ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.935.2+519.71

В. М. Марченко, И. М. Борковская, О. Н. Пыжкова
Белорусский государственный технологический университет

УСТОЙЧИВОСТЬ ГИБРИДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С МНОГОМЕРНЫМ ВРЕМЕНЕМ*

Многие современные технологические процессы описываются гибридными системами, поэтому исследование представления решений таких систем и их качественных свойств является актуальной задачей. В работе рассмотрены линейные гибридные дискретно-непрерывные системы с многомерным (2-D-мерным) временем. Они состоят из непрерывной и дискретной составляющих. Для таких систем в симметрической форме ранее получены явные представления решения на основе сопряженных систем и путем разложения в ряды по решениям определяющих уравнений. В данной работе изучается такое важнейшее свойство гибридных систем, как устойчивость. Введены определения различных типов устойчивости (слабая асимптотическая устойчивость, сильная асимптотическая устойчивость, (α, γ)-устойчивость и др.) линейных стационарных гибридных 2-D-систем, исследована связь между ними и сформулирована соответствующая теорема. Доказаны необходимые условия асимптотической устойчивости. Представлены достаточные условия асимптотической устойчивости указанных систем в скалярном случае. Сформулированы необходимые и достаточные условия сильной асимптотической устойчивости и (α, γ)-устойчивости рассматриваемых систем. Предложенная техника позволяет также исследовать и другие типы устойчивости указанных систем.

Ключевые слова: гибридные 2-D-системы, асимптотическая устойчивость, необходимые и достаточные условия устойчивости.

V. M. Marchenko, I. M. Borkovskaya, O. N. Pyzhkova
Belarusian State Technological University

THE STABILITY OF HYBRID DYNAMIC 2-D-SYSTEMS

Some modern technological processes are described by the hybrid systems. Therefore, the study of the representation of solutions and the quality properties of such systems is an actual theme. The paper deals with linear hybrid discrete-continuous system with a multi-dimensional (2-D-dimensional) time. It consists of the continuous and discrete components. Earlier the representations of solutions based on conjugated systems and by expanding in series of decisions determining equations were received for such systems in the symmetric form. In this paper we study the stability of the hybrid systems. The stability is one of the most important properties of the systems under consideration. The definitions of different types of stability (weak asymptotic stability, strong asymptotic stability, (α, γ)-stability, etc.) for linear stationary hybrid 2-D-systems are introduced in the article. The connections between them are investigated and the corresponding theorem is formulated. The necessary conditions of stability are proved. The sufficient conditions of hybrid 2-D-systems stability are presented for the scalar case. The necessary, sufficient conditions of strong stability and (α, γ)-stability are formulated. The stability of other types can be studied by using the technique proposed.

Key words: hybrid 2-D-systems, asymptotic stability, necessary, sufficient conditions of stability.

* Работа выполнена в рамках сотрудничества с Белостокским техническим университетом (S/WI/2/2011).

Введение. Многие современные технологические процессы приводят к математическим моделям, представляющим собой гибридные системы [1–5]. Термин «гибридные системы» относят к системам, описывающим процессы или объекты с существенно различающимися характеристиками, например, содержащие в основной динамике непрерывные и дискретные переменные (сигналы), детерминированные и случайные величины или воздействия и т. д., что, в конечном счете, и определяет характер (природу) гибридных систем. Неотъемлемым достоинством гибридных систем является, прежде всего, адекватность таких систем.

Актуальными представляются задачи, связанные с изучением представления решений гибридных систем и их качественных свойств. В работе [6] рассмотрены линейные гибридные дискретно-непрерывные системы с многомерным (2-D-мерным) временем, состоящие из непрерывной и дискретной составляющих. Для таких систем в симметрической форме получены явные представления решения на основе сопряженных систем и путем разложения в ряды по решениям определяющих уравнений таких систем. В данной статье исследуется такое важнейшее свойство указанных систем, как устойчивость.

Основная часть.

