

УДК 535.14

**Т. Б. Карлович**

Белорусский государственный технологический университет

**МУЛЬТИПИКОВЫЙ СПЕКТР РЕЗОНАНСНОЙ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ  
В МОДЕЛИ ОДНОКУБИТНОГО ЛАЗЕРА**

Однокубитный лазер является квантовой системой, в которой реализуется взаимодействие одиночного искусственного атома и одиночной резонаторной моды поля. Такой лазер имеет ряд преимуществ по сравнению с одноатомным лазером: положение искусственного атома в нем фиксировано, искусственный атом обладает большим дипольным моментом и сильно взаимодействует с резонаторной модой. Кроме того, упругое и неупругое рассеяние излучения в однокубитном лазере осуществляется вдоль одной линии волновода в отличие от 3D-излучения одноатомного лазера, интенсивность которого низка. Уже экспериментально получен трехпиковый спектр резонансной флуоресценции однокубитного лазера (так называемый триплет Моллоу). Центральная компонента этого спектра возникает в результате неупругого рассеяния излучения при воздействии мощной когерентной накачки, а два других резонанса связаны с расщеплением Раби.

Однокубитный лазер состоит из одиночного сверхпроводящего кубита, взаимодействующего с модой поля копланарного волновода. Квантовый кубит характеризуется двумя зарядовыми состояниями: с избыточной электронной куперовской парой и без нее. Между этими состояниями в результате распада куперовской пары и туннелирования электронов возможны переходы с испусканием фотонов.

В данной работе нами рассчитывался спектр резонансной флуоресценции однокубитного лазера в виде Фурье-преобразования атомной корреляционной функции с использованием теоремы о регрессии. В случае малой интенсивности некогерентной накачки на основе модели Джейнса – Каммингса с затуханием аналитически определены положения линий спектра. Показано, что многопиковый спектр резонансной флуоресценции имеет место в случае небольшой интенсивности некогерентной накачки. Продемонстрировано, что параметр дефазировки не влияет на положение резонанса в спектре, а его рост приводит к увеличению ширины спектральной линии.

**Ключевые слова:** однокубитный лазер, высокодобротный резонатор, сверхпроводящий кубит, спектр резонансной флуоресценции, вакуумное расщепление Раби, матрица плотности, теорема о регрессии.

**T. B. Karlovich**

Belarusian State Technological University

**MULTIPEAKED SPECTRUM OF RESONANCE FLUORESCENCE  
IN A SINGLE-QUBIT MODEL**

Single-qubit laser is the quantum system, which implements the interaction of an artificial single atom and a single cavity field mode. Such laser has the range of advantages compared with single-atom laser: the position of artificial atom is fixed in it, artificial atom has a great dipole moment and strongly interacts with the cavity field mode. Besides that elastic and inelastic radiation scattering in the single-qubit laser are realized with high efficiency in 1D transmission line compared with low efficiency interaction of real atom with cavity field mode in 3D-space. Three-peaked spectrum of resonance fluorescence (so-called triplet Mollow) has been experimentally obtained. The central component of this spectrum is a result of inelastic scattering under the action of strong coherent pump. The sidebands are connected with the vacuum Rabi splitting.

Single-qubit laser consists of single superconducting qubit coupled to the electromagnetic field confined in 1D transmission line. Quantum qubit is characterized by two charged states: with the excess Cooper pair and without it. As a result of the collapse of the Cooper pair and tunneling transitions of the electrons the emission of photons is possible.

In this work the resonance fluorescence spectrum is calculated on the basis of regression theorem as the Fourier transform of the atomic correlation function. In the case of low intensity of the incoherent pump on the basis of the Jaynes – Cummings model with dissipation the positions of spectrum lines are analytically defined. It is shown that multi-peaked spectrum takes place in the case of low intensity pump. It is demonstrated that the dephasing parameter doesn't affect the position of line in the spectrum and its growth leads to the increasing of the line width.

**Key words:** single-qubit laser, high- $Q$  cavity, Josephson energy, superconducting qubit, density matrix, resonance fluorescence, vacuum Rabi oscillations, regression theorem.

**Введение.** Однокубитