdot 57,3^\circ = 70,19^\circ.$$

Тады, як відаць на рыс. 73, вугал

$$\beta = \alpha_t - \alpha = 70,19^\circ - 48,6^\circ = 21,59^\circ.$$

Вугал β паказвае месцазнаходжанне A_1 пункта A на дузе акружнасці ў момант $\tau = 1$ с.

Абсалютную скорасць пункта вызначаем па тэарэме складання скорасцей:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r.$$

Пераносная скорасць $v_e = \omega_e h$, дзе пераносная вуглавая скорасць $\omega_e = \dot{\phi} = t$, а ў момант $\tau = 1$ с $\omega_e = 1$ рад/с; h — адлегласць ад пункта A_1 да восі вярчэння пласціны, $h = A_1 D \cdot \sin \beta = R \cdot \sin 21,59^\circ = 0,4 \cdot 0,368 = 0,15$ м.

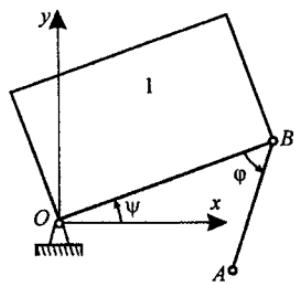
Тады ў момант τ пераносная скорасць

$$v_e = 1 \cdot 0,15 = 0,15 \text{ м/с.}$$

Вектар \mathbf{v}_e накіраваны ў бок руху пункта A_1 пры вярчэнні пласціны, а гэта значыць перпендыкулярна да пласціны ў дадатным накірунку восі O_1x_1 .

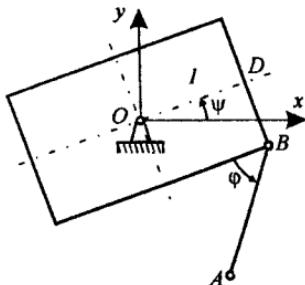
Адносная скорасць вызначаецца па закону адноснага руху пункта A .

1

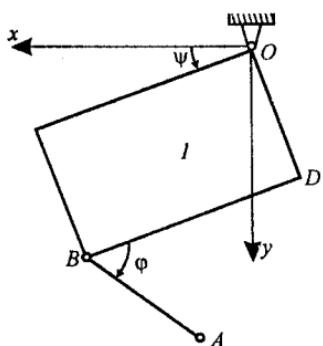


$$OB = l, 2 AB$$

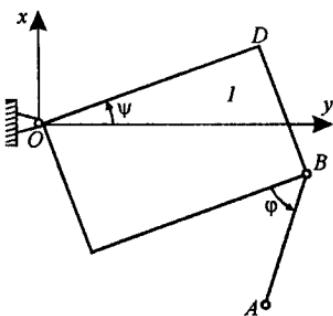
2



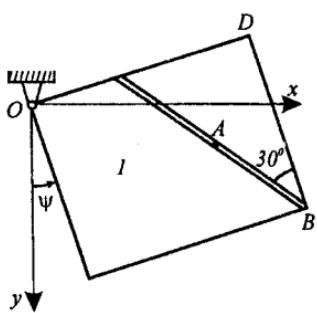
3



4



5



6

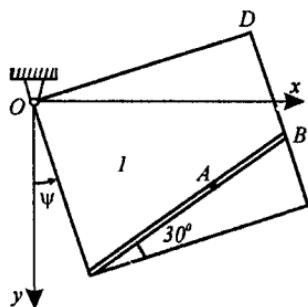
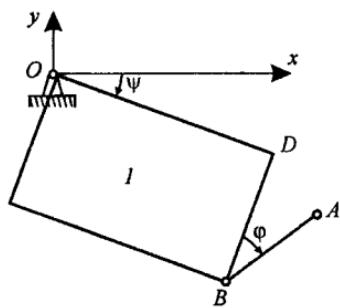
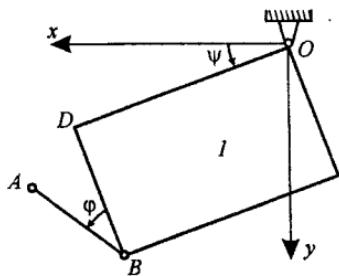


Рис. 74

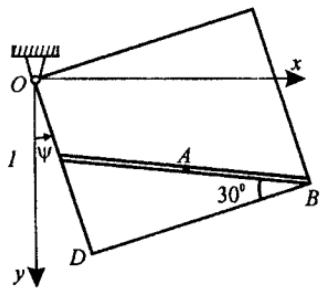
7



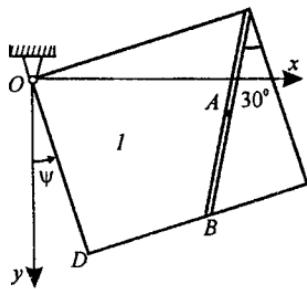
8



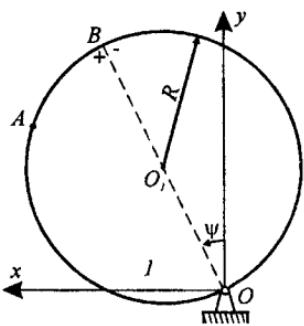
9



10



11



12

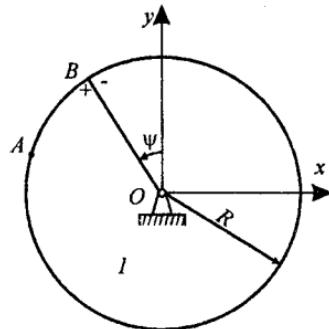
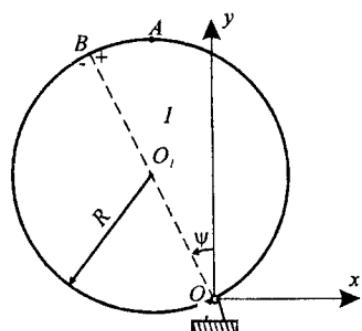
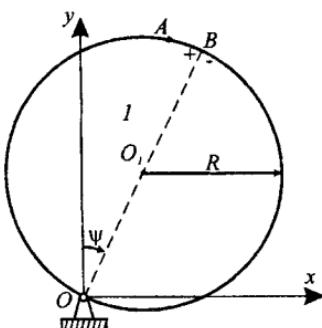


Рис. 75

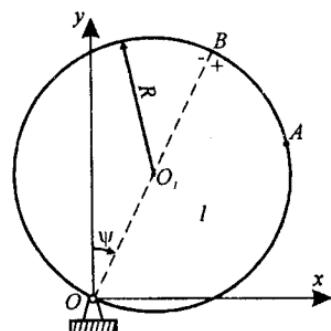
13



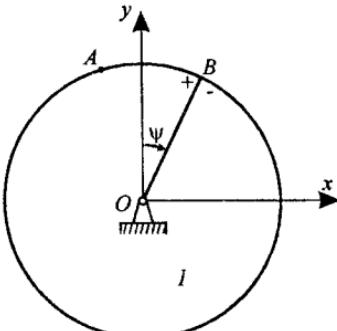
14



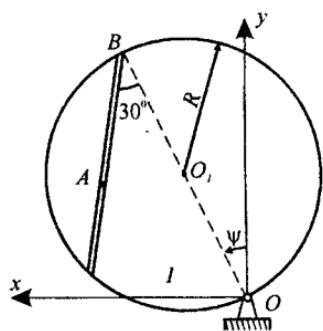
15



16



17



18

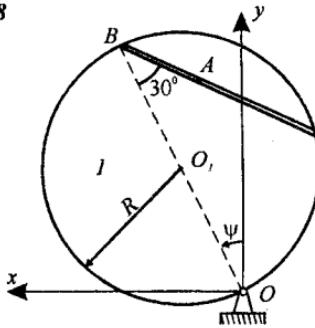
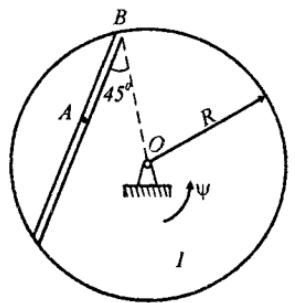
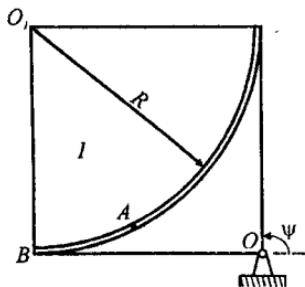


Рис. 76

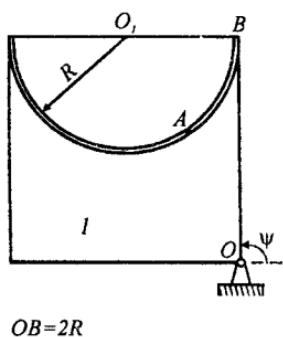
19



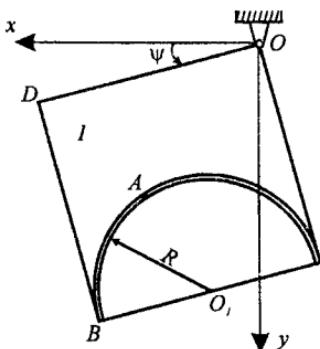
20



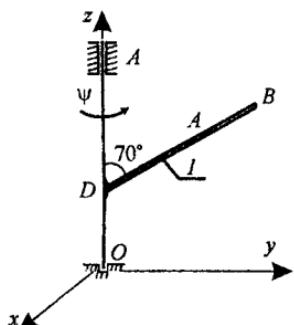
21



22



23

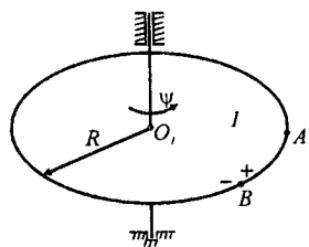


24

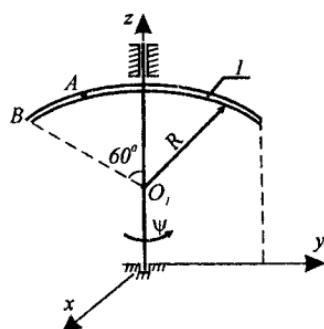


Рис. 77

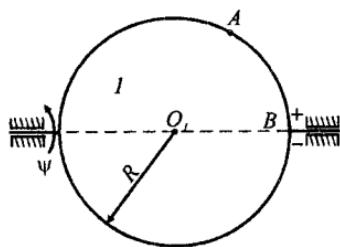
25



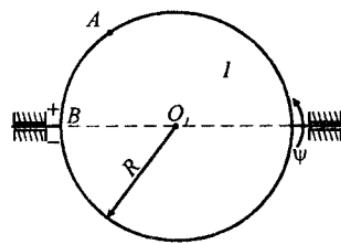
26



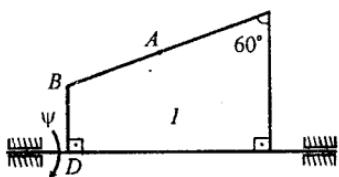
27



28



29



30

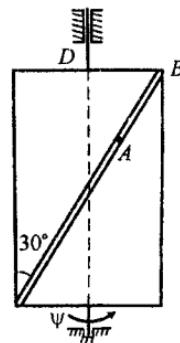


Рис. 78

$$v_r = \dot{s} = 0,2 \cdot 0,6\pi \cos 0,6\pi t .$$

У момант τ адносная скорасць роўная

$$v_r = 0,12 \cdot 3,14 \cdot (-0,3) = -0,11 \text{ м/с.}$$

Знак “мінус” у адказе паказвае, што ў дадзены момант часу адносны рух пункта ажыццяўляеца ў бок памяншэння дугі s . Вектар v_r накіраваны па датычнай да дугі акружнасці ў бок пункта B . Паміж вектарамі скорасцей v_e і v_r вугал 90° . Таму для падліку модуля абсалютнай скорасці можам прымяніць тэарэму Піфагора.

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{0,15^2 + 0,11^2} = \sqrt{0,0225 + 0,0121} = 0,19 \text{ м/с.}$$

Абсолютнае паскарэнне пункта вызначаем па тэарэме Карыоліса:

$$a_a = a_e + a_r + a_c .$$

З улікам віду і характеристу пераноснага і адноснага рухаў пункта вектарную роўнасць можна перапісаць у наступным выглядзе:

$$a_a = a_e^n + a_e^r + a_r^n + a_r^r + a_c .$$

Пераноснае нармальнае паскарэнне роўнае

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot h = 1^2 \cdot 0,15 = 0,15 \text{ м/с}^2 .$$

Вектар a_e^n накіраваны па радыусу вярчэння пункта A_1 да восі Oy .

Пераноснае тангенцыяльнае паскарэнне роўнае

$$a_e^r = \varepsilon_e \cdot h .$$

Пераноснае вуглавое паскарэнне $\varepsilon_e = \ddot{\phi} = 1 \text{ рад/с}^2$.

$$\text{Тады } a_e^r = 1 \cdot 0,15 = 0,15 \text{ м/с}^2 .$$

Вектар a_e^r накіраваны ў адзін бок з вектарам v_e , таму што знакі алгебраічных значэнняў ω_e і ε_e супадаюць (вярчэнне пласціны паскоранае).

Адноснае нармальнае паскарэнне роўнае

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{R} = \frac{0,11^2}{0,4} = 0,03 \text{ м/с}^2 .$$

Вектар \boldsymbol{a}_r'' накіраваны па радыусу дугі акружнасці да цэнтра D .

Адноснае тангенцыяльнае паскарэнне роўнае

$$a_r^t = \ddot{s} = -0,2 \cdot 0,6^2 \pi^2 \sin 0,6\pi t.$$

У момант t адноснае тангенцыяльнае паскарэнне

$$a_r^t = -0,2 \cdot 0,6^2 \cdot 3,14^2 \cdot 0,95 = -0,67 \text{ м/с}^2.$$

Знакі ў a_r^t і v_r атрымаліся аднолькавыя, таму вектары \mathbf{v}_r і \boldsymbol{a}_r^t накіраваны ў адзін бок (адносны рух пункта паскораны).

Паскарэнне Карыоліса роўнае

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin(\omega_e, \mathbf{v}_r) = 2 \cdot 1 \cdot 0,11 \cdot \sin(90^\circ - \beta) = 0,22 \cdot 0,93 = 0,2 \text{ м/с}^2.$$

Вектар \boldsymbol{a}_c згодна з формулай $\boldsymbol{a}_c = 2\omega_e \times \mathbf{v}_r$ накіраваны перпендыкулярна да пласціны ў адваротны бок накірунку вектара \mathbf{v}_e .

Цяпер, калі вядомы ўсе складовыя абсалютнага паскарэння пункта, падлічваем яго величыню праз праекцыі абсалютнага паскарэння на восі $Oxyz$.

$$a_{ax} = a_e^t - a_c = 0,15 - 0,2 = -0,05 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{ay} = a_r'' \cos \beta - a_r^t \sin \beta = 0,03 \cdot 0,93 - 0,67 \cdot 0,37 = -0,22 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{az} = -a_e^t - a_r'' \sin \beta - a_r^t \cos \beta = -0,15 - 0,03 \cdot 0,37 - 0,67 \cdot 0,93 = -0,78 \text{ м/с}^2;$$

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{0,0025 + 0,0484 + 0,6084} = \sqrt{0,6593} = 0,81 \text{ м/с}^2.$$

4. Складаны рух цвёрдага цела

Заданне К-6

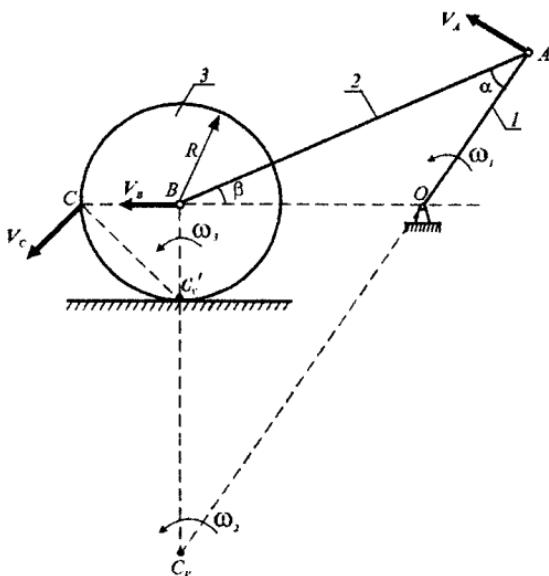
Вызначэнне скорасцей пунктаў цвёрдага цела
пры плоскапаралельным руху

Знайсці ў дадзеным становішчы механізма (рыс. 80–82) скорасці пунктаў A, B, C і вуглавыя скорасці ўсіх звёнаў, калі вядома

вуглавая скорасць вядучага звяна. Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 15.

Прыклад рашэння задання K-6

Вызначыць скорасці пунктаў A , B , C механізма (рыс. 79) і вуглавыя скорасці звёнаў, калі $\omega_1 = 2$ рад/с, $OA = 0,6$ м, $\alpha = 35^\circ$, $AB = 1,4$ м, $R = 0,3$ м. Кола 3 коціца па нерухомай паверхні без праслізгвання.



Рыс. 79

Рашэнне. Вядуча звяно — крывашып OA ўдзельнічае ў вярчальным руху з вуглавой скорасцю ω_1 .

Скорасць пункта A крывашыпа OA роўная

$$v_A = \omega_1 \cdot OA = 2 \cdot 0,6 = 1,2 \text{ м/с.}$$

Разглядаем рух шатуна AB , які шарнірна прыматацаваны ў пункце A да крывашыпа. Шатун ўдзельнічае ў плоскапаралельным руху. Можам дакладна паказаць скорасці пунктаў A і B . Вектар v_A перпендыкулярны да радыуса OA , а вектар v_B накіраваны паралельна гарызантальнай нерухомай паверхні ў бок пра-

малінейнага руху цэнтра кола 3. Цяпер можна пабудаваць імгненны цэнтр скорасцей звяна 2. Ён знаходзіцца на перасячэнні перпендыкуляраў да вектараў скорасцей у пункце C_v .

Па тэарэме косінусаў знайдзем адразак BO .

$$BO = \sqrt{AB^2 + OA^2 - 2 \cdot AB \cdot OA \cos \alpha} = \sqrt{1,96 + 0,36 - 1,37} = 0,97 \text{ м.}$$

Па тэарэме сінусаў вызначым вугал β .

$$\frac{OA}{BO} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}; \quad \sin \beta = \frac{OA \cdot \sin \alpha}{BO} = \frac{0,6 \cdot 0,574}{0,97} = 0,355, \quad \beta = 20,8^\circ.$$

Скорасць пункта B знаходзім па тэарэме аб праекцыях скорасцей.

$$v_B \cos 20,8^\circ = v_A \cos 55^\circ,$$

$$v_B = v_A \frac{\cos 55^\circ}{\cos 20,8^\circ} = 1,2 \cdot \frac{0,57}{0,935} = 0,73 \text{ м/с.}$$

Для вызначэння вуглавой скорасці шатуна AB неабходна ведаць імгненны радыус AC_v пункта A .

Па тэарэме сінусаў з трохвугольніка BAC_v атрымаем

$$\frac{BA}{AC_v} = \frac{\sin \angle BC_v A}{\sin \angle ABC_v} = \frac{\sin 35^\circ}{\sin 110,8^\circ};$$

$$AC_v = BA \frac{\sin 110,8^\circ}{\sin 35^\circ} = 1,4 \cdot \frac{0,94}{0,57} = 2,3 \text{ м.}$$

Тады вуглавая скорасць шатуна AB роўная

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AC_v} = \frac{1,2}{2,3} = 0,5 \text{ рад/с.}$$

Далей разглядаем рух кола 3. Яно ўдзельнічае ў плоскапаралельным руху.

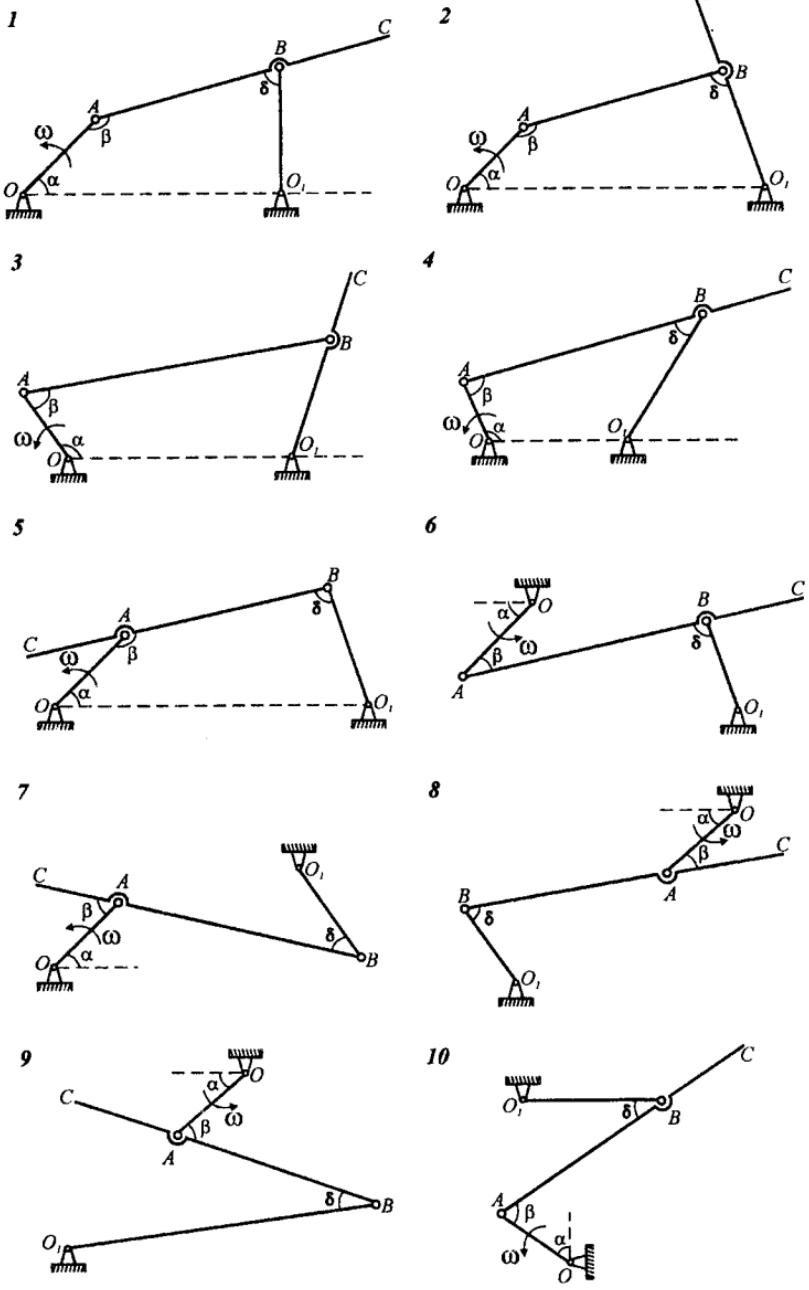
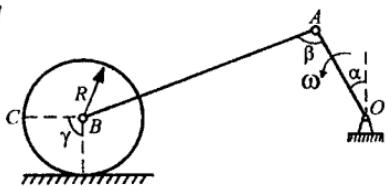
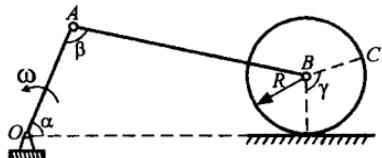


Рис. 80

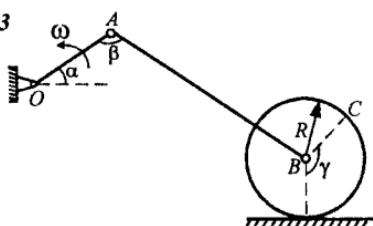
11



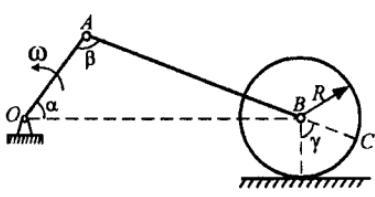
12



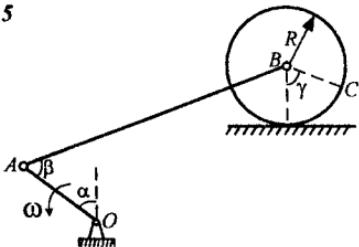
13



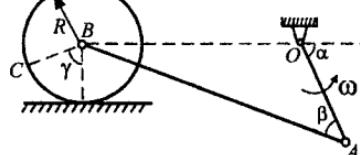
14



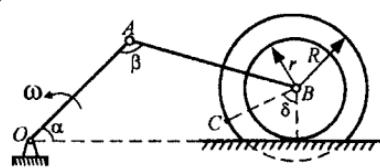
15



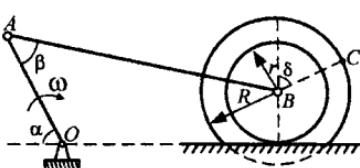
16



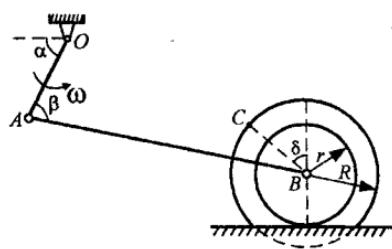
17



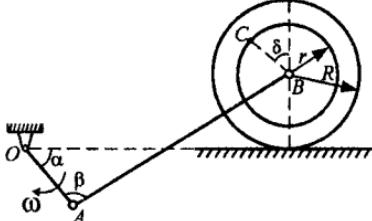
18



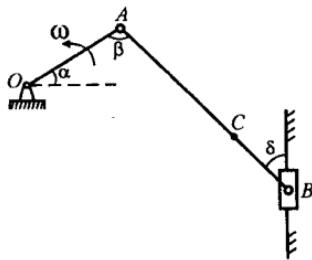
19



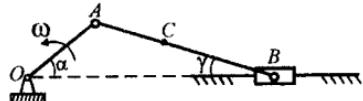
20



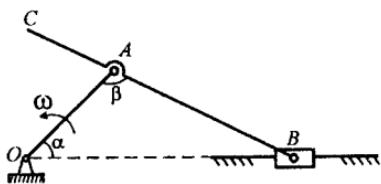
21



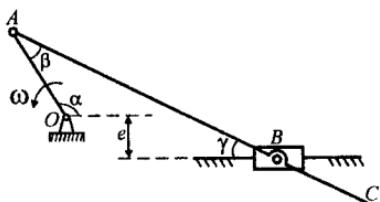
22



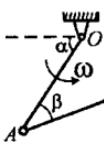
23



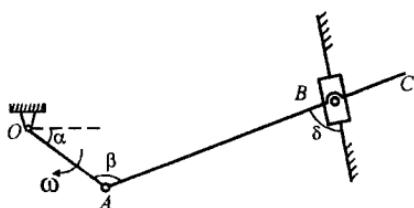
24



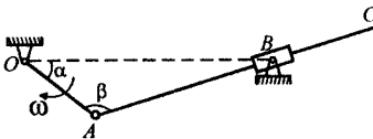
25



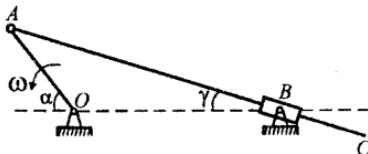
26



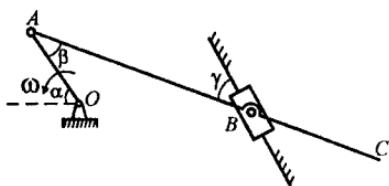
27



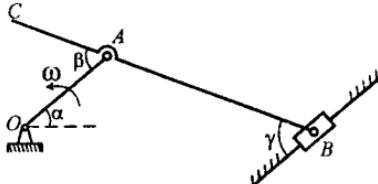
28



29



30



Рыс. 82

Табліца 15

| Варіант | OA, м | α , град | β , град | AB, м | δ , град | BO ₁ , м | BC, м | ω , рад/с | R, м | γ , град | r, м |
|---------|-------|-----------------|----------------|-------|-----------------|---------------------|-------|------------------|------|-----------------|------|
| 1 | 0,3 | 45 | 145 | 0,7 | 60 | | 0,2 | 2,0 | | | |
| 2 | 0,4 | 35 | 150 | 0,6 | 100 | | 0,3 | 1,5 | | | |
| 3 | 0,5 | 140 | 60 | 0,8 | | 0,7 | 0,4 | 1,7 | | | |
| 4 | 0,6 | 110 | 80 | 1,2 | 45 | | 0,5 | 1,4 | | | |
| 5 | 0,3 | 50 | 150 | 0,5 | 90 | | 0,9 | 1,9 | | | |
| 6 | 0,4 | 60 | 30 | 1,0 | 95 | 0,5 | 0,4 | 1,3 | | | |
| 7 | 0,5 | 40 | 70 | 0,9 | 45 | 0,6 | 1,3 | 1,8 | | | |
| 8 | 0,2 | 45 | 30 | 0,7 | 65 | 0,4 | 1,0 | 1,6 | | | |
| 9 | 0,3 | 20 | 40 | 0,6 | 30 | 1,0 | 1,2 | 1,2 | | | |
| 10 | 0,4 | 60 | 45 | 0,8 | 35 | 0,6 | 1,1 | 1,1 | | | |
| 11 | 0,5 | 40 | 120 | 1,1 | | | | 1,0 | 0,4 | 85 | |
| 12 | 0,4 | 45 | | 1,0 | | | | 2,0 | 0,3 | 120 | |
| 13 | 0,2 | 15 | 125 | 1,2 | | | | 1,9 | 0,1 | 150 | |
| 14 | 0,3 | 42 | 128 | | | | | 1,8 | 0,2 | 50 | |
| 15 | 0,6 | 50 | 45 | 1,4 | | | | 1,7 | 0,4 | 60 | |
| 16 | 0,5 | 70 | 40 | | | | | 1,6 | 0,3 | 45 | |
| 17 | 0,4 | 40 | 120 | | 70 | | | 1,5 | 0,2 | | 0,1 |
| 18 | 0,3 | 45 | 35 | | 40 | | | 1,4 | 0,4 | | 0,2 |
| 19 | 0,2 | 55 | 70 | 1,3 | 50 | | | 1,3 | 0,3 | | 0,2 |
| 20 | 0,5 | 40 | 95 | | 45 | | | 1,2 | 0,4 | | 0,3 |
| 21 | 0,2 | 20 | 130 | 1,0 | 60 | | 0,4 | 1,1 | | | |
| 22 | 0,3 | 25 | | | | | 0,2 | 1,0 | | 20 | |
| 23 | 0,4 | 50 | 100 | | | | 0,9 | 0,9 | | | |
| 24 | 0,5 | 140 | 20 | 1,2 | | | 0,5 | 0,8 | | 20 | |
| 25 | 0,6 | 45 | 30 | 1,4 | 75 | | 0,4 | 0,7 | | | |
| 26 | 0,2 | 35 | 110 | 1,1 | 80 | | 0,1 | 0,6 | | | |
| 27 | 0,3 | 40 | 120 | | | | 0,5 | 0,5 | | | |
| 28 | 0,4 | 50 | | | | | 0,6 | 1,0 | | 25 | |
| 29 | 0,5 | 30 | 30 | 1,5 | | | 0,4 | 1,2 | | 60 | |
| 30 | 0,2 | 30 | 60 | 1,3 | | | 1,6 | 1,4 | | 75 | |

Калі кола коціцца без праслізгвання, то яго імгненны цэнтр скорасцей знаходзіцца ў пункце C'_v дотыку кола да нерухомай паверхні. У гэтым пункце скорасць роўная нулю.

Буглавая скорасць кола роўная

$$\omega_3 = \frac{v_B}{BC'_v} = \frac{0,73}{0,3} = 2,43 \text{ рад/с.}$$

Скорасць пункта C кола працягнальна імгненнаму радыусу CC'_v :

$$v_C = \omega_3 \cdot CC'_v = \omega_3 \cdot R \cdot \sqrt{2} = 2,43 \cdot 0,3 \cdot 1,4 = 1 \text{ м/с.}$$

Вектар скорасці v_C накіраваны перпендыкулярна імгненнаму радыусу CC'_v у бок качэння кола 3.

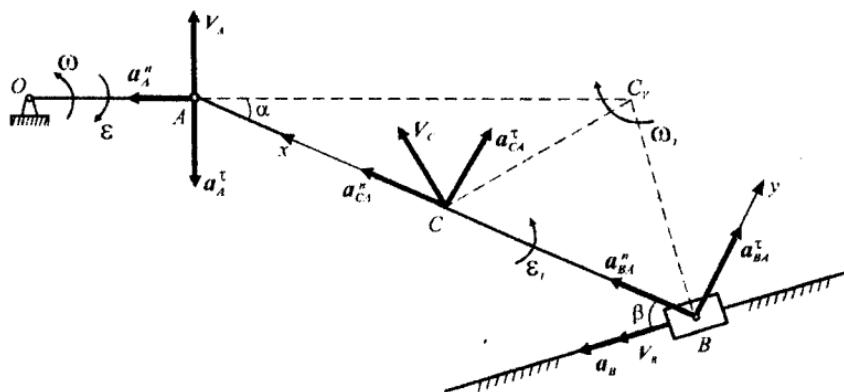
Заданне K-7

Вызначэнне скорасцей і паскарэнняў пунктаў цвёрдага цела пры плоскапаралельным руху

Вылічыць у дадзеным становішчы механізма скорасці і паскарэнні пунктаў B і C (рыс. 84–86). Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 16.

Прыклад решэння задання K-7

У прыведзеным становішчы механізма (рыс. 83) вылічыць скорасці і паскарэнні пунктаў B і C , калі $OA = 0,2 \text{ м}$, $AB = 1,0 \text{ м}$, $AC = 0,5 \text{ м}$, $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 40^\circ$, $\omega = 1 \text{ рад/с}$, $\varepsilon = 0,5 \text{ рад/с}^2$.



Рыс. 83

Рашэнне. Крывашып OA верціца вакол нерухомай восі O роўназапаволена. Скорасць пункта A роўная

$$v_A = \omega \cdot OA = 1 \cdot 0,2 = 0,2 \text{ м/с.}$$

Паскарэнне пункта A мае дзве складовыя — тангенцыйальнае і нармальнае паскарэнні.

Табліца 16

| Варыант | ω_1 , рад/с | ω_2 , рад/с | r_1 , м | r_2 , м | OA, м | AB, м | BC, м | α , град | δ , град | β , град | ε_1 , рад/с ² |
|---------|-----------------------|-----------------------|--------------|--------------|----------|----------|----------|--------------------|--------------------|-------------------|---|
| 1 | 0,6 | | | | 0,2 | 0,7 | 0,3 | 30 | | | 0,2 |
| 2 | 0,7 | | | | 0,3 | | 0,4 | 45 | 35 | | |
| 3 | 0,5 | | | | 0,4 | 0,9 | 1,2 | 120 | | | 0,4 |
| 4 | 0,8 | | | | 0,5 | 1,2 | 0,4 | 30 | | 100 | |
| 5 | 0,9 | | | | 0,2 | 0,8 | 0,6 | 40 | 60 | | 0,3 |
| 6 | 1,0 | | | | 0,3 | 0,7 | 1,1 | 135 | | 65 | |
| 7 | 0,5 | | | | 0,2 | 0,6 | | | 70 | | 0,2 |
| 8 | 0,6 | | | | 0,3 | 0,7 | | | 120 | 70 | 0,3 |
| 9 | 0,7 | | 0,7 | 0,2 | | | | 20 | | 65 | 0,4 |
| 10 | 0,8 | | | | 0,4 | 0,9 | 0,3 | 30 | | 110 | |
| 11 | 0,9 | | | | 0,5 | 1,2 | 1,6 | 120 | 100 | | 0,5 |
| 12 | 1,0 | | | | 0,6 | 1,3 | 0,7 | 40 | 60 | | |
| 13 | 0,5 | | | | 0,3 | 0,7 | 0,5 | 25 | | 65 | 0,2 |
| 14 | 0,6 | | | | | 0,4 | | 45 | | | 0,3 |
| 15 | 0,7 | | 0,4 | 0,6 | | | | 50 | 30 | | 0,3 |
| 16 | 0,8 | | 0,5 | | | 0,4 | | 60 | | 70 | 0,4 |
| 17 | 0,9 | | | | 0,4 | 0,9 | 0,4 | 40 | 70 | 130 | 0,4 |
| 18 | 1,0 | | | | 0,3 | 1,0 | 0,4 | 45 | 45 | 60 | 0,5 |
| 19 | 0,4 | | | | 0,5 | 1,2 | 0,3 | 50 | 60 | 60 | 0,2 |
| 20 | 0,5 | | | | 0,4 | 0,8 | 1,2 | 25 | 50 | 45 | 0,3 |
| 21 | 0,6 | 0,5 | | | 0,5 | 0,3 | | 45 | | 100 | 0,3 |
| 22 | 0,7 | 0,6 | | | 0,5 | 0,3 | | 60 | | | |
| 23 | 0,8 | 0,7 | | | 0,7 | 0,4 | | 60 | | | |
| 24 | 0,9 | | | | 0,2 | 0,6 | 0,2 | 70 | 90 | 140 | 0,4 |
| 25 | 1,0 | | | | 0,3 | 0,9 | 1,3 | 90 | 45 | 120 | 0,5 |
| 26 | 0,4 | | | | 0,4 | 1,0 | 0,5 | 120 | 70 | 80 | 0,3 |
| 27 | 0,5 | | 0,3 | | 0,5 | 1,2 | | 65 | | 50 | 0,4 |
| 28 | 0,6 | | | 0,2 | 0,3 | 0,9 | | 60 | 50 | 45 | 0,5 |
| 29 | 0,7 | 0,6 | 0,4 | 0,2 | | | | 70 | | 90 | |
| 30 | 0,8 | | | | 0,3 | 0,7 | | 50 | | | 0,6 |

$$a_A^t = \varepsilon \cdot OA = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A'' = \omega^2 \cdot OA = 1 \cdot 0,2 = 0,2 \text{ м/с}^2.$$

Паказваєм на рис. 83 вектары \mathbf{v}_A , a_A^r і a_A^n .

Разглядаєм рух шатуна AB . Ён уздельнічає у плоскапаралельним руху. Ведаєм скорасць пункта A і паказваєм накірунак вектара скорасці пункта B (уздоўж нерухомай накіравальнай паўзуна B). На падставе вектараў \mathbf{v}_A і \mathbf{v}_B будзем імгненны цэнтр скорасцей шатуна AB . Гэта пункт C_v .

Вызначаем імгненныя радыусы пунктаў A і B шатуна AB пры развароце вакол імгненнага цэнтра скорасцей C_v . У трохвугольніку ABC_v вугал $AC_v B$ роўны

$$180^\circ - \alpha - (90^\circ - \beta) = 180^\circ - 20^\circ - 50^\circ = 110^\circ.$$

Па тэарэме сінусаў вызначым BC_v і AC_v .

$$\frac{BC_v}{AB} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 110^\circ}; \quad \frac{AC_v}{AB} = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 110^\circ}.$$

$$BC_v = AB \frac{\sin 20^\circ}{\sin 110^\circ} = 1 \frac{0,342}{0,940} = 0,36 \text{ м};$$

$$AC_v = AB \frac{\sin 50^\circ}{\sin 110^\circ} = 1 \frac{0,766}{0,94} = 0,81 \text{ м}.$$

Вуглавая скорасць шатуна AB

$$\omega_1 = \frac{\mathbf{v}_A}{AC_v} = \frac{0,2}{0,81} = 0,25 \text{ рад/с.}$$

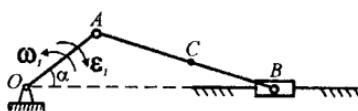
Скорасць пункта B шатуна AB

$$\mathbf{v}_B = \omega_1 \cdot BC_v = 0,25 \cdot 0,36 = 0,09 \text{ м/с.}$$

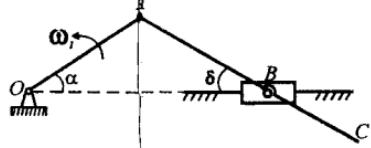
Для вызначэння скорасці пункта C шатуна AB паказваєм імгненны радыус гэтага пункта CC_v . Вектар скорасці \mathbf{v}_C накіроўваєм перпендыкулярна імгненнаму радыусу CC_v у бок развароту шатуна AB вакол імгненнага цэнтра скорасцей C_v .

З трохвугольніка ACC_v па тэарэме косінусаў вызначаем CC_v .

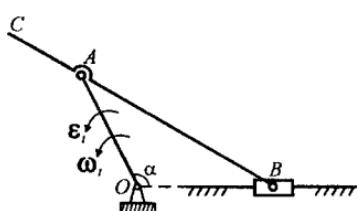
1



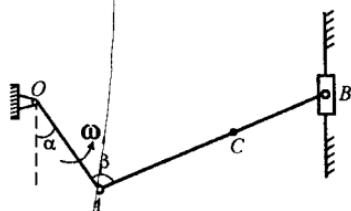
2



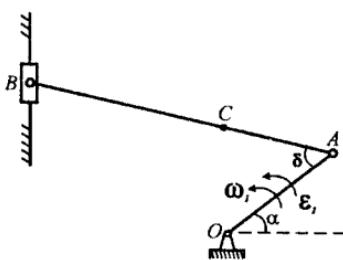
3



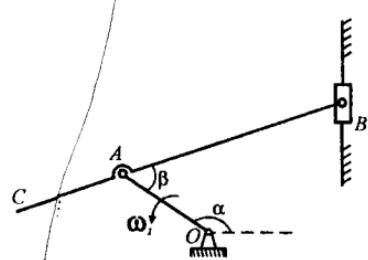
4



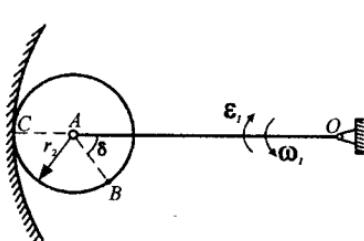
5



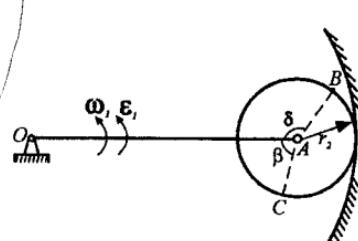
6



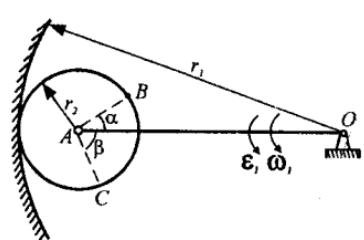
7



8



9



10

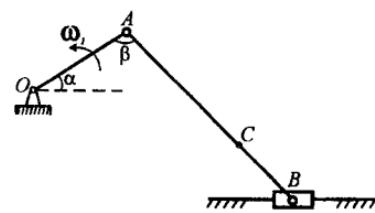
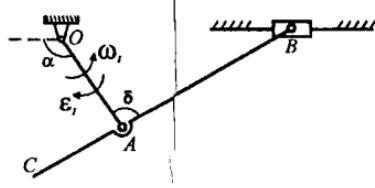
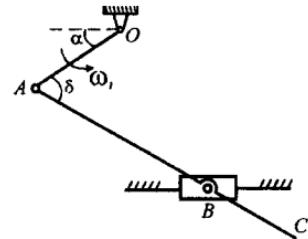


Рис. 84

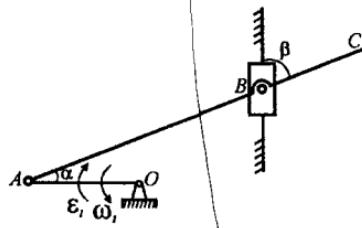
II



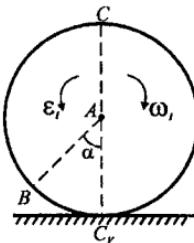
12



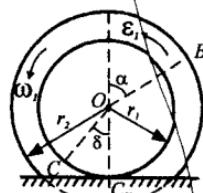
13



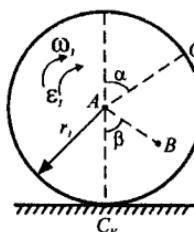
14



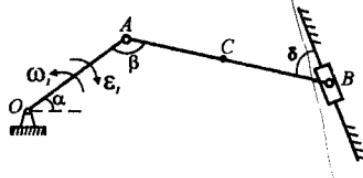
15



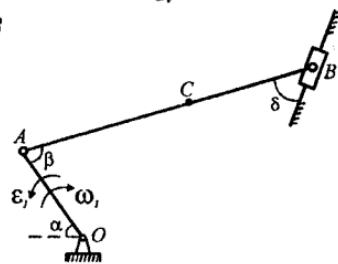
16



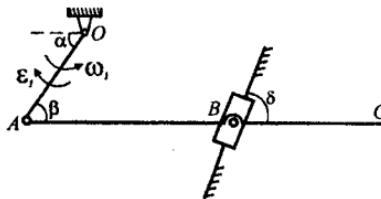
17



18



19



20

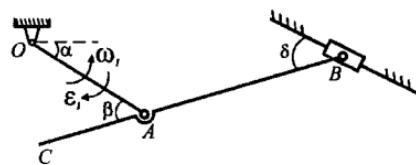
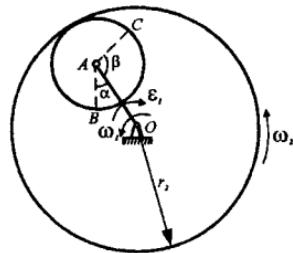
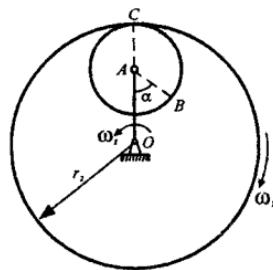


Рис. 85

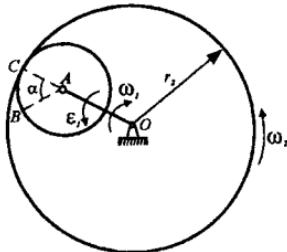
21



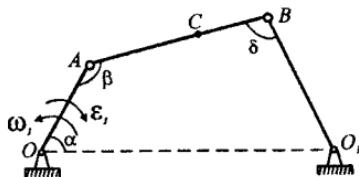
22



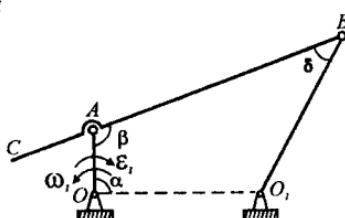
23



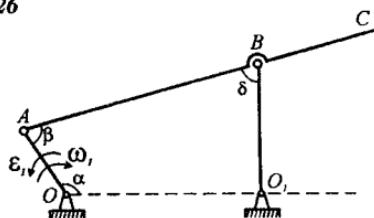
24



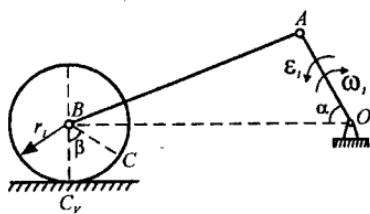
25



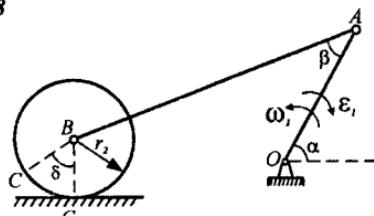
26



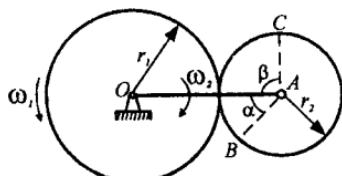
27



28



29



30

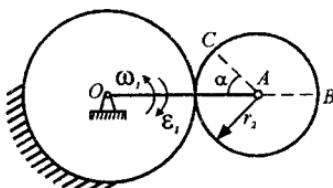


Рис. 86

$$CC_v = \sqrt{AC^2 + AC_v^2 - 2AC \cdot AC_v \cdot \cos \alpha} = \\ = \sqrt{0,5^2 + 0,81^2 - 2 \cdot 0,5 \cdot 0,81 \cdot 0,94} = \sqrt{0,145} = 0,38 \text{ м.}$$

Скорасць пункта C шатуна AB

$$v_C = \omega_1 \cdot CC_v = 0,25 \cdot 0,38 = 0,095 \text{ м/с.}$$

Паскарэнне пункта B шатуна AB вызначым па тэарэме складання паскарэння ў плоскапаралельным руху.

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{a}_{BA}, \text{ або } \underline{a}_B = \underline{a}_A^t + \underline{a}_A^n + \underline{a}_{BA}^n + \underline{a}_{BA}^t.$$

Складовыя паскарэння пункта A нам вядомыя па модулю і накірунку (падкрэсліваем іх у вектарным ураўненні двойчы).

Паскарэнні \underline{a}_B , \underline{a}_{BA}^n , \underline{a}_{BA}^t можам паказаць на рыс. 83, тым самым яны будуть вядомыя па накірунку (падкрэслім адною рысікаю). Велічыню паскарэння \underline{a}_{BA}^n можам падлічыць, таму што ведаем вуглавую скорасць шатуна AB (падкрэсліваем a_{BA}^n яшчэ адною рысікаю).

$$a_{BA}^n = \omega_1^2 \cdot AB = 0,25^2 \cdot 1 = 0,06 \text{ м/с}^2.$$

Такім чынам, у вектарным ураўненні засталіся толькі дзве невядомыя: a_B і a_{BA}^t , якія можна вызначыць, калі запішам дзве праекцыі вектарнай роўнасці на восі Bxy .

$$\begin{cases} a_B \cos \beta = -a_A^t \sin \alpha + a_A^n \cos \alpha + a_{BA}^n, \\ -a_B \sin \beta = -a_A^t \cos \alpha - a_A^n \sin \alpha + a_{BA}^t. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_B \cdot 0,766 = -0,1 \cdot 0,342 + 0,2 \cdot 0,94 + 0,06, \\ -a_B \cdot 0,643 = -0,1 \cdot 0,94 - 0,2 \cdot 0,342 + a_{BA}^t. \end{cases}$$

$$a_B = \frac{0,216}{0,766} = 0,28 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^t = -0,28 \cdot 0,643 + 0,094 + 0,068 = -0,02 \text{ м/с}^2.$$

Тады вуглавое паскарэнне шатуна AB

$$\varepsilon_1 = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB} = \frac{0,02}{1} = 0,02 \text{ рад/с}^2.$$

Адказ для a_{BA}^{τ} атрымалі са знакам “мінус”. Гэта азначае, што вектар a_{BA}^{τ} , што паказаны на рыс. 83, павінен быць накіраваны ў проціеглы бок. Таму вуглавое паскарэнне шатуна ε_1 паказває па ходу гадзіннікавай стрэлкі. У выніку атрымліваем аднолькавая накірункі для вуглавой скорасці і вуглавога паскарэння шатуна і робім вывад, што шатун у дадзены момант часу паварочваецца паскорана.

Паскарэнне пункта C шатуна вызначым па тэарэме складання паскарэння ў плоскапаралельным руху.

$$a_C = \underline{\underline{a}}_A^n + \underline{\underline{a}}_A^\tau + \underline{\underline{a}}_{CA}^n + \underline{\underline{a}}_{CA}^\tau.$$

Паскарэнне пункта A мы ведаем, а складовыя паскарэння развароту пункта C адносна полюса A падлічым і пакажам на рыс. 83 (у правай частцы вектарнай роўнасці ўсе вектары падкрэслены двойчы).

$$a_{CA}^n = \omega_1^2 \cdot AC = 0,25^2 \cdot 0,5 = 0,03 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{CA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot AC = 0,02 \cdot 0,5 = 0,01 \text{ м/с}^2.$$

Невядомае паскарэнне a_C вызначым па яго праекцыях на восі каардынат Bxy .

$$a_{Cx} = a_A^n \cos \alpha - a_A^\tau \sin \alpha + a_{CA}^n = 0,2 \cdot 0,94 - 0,1 \cdot 0,342 + \\ + 0,03 = 0,19 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Cy} = -a_A^n \sin \alpha - a_A^\tau \cos \alpha - a_{CA}^\tau = -0,2 \cdot 0,342 - 0,1 \cdot 0,94 - 0,01 = \\ = -0,17 \text{ м/с}^2.$$

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{0,19^2 + 0,17^2} = \sqrt{0,065} = 0,255 \text{ м/с}^2.$$

Заданне К-8
Вызначэнне скорасцей і паскарэнняў пунктаў
плоскага механізма

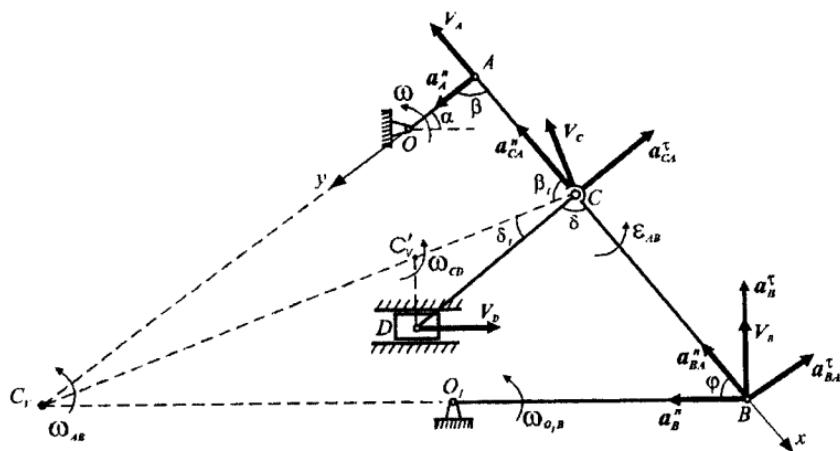
У дадзеным становішчы плоскага механізма (рыс. 88–92) вызначыць скорасці ўсіх шарніраў механізма, вуглавыя скорасці звёнаў, паскарэнні пунктаў B і C . Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 17.

Прыклад рашэння задання К-8

Вызначыць скорасці ўсіх шарніраў плоскага механізма (рыс. 87), вуглавыя скорасці звёнаў і паскарэнні пунктаў B і C , калі $OA = 0,15 \text{ м}$, $AB = 0,7 \text{ м}$, $CB = 0,4 \text{ м}$, $BO_1 = 0,5 \text{ м}$, $CD = 0,45 \text{ м}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\varphi = 60^\circ$, $\delta = 90^\circ$, $\omega = 2 \text{ рад/с}$.

Рашэнне. У выбраным маштабе згодна з прыведзенымі данымі будзем кінематычную схему механізма. Вызначаем скорасці рухомых пунктаў механізма, паказаных на рисунку, і вуглавыя скорасці звёнаў. Крывашып OA ўдзельнічае ў вярчальным руху.

$$v_A = \omega \cdot OA = 2 \cdot 0,15 = 0,3 \text{ м/с.}$$



Рыс. 87

Шатун АВ удзельнічае ў плоскапаралельным руху. У пунктах A і B шатуна паказваем на рысунку дакладныя накірункі вектараў скорасцей v_A і v_B . Яны перпендыкулярныя адпаведным радыусам OA і O_1B .

На перасячэнні перпендыкуляраў да вектараў скорасцей у пунктах A і B знаходзіцца імгненны цэнтр скорасцей звяза AB . Гэта пункт C_v .

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AC_v}{BC_v}.$$

З улікам таго, што $\beta = 90^\circ$, а $\varphi = 60^\circ$, маём

$$\frac{AC_v}{BC_v} = \sin 60^\circ, \quad \frac{v_A}{v_B} = \sin 60^\circ, \quad v_B = \frac{v_A}{\sin 60^\circ} = \frac{0,3}{0,866} = 0,35 \text{ м/с.}$$

У пункце С шатуна AB вектар скорасці v_C накіраваны перпендыкулярна да імгненнага радыуса CC_v у бок развароту шатуна AB вакол імгненнага цэнтра скорасцей C_v .

$$AC_v = AB \operatorname{tg} \varphi = 0,7 \cdot \sqrt{3} = 1,2 \text{ м;}$$

$$CC_v = \sqrt{(AC_v)^2 + (AC)^2} = \sqrt{1,2^2 + 0,3^2} = 1,24 \text{ м;}$$

$$\frac{v_A}{v_C} = \frac{AC_v}{CC_v}, \quad v_C = v_A \frac{CC_v}{AC_v} = 0,3 \frac{1,24}{1,2} = 0,31 \text{ м/с.}$$

Вуглавая скорасць шатуна AB

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC_v} = \frac{0,3}{1,2} = 0,25 \text{ рад/с.}$$

Вуглавая скорасць звяза O_1B (каромысла)

$$\omega_{O_1B} = \frac{v_B}{O_1B} = \frac{0,35}{0,5} = 0,7 \text{ рад/с.}$$

Табліца 17

| Ва ры ант | α , град | O_A , м | ω , рад/с | β , град | AB , м | BC , м | AC , м | δ , град | CD , м | BO_1 , м | DO_2 , м | Φ , град | γ , град |
|-----------------|--------------------|--------------|---------------------|-------------------|-------------|-------------|-------------|--------------------|-------------|---------------|---------------|------------------|--------------------|
| 1 | 20 | 0,3 | 1,0 | 110 | 0,8 | | | 70 | 0,9 | | | 65 | |
| 2 | 80 | 0,2 | 0,8 | 60 | 0,7 | 1,2 | | 65 | 0,8 | | 0,7 | 70 | |
| 3 | 45 | 0,4 | 0,9 | 50 | | | 0,5 | 130 | 0,8 | 0,6 | | 50 | 60 |
| 4 | 30 | 0,3 | 1,0 | 65 | 1,2 | | 0,6 | 120 | 0,5 | | 0,6 | | 65 |
| 5 | 50 | 0,2 | 1,1 | 80 | | | 1,0 | 75 | 0,9 | | | 30 | |
| 6 | 40 | 0,4 | 1,2 | 100 | | 0,4 | | 70 | 0,8 | | 0,7 | 30 | |
| 7 | 30 | 0,5 | 0,7 | 75 | | | 0,8 | 60 | 0,7 | 0,7 | | 25 | 30 |
| 8 | 65 | 0,4 | 0,8 | 150 | 1,4 | 0,6 | | | 0,8 | | | | 100 |
| 9 | 45 | 0,3 | 0,9 | 110 | 0,6 | 0,5 | | | 0,7 | | 0,6 | 80 | 75 |
| 10 | 40 | 0,2 | 1,0 | 50 | 1,1 | | | 50 | 0,9 | 0,5 | | 45 | 30 |
| 11 | 20 | 0,3 | 1,1 | 60 | 0,7 | 0,3 | | 45 | 0,7 | 0,8 | | 40 | |
| 12 | 70 | 0,4 | 1,2 | 55 | 0,6 | | | 60 | 0,6 | 0,7 | 0,5 | 90 | 110 |
| 13 | 30 | 0,5 | 0,7 | 60 | 0,5 | | 0,5 | 140 | 1,2 | 0,9 | | 60 | 60 |
| 14 | 35 | 0,2 | 0,8 | 85 | 1,0 | 0,4 | | 90 | 0,7 | 0,8 | | 75 | |
| 15 | 45 | 0,3 | 0,9 | 135 | 1,2 | | 0,7 | 20 | 1,4 | 0,5 | | 55 | |
| 16 | 25 | 0,4 | 1,0 | 65 | 1,1 | 0,6 | | 50 | 0,7 | | 0,7 | 50 | |
| 17 | 20 | 0,5 | 1,1 | 80 | 1,4 | | 0,6 | 65 | 0,8 | 0,7 | 0,8 | 30 | 30 |
| 18 | 30 | 0,2 | 1,2 | 100 | | 0,4 | 0,4 | | 0,6 | 0,5 | | 60 | 40 |
| 19 | 40 | 0,3 | 1,3 | 75 | | 0,6 | 1,0 | 150 | 0,5 | 0,6 | 0,4 | 70 | 35 |
| 20 | 35 | 0,4 | 0,7 | 65 | 0,3 | | 0,9 | | 0,7 | 0,8 | | 20 | 60 |
| 21 | 70 | 0,5 | 0,8 | 120 | 1,0 | | 0,4 | 70 | 0,8 | 0,5 | 0,6 | 110 | 135 |
| 22 | 15 | 0,2 | 0,9 | 130 | 1,1 | 0,3 | | | 0,5 | 0,9 | | 90 | 45 |
| 23 | 45 | 0,3 | 1,0 | 40 | 1,2 | | 0,7 | 30 | 0,6 | 0,8 | 0,7 | 80 | 50 |
| 24 | 50 | 0,4 | 1,1 | 110 | 0,6 | | 0,3 | 60 | 0,8 | 0,7 | 0,9 | 140 | 115 |
| 25 | 20 | 0,5 | 1,2 | 80 | 0,9 | 0,6 | | 40 | 0,7 | 0,7 | | 75 | 150 |
| 26 | 40 | 0,2 | 1,3 | 60 | 0,8 | | 0,4 | 30 | 0,5 | | 0,6 | 45 | |
| 27 | 45 | 0,4 | 0,7 | 50 | 0,9 | | 0,4 | | 0,6 | | | 60 | 20 |
| 28 | 65 | 0,3 | 0,8 | 100 | 1,0 | 0,2 | | 90 | 1,2 | | 0,4 | 30 | 130 |
| 29 | 50 | 0,5 | 0,9 | 45 | 1,4 | | 1,2 | 25 | 1,0 | 1,0 | 0,5 | 140 | 45 |
| 30 | 35 | 0,4 | 1,0 | 155 | | 0,5 | 1,3 | 100 | 1,2 | 0,7 | 0,9 | 110 | 60 |

Шатун DC рухаецца плоскапаралельна. Вектар скорасці паўзуна D накіраваны ўздоўж нерухомых накіравальных, гэта значыць паралельна звязу O_1B . Па скорасцях v_C і v_D будзем імгненны цэнтр скорасцей C'_v шатуна DC .

Вылічым вуглы β_1 і δ_1 .

Па тэарэме косінусаў у трохвугольніку ACC_v

$$(AC_v)^2 = (AC)^2 + (CC_v)^2 - 2AC \cdot CC_v \cos \beta_1;$$

$$1,2^2 = 0,3^2 + 1,24^2 - 2 \cdot 0,3 \cdot 1,24 \cdot \cos \beta_1;$$

$$1,44 = 0,09 + 1,54 - 0,74 \cos \beta_1;$$

$$\cos \beta_1 = 0,257, \quad \beta_1 = 75^\circ.$$

$$\delta_1 = 180^\circ - \beta_1 - \delta = 180^\circ - 75^\circ - 90^\circ = 15^\circ.$$

Вуглы β і δ роўныя 90° . Таму звёны OA і DC паралельныя. Вектар v_D складае са звязном DC вугал α , а вугал $C'_v DC$ роўны $90^\circ - \alpha = 60^\circ$. Вугал $DC'_v C$ роўны $180^\circ - 60^\circ - 15^\circ = 105^\circ$. З трохвугольніка $C'_v DC$ па тэарэме сінусаў маем:

$$\frac{CD}{C'_v C} = \frac{\sin 105^\circ}{\sin 60^\circ}, \quad C'_v C = CD \frac{\sin 60^\circ}{\sin 105^\circ} = 0,45 \frac{0,866}{0,966} = 0,4 \text{ м};$$

$$\frac{CD}{C'_v D} = \frac{\sin 105^\circ}{\sin 15^\circ}, \quad C'_v D = CD \frac{\sin 15^\circ}{\sin 105^\circ} = 0,45 \frac{0,259}{0,966} = 0,12 \text{ м}.$$

Вылічым скорасць пункта D і вуглавую скорасць звяна CD .

$$\frac{v_D}{v_C} = \frac{C'_v D}{C'_v C}, \quad v_D = v_C \frac{C'_v D}{C'_v C} = 0,31 \frac{0,12}{0,4} = 0,09 \text{ м/с};$$

$$\omega_{CD} = \frac{v_C}{C'_v C} = \frac{0,31}{0,4} = 0,78 \text{ рад/с.}$$

Вылічым паскарэнні пунктаў A , B і C . Па ўмове задання крытавышы OA верціца раўнамерна. Таму $a_A = a_A^n$.

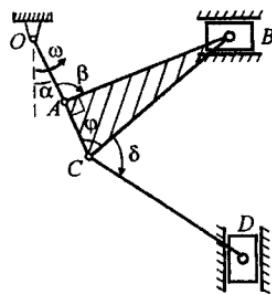
$$a_A^n = \omega^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 0,15 = 0,6 \text{ м/с}^2.$$

Паскарэнне пункта B шатуна AB вызначаем па тэарэме складання паскарэнняў пры плоскапаралельным руху звяна.

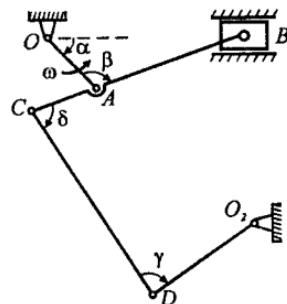
$$a_B = a_A + a_{BA}, \text{ або } a_B^n + a_B^t = a_A^n + a_{BA}^n + a_{BA}^t.$$

Паказваем на рысунку ўсе складовыя паскарэнняў, якія ўтрымлівае вектарная роўнасць. Падлічваем нармальныя складовыя паскарэнняў.

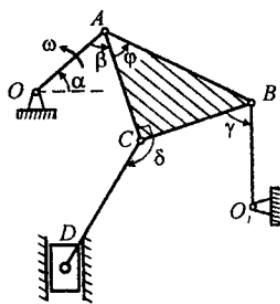
1



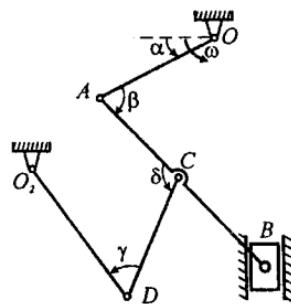
2



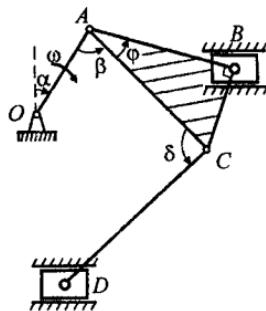
3



4



5



6

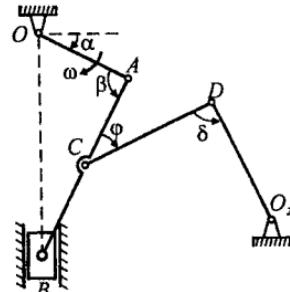
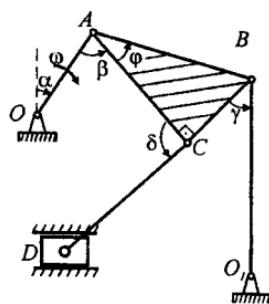
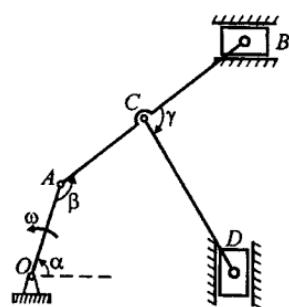


Рис. 88

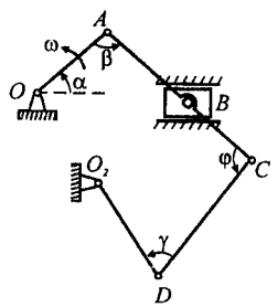
7



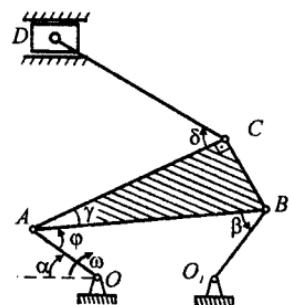
8



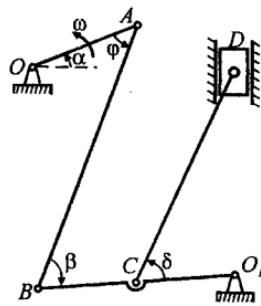
9



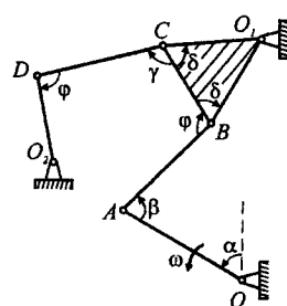
10



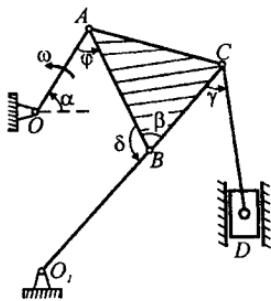
11



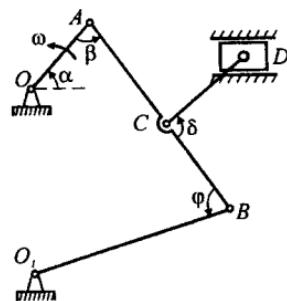
12



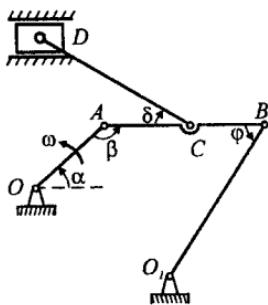
13



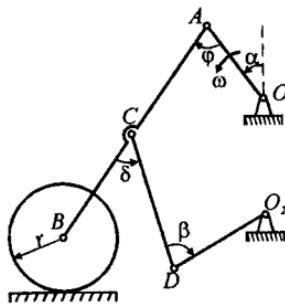
14



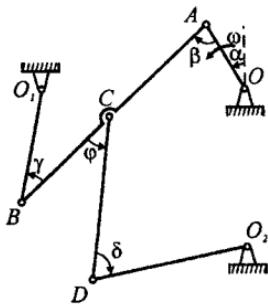
15



16



17



18

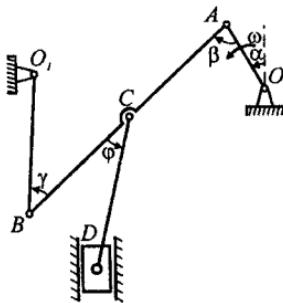


Рис. 90

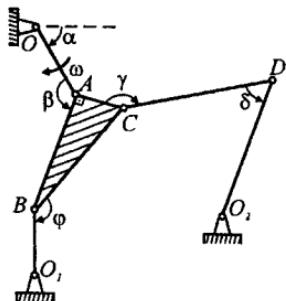
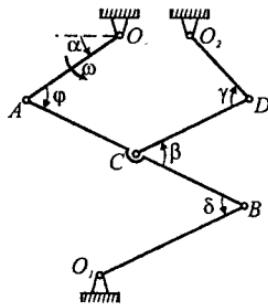
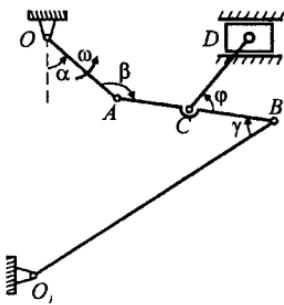
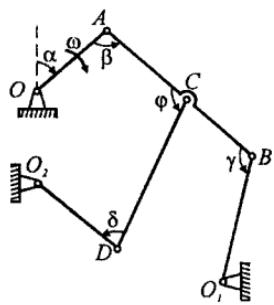
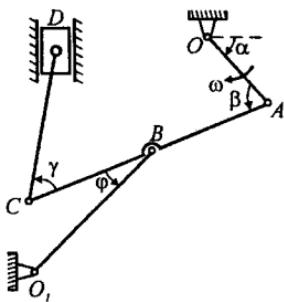
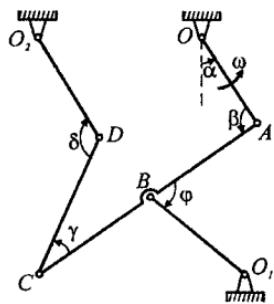
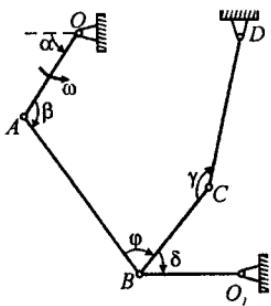
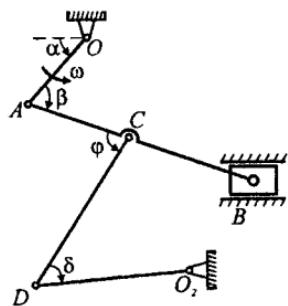


Рис. 91

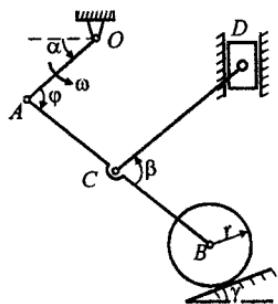
25



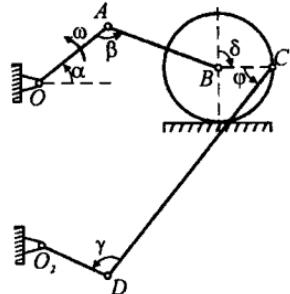
26



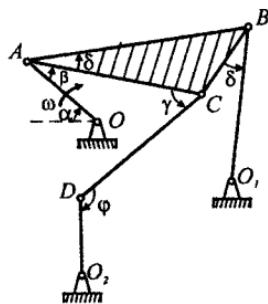
27



28



29



30

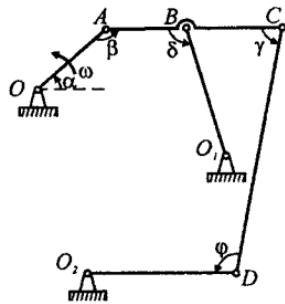


Рис. 92

$$a_B^n = \omega_{OB}^2 \cdot O_1 B = 0,7^2 \cdot 0,5 = 0,25 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0,25^2 \cdot 0,7 = 0,04 \text{ м/с}^2.$$

Падкрэслім у вектарнай роўнасці вектары адной рыскай, калі ведаем толькі накірунак вектара, і дзвёюма рыскамі, калі ведаем накірунак і модуль вектара.

$$\underline{\underline{a_B^n + a_B^\tau}} = \underline{\underline{a_A^n + a_{BA}^n}} + \underline{\underline{a_{BA}^\tau}}.$$

Бачым, што ў вектарнай роўнасці засталіся дзве невядомыя: a_B^τ і a_{BA}^τ .

Запісваем роўнасць праз праекцыі вектараў на восі каардынат. Вось Ax накіроўваем уздоўж шатуна AB , а вось Ay — перпендыкулярна да яго.

Атрымаем

$$\begin{cases} -a_B^n \cos \varphi - a_B^\tau \sin \varphi = -a_{BA}^n, \\ a_B^n \sin \varphi - a_B^\tau \cos \varphi = a_A^n - a_{BA}^\tau. \end{cases}$$

З сістэмы алгебраічных роўнасцей знаходзім велічыні a_B^τ і a_{BA}^τ .

$$a_B^\tau = \frac{a_{BA}^n - a_B^n \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{0,04 - 0,25 \cdot 0,5}{0,866} = -0,1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^\tau = a_A^n - a_B^n \sin \varphi + a_B^\tau \cos \varphi = 0,6 - 0,25 \cdot 0,866 - 0,1 \cdot 0,5 = 0,33 \text{ м/с}^2.$$

Знак “мінус” у адказе для a_B^τ гаворыць аб tym, што вектар a_B^τ на самай справе накіраваны ў процілеглы бок.

$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^\tau)^2} = \sqrt{0,25^2 + 0,1^2} = 0,27 \text{ м/с}^2.$$

Вуглавое паскарэнне шатуна AB

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{0,33}{0,7} = 0,47 \text{ рад/с}^2.$$

Паскарэнне пункта C таксама вызначаем па тэарэме складання паскарэнняў.

$$a_C = \underline{\underline{a}}_A^n + \underline{\underline{a}}_{CA}^n + \underline{\underline{a}}_{CA}^\tau .$$

Можам падлічыць a_{CA}^n і a_{CA}^τ .

$$a_{CA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 0,25^2 \cdot 0,3 = 0,02 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{CA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 0,47 \cdot 0,3 = 0,14 \text{ м/с}^2.$$

Пакажам на рымкунку вядомыя па накірунку вектары паскарэнняў. Падкрэслім у вектарнай роўнасці ўсе вядомыя велічыні. Атрымалі, што паскарэнне a_C невядома ні па накірунку, ні па модулю.

Падлічым праекцыі паскарэння a_C на восі каардынат у адпаведнасці з вектарнай роўнасцю.

$$a_{Cx} = -a_{CA}^n = -0,02 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Cy} = a_A^n - a_{CA}^\tau = 0,6 - 0,14 = 0,46 \text{ м/с}^2.$$

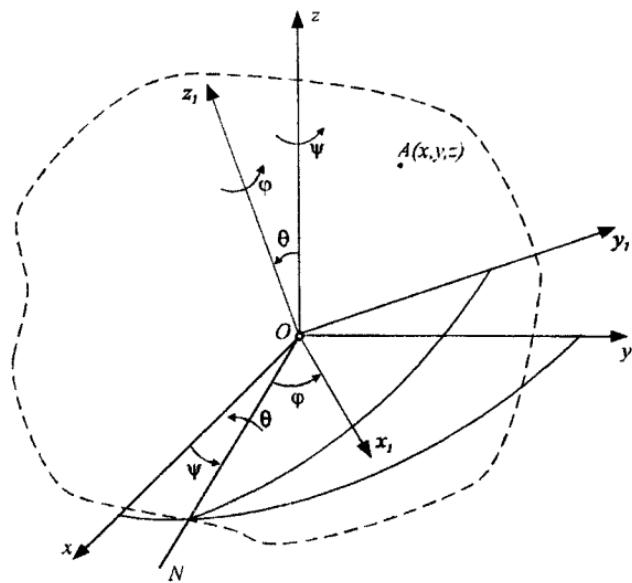
Тады паскарэнне пункта C шатуна AB

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{0,02^2 + 0,46^2} = 0,46 \text{ м/с}^2.$$

Заданне К-9

Вызначэнне кінематычных характарыстык сферычнага руху цвердага цела і яго пунктаў па ўраўненнях Эйлера

Рух цела, замацаванага з дапамогай нерухомага сферычнага шарніра (рыс. 93), апісаецца трывма ўраўненнямі Эйлера: $\Psi = f_1(t)$, $\Theta = f_2(t)$, $\Phi = f_3(t)$. Вызначыць у момант τ скорасць і паскарэнне пункта A цела, які мае ў гэты момант каардынаты x , y , z (пачатак нерухомых восей каардынат супадае з цэнтрам сферычнага шарніра O).



Рыс. 93

Вызначыць вуглы паміж вектарамі ω і ϵ , а таксама паміж вектарамі скорасці і паскарэння пункта цела.

Знайсці адлегласць ад пункта A цела да імгненнай восі вярчэння цела ў разліковы момант.

Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 18.

Прыклад рашэння задання К-9

Цела, замацаванае нерухомым сферычным шарнірам, рухаецца згодна з ўраўненнямі Эйлера (рыс. 94):

$$\Psi = 2t(\text{рад}), \theta = t(\text{рад}), \varphi = t^2(\text{рад}).$$

У момант $t = 1$ с вызначыць скорасць і паскарэнне пункта A цела, які ў гэты час мае каардынаты $x = 0$, $y = 2$ м, $z = 1$ м (пачатак нерухомых восей каардынат супадае з цэнтрам O сферычнага шарніра).

Вызначыць вуглы паміж ω і ϵ , v_A і a_A . Знайсці адлегласць ад пункта A да імгненнай восі вярчэння цела ў разліковы момант.

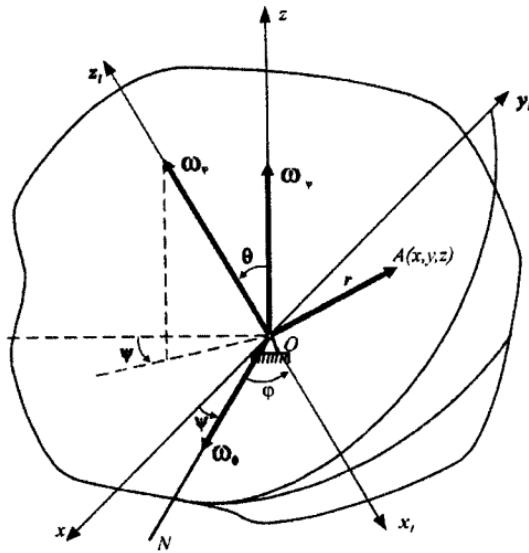


Рис. 94

Таблица 18

| Варыант | Ψ , рад | θ , рад | φ , рад | t , с | x , м | y , м | z , м |
|---------|--------------|-----------------|-----------------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | $0,3t$ | $0,05t^2$ | $-2t^2+1$ | 2 | 0,5 | 0,1 | 0,2 |
| 2 | $0,2t$ | $0,4t$ | $3t^3+2$ | 1,8 | 0,4 | 0 | 0,1 |
| 3 | $-0,5t$ | $0,3t$ | $-e^{0,2t}$ | 1,6 | 0,3 | 0,9 | 0 |
| 4 | $0,6t^2$ | $1-0,2\sin t$ | $e^{0,1t}$ | 1,4 | 0,2 | 0,8 | 1,0 |
| 5 | $0,2t^2$ | $0,5+0,3\sin t$ | $e^{0,3t}$ | 1,2 | 0,1 | 0,7 | 0,9 |
| 6 | $0,3t^2$ | $0,4+0,4\sin t$ | $2+t^2$ | 1,0 | 0 | 0,6 | 0,8 |
| 7 | $-0,4t$ | $1+0,2\cos t$ | $1+t^3$ | 0,8 | 0,2 | 0,8 | 1,0 |
| 8 | $0,5t+1$ | $0,5+0,4\cos t$ | $1-e^t$ | 0,6 | 0,4 | 1,0 | 0 |
| 9 | $0,7t+1,5$ | $0,6(1+\cos t)$ | $0,7+e^t$ | 0,4 | 0,6 | 0 | 0,2 |
| 10 | $-0,4t^2+1$ | $0,2t$ | $0,3t+t^2$ | 0,2 | 0,8 | 0,2 | 0,4 |
| 11 | $0,5t^2+1,5$ | $0,3-0,1t$ | $0,2e^t$ | 0,3 | 1,0 | 0,4 | 0,6 |
| 12 | $0,2t^2+1$ | $0,4+0,1t$ | $0,3e^t$ | 0,5 | 0 | 0,6 | 0,8 |
| 13 | $0,2t^2+1,5$ | $0,2(1+\sin t)$ | $-0,4e^t$ | 0,7 | 0,1 | 0,7 | 0,9 |
| 14 | $0,2t+1$ | $1-0,1t$ | $1+0,1e^t$ | 0,9 | 0,3 | 0,9 | 0,1 |
| 15 | $-0,2t+1,5$ | $1,3-0,2t$ | $t^3+0,2$ | 1,1 | 0,5 | 0,1 | 0,3 |
| 16 | $0,2t+2$ | $1,4-0,3t$ | $t^2+0,4$ | 1,3 | 0,7 | 0,3 | 0,5 |
| 17 | $0,3t+1$ | $1-0,4t$ | $t+0,6$ | 1,5 | 0,9 | 0,5 | 0,7 |
| 18 | $0,3t+2$ | $1,2-0,4t^2$ | $-2t+0,8$ | 1,7 | 0 | 0,7 | 0,9 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----|---------------|---------------|---------------|-----|-----|-----|-----|
| 19 | $-0,6t+2$ | $t^{-1}+0,1$ | $3t+1$ | 1,9 | 0,1 | 0,3 | 0,5 |
| 20 | $0,3t+1,5$ | $t^{-1}+0,2$ | $4t+1,2$ | 2,1 | 0,2 | 0,4 | 0,6 |
| 21 | $0,2t+t^2$ | $t^{-1}+0,3$ | $-0,6t^2$ | 2,0 | 0,3 | 0,5 | 0,7 |
| 22 | $0,3t-t^2$ | $t^{-2}+0,3$ | $0,8t^2$ | 1,8 | 0,4 | 0,6 | 0,8 |
| 23 | $0,8t+r^2$ | $t^{-1}+0,04$ | $t^2+0,5$ | 1,6 | 0,5 | 0,7 | 0,9 |
| 24 | $0,4t$ | $t^{-1}+0,06$ | $t^2+0,7$ | 1,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |
| 25 | $-0,2t^2+2$ | $t^{-1}+0,08$ | $t^3+0,6$ | 1,2 | 0,7 | 0,9 | 0,1 |
| 26 | $0,1t^3$ | $t+0,09$ | $-0,1t^3$ | 1,0 | 0,8 | 1,0 | 0,2 |
| 27 | $0,2t^3+1$ | $t+0,1$ | $0,2t^3$ | 0,8 | 0,9 | 0 | 0,3 |
| 28 | $-0,3t^3+1,5$ | $t+0,5$ | $0,3e^t$ | 0,6 | 0 | 0,1 | 0,4 |
| 29 | $0,4t^3+2$ | $0,03t$ | $-0,5e^t$ | 0,4 | 0,1 | 0,2 | 0,5 |
| 30 | $0,5t^3+t$ | $-0,05t$ | $0,3e^{0,5t}$ | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,6 |

Рашэнне. Па ўраўненнях Эйлера падлічым вуглавыя скорасці прэцэсіі, нутацыі і ўласнага вярчэння.

$$\omega_\psi = \dot{\psi} = 2 \text{ рад/с}, \quad \omega_\theta = \dot{\theta} = 1 \text{ рад/с},$$

$$\omega_\phi = \dot{\phi} = 2t, \quad \omega_\phi(\tau) = 2 \text{ рад/с}.$$

Вектар вуглавой скорасці цела ў сферычным руху

$$\omega = \omega_\phi + \omega_\theta + \omega_\psi.$$

Атрымаем праекцыі ω на нерухомыя восі $Oxyz$.

$$\omega_x = \omega_\theta \cos \psi + \omega_\phi \sin \theta \cdot \sin \psi,$$

$$\omega_y = \omega_\theta \sin \psi - \omega_\phi \sin \theta \cdot \cos \psi,$$

$$\omega_z = \omega_\psi + \omega_\phi \cos \theta.$$

У момант τ праекцыі вуглавой скорасці ω на восі каардынат проўныя:

$$\omega_x = 1 \cdot \cos 2 + 2 \cdot \sin 1 \cdot \sin 2 = -0,416 + 2 \cdot 0,841 \cdot 0,909 = 1,1 \text{ рад/с},$$

$$\omega_y = 1 \cdot \sin 2 - 2 \cdot \sin 1 \cdot \cos 2 = 0,909 - 2 \cdot 0,841(-0,416) = 1,6 \text{ рад/с},$$

$$\omega_z = 2 + 2 \cos 1 = 2 + 2 \cdot 0,540 = 3,1 \text{ рад/с}.$$

Модуль вуглавой скорасці цела ў момант τ

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{1,1^2 + 1,6^2 + 3,1^2} = 3,6 \text{ рад/с.}$$

Скорасць пункта A у момант τ знайдзем з выкарыстаннем формул Эйлера:

$$v_x = \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y = 1,6 \cdot 1 - 3,1 \cdot 2 = -4,6 \text{ м/с,}$$

$$v_y = \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z = 3,1 \cdot 0 - 1,1 \cdot 1 = -1,1 \text{ м/с,}$$

$$v_z = \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x = 1,1 \cdot 2 - 1,6 \cdot 0 = 2,2 \text{ м/с,}$$

$$v_A = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{4,6^2 + 1,1^2 + 2,2^2} = 5,2 \text{ м/с.}$$

Вектар ω накіраваны ўздоўж імгненнай восі вярчэння цела. Таму адлегласць ад пункта A да імгненнай восі вярчэння ў момант τ можна вызначыць з формулы скорасці пункта A :

$$v_A = \omega \cdot h, \quad h = \frac{v_A}{\omega} = \frac{5,2}{3,6} = 1,44 \text{ м.}$$

Падлічым вуглавое паскарэнне цела ў сферычным руху па яго праекцыях на восі каардынат.

$$\omega_x = \cos 2t + 2t \sin t \cdot \sin 2t,$$

$$\omega_y = \sin 2t - 2t \sin t \cdot \cos 2t,$$

$$\omega_z = 2 + 2t \cos t.$$

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x = -2 \sin 2t + 2 \sin t \cdot \sin 2t + 2t \cos t \cdot \sin 2t + 4t \sin t \cdot \cos 2t,$$

$$\varepsilon_y = \dot{\omega}_y = 2 \cos 2t - 2 \sin t \cdot \cos 2t - 2t \cos t \cdot \cos 2t + 4t \sin t \cdot \sin 2t,$$

$$\varepsilon_z = 2 \cos t - 2t \sin t.$$

У момант τ

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -2 \cdot \sin 2 + 2 \sin 1 \cdot \sin 2 + 2 \cos 1 \cdot \sin 2 + 4 \sin 1 \cdot \cos 2 = \\ &= -2 \cdot 0,909 + 2 \cdot 0,841 \cdot 0,909 + 2 \cdot 0,54 \cdot 0,909 - 4 \cdot 0,841 \cdot 0,416 = \\ &= -1,818 + 1,529 + 0,982 - 1,399 = -0,7 \text{ рад/с}^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= 2 \cdot \cos 2 - 2 \sin 1 \cdot \cos 2 - 2 \cos 1 \cdot \cos 2 + 4 \sin 1 \cdot \sin 2 = \\ &= -2 \cdot 0,416 + 2 \cdot 0,841 \cdot 0,416 + 2 \cdot 0,54 \cdot 0,416 + 4 \cdot 0,841 \cdot 0,909 = \\ &= -0,832 + 0,7 + 0,449 + 3,058 = 3,4 \text{ рад/с}^2.\end{aligned}$$

$$\varepsilon_z = 2 \cdot \cos 1 - 2 \sin 1 = 2 \cdot 0,54 - 2 \cdot 0,841 = 1,08 - 1,682 = -0,6 \text{ рад/с}^2.$$

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{0,7^2 + 3,4^2 + 0,6^2} = \sqrt{12,41} = 3,5 \text{ рад/с}^2.$$

Паскарэнне пункта A ў момант τ вылічым па яго праекцыях на восі каардынат.

$$\begin{aligned}a_x &= \varepsilon_y \cdot z - \varepsilon_z \cdot y + \omega_y \cdot v_z - \omega_z \cdot v_y = \\ &= 3,4 \cdot 1 + 0,6 \cdot 2 + 1,6 \cdot 2,2 + 3,1 \cdot 1,1 = 3,4 + 1,2 + 3,5 + 3,4 = 11,5 \text{ м/с}^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_y &= \varepsilon_z \cdot x - \varepsilon_x \cdot z + \omega_z \cdot v_x - \omega_x \cdot v_z = \\ &= -0,6 \cdot 0 + 0,7 \cdot 1 - 3,1 \cdot 4,6 - 1,1 \cdot 2,2 = 0,7 - 14,3 - 2,4 = -16 \text{ м/с}^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_z &= \varepsilon_x \cdot y - \varepsilon_y \cdot x + \omega_x \cdot v_y - \omega_y \cdot v_x = \\ &= -0,7 \cdot 2 - 3,4 \cdot 0 - 1,1 \cdot 1,1 + 1,6 \cdot 4,6 = -1,4 - 1,2 + 7,4 = 4,8 \text{ м/с}^2.\end{aligned}$$

$$a_A = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{11,5^2 + 16^2 + 4,8^2} = 20,3 \text{ м/с}^2.$$

Вугал паміж вектарамі ω і ε знайдзем з формул скалярнага здабытку гэтых вектараў.

$$\omega \cdot \varepsilon \cdot \cos \alpha = \omega_x \cdot \varepsilon_x + \omega_y \cdot \varepsilon_y + \omega_z \cdot \varepsilon_z,$$

$$\cos \alpha = \frac{\omega_x \cdot \varepsilon_x + \omega_y \cdot \varepsilon_y + \omega_z \cdot \varepsilon_z}{\omega \cdot \varepsilon} =$$

$$= \frac{-1,1 \cdot 0,7 + 1,6 \cdot 3,4 - 3,1 \cdot 0,6}{3,6 \cdot 3,5} = \frac{2,81}{12,6} = 0,223;$$

$$\alpha = \arccos 0,223 = 1,346 \text{ рад.}$$

Аналагічна падлічым вугал паміж вектарамі v_A і a_A .

$$\cos \beta = \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y + v_z \cdot a_z}{v_A \cdot a_A} =$$

$$= \frac{-4,6 \cdot 11,5 + 1,1 \cdot 1,6 + 2,2 \cdot 4,8}{5,2 \cdot 20,3} = \frac{-24,8}{105,6} = -0,235.$$

$$\beta = \arccos(-0,235) = 1,808 \text{ рад.}$$

Заданне К-10

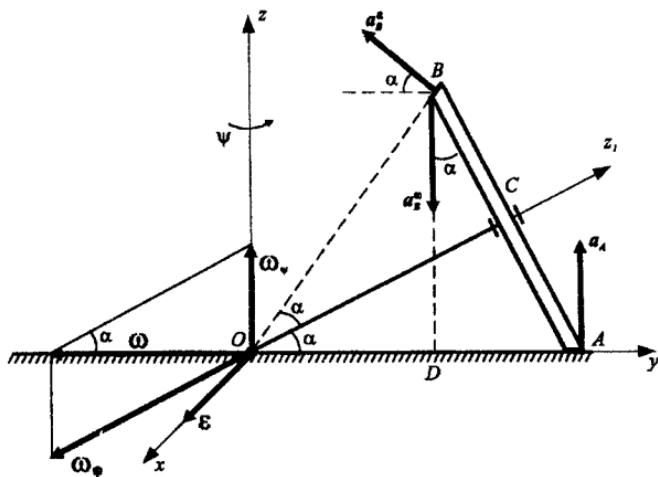
*Вызначэнне скорасцей і паскарэнняў пунктаў цвёрдага цела,
якое коціцца па нерухомай паверхні і мае пры гэтым
адзін нерухомы пункт*

Цвёрдае цела правільнай канічнай формы (рыс. 96–98) коціцца без праслізвання па нерухомай паверхні і робіць n абаротаў у хвіліну вакол нерухомай восі Oz . Пункт O цела ўвесь час супадае з пачаткам нерухомых восей каардынат $Oxyz$. Вызначыць скорасці і паскарэнні пунктаў A і B цела з улікам даных, прыведзеных у табл. 19.

Прыклад разшэння задання К-10

Канічнае кола насаджана на вось OC , якая можа паварочвацца вакол нерухомага сферычнага шарніра O . Кола коціцца па нерухомай гарызантальнай паверхні без праслізвання (рыс. 95) і робіць за хвіліну 6 абаротаў вакол вертыкальной восі Oz . Вызначыць скорасці і паскарэнні пунктаў A і B кола, калі $\alpha = 30^\circ$, $BC=CA=0,3$ м. Таўшчыню кола не ўлічваць.

Рашэнне. Кала ўздельнічае ў сферычным руху (нерухомы пункт O). Рух кола вакол восі Oz — прэцэсійны. Вуглавая скорасць прэцэсіі падлічваецца праз вядомую колькасць абаротаў кола вакол восі Oz за хвіліну.



Рыс. 95

$$\omega_\psi = \frac{2\pi \cdot n}{60} = \frac{2\pi \cdot 6}{60} = 0,2\pi \text{ рад/с.}$$

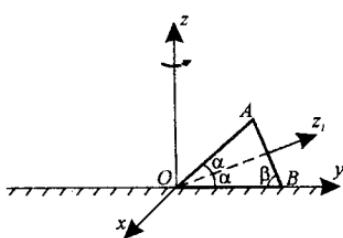
Прымем накірунак вярчэння супраць гадзіннікавай стрэлкі пры назіранні з дадатнага накірунку восі Oz . Тады вектар ω_ψ будзе накіраваны ўздоўж восі Oz уверх (рыс. 95). Уласная вось вярчэння кола Oz_1 пры качэнні кола па нерухомай паверхні складае нязменны вугал з восцю Oz . Гэта вугал нутцы θ . Таму $\theta = \text{const}$, $\theta = 60^\circ$, $\omega_\theta = 0$.

Вектар вуглавой скорасці асабістага вярчэння ω_ϕ накіраваны ўздоўж восі Oz_1 улева (па правілу “правай шрубы”).

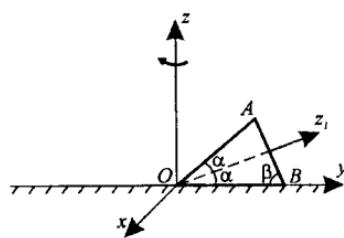
Пры качэнні кола без праслізгвання скорасць пункта A роўная нулю. Імгненная вось вярчэння кола будзе праходзіць праз вызначаныя два нерухомыя пункты: O і A . Таму вектар абсолютной (імгненнай) вуглавой скорасці кола накіраваны ўздоўж OA .

$$\omega = \omega_\psi + \omega_\phi.$$

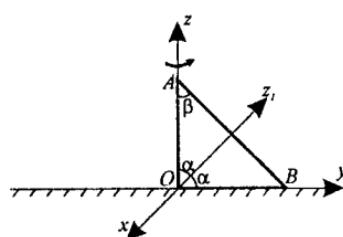
1



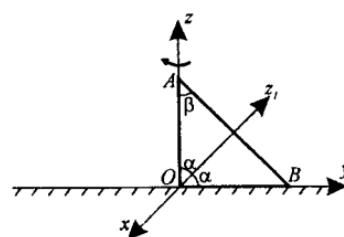
2



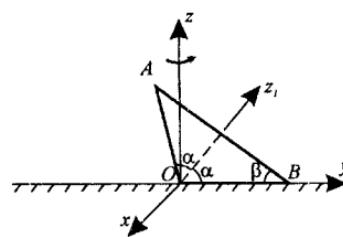
3



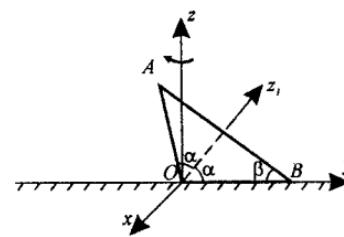
4



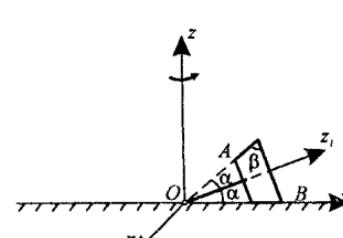
5



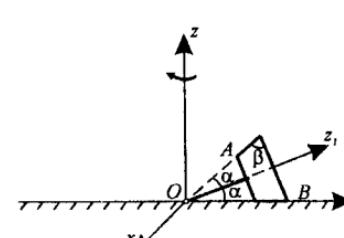
6



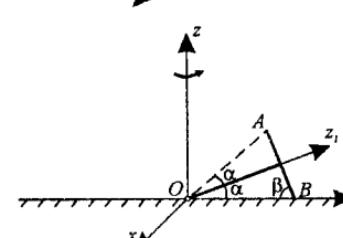
7



8



9



10

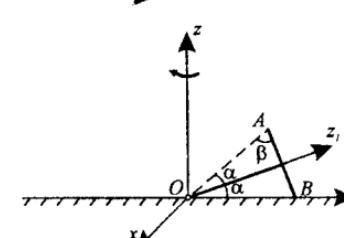
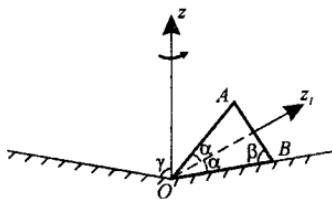
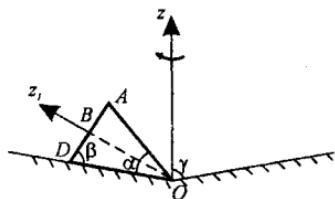


Рис. 96

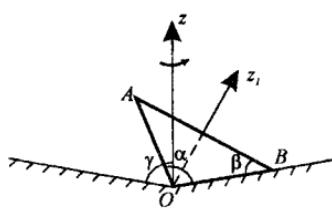
11



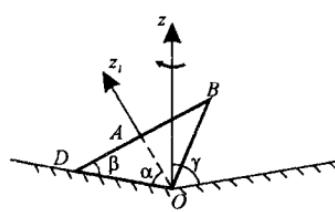
12



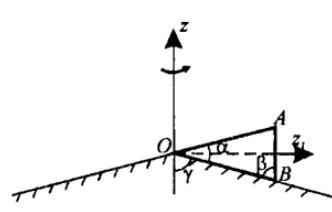
13



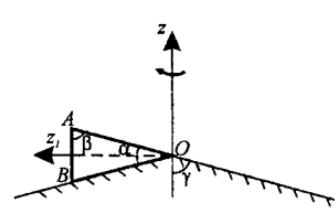
14



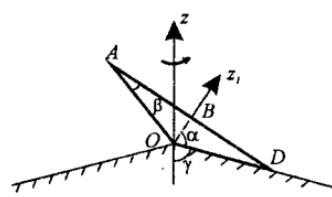
15



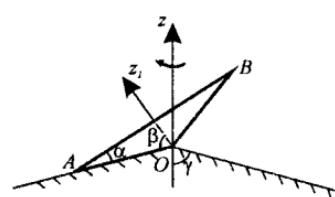
16



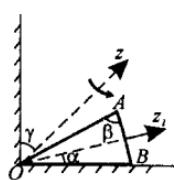
17



18



19



20

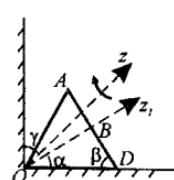
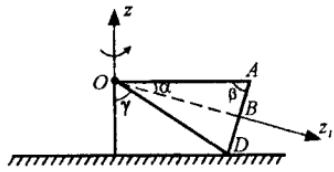
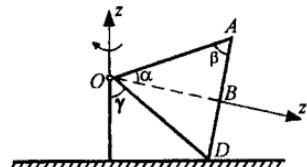


Рис. 97

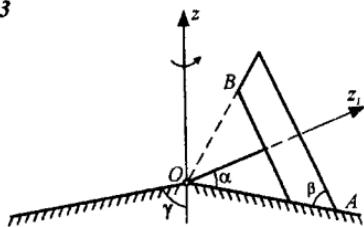
21



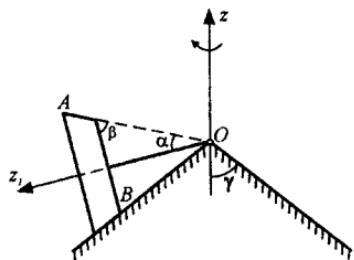
22



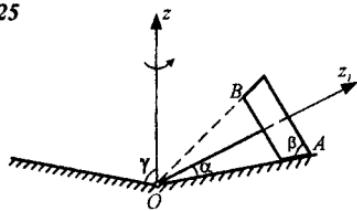
23



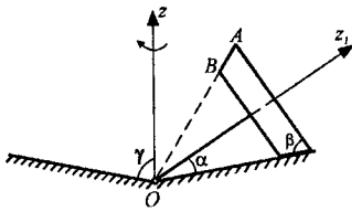
24



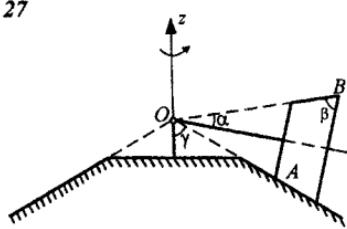
25



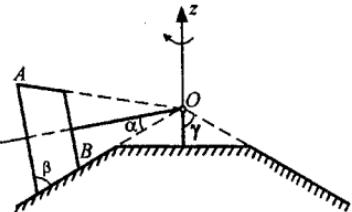
26



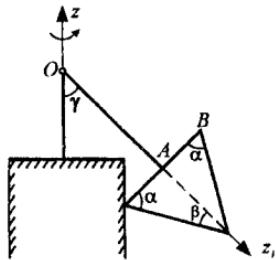
27



28



29



30

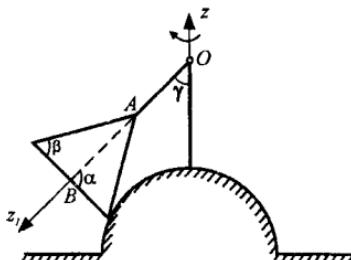


Рис. 98

Згодна з вектарнай роўнасцю паказываем усе вектары на рыс. 95. Вектар ω пры гэтым павінен быць дыяганаллю паралелаграма, пабудаванага на вектарах ω_ψ і ω_ϕ .

Табліца 19

| Варыянт | n , аб/хвіл | α , град | OA, м | OB, м | AB, м | β , град | γ , град |
|---------|---------------|-----------------|-------|-------|-------|----------------|-----------------|
| 1 | 2 | 20 | 0,5 | | | 70 | |
| 2 | 4 | 30 | | 0,4 | | 60 | |
| 3 | 6 | 45 | | 0,6 | | 45 | |
| 4 | 3 | 45 | 0,7 | | | 45 | |
| 5 | 5 | 60 | | 0,4 | | 30 | |
| 6 | 4 | 70 | | | 1,1 | 20 | |
| 7 | 6 | 30 | 0,4 | 0,5 | | 60 | |
| 8 | 2 | 25 | 0,5 | 0,7 | | 65 | |
| 9 | 3 | 35 | | | 0,6 | 55 | |
| 10 | 4 | 30 | 0,3 | | | 60 | |
| 11 | 5 | 20 | | 0,4 | | 70 | 65 |
| 12 | 6 | 44 | | | 0,2 | 68 | 60 |
| 13 | 2 | 100 | 0,4 | | | 40 | 70 |
| 14 | 3 | 60 | | 0,5 | | 30 | 65 |
| 15 | 4 | 40 | | | 0,3 | 70 | 70 |
| 16 | 5 | 40 | 0,5 | | | 70 | 70 |
| 17 | 6 | 70 | | 0,2 | | 20 | 85 |
| 18 | 2 | 18 | | | 0,6 | 72 | 75 |
| 19 | 3 | 15 | 0,6 | | | 75 | 45 |
| 20 | 4 | 30 | | 0,4 | | 60 | 45 |
| 21 | 5 | 17 | | | 0,2 | 73 | 56 |
| 22 | 6 | 25 | 0,4 | | | 65 | 50 |
| 23 | 2 | 30 | 0,6 | 0,4 | | 60 | 84 |
| 24 | 3 | 22 | 0,5 | 0,4 | | 68 | 55 |
| 25 | 4 | 20 | 0,6 | 0,5 | | 70 | 80 |
| 26 | 5 | 28 | 0,7 | 0,5 | | 62 | 75 |
| 27 | 6 | 23 | 0,4 | 0,6 | | 67 | 42 |
| 28 | 2 | 22 | 0,6 | 0,4 | | 68 | 54 |
| 29 | 3 | 45 | 0,5 | | 0,2 | 45 | 45 |
| 30 | 4 | 90 | 0,3 | 0,6 | | 60 | 45 |

Цяпер маєм магчымасць падлічыць модуль абсолютнай вуглавой скорасці кола.

$$\omega = \omega_\psi \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 0,2\pi \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = 0,2 \cdot 3,14 \cdot 1,732 = 1,09 \text{ рад/с.}$$

У дадзеным выпадку руху кола, калі $\omega_\psi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, вектар ω змяняеца толькі па накірунку. Таму вектар вуглавога паскарэння кола роўны адной складовай ε_\perp ($\varepsilon_\parallel = 0$).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\perp} = \boldsymbol{\omega}_{\psi} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Велічыня вуглавога паскарэння кола

$$\varepsilon = \omega_{\psi} \cdot \omega \cdot \sin 90^\circ = 0,2 \cdot 3,14 \cdot 1,09 = 0,68 \text{ рад/с}^2.$$

Вектар $\boldsymbol{\varepsilon}$ па правилу “правай руکі” накіраваны з цэнтра O да нас (перпендыкулярна плоскасці Oyz). Скорасць пункта В вызначаецца праз імгненню вуглавую скорасць ω .

$$v_B = \omega \cdot BD = \omega \cdot AB \cos \alpha = 1,09 \cdot 0,6 \cdot 0,866 = 0,57 \text{ м/с}.$$

Вектар \mathbf{v}_B накіраваны ад нас (перпендыкулярна плоскасці Oyz). Паскарэнне пункта B мае дзве складовыя:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_B^{\omega} + \mathbf{a}_B^{\varepsilon}.$$

Восеймклівае паскарэнне пункта B

$$a_B^{\omega} = \omega^2 \cdot BD = 1,09^2 \cdot 0,6 \cdot 0,866 = 0,62 \text{ м/с}^2.$$

Вярчальнае паскарэнне пункта B

$$a_B^{\varepsilon} = \varepsilon \cdot OB \sin 90^\circ = 0,68 \cdot 0,6 = 0,41 \text{ м/с}^2.$$

Вектары \mathbf{a}_B^{ω} і $\mathbf{a}_B^{\varepsilon}$ знаходзяцца ў плоскасці Oyz . Вектар \mathbf{a}_B^{ω} на-
кіраваны перпендыкулярна да імгненнай восі вярчэння, вектар $\mathbf{a}_B^{\varepsilon}$
– перпендыкулярна да OB з улікам накірунку вектара $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Модуль паскарэння пункта B вызначым праз праекцыі вектара \mathbf{a}_B на восі Oy і Oz .

$$a_{By} = -a_B^{\varepsilon} \cos \alpha = -0,41 \cdot 0,866 = -0,35 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Bz} = -a_B^{\omega} + a_B^{\varepsilon} \sin \alpha = -0,62 + 0,41 \cdot 0,5 = -0,42 \text{ м/с}^2;$$

$$a_B = \sqrt{a_{By}^2 + a_{Bz}^2} = \sqrt{0,35^2 + 0,42^2} = 0,55 \text{ м/с}^2.$$

Паскарэнне пункта А роўнае вярчальному паскарэнню a_A^{ε} ,
таму што пункт A знаходзіцца на імгненнай восі вярчэння, $v_A=0$,
 $a_A^{\omega} = 0$.

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_A^e.$$

$$a_A = \varepsilon \cdot OA = 0,68 \cdot 0,6 = 0,41 \text{ м/с}^2.$$

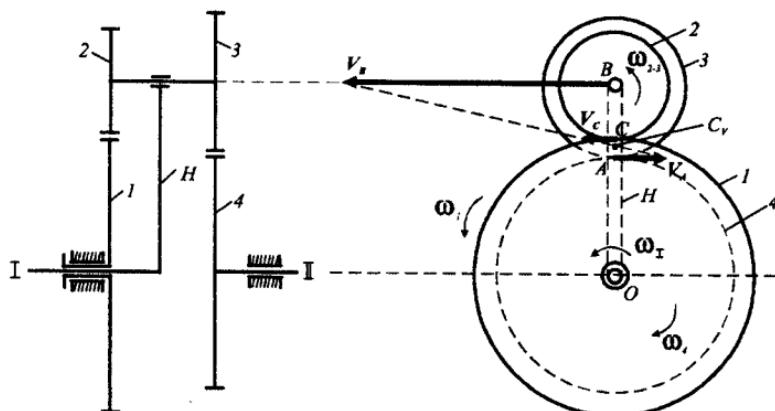
Вектар \boldsymbol{a}_A паказываем з улікам накірунку вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ перпендикулярно адрезку OA ўверх.

Заданне К-11

*Вызначэнне вуглавых скорасцей звёнаў
планетарнага рэдуктара з цыліндырчымі коламі*

У планетарным рэдуктары з цыліндырчымі коламі (рыс. 100–102) вызначыць вуглавыя скорасці вядзёнага вала II і ўсіх рухомых звёнаў. Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 20.

Прыклад разшэння задання К-11



Рыс. 99

Вядучы вал I рэдуктара з цыліндырчымі коламі, схема якога паказана на рис. 99, верціца з вуглавой скорасцю 120 рад/с, а зубчастае кола 1 — з вуглавой скорасцю 20 рад/с. Накірункі іх вярчэння аднолькавыя. Вызначыць вуглавыя скорасці вядзёнага вала II і астатніх рухомых звёнаў рэдуктара, калі $R_1 = 20$ см, $R_2 = 6$ см, $R_3 = 10$ см, $R_4 = 16$ см.

Рашэнне.

1. Выкарыстанне тэорыі плоскапаралельнага руху цела.

Блок шасцерняў 2 і 3, змацаваных разам адной рухомай воссю (сатэліт), удзельнічае ў плоскапаралельным руху. Праз вуглавую скорасць кола 1 знайдзем скорасць пункта дотыку колаў 1 і 2.

$$v_C = \omega_1 \cdot R_1 = 20 \cdot 0,2 = 4 \text{ м/с.}$$

Вуглавая скорасць вадзіла H роўная вуглавой скорасці вяду-чага вала I.

$$\omega_H = \omega_I = 120 \text{ рад/с.}$$

Тады скорасць пункта B на рухомай восі сатэліта роўная

$$v_B = \omega_H \cdot OB = \omega_I (R_1 + R_2) = 120 \cdot 0,26 = 31,2 \text{ м/с.}$$

Такую скорасць маюць усе пункты рухомай восі. Тым самым на коле 2 нам вядомы скорасці ў двух пунктах кола. Будуем імгненны цэнтр скорасцей кола 2. Паказваем скорасці (рыс. 99) у цэнтры кола і ў пункце дотыку да кола 1, праз канцы вектараў скорасцей праводзім прямую, якая перасякае адрэзак BO ў пункце C_v – імгненным цэнтры скорасцей.

Знайдзем адлегласць CC_v .

$$\frac{v_B}{v_C} = \frac{BC}{CC_v}, \text{ або } \frac{v_B}{v_C} = \frac{BC + CC_v}{CC_v};$$

$$v_B \cdot CC_v = v_C \cdot BC + v_C \cdot CC_v;$$

$$CC_v = \frac{v_C \cdot BC}{v_B - v_C} = \frac{4 \cdot 0,06}{31,2 - 4} = \frac{0,24}{27,2} = 0,008824 \text{ м.}$$

Вуглавая скорасць сатэліта 2–3 роўная

$$\omega_{2-3} = \frac{v_C}{CC_v} = \frac{4}{0,008824} = 453,3 \text{ рад/с.}$$

Кола 3 рухаецца плоскапаралельна разам з колам 2 як адно цела. Таму і для яго на той жа адлегласці ад рухомай восі сатэліта знаходзіцца імгненны цэнтр скорасцей C_v .

| Варыянт | Радыусы колаў, см | | | | | | Вуглавая скорасці, рад/с | | | | |
|---------|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------------------|------------|------------|------------|------------|
| | r_1 | r_2 | r_3 | r_4 | r_5 | r_6 | ω_1 | ω_2 | ω_4 | ω_5 | ω_6 |
| 1 | 20 | 20 | 15 | 55 | | | 300 | | -50 | | |
| 2 | 35 | 25 | 30 | 40 | | | 240 | | 40 | | |
| 3 | 40 | 15 | 20 | 75 | | | 100 | -150 | | | |
| 4 | 50 | 30 | 25 | 55 | | | 200 | | | -80 | |
| 5 | 40 | 15 | 30 | 85 | | | 120 | | 30 | | |
| 6 | 75 | 30 | 15 | 30 | | | 140 | 40 | | | |
| 7 | 25 | 10 | 15 | 20 | | | 220 | | -60 | | |
| 8 | 70 | 26 | 20 | 24 | | | 80 | 120 | | | |
| 9 | 20 | 15 | 25 | 60 | | | 320 | | | -30 | |
| 10 | 30 | 35 | 20 | 45 | 30 | 25 | 280 | | | | 70 |
| 11 | 35 | 20 | 30 | | 85 | | 260 | | 50 | | |
| 12 | 50 | 20 | 25 | 95 | 20 | 10 | 90 | | | | -150 |
| 13 | 30 | 20 | 10 | 90 | | | 100 | -140 | | | |
| 14 | 10 | 25 | 20 | 10 | 40 | 50 | 220 | 160 | | | |
| 15 | 60 | 22 | 16 | 54 | | | 180 | 60 | | | |
| 16 | 25 | 15 | 20 | 60 | 24 | 16 | 160 | | | | -120 |
| 17 | 56 | 18 | 22 | 60 | | | 80 | -150 | | | |
| 18 | 75 | 10 | 15 | 25 | 40 | 10 | 120 | | | | 80 |
| 19 | 70 | 12 | 16 | 10 | 22 | | 50 | -70 | | | |
| 20 | 40 | 25 | 18 | 20 | 50 | 77 | 60 | 110 | | | |
| 21 | 78 | 20 | 14 | 16 | 10 | 18 | 90 | -80 | | | |
| 22 | 26 | 56 | 40 | 10 | 16 | 22 | 200 | | | -50 | |
| 23 | 54 | 10 | 12 | 56 | | | 110 | 140 | | | |
| 24 | 68 | 18 | 14 | 36 | 24 | 12 | 140 | | | | -180 |
| 25 | 70 | 24 | 30 | 16 | | | 180 | | | 60 | |
| 26 | 50 | 20 | 15 | 45 | | | 150 | | | 40 | |
| 27 | 24 | 16 | 56 | 30 | 22 | | 220 | | | -80 | |
| 28 | 62 | 22 | 12 | 28 | 20 | 16 | 100 | | | | 140 |
| 29 | 20 | 18 | 40 | 15 | 70 | | 80 | -160 | | | |
| 30 | 26 | 20 | 16 | 30 | | | 50 | 120 | | | |

З а ў в а г а . Дадатныя і адмоўныя значэнні вуглавых скорасцей адпавядаюць накірункам вярчэння супраць ходу і па ходу гадзіннікавай стрэлкі пры назіранні з боку вядучага вала.

$$BC_v = BC + CC_v = 0,06 + 0,008824 = 0,068824 \text{ м.}$$

Адлегласць ад імгненнага цэнтра скорасцей да пункта дотыку A колаў 3 і 4 роўная

$$AC_v = R_3 - BC_v = 0,1 - 0,068824 = 0,031176 \text{ м.}$$

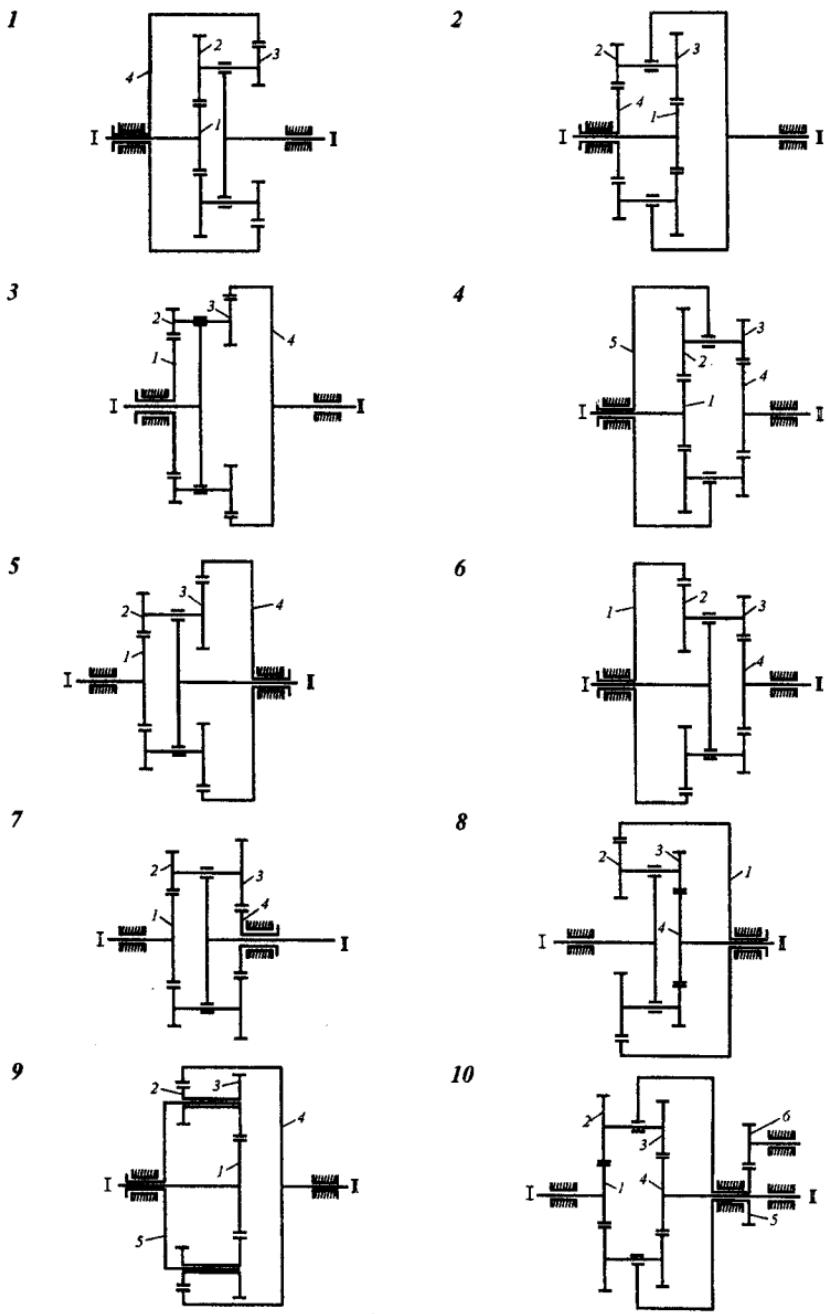


Рис. 100

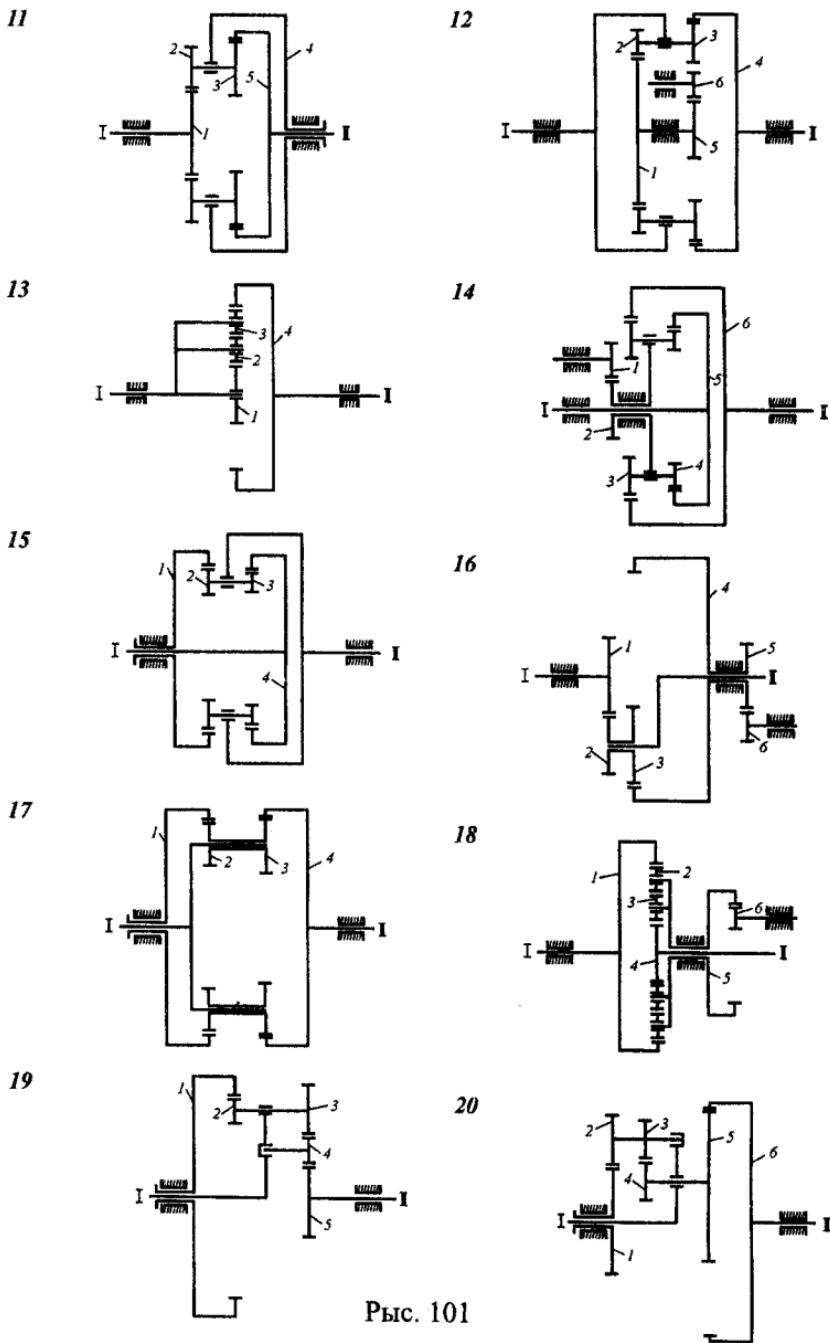


Рис. 101

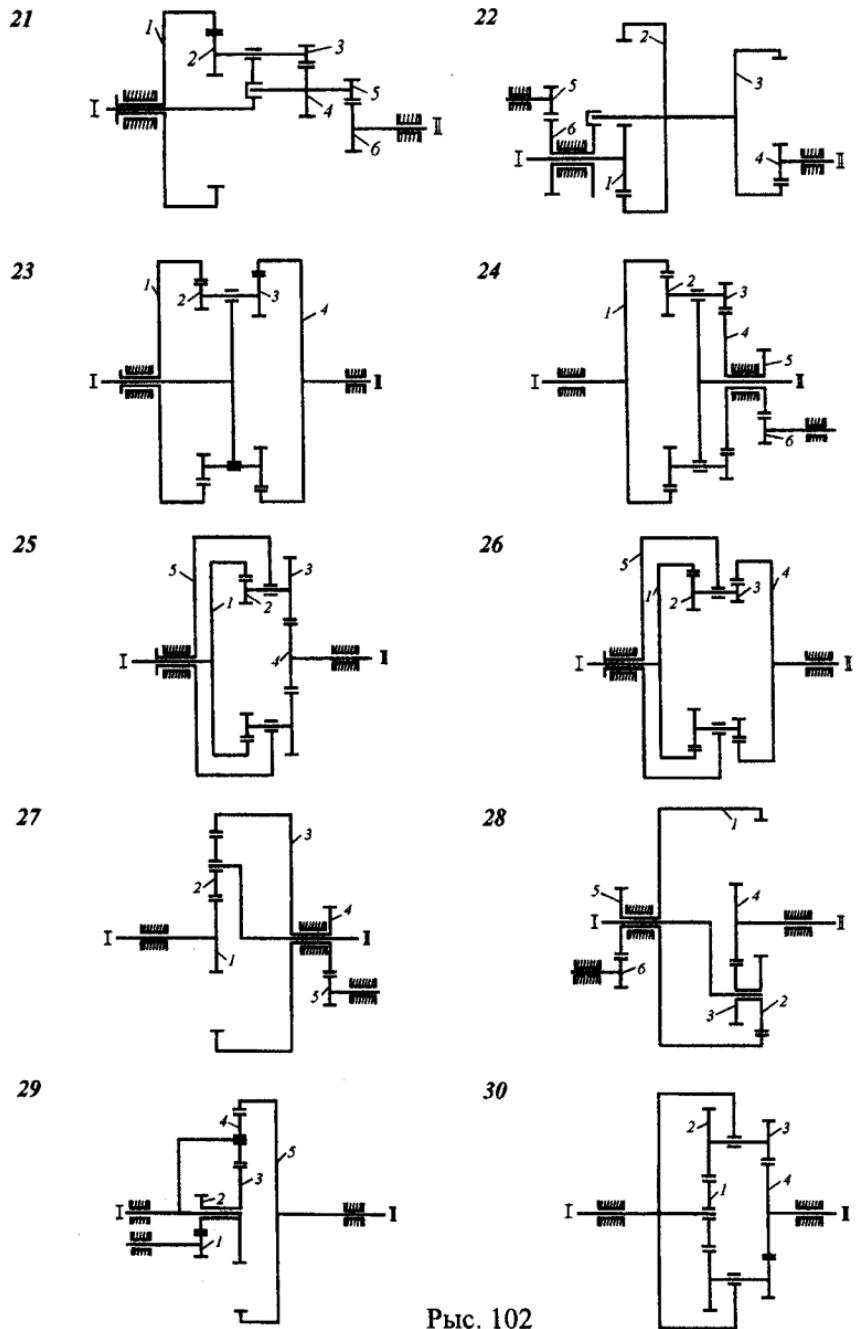


Рис. 102

Знойдзем скорасць пункта A

$$v_A = \omega_{2-3} \cdot AC_v = 453,3 \cdot 0,031176 = 14,13 \text{ м/с.}$$

Тады вуглавая скорасць кола 4

$$\omega_4 = \frac{v_A}{R_4} = \frac{14,13}{0,16} = 88,3 \text{ рад/с.}$$

Кола 4 і вядзёны вал II верцяца як адно цвёрдае цела. Таму

$$\omega_{II} = \omega_4 = 88,3 \text{ рад/с.}$$

Вядучы вал I і вядзёны вал II маюць розныя накірункі вярчэння.

2. Вызначэнне вуглавых скорасцей звёнаў спосабам Віліса.

Рухомую сістэму адліку звязываем з вадзілам H . Тады з пункту гледжання тэорыі складання вярчэнняў цела вакол паралельных восей кожнае кола рэдуктара ўдзельнічае ў пераносным вярчальным руху разам з вадзілам і ў адносным руху (адносна вадзіла) вакол асабістай восі. У гэтym выпадку пераносная вуглавая скорасць кожнага кола роўная вуглавой скорасці вадзіла. Адносная вуглавая скорасць кола вызначаецца як рознасць алгебраічных (абазначана знакам \sim — тыльда) значэнняў абсалютных і пераносных вуглавых скорасцей:

$$\tilde{\omega}_{1r} = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_e, \quad \tilde{\omega}_{2r} = \tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_e,$$

$$\tilde{\omega}_{3r} = \tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_e, \quad \tilde{\omega}_{4r} = \tilde{\omega}_4 - \tilde{\omega}_e.$$

Для нашага выпадку, у якім знакі ω_1 і ω_1 дадатныя, адносныя вуглавыя скорасці роўныя

$$\tilde{\omega}_{1r} = \omega_1 - \omega_1, \quad \tilde{\omega}_{2r} = \tilde{\omega}_2 - \omega_1,$$

$$\tilde{\omega}_{3r} = \tilde{\omega}_3 - \omega_1, \quad \tilde{\omega}_{4r} = \tilde{\omega}_4 - \omega_1.$$

Адносныя вуглавыя скорасці колаў адваротна працарцыянальныя адпаведным радыусам (знак “мінус” у адносінах радыусаў узяты для вонкавага зачаплення колаў).

$$\frac{\omega_1 - \omega_1}{\tilde{\omega}_2 - \omega_1} = -\frac{R_2}{R_1}; \quad \frac{\tilde{\omega}_3 - \omega_1}{\tilde{\omega}_4 - \omega_1} = -\frac{R_4}{R_3}.$$

Колы 2 і 3 маюць аднолькавую вуглавую скорасць.

$$\omega_2 = \omega_3.$$

Падлічым ω_2 і ω_4 .

$$\frac{20 - 120}{\tilde{\omega}_2 - 120} = -\frac{6}{20}, \quad \frac{100}{\tilde{\omega}_2 - 120} = \frac{3}{10},$$

$$1000 = 3\tilde{\omega}_2 - 360, \quad \tilde{\omega}_2 = \frac{1360}{3} = 453,3 \text{ рад/с.}$$

$$\frac{453,3 - 120}{\tilde{\omega}_4 - 120} = -\frac{16}{10}, \quad \frac{333,3}{\tilde{\omega}_4 - 120} = -\frac{8}{5},$$

$$1666,5 = 960 - 8\tilde{\omega}_4, \quad \tilde{\omega}_4 = -\frac{706,5}{8} = -88,3 \text{ рад/с.}$$

Вуглавая скорасць кола 4 роўная вуглавой скорасці вядзёнага вала II. Знак “мінус” у адказе паказвае, што вал II верціцца ў адваротны бок валу I.

Заданне К-12

*Вызначэнне вуглавых скорасцей звёнаў
рэдуктара з канічнымі коламі*

Вызначыць вуглавыя скорасці вядзёнага вала II і шасцерняў рэдуктара з канічнымі коламі (рыс. 104–106). Неабходныя даныя прыведзены ў табл. 21.

Прыклад разэння задання K-12

Знайсці вуглавыя скорасці вядзёнага вала II і блока шасцерняў 2–3 (сатэліта) рэдуктара з канічнымі коламі (рыс. 103а).

$\omega_I = 100 \text{ рад/с}$, $\omega_1 = -80 \text{ рад/с}$, $r_1 = 30 \text{ см}$, $r_2 = 20 \text{ см}$, $r_3 = 35 \text{ см}$, $r_4 = 40 \text{ см}$.

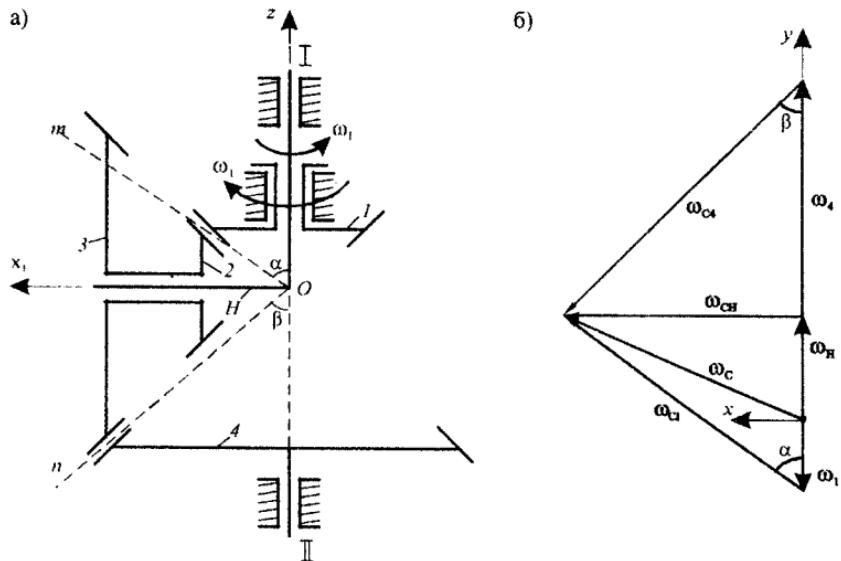
Рашэнне.

1. Выкарыстанне тэорыі складання вярчэння ў цвёрдага цела вакол восей, якія перасякаюцца.