1. Постановка задачи. Рассмотрим гибридную дискретно-непрерывную 2-D-систему в симметрической форме (по отношению к операторам дифференцирования и сдвига):

$$\dot{x}_1(t,k) = A_{11}x_1(t,k) + A_{12}x_2(t,k), \quad t \in [0, +\infty), \tag{1}$$

$$x_2(t,k+1) = A_{21}x_1(t,k) + A_{22}x_2(t,k), \quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{2}$$

где $\dot{x}_1(t,k) = \dfrac{\partial x_1(t,k)}{\partial t}$, $x_1(t,k) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t,k) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $x_1(t,k), x_2(t,k)$ – n_1- и n_2-векторы состояния системы; $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Пусть граничные (начальные) условия для (1) и (2) заданы в виде

$$x_1(0,k) = x_1(k), \quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{3}$$

$$x_2(t,0) = x_2(t), \; t \in [0, +\infty). \tag{4}$$

В нормальной форме гибридную модель 2-D-системы можно записать следующим образом:

$$\dot{x}_1(t,i) = A_{11}x_1(t,i) + A_{12}x_2(t,i), \quad t \in [0, +\infty), \tag{5}$$

$$x_2(t,i) = A_{21}x_1(t,i) + A_{22}x_2(t,i-1), \quad i = 0,1,2,\ldots, \tag{6}$$

начальные условия:

$$x_1(0,i) = x_1(i), \quad i = 0,1,2,\ldots, \tag{7}$$

$$x_2(t,-1) = x_2(t), \; t \in [0, +\infty). \tag{8}$$

Рассмотрим далее систему (1), (2) в симметрической форме.

Задача. Получить условия устойчивости гибридной 2-D-системы (1), (2) в симметрической форме.

В работе [6] доказано, что существует единственное решение системы (1), (2), удовлетворяющее начальным условиям (3), (4).

Определение 1. Система (1), (2) называется:

1) устойчивой по x_1 относительно непрерывной переменной, если для любых ограниченных начальных функций существуют такие неотрицательные числа $M_1, \ldots, M_k, \ldots$, что соответствующее решение системы (1), (2) обладает свойством:

$$\lim_{t\to+\infty} \|x_1(t,k)\| \le M_k$$

при каждом $k \in \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$, где символ $\|d\|$ обозначает норму (евклидову) вектора d;

2) устойчивой по x_1 относительно дискретной переменной, если для любых ограниченных начальных функций существует такая неотрицательная функция $M(t), t > 0$, что соответствующее решение системы (1), (2) обладает следующим свойством:

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_1(t,k)\| \le M(t)$$

при каждом $t \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$;

3) устойчивой по x_2 относительно непрерывной переменной, если для любых ограниченных начальных функций существуют такие неотрицательные числа $M_1, \ldots, M_k, \ldots$, что соответствующее решение системы (1), (2) обладает свойством:

$$\lim_{t\to+\infty} \|x_2(t,k)\| \le M_k$$

при каждом $k \in \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$;

4) устойчивой по x_2 относительно дискретной переменной, если для любых ограниченных начальных функций существует такая неотрицательная функция $M(t), t > 0$, что соответствующее решение системы (1), (2) обладает следующим свойством:

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_2(t,k)\| \le M(t)$$

при каждом $t \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$;

5) устойчивой по x_1 относительно непрерывной равномерно по дискретной переменной,

если для любых ограниченных начальных функций существует такое неотрицательное число M, что соответствующее решение системы (1), (2) обладает свойством:

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\|x_1(t,k)\|\le M;$$

6) устойчивой по x_1 относительно дискретной равномерно по непрерывной переменной, если для любых ограниченных начальных функций существует такое неотрицательное число M, что соответствующее решение системы (1), (2) обладает следующим свойством:

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\|x_1(t,k)\|\le M;$$

7) устойчивой по x_2 относительно непрерывной равномерно по дискретной переменной, если для любых ограниченных начальных функций существует такое неотрицательное число M, что соответствующее решение системы (1), (2) обладает свойством:

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\|x_2(t,k)\|\le M;$$

8) устойчивой по x_2 относительно дискретной равномерно по непрерывной переменной, если для любых ограниченных начальных функций существует такое неотрицательное число M, что соответствующее решение системы (1), (2) обладает следующим свойством:

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\|x_2(t,k)\|\le M;$$

9) слабо асимптотически устойчивой, если для любых ограниченных начальных функций $x_1(\cdot), x_2(\cdot)$ в (3), (4) соответствующее решение $x_1(t,k), x_2(t,k)$ системы (1), (2) обладает свойством:

$$\lim_{\substack{t\to+\infty\\k\to+\infty}}\left(\|x_1(t,k)\|+\|x_2(t,k)\|\right)=0;$$