Сатэліт удзельнічае ў складаным руху. Калі рухомую сістэму восей каардынат замацаваць на вадзіле H , то пераносны рух сатэліта — вярчэнне з вуглавой скорасцю $\omega_H = \omega_I$ вакол вертыкальной восі Oz . Адносны рух сатэліта — вярчэнне вакол гарызантальной восі Ox_1 з вуглавой скорасцю ω_{CH} . Абсолютная вуглавая скорасць сатэліта

$$\omega_C = \omega_H + \omega_{CH}.$$

Калі рухомую сістэму каардынат звязаць з шасцерній 1, то пераносная вуглавая скорасць сатэліта роўная ω_1 . Адносны рух — вярчэнне вакол восі Ox_1 , якая праходзіць праз нерухомы цэнтр O і пункт зачаплення сатэліта і шасцерні 1, з вуглавой скорасцю ω_{C1} .



Рыс. 103

Абсолютная угловая скорость спутника

$$\omega_C = \omega_1 + \omega_{C1}.$$

У абсолютных векторных равенствах известны линии действия вектора, что записаны в правых частях.

З некоторого пункта O (рис. 103б) будем векторы ω_H и ω_1 . З канцю вектора правильным образом на линии действия вектора ω_{CH} и ω_{C1} параллельна Ox_1 и Om (рис. 103а). Пункт пересечения з'явленика канцом вектора ω_C . Покажем вектор ω_C из пункта O .

Запишем проекции векторных равенств на оси Ox и Oy (рис. 103б)

$$\omega_{Cx} = \omega_{CH};$$

$$\omega_{Cy} = \omega_H;$$

$$\omega_{Cx} = \omega_{C1} \sin \alpha;$$

$$\omega_{Cy} = -\omega_1 + \omega_{C1} \cos \alpha.$$

Адсюль падлічим модулю всіх невядомих вектора.

$$\omega_{Cy} = \omega_H = \omega_I = 100 \text{ рад/с},$$

$$100 = -80 + \omega_{C1} \cdot \frac{20}{\sqrt{1300}}, \quad \omega_{C1} = 324 \text{ рад/с};$$

$$\omega_{Cx} = 324 \cdot \frac{30}{\sqrt{1300}} = 270 \text{ рад/с};$$

$$\omega_{CH} = 270 \text{ рад/с}.$$

Угловая скорость спутника равна

$$\omega_C = \sqrt{\omega_{Cx}^2 + \omega_{Cy}^2} = \sqrt{270^2 + 100^2} = 287,9 \text{ рад/с}.$$

Вектор ω_C направлен вправо от мгновенной оси вращения спутника.

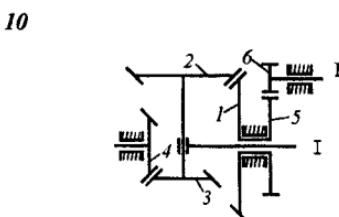
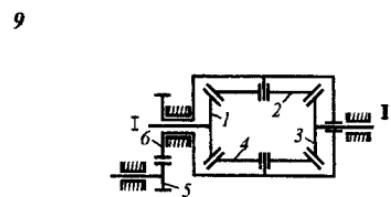
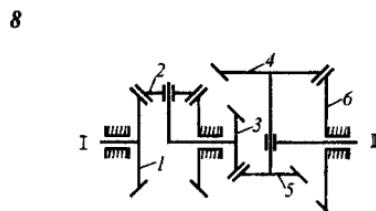
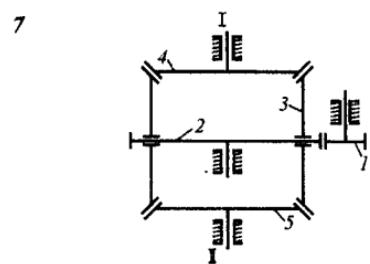
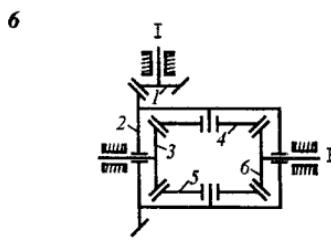
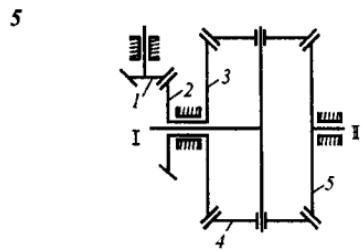
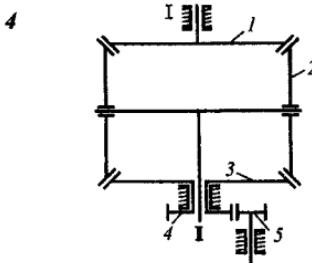
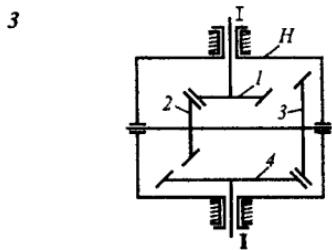
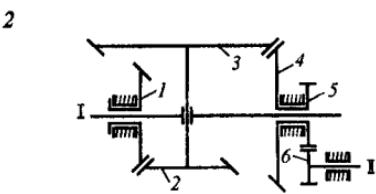
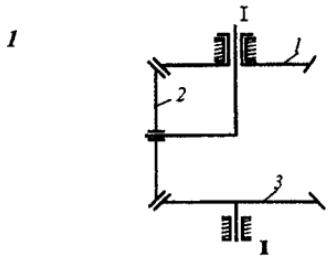
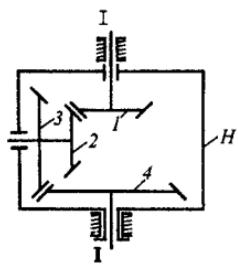
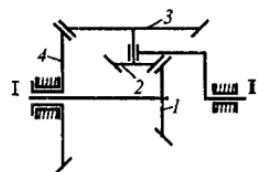


Рис. 104

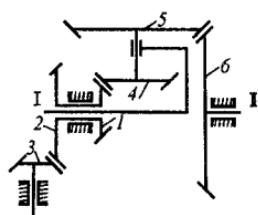
11



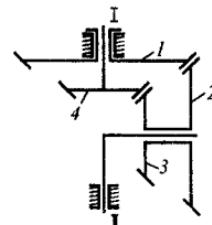
12



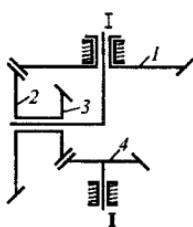
13



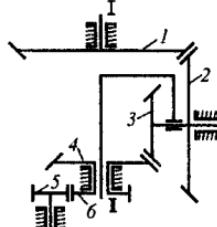
14



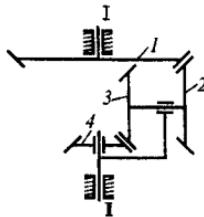
15



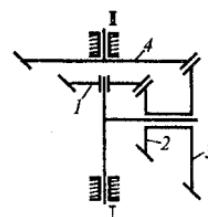
16



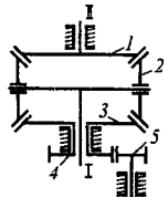
17



18



19



20

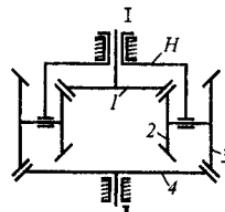
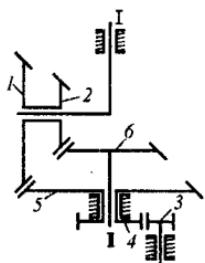
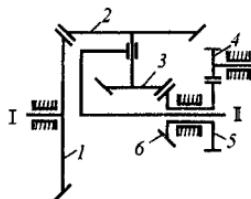


Рис. 105

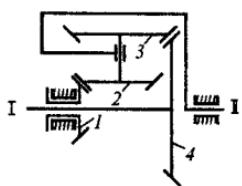
21



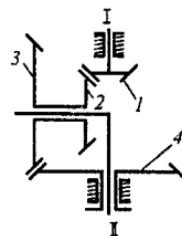
22



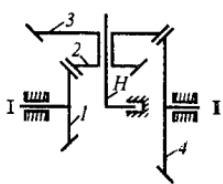
23



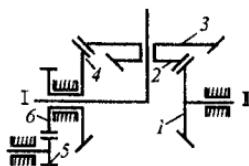
24



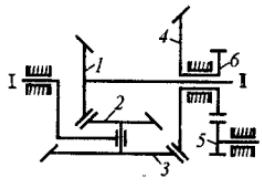
25



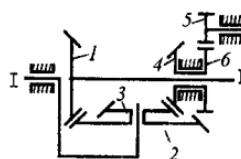
26



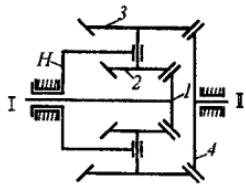
27



28



29



30

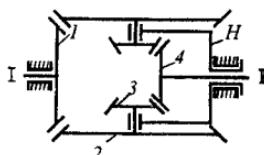


Рис. 106

Табліца 21

| Варыянт | Радыус, см | | | | | | Вуглавая скорасць, рад/с | | | | | |
|---------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| | r_1 | r_2 | r_3 | r_4 | r_5 | r_6 | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 | ω_H |
| 1 | 30 | 25 | 30 | | | | 80 | -200 | | | | |
| 2 | 18 | 20 | 35 | 30 | 15 | 18 | 120 | 240 | | | | |
| 3 | 15 | 20 | 32 | 36 | | | 140 | | | | | -80 |
| 4 | 36 | 24 | 36 | 18 | 12 | | 200 | | | | | 100 |
| 5 | 16 | 22 | 40 | 32 | 40 | | 180 | 90 | | | | |
| 6 | 20 | 42 | 22 | 38 | 38 | 22 | 160 | | -70 | | | |
| 7 | 22 | 40 | 28 | 34 | 28 | | 150 | 60 | | | | |
| 8 | 34 | 16 | 14 | 30 | 16 | 40 | 130 | | | | | |
| 9 | 24 | 32 | 24 | 32 | 14 | 26 | 220 | | | | | 140 |
| 10 | 32 | 30 | 22 | 20 | 24 | 18 | 100 | | | -120 | | |
| 11 | 18 | 14 | 24 | 34 | | | 140 | | | | | -100 |
| 12 | 15 | 10 | 20 | 30 | | | 110 | | | -90 | | |
| 13 | 12 | 24 | 26 | 28 | 40 | 34 | 120 | | 140 | | | |
| 14 | 40 | 34 | 24 | 26 | | | 180 | -110 | | | | |
| 15 | 36 | 28 | 22 | 20 | | | 90 | 140 | | | | |
| 16 | 38 | 20 | 10 | 16 | 12 | 22 | 150 | | | -120 | | |
| 17 | 34 | 24 | 20 | 14 | | | 200 | | | -130 | | |
| 18 | 20 | 18 | 32 | 38 | | | 100 | -50 | | | | |
| 19 | 32 | 20 | 32 | 12 | 16 | | 80 | | | -100 | | |
| 20 | 24 | 16 | 28 | 38 | | | 160 | | | | | -40 |
| 21 | 26 | 18 | 22 | 18 | 40 | 30 | 60 | | 150 | | | |
| 22 | 40 | 36 | 18 | 16 | 20 | 16 | 180 | | | 120 | | |
| 23 | 18 | 22 | 34 | 40 | | | 70 | -100 | | | | |
| 24 | 28 | 32 | 36 | 34 | | | 140 | | | -80 | | |
| 25 | 24 | 20 | 28 | 32 | | | 120 | | | | | -60 |
| 26 | 26 | 28 | 36 | 30 | 20 | 16 | 80 | | | | | -130 |
| 27 | 18 | 16 | 22 | 26 | 10 | 14 | 60 | | | | | 110 |
| 28 | 30 | 32 | 20 | 18 | 10 | 16 | 50 | | | | | 150 |
| 29 | 16 | 20 | 26 | 28 | | | 160 | | | | | 90 |
| 30 | 32 | 36 | 16 | 20 | | | 190 | | | | | -50 |

Цяпер рухомую сістэму восей каардынат замацуем на шасцерні 4. Пераносная вуглавая скорасць сатэліта будзе роўная вуглавой скорасці ω_4 . Адносна шасцерні 4 сатэліт будзе паварочвацца вакол восі On , якая праходзіць праз нерухомы цэнтр O і пункт зачаплення сатэліта з шасцернай 4, з адноснай вуглавой скорасцю ω_{C4} .

Абсалютная вуглавая скорасць сатэліта

$$\omega_c = \omega_4 + \omega_{c4}.$$

На рис. 103б зробім пабудову вектараў з улікам таго, што вектар ω_c ужо ведае (паказаны на рис. 103б), вектар ω_4 на-
кіраваны ўздоўж восі вярчэння шасцерні 4, вектар ω_{c4} на-
кіраваны ўздоўж восі On .

Запішам праекцыі вектарнай роўнасці на восі Ox і Oy .

$$\omega_{Cx} = \omega_{c4} \sin\beta;$$

$$\omega_{Cy} = \omega_4 - \omega_{c4} \cos\beta.$$

Раней атрымалі: $\omega_{Cx} = 270$ рад/с; $\omega_{Cy} = 100$ рад/с.

Тады $\omega_{c4} = \frac{\omega_{Cx}}{\sin\beta};$

$$\omega_{Cy} = \omega_4 - \frac{\omega_{Cx} \cdot \cos\beta}{\sin\beta} = \omega_4 - \omega_{Cx} \cdot \operatorname{ctg}\beta.$$

Адкуль $\omega_4 = \omega_{Cy} + \omega_{Cx} \cdot \operatorname{ctg}\beta = 100 + 270 \cdot \frac{35}{40} = 336$ рад/с.

Вуглавая скорасць вядзёнага вала II роўная вуглавой ско-
расці шасцерні 4.

$$\omega_{II} = \omega_4 = 336 \text{ рад/с.}$$

Знак вуглавой скорасці ω_{II} вядзёнага вала супадае са знакам
вуглавой скорасці ω_4 вядучага вала, таму іх накірункі вярчэння
супадаюць.

2. Спосаб Віліса.

Пры прымяненні спосабу Віліса для рэдуктара з канічнымі
коламі трэба мець на ўвазе, што, калі восі вярчэння шасцерні ў
перасякаюцца, адносная вуглавая скорасць не можа быць атрымана
як алгебраічная рознасць паміж абсолютнай і пераноснай ву-
главымі скорасцямі. Гэта справядліва толькі тады, калі восі па-
ралельныя.

Знакі перадатчных лікаў вызначаюцца ў формуле Віліса наступным чынам:

знак “плюс” прымаецца тады, калі пры назіранні з дадатных накірункаў восей пры спыненым вадзіле бачым вярчэнне шасцерняў, што знаходзяцца ў зачапленні, у адным накірунку;

знак “мінус” прымаецца ў выпадку назірання вярчэнняў, якія адбываюцца ў процілеглыя бакі.

У разглядаемым рэдуктары (рыс. 103а) вуглавая скорасць вадзіла ω_H роўная вуглавой скорасці вядучага вала ω_1 . Вуглавую скорасць сатэліта адносна вадзіла абазначым ω_{CH} .

Запішам суадносіны паміж алгебраічнымі значэннямі адносных вуглавых скорасцей шасцерняў 1 і 2, а таксама для шасцерняў 3 і 4:

$$\frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_H}{\tilde{\omega}_{CH}} = -\frac{r_2}{r_1}; \quad \frac{\tilde{\omega}_{CH}}{\tilde{\omega}_4 - \tilde{\omega}_H} = \frac{r_4}{r_3}.$$

Пры перамнажэнні левых і правых частак роўнасцей атрымаем

$$\frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_H}{\tilde{\omega}_4 - \tilde{\omega}_H} = -\frac{r_2 \cdot r_4}{r_1 \cdot r_3}.$$

$$\text{Адкуль } \tilde{\omega}_4 = \tilde{\omega}_H + (\tilde{\omega}_H - \tilde{\omega}_1) \frac{r_1 \cdot r_3}{r_2 \cdot r_4}.$$

Пасля падстаноўкі лікавых значэнняў знаходзім

$$\tilde{\omega}_4 = 100 + (100 + 80) \frac{30 \cdot 35}{20 \cdot 40} = 336 \text{ рад/с.}$$

Вядзёны вал II верціцца з вуглавой скорасцю

$$\omega_{II} = \omega_4 = 336 \text{ рад/с.}$$

Тое, што алгебраічнае значэнне $\tilde{\omega}_4$ атрымана са знакам “плюс”, пацвярджвае вярчэнне вядзёнага вала II у адзін бок з вядучым валам I (супраць гадзіннікавай стрэлкі, калі назіраецца з дадатнага накірунку восі Oy).

Падлічым вуглавую скорасць сатэліта адносна вадзіла.

$$\frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_H}{\tilde{\omega}_{CH}} = -\frac{r_2}{r_1}.$$

$$\text{Адкуль } \tilde{\omega}_{CH} = (\tilde{\omega}_H - \tilde{\omega}_1) \frac{r_1}{r_2}.$$

Пасля падстаноўкі лікавых значэнняў атрымаем

$$\tilde{\omega}_{CH} = (100 + 80) \frac{30}{20} = 270 \text{ рад/с.}$$

Абсолютная вуглавая скорасць сатэліта

$$\omega_C = \omega_H + \omega_{CH}.$$

З улікам таго, што ω_H і ω_{CH} узаемна перпендыкулярныя, атрымаем модуль ω_C па тэарэме Піфагора:

$$\omega_C = \sqrt{\omega_H^2 + \omega_{CH}^2} = \sqrt{100^2 + 270^2} = 287,9 \text{ рад/с.}$$

**ТАБЛІЦА ВАРЫЯНТАЎ ЗДАННЯЎ,
ЯКІЯ ЎВАХОДЗЯЦЬ У РАЗЛІКОВУЮ РАБОТУ**

| Шыфр | Нумары заданняў | | | | | | | | | | | | |
|------|-----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 1 | 30 | 23 | 12 | 1 | 29 | 22 | 11 | 26 | 18 | 20 | 15 | 9 | 5 |
| 2 | 27 | 20 | 9 | 3 | 1 | 24 | 5 | 7 | 11 | 14 | 18 | 22 | 29 |
| 3 | 24 | 17 | 6 | 5 | 3 | 26 | 1 | 8 | 10 | 12 | 14 | 20 | 22 |
| 4 | 21 | 14 | 3 | 9 | 5 | 28 | 30 | 24 | 19 | 17 | 10 | 8 | 6 |
| 5 | 18 | 11 | 1 | 12 | 7 | 30 | 2 | 4 | 9 | 16 | 24 | 22 | 13 |
| 6 | 15 | 8 | 30 | 16 | 9 | 2 | 3 | 5 | 12 | 20 | 21 | 24 | 27 |
| 7 | 12 | 5 | 27 | 18 | 11 | 4 | 29 | 23 | 21 | 19 | 17 | 14 | 8 |
| 8 | 9 | 2 | 24 | 21 | 13 | 6 | 28 | 26 | 20 | 15 | 11 | 10 | 4 |
| 9 | 6 | 19 | 21 | 24 | 15 | 8 | 27 | 30 | 1 | 28 | 2 | 11 | 17 |
| 10 | 3 | 16 | 18 | 27 | 17 | 10 | 25 | 6 | 28 | 30 | 1 | 12 | 19 |
| 11 | 29 | 13 | 15 | 2 | 19 | 12 | 24 | 3 | 30 | 27 | 4 | 14 | 18 |
| 12 | 26 | 10 | 12 | 5 | 21 | 14 | 23 | 2 | 13 | 29 | 3 | 15 | 20 |
| 13 | 23 | 7 | 9 | 8 | 23 | 16 | 22 | 1 | 14 | 18 | 26 | 13 | 21 |
| 14 | 20 | 4 | 6 | 11 | 25 | 18 | 21 | 9 | 16 | 26 | 5 | 24 | 22 |
| 15 | 17 | 15 | 3 | 14 | 27 | 20 | 19 | 10 | 29 | 25 | 6 | 16 | 23 |
| 16 | 14 | 30 | 1 | 17 | 2 | 22 | 20 | 11 | 27 | 24 | 7 | 18 | 16 |
| 17 | 11 | 27 | 29 | 20 | 4 | 24 | 18 | 12 | 26 | 23 | 8 | 17 | 15 |
| 18 | 8 | 24 | 26 | 23 | 6 | 26 | 17 | 13 | 25 | 22 | 9 | 19 | 14 |
| 19 | 5 | 21 | 23 | 26 | 8 | 28 | 16 | 14 | 24 | 20 | 11 | 2 | 13 |
| 20 | 2 | 18 | 20 | 29 | 10 | 30 | 15 | 16 | 23 | 21 | 12 | 24 | 12 |
| 21 | 28 | 15 | 17 | 2 | 12 | 1 | 14 | 18 | 22 | 13 | 16 | 21 | 11 |
| 22 | 25 | 12 | 14 | 5 | 14 | 4 | 13 | 19 | 21 | 11 | 23 | 7 | 10 |
| 23 | 22 | 9 | 11 | 8 | 16 | 7 | 12 | 15 | 17 | 10 | 13 | 23 | 4 |
| 24 | 19 | 6 | 8 | 11 | 18 | 10 | 16 | 17 | 15 | 12 | 20 | 5 | 9 |
| 25 | 16 | 3 | 5 | 14 | 20 | 13 | 11 | 21 | 6 | 9 | 22 | 25 | 7 |
| 26 | 13 | 1 | 2 | 17 | 22 | 16 | 10 | 18 | 30 | 12 | 23 | 28 | 8 |
| 27 | 10 | 29 | 28 | 20 | 24 | 19 | 9 | 13 | 16 | 11 | 25 | 27 | 6 |
| 28 | 7 | 28 | 25 | 23 | 26 | 22 | 8 | 11 | 20 | 10 | 24 | 16 | 5 |
| 29 | 4 | 23 | 22 | 26 | 28 | 25 | 7 | 9 | 19 | 8 | 27 | 15 | 3 |
| 30 | 1 | 20 | 19 | 29 | 30 | 28 | 6 | 7 | 18 | 9 | 26 | 14 | 4 |
| 31 | 27 | 14 | 16 | 1 | 3 | 30 | 5 | 4 | 28 | 7 | 29 | 13 | 2 |
| 32 | 24 | 11 | 13 | 4 | 5 | 1 | 3 | 6 | 14 | 2 | 30 | 12 | 8 |
| 33 | 21 | 8 | 10 | 7 | 9 | 3 | 2 | 30 | 13 | 6 | 28 | 11 | 1 |
| 34 | 18 | 5 | 7 | 10 | 11 | 8 | 1 | 29 | 12 | 4 | 30 | 9 | 2 |
| 35 | 15 | 2 | 4 | 13 | 7 | 9 | 30 | 16 | 11 | 5 | 29 | 8 | 3 |
| 36 | 12 | 19 | 1 | 14 | 13 | 7 | 28 | 15 | 10 | 3 | 27 | 6 | 4 |
| 37 | 9 | 16 | 27 | 17 | 15 | 11 | 26 | 14 | 8 | 2 | 28 | 5 | 6 |
| 38 | 6 | 13 | 24 | 20 | 17 | 14 | 22 | 12 | 9 | 1 | 26 | 4 | 7 |
| 39 | 3 | 10 | 21 | 23 | 19 | 15 | 24 | 13 | 7 | 14 | 25 | 2 | 9 |
| 40 | 26 | 7 | 18 | 25 | 21 | 17 | 20 | 11 | 6 | 13 | 24 | 1 | 10 |