10) сильно асимптотически устойчивой, если найдутся такие действительные числа $M>0$, $\alpha>0$, $0<\gamma<1$, что для любых ограниченных начальных функций соответствующее решение системы (1), (2) обладает следующим свойством:

$$\|x_1(t,k)\|+\|x_2(t,k)\|\le M\left(e^{-\alpha t}+|\gamma|^k\right),\qquad(9)$$
$$t>0, k=1,2,\ldots;$$

11) (α,γ)-устойчивой, если найдется такое действительное число $M>0$, что для любых ограниченных начальных функций соответствующее решение системы (1), (2) удовлетворяет требованию (9).

2. Необходимые условия устойчивости. Связь между различными понятиями асимптотической устойчивости системы (1), (2) отражает следующая теорема.

Теорема 1. Имеет место следующая цепочка импликаций:

$$\begin{array}{c}
2)\Leftarrow 6)\ \ 5)\Rightarrow 1)\\
\Uparrow\ \Uparrow\\
11)\Rightarrow 10)\ \Rightarrow\ 9)\\
\Downarrow\ \Downarrow\\
3)\Leftarrow 7)\ \ 8)\Rightarrow 4)
\end{array}$$

Здесь 1) – 11) означают соответствующие понятия устойчивости из определения 1.

Определение 2. Уравнение вида

$$\det\begin{bmatrix}\lambda I_{n_1}-A_{11} & -A_{12}\\ -A_{21} & \mu I_{n_2}-A_{22}\end{bmatrix}=0\qquad(10)$$

назовем характеристическим уравнением, а его корни (в общем случае комплексные) – характеристическими числами (значениями) системы (1), (2).

Теорема 2 (необходимые условия асимптотической устойчивости):

1) если система (1), (2) слабо асимптотически устойчива, то для корней (λ,μ) характеристического уравнения (10) выполняется условие: $\mathrm{Re}\lambda<0$ и $|\mu|\le 1$ или $\mathrm{Re}\lambda\le 0$ и $|\mu|<1$;

2) если система (1), (2) сильно асимптотически устойчива, то для корней (λ,μ) характеристического уравнения (10) соблюдается условие: $\mathrm{Re}\lambda<0$ и $|\mu|<1$;

3) если система (1), (2) (α,γ)-устойчива, то для корней (λ,μ) характеристического уравнения (10) выполняется условие: $\mathrm{Re}\lambda\le-\alpha$ и $|\mu|\le\gamma$.

Доказательство. Пусть пара (λ_0,μ_0) удовлетворяет характеристическому уравнению (10). Тогда система (в общем случае комплексная)

$$\begin{bmatrix}\lambda_0 I_{n_1}-A_{11} & -A_{12}\\ -A_{21} & \mu_0 I_{n_2}-A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}=0$$

имеет ненулевое решение $\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{10}\\c_{20}\end{bmatrix}\ne 0$, где $c_{10}\in\mathbb{C}^{n_1}$, $c_{20}\in\mathbb{C}^{n_2}$. Полагая

$$\begin{bmatrix}x_1(t,i)\\x_2(t,i)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{10}\\c_{20}\end{bmatrix}e^{\lambda_0 t}\mu_0{}^i,$$

получаем:

$$\lambda c_1 e^{\lambda t}\mu^i=A_{11}c_1e^{\lambda t}\mu^i+A_{12}c_2e^{\lambda t}\mu^i,$$
$$c_2e^{\lambda t}\mu^{i+1}=A_{21}c_1e^{\lambda t}\mu^i+A_{22}c_2e^{\lambda t}\mu^i,$$

и, таким образом, функции $x_1(t,i)=c_{10}e^{\lambda_0 t}\mu_0{}^i$, $x_2(t,i)=c_{20}e^{\lambda_0 t}\mu_0{}^i$ являются решением системы (1), (2).

Тогда, применяя к этому решению требования 9) – 11) устойчивости в смысле определения 1, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы 2.

Аналогично можно получить необходимые условия устойчивости в смысле понятий 1) – 8) из определения 1.