| Шыфр | Нумары задания | | | | | | | | | | | | |
|------|----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 41 | 23 | 4 | 15 | 29 | 25 | 19 | 18 | 10 | 5 | 16 | 22 | 26 | 11 |
| 42 | 20 | 30 | 12 | 2 | 23 | 21 | 16 | 9 | 4 | 15 | 27 | 25 | 18 |
| 43 | 17 | 27 | 9 | 5 | 29 | 23 | 14 | 8 | 3 | 17 | 21 | 24 | 12 |
| 44 | 14 | 24 | 6 | 8 | 27 | 25 | 12 | 7 | 2 | 18 | 20 | 23 | 13 |
| 45 | 11 | 21 | 3 | 16 | 4 | 27 | 10 | 6 | 1 | 19 | 18 | 22 | 14 |
| 46 | 8 | 18 | 1 | 14 | 6 | 29 | 8 | 5 | 30 | 20 | 19 | 21 | 15 |
| 47 | 5 | 15 | 26 | 17 | 8 | 2 | 6 | 28 | 29 | 21 | 16 | 20 | 17 |
| 48 | 2 | 12 | 23 | 20 | 10 | 4 | 1 | 27 | 28 | 22 | 17 | 19 | 21 |
| 49 | 25 | 9 | 20 | 23 | 12 | 6 | 4 | 26 | 27 | 24 | 15 | 18 | 19 |
| 50 | 22 | 6 | 17 | 26 | 14 | 8 | 2 | 25 | 24 | 23 | 13 | 30 | 20 |
| 51 | 19 | 3 | 14 | 29 | 16 | 10 | 30 | 4 | 26 | 21 | 12 | 17 | 22 |
| 52 | 16 | 1 | 11 | 3 | 18 | 12 | 29 | 2 | 25 | 22 | 14 | 24 | 23 |
| 53 | 13 | 29 | 8 | 7 | 20 | 14 | 28 | 3 | 23 | 29 | 11 | 22 | 24 |
| 54 | 10 | 26 | 5 | 19 | 22 | 16 | 27 | 1 | 21 | 30 | 9 | 20 | 25 |
| 55 | 7 | 23 | 2 | 18 | 24 | 18 | 26 | 17 | 22 | 25 | 10 | 19 | 27 |
| 56 | 4 | 20 | 25 | 16 | 26 | 21 | 24 | 18 | 2 | 23 | 8 | 29 | 28 |
| 57 | 1 | 17 | 22 | 19 | 28 | 23 | 25 | 20 | 3 | 24 | 7 | 26 | 29 |
| 58 | 24 | 14 | 19 | 22 | 30 | 25 | 23 | 21 | 4 | 26 | 6 | 27 | 1 |
| 59 | 21 | 28 | 16 | 25 | 5 | 27 | 22 | 19 | 20 | 1 | 4 | 18 | 26 |
| 60 | 18 | 25 | 13 | 28 | 7 | 29 | 21 | 22 | 19 | 2 | 5 | 1 | 30 |
| 61 | 15 | 22 | 10 | 1 | 9 | 20 | 19 | 23 | 18 | 3 | 2 | 25 | 3 |
| 62 | 12 | 18 | 7 | 4 | 11 | 22 | 20 | 24 | 17 | 5 | 3 | 9 | 2 |
| 63 | 9 | 16 | 4 | 7 | 13 | 24 | 18 | 1 | 15 | 6 | 30 | 10 | 5 |
| 64 | 6 | 13 | 1 | 10 | 15 | 26 | 17 | 2 | 16 | 7 | 29 | 11 | 4 |
| 65 | 3 | 10 | 24 | 13 | 17 | 30 | 16 | 8 | 14 | 4 | 28 | 2 | 6 |
| 66 | 23 | 7 | 21 | 16 | 19 | 28 | 15 | 3 | 13 | 8 | 1 | 12 | 18 |
| 67 | 20 | 4 | 18 | 19 | 21 | 29 | 14 | 5 | 12 | 9 | 27 | 3 | 7 |
| 68 | 17 | 30 | 15 | 22 | 23 | 27 | 13 | 4 | 11 | 10 | 26 | 14 | 8 |
| 69 | 14 | 27 | 12 | 25 | 29 | 23 | 11 | 6 | 10 | 13 | 25 | 4 | 9 |
| 70 | 11 | 24 | 9 | 28 | 25 | 21 | 12 | 7 | 8 | 12 | 23 | 13 | 10 |
| 71 | 8 | 21 | 6 | 2 | 27 | 19 | 10 | 9 | 7 | 11 | 24 | 14 | 12 |
| 72 | 5 | 18 | 3 | 6 | 1 | 17 | 9 | 10 | 4 | 14 | 22 | 15 | 11 |
| 73 | 2 | 15 | 23 | 8 | 3 | 16 | 7 | 11 | 9 | 17 | 21 | 5 | 13 |
| 74 | 22 | 12 | 20 | 11 | 5 | 13 | 8 | 12 | 16 | 15 | 19 | 6 | 14 |
| 75 | 19 | 9 | 17 | 14 | 7 | 11 | 6 | 13 | 5 | 16 | 20 | 17 | 15 |
| 76 | 16 | 6 | 14 | 17 | 9 | 10 | 5 | 15 | 3 | 18 | 30 | 7 | 20 |
| 77 | 13 | 3 | 11 | 20 | 14 | 9 | 4 | 16 | 6 | 19 | 29 | 18 | 17 |
| 78 | 10 | 1 | 8 | 23 | 13 | 7 | 3 | 14 | 2 | 20 | 28 | 19 | 16 |
| 79 | 7 | 29 | 5 | 26 | 15 | 4 | 2 | 17 | 1 | 21 | 27 | 20 | 18 |
| 80 | 4 | 26 | 2 | 29 | 17 | 5 | 1 | 18 | 3 | 22 | 23 | 8 | 19 |
| 81 | 1 | 9 | 22 | 3 | 19 | 2 | 30 | 20 | 4 | 23 | 26 | 21 | 24 |
| 82 | 21 | 20 | 19 | 6 | 23 | 1 | 29 | 25 | 5 | 24 | 22 | 9 | 27 |
| 83 | 18 | 17 | 16 | 9 | 21 | 30 | 28 | 19 | 6 | 25 | 24 | 10 | 20 |
| 84 | 15 | 14 | 13 | 12 | 25 | 29 | 27 | 21 | 7 | 26 | 20 | 11 | 22 |
| 85 | 12 | 11 | 10 | 15 | 27 | 28 | 26 | 22 | 8 | 29 | 21 | 24 | 23 |

| Шыфр | Нумары заданияў | | | | | | | | | | | | |
|------|-----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 86 | 9 | 8 | 7 | 18 | 29 | 27 | 25 | 23 | 1 | 30 | 19 | 12 | 21 |
| 87 | 6 | 5 | 4 | 21 | 2 | 26 | 24 | 25 | 9 | 27 | 18 | 13 | 8 |
| 88 | 3 | 2 | 1 | 24 | 4 | 25 | 23 | 26 | 10 | 28 | 17 | 14 | 9 |
| 89 | 20 | 25 | 3 | 27 | 6 | 24 | 22 | 28 | 11 | 1 | 16 | 15 | 10 |
| 90 | 17 | 21 | 6 | 30 | 8 | 23 | 20 | 24 | 12 | 2 | 15 | 16 | 25 |
| 91 | 14 | 7 | 9 | 4 | 10 | 22 | 21 | 29 | 13 | 3 | 12 | 23 | 26 |
| 92 | 11 | 19 | 12 | 7 | 14 | 21 | 18 | 27 | 15 | 4 | 13 | 22 | 28 |
| 93 | 8 | 30 | 15 | 10 | 12 | 20 | 19 | 1 | 14 | 5 | 11 | 24 | 29 |
| 94 | 5 | 27 | 18 | 13 | 16 | 19 | 17 | 30 | 17 | 6 | 14 | 25 | 1 |
| 95 | 2 | 24 | 21 | 16 | 18 | 17 | 15 | 3 | 19 | 7 | 10 | 26 | 30 |
| 96 | 19 | 21 | 24 | 18 | 20 | 16 | 14 | 2 | 22 | 8 | 9 | 27 | 2 |
| 97 | 16 | 18 | 27 | 22 | 24 | 15 | 13 | 4 | 23 | 9 | 8 | 28 | 3 |
| 98 | 13 | 15 | 30 | 25 | 22 | 18 | 12 | 5 | 24 | 10 | 7 | 29 | 4 |
| 99 | 10 | 12 | 21 | 28 | 26 | 14 | 11 | 6 | 16 | 12 | 5 | 30 | 7 |
| 100 | 7 | 9 | 18 | 1 | 28 | 13 | 10 | 8 | 18 | 11 | 6 | 2 | 5 |
| 101 | 4 | 6 | 15 | 14 | 30 | 12 | 9 | 7 | 20 | 13 | 3 | 1 | 10 |
| 102 | 1 | 26 | 12 | 17 | 3 | 11 | 8 | 9 | 21 | 14 | 4 | 5 | 6 |
| 103 | 18 | 25 | 9 | 20 | 5 | 10 | 7 | 11 | 26 | 15 | 2 | 6 | 8 |
| 104 | 15 | 22 | 6 | 23 | 7 | 9 | 5 | 10 | 25 | 16 | 1 | 3 | 11 |
| 105 | 12 | 19 | 3 | 26 | 9 | 8 | 6 | 13 | 27 | 17 | 2 | 4 | 7 |
| 106 | 9 | 16 | 1 | 29 | 11 | 7 | 4 | 12 | 28 | 18 | 3 | 8 | 6 |
| 107 | 6 | 13 | 2 | 11 | 15 | 5 | 3 | 14 | 29 | 19 | 4 | 7 | 30 |
| 108 | 3 | 10 | 5 | 8 | 13 | 6 | 2 | 15 | 30 | 20 | 7 | 9 | 29 |
| 109 | 17 | 7 | 8 | 5 | 19 | 4 | 1 | 16 | 2 | 21 | 9 | 10 | 28 |
| 110 | 14 | 4 | 11 | 2 | 17 | 3 | 30 | 18 | 1 | 22 | 10 | 15 | 5 |
| 111 | 11 | 29 | 14 | 30 | 21 | 2 | 26 | 19 | 3 | 23 | 12 | 16 | 4 |
| 112 | 8 | 27 | 17 | 28 | 23 | 1 | 22 | 20 | 4 | 24 | 13 | 14 | 3 |
| 113 | 5 | 24 | 20 | 26 | 25 | 4 | 29 | 17 | 6 | 27 | 14 | 18 | 2 |
| 114 | 2 | 21 | 23 | 24 | 27 | 5 | 28 | 22 | 7 | 25 | 15 | 17 | 1 |
| 115 | 16 | 18 | 26 | 22 | 29 | 6 | 27 | 23 | 8 | 28 | 17 | 19 | 24 |
| 116 | 13 | 15 | 29 | 20 | 4 | 7 | 25 | 24 | 9 | 26 | 11 | 21 | 27 |
| 117 | 10 | 29 | 20 | 18 | 6 | 8 | 24 | 25 | 10 | 30 | 5 | 22 | 26 |
| 118 | 7 | 12 | 17 | 16 | 8 | 2 | 23 | 26 | 5 | 1 | 6 | 24 | 25 |
| 119 | 4 | 9 | 14 | 15 | 10 | 3 | 22 | 27 | 11 | 2 | 8 | 25 | 23 |
| 120 | 1 | 6 | 11 | 14 | 12 | 9 | 21 | 28 | 13 | 3 | 16 | 20 | 22 |
| 121 | 15 | 3 | 8 | 13 | 14 | 10 | 20 | 29 | 12 | 4 | 18 | 26 | 21 |
| 122 | 12 | 1 | 5 | 10 | 16 | 11 | 19 | 30 | 14 | 6 | 20 | 27 | 17 |
| 123 | 9 | 29 | 2 | 11 | 18 | 12 | 17 | 1 | 15 | 5 | 19 | 28 | 20 |
| 124 | 6 | 26 | 7 | 12 | 20 | 13 | 18 | 2 | 16 | 8 | 21 | 29 | 19 |
| 125 | 3 | 23 | 10 | 8 | 22 | 14 | 16 | 4 | 17 | 7 | 24 | 30 | 18 |
| 126 | 14 | 20 | 13 | 7 | 24 | 15 | 22 | 3 | 18 | 9 | 23 | 1 | 16 |
| 127 | 11 | 17 | 16 | 6 | 26 | 10 | 15 | 5 | 19 | 12 | 22 | 2 | 14 |
| 128 | 8 | 14 | 19 | 5 | 28 | 16 | 20 | 6 | 30 | 13 | 25 | 3 | 15 |
| 129 | 5 | 11 | 22 | 4 | 30 | 17 | 14 | 7 | 20 | 10 | 26 | 21 | 13 |
| 130 | 2 | 8 | 25 | 3 | 5 | 18 | 13 | 9 | 21 | 11 | 27 | 4 | 12 |

| Шыфр | Нумары заданияў | | | | | | | | | | | | |
|------|-----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 131 | 13 | 5 | 28 | 2 | 7 | 19 | 12 | 8 | 22 | 14 | 29 | 23 | 11 |
| 132 | 10 | 2 | 30 | 1 | 9 | 20 | 11 | 12 | 23 | 15 | 28 | 5 | 18 |
| 133 | 7 | 19 | 27 | 29 | 11 | 21 | 10 | 9 | 24 | 16 | 30 | 6 | 20 |
| 134 | 4 | 16 | 24 | 28 | 13 | 22 | 9 | 14 | 25 | 17 | 1 | 7 | 10 |
| 135 | 1 | 13 | 21 | 27 | 15 | 23 | 8 | 16 | 26 | 18 | 2 | 22 | 9 |
| 136 | 3 | 10 | 18 | 26 | 17 | 24 | 7 | 11 | 27 | 19 | 4 | 8 | 25 |
| 137 | 16 | 7 | 15 | 25 | 19 | 26 | 6 | 10 | 28 | 20 | 3 | 9 | 8 |
| 138 | 9 | 4 | 12 | 24 | 21 | 25 | 5 | 13 | 29 | 22 | 7 | 10 | 28 |
| 139 | 12 | 1 | 9 | 23 | 25 | 27 | 4 | 15 | 2 | 21 | 5 | 11 | 7 |
| 140 | 15 | 30 | 6 | 22 | 23 | 28 | 3 | 16 | 1 | 24 | 8 | 12 | 21 |
| 141 | 18 | 27 | 3 | 21 | 29 | 30 | 2 | 17 | 4 | 23 | 6 | 13 | 22 |
| 142 | 21 | 24 | 1 | 20 | 27 | 6 | 30 | 18 | 3 | 25 | 9 | 14 | 29 |
| 143 | 24 | 21 | 2 | 19 | 1 | 8 | 7 | 20 | 5 | 26 | 10 | 15 | 6 |
| 144 | 27 | 18 | 5 | 16 | 3 | 10 | 29 | 19 | 6 | 28 | 11 | 24 | 23 |
| 145 | 30 | 15 | 8 | 17 | 5 | 12 | 28 | 21 | 7 | 27 | 13 | 16 | 5 |
| 146 | 29 | 12 | 11 | 18 | 7 | 14 | 27 | 22 | 8 | 30 | 15 | 17 | 4 |
| 147 | 26 | 9 | 14 | 15 | 11 | 16 | 25 | 23 | 10 | 29 | 12 | 18 | 3 |
| 148 | 23 | 6 | 17 | 14 | 9 | 18 | 26 | 24 | 11 | 1 | 16 | 19 | 2 |
| 149 | 20 | 3 | 20 | 13 | 15 | 22 | 24 | 25 | 12 | 2 | 14 | 26 | 1 |
| 150 | 22 | 1 | 23 | 12 | 17 | 24 | 28 | 26 | 9 | 4 | 18 | 20 | 30 |

ЛІТАРАТУРА

1. Айзенберг Т.Б., Воронков И.М., Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике. М.: Высшая школа, 1968.— 419 с.
2. Бать М.И. , Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: В 2 т. М.: Наука, 1990. Т. 1.— 670 с.
3. Хвясько Г.М. Курс тэарэтычнай механікі. Mn.: БДТУ, 2000.— 353 с.
4. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. СПб.: Лань, 2001.— 764 с.

ЗМЕСТ

Прадмова

3

СТАТЫКА

1. ПЛОСКАЯ СІСТЭМА СІЛ

Сыходная сістэма сіл

| | | |
|--------------|--|----|
| Заданне С-1. | Вызначэнне рэакцый апор і нагрузкак у стрыжнях плоскай фермы | 4 |
| Заданне С-2. | Вызначэнне рэакцый сувязей цела | 13 |

Плоская адвольная сістэма сіл

| | | |
|--------------|---|----|
| Заданне С-3. | Прывядзенне плоскай адвольнай сістэмы сіл да прасцейшага віду | 25 |
| Заданне С-4. | Вызначэнне реакцый апор цвёрдага цела пры ўздзеянні плоскай адвольнай сістэмы сіл | 29 |
| Заданне С-5. | Вызначэнне нагрузкак у стрыжнях плоскай фермы спосабам Рытэра | 34 |
| Заданне С-6. | Вызначэнне рэакцый апор састаўной бэлькі | 36 |
| Заданне С-7. | Вызначэнне рэакцый апор у сістэме двух цел | 42 |
| Заданне С-8. | Раўнавага цела з улікам трэння | 49 |

2. ПРАСТОРАВАЯ СІСТЭМА СІЛ

Сыходная сістэма сіл

| | | |
|--------------|---|----|
| Заданне С-9. | Вызначэнне нагрузкак у стрыжнях прасторавай канструкцыі | 56 |
|--------------|---|----|

Прасторавая адвольная сістэма сіл

| | | |
|---------------|---|----|
| Заданне С-10. | Прывядзенне прасторавай адвольнай сістэмы сіл да прасцейшага віду | 63 |
| Заданне С-11. | Вызначэнне рэакцый сувязей, накладзеных на цвёрдае цела. | 68 |
| Заданне С-12. | Вызначэнне рэакцый бязважкіх стрыжняў, якія падтрымліваюць прамавугольную пліту | 74 |

3. ЦЭНТР ЦЯЖАРУ

| | | |
|---------------|--|----|
| Заданне С-13. | Вызначэнне месца знаходжання цэнтра цяжару плоскага цела | 81 |
|---------------|--|----|

КІНЕМАТИКА

| | |
|--|-----|
| 1. Кінематыка пункта | |
| Заданне К-1. Вyzначэнне траекторыі, скорасці і паскарэння пункта па вядомых ўраўненнях яго руху | 88 |
| Заданне К-2. Складанне ўраўненняў руху пункта і вызначэнне яго скорасці і паскарэння | 92 |
| 2. Прасцейшыя рухі цвёрдага цела | |
| Заданне К-3. Вyzначэнне скорасцей і паскарэнняў пунктаў цела пры паступальным і вярчальных рухах | 99 |
| 3. Складаны рух пункта | |
| Заданне К-4. Вyzначэнне скорасці і паскарэння пункта пры пераносным паступальным руху | 107 |
| Заданне К-5. Вyzначэнне скорасці і паскарэння пункта, калі пераносны рух вярчальны | 116 |
| 4. Складаны рух цвёрдага цела | |
| Заданне К-6. Вyzначэнне скорасцей пунктаў цвёрдага цела пры плоскапаралельным руху | 125 |
| Заданне К-7. Вyzначэнне скорасцей і паскарэнняў пунктаў цвёрдага цела пры плоскапаралельным руху | 132 |
| Заданне К-8. Вyzначэнне скорасцей і паскарэнняў пунктаў плоскага механізма | 140 |
| Заданне К-9. Вyzначэнне кінематычных характеристык сферычнага руху цвёрдага цела і яго пунктаў па ўраўненнях Эйлера | 150 |
| Заданне К-10. Вyzначэнне скорасцей і паскарэнняў пунктаў цвёрдага цела, якое коціца па нерухомай паверхні і мае пры гэтым адзін нерухомы пункт | 156 |
| Заданне К-11. Вyzначэнне вуглавых скорасцей звёнаў планетарнага рэдуктара з цыліндрычнымі коламі | 163 |
| Заданне К-12. Вyzначэнне вуглавых скорасцей звёнаў рэдуктара з канічнымі коламі | 170 |
| Табліца варыянтаў заданняў, якія уваходзяць у разліковую работу | 180 |
| Літаратура | 184 |

Вучэбнае выданне

Хвясько Генадзій Міхайлавіч

ТЭАРЭТЫЧНАЯ МЕХАНИКА

Практыкум

У 2-х частках

Частка 1

Рэдактар М.П. Мурашка

Карэктар Я.І. Гоман

Камп'ютэрная вёрстка І.А. Канановіч

Падпісана да друку 18.02.04. Фармат $60\times84\frac{1}{16}$.

Папера афсетная. Гарнітура Таймс. Друк афсетны.

Ум. друк. арк. 12,4. Ул.-выд. арк. 10,6.

Тыраж 1000 экз. Заказ **85**.

Установа аддукацыі

«Беларускі дзяржаўны тэхналагічны універсітэт».

220050. Мінск, Свярдлова, 13а. Ліцэнзія ЛВ № 276 ад 15.04.03.

Аддрукавана ў лабараторыі паліграфіі установы аддукацыі

«Беларускі дзяржаўны тэхналагічны універсітэт».

220050. Мінск, Свярдлова, 13.

Пераплётна-брашуроўчныя працэсы выкананы

ў ААТ «Паліграфкамбінат імя Я. Коласа».

220600. Мінск, Чырвоная, 23. Заказ **590**.