3. Достаточные условия устойчивости. Рассмотрим систему (1), (2) скалярных уравнений, где $A_{11}=a_{11}$, $A_{12}=a_{12}$, $A_{21}=a_{21}$, $A_{22}=a_{22}$ – действительные числа. Исследуем в этом случае для определенности сильную асимптотическую устойчивость такой системы.

Прежде всего, отметим, что вид характеристического уравнения упрощается:

$$\det\begin{bmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & \mu-a_{22}\end{bmatrix}=$$
$$=(\lambda-a_{11})(\mu-a_{22})-a_{12}a_{21}=0,$$

откуда $\mu=a_{22}+\dfrac{a_{12}a_{21}}{\lambda-a_{11}}$ и с учетом необходимого в силу теоремы 2 условия $\operatorname{Re}\lambda<0$ и $|\mu|<1$ заключаем, что это возможно лишь в случае, когда

$$1)\ a_{12}a_{21}=0;$$
$$2)\ |a_{22}|<1,\quad \operatorname{Re}a_{11}<0.$$

Покажем, что это условие является и достаточным. Действительно, поскольку $a_{12}a_{21}=0$, то либо $a_{12}=0$, либо $a_{21}=0$. Пусть, например, $a_{12}=0$. Тогда система (1), (2) в скалярном случае распадается:

$$\dot{x}_1(t,k)=a_{11}x_1(t,k),$$
$$x_2(t,k+1)=a_{22}x_2(t,k)+a_{21}x_1(t,k),$$

откуда

$$x_1(t,k)=e^{a_{11}t}x_1(0,k)=e^{a_{11}t}x_1(k),$$
$$x_2(t,k+1)=a_{22}x_2(t,k)+a_{21}e^{a_{11}t}x_1(k)=$$
$$=a_{22}{}^{k+1}x_2(t,0)+a_{22}{}^{k}a_{21}e^{a_{11}t}x_1(0)+a_{22}{}^{k-1}a_{21}e^{a_{11}t}\times$$
$$\times x_1(1)+\ldots+a_{22}a_{21}e^{a_{11}t}x_1(k-1)+a_{21}e^{a_{11}t}x_1(k)=$$
$$=a_{22}{}^{k+1}x_2(0)+a_{21}e^{a_{11}t}\left(a_{22}{}^{k}x_1(0)+\ldots+x_1(k)\right).$$

Поскольку начальные функции ограничены: $\|x_1(k)\|\le L, \|x_2(t)\|\le L$ при некотором числе $L>0$ для всех $t>0, k=1,2,\ldots,$ то

$$\|x_1(t,k)\|+\|x_2(t,k)\|=\left\|e^{a_{11}t}x_1(k)\right\|+$$
$$+\left\|a_{22}{}^{k}x_2(0)+a_{21}e^{a_{11}t}\left(a_{22}{}^{k-1}x_1(0)+\ldots+x_1(k-1)\right)\right\|\le$$
$$\le L|a_{22}|^k+L|a_{21}|e^{t\operatorname{Re}a_{11}}\left(|a_{22}|^{k-1}+\ldots+1\right)=L|a_{22}|^k+$$
$$+L|a_{21}|e^{t\operatorname{Re}a_{11}}\frac{|a_{22}|^k-1}{|a_{22}|-1}\le L|a_{22}|^k+\frac{L|a_{21}|}{1-|a_{22}|}e^{t\operatorname{Re}a_{11}}\le$$
$$\le M\left(e^{t\operatorname{Re}a_{11}}+|a_{22}|^k\right),\ t>0, k=1,2,\ldots,$$

где $M=\max\left\{L,\dfrac{L|a_{21}|}{1-|a_{22}|}\right\}$, и система (1), (2) в скалярном случае и $a_{12}=0$ является сильно асимптотически устойчивой. Рассмотрим теперь случай, когда $a_{21}=0$.

Тогда система принимает вид

$$\dot{x}_1(t,k)=a_{11}x_1(t,k)+a_{12}x_2(t,k),$$
$$x_2(t,k+1)=a_{22}x_2(t,k),$$

откуда с учетом формулы Коши получаем:

$$x_2(t,k)=a_{22}{}^{k}x_2(t),$$
$$x_1(t,k)=e^{a_{11}t}x_1(0,k)+\int_0^t e^{a_{11}(t-\tau)}a_{22}{}^{k}x_2(\tau)\,d\tau.$$

Тогда

$$\|x_1(t,k)\|+\|x_2(t,k)\|\le e^{t\operatorname{Re}a_{11}}\|x_1(k)\|+$$
$$+\int_0^t e^{\operatorname{Re}a_{11}(t-\tau)}|a_{22}|^k\|x_2(\tau)\|d\tau\le Le^{t\operatorname{Re}a_{11}}+$$
$$+L\frac{1-e^{t\operatorname{Re}a_{11}}}{\operatorname{Re}a_{11}}|a_{22}|^k\le M\left(e^{t\operatorname{Re}a_{11}}+|a_{22}|^k\right),$$

где $M=\max\left\{L,\dfrac{L}{\operatorname{Re}a_{11}}\right\}$, и система (1), (2) в скалярном случае и $a_{21}=0$ является сильно асимптотически устойчивой.

Таким образом, нами доказана теорема 3.

Теорема 3. Для того, чтобы система (1), (2) скалярных уравнений была сильно асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$1)\ a_{12}a_{21}=0;$$
$$2)\ |a_{22}|<1,\quad \operatorname{Re}a_{11}<0.$$

Аналогично доказываются необходимые и достаточные условия (α,γ)-устойчивости системы (1), (2) в скалярном случае.

Теорема 4. Для того, чтобы система (1), (2) скалярных уравнений была (α,γ)-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$1)\ a_{12}a_{21}=0;$$
$$2)\ \operatorname{Re}a_{11}\le-\alpha,\quad |a_{22}|<\gamma.$$

Заключение. Для линейных гибридных 2-D-систем в симметрической форме получены необходимые условия асимптотической устойчивости, достаточные условия устойчивости в скалярном случае. Сформулированы необходимые, достаточные условия сильной асимптотической устойчивости и (α, γ)-устойчивости. Предложенная техника позволяет также исследовать и другие типы устойчивости системы (1), (2).

Литература

1. Dai L. Singular control systems // Lecture notes in control and information sciences: 118. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. 319 p.

2. De la Sen M. A note about total stability of a class of hybrid systems // Informatica. 2006. Vol. 17, no. 4. P. 565–576.

3. Куржанский А. Б. Отчет о 16-м международном конгрессе ИФАК (IFAC) – международной федерации по автоматическому управлению // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 183–189.

4. Марченко В. М., Борковская И. М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем // Труды БГТУ. 2012. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 7–10.

5. Марченко В. М., Пыжкова О. Н. Относительная управляемость линейных стационарных гибридных систем с многомерным временем // Труды БГТУ. 2008. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–5.

6. Марченко В. М., Борковская И. М., Пыжкова О. Н. Гибридные динамические системы с многомерным временем. Представление решений // Труды БГТУ. 2015. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–9.

References

1. Dai L. Singular control systems. *Lecture notes in control and information sciences*: 118. Berlin; Heidelberg, Springer-Verlag, 1989. 319 p.

2. De la Sen M. A note about total stability of a class of hybrid systems. *Informatica*, 2006, vol. 17, no. 4, pp. 565–576.

3. Kurzhanskiy A. B. The 16-th IFAC Congress report. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 2006, no. 1, pp. 183–189 (In Russian).

4. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M. Stability and stabilization of the linear hybrid discrete-continues stationary systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 7–10 (In Russian).

5. Marchenko V. M., Pyzhkova O. N. Relative controllability of the linear stationary hybrid systems with multidimensional time. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series VI, Physical-mathematical sciences and informatics, 2008, issue VI, pp. 3–5 (In Russian).

6. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M., Pyzhkova O. N. Hybrid dynamic 2-D-systems. Representation of solutions. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 3–9 (In Russian).

Информация об авторах

Марченко Владимир Матвеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: vladimir.marchenko@gmail.com

Борковская Инна Мечиславовна − кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: borkovskaia@gmail.com

Пыжкова Ольга Николаевна − кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: olga.pyzhcova@gmail.com

Information about the authors

Marchenko Vladimir Matveevich − DSc (Physics and Mathematics), Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vladimir.marchenko@gmail.com

Borkovskaya Inna Mechislavovna − PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: borkovskaia@gmail.com

Pyzhkova Olga Nikolaevna − PhD (Physics and Mathematics), Head of the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: olga.pyzhcova@gmail.com

Поступила 10.03.2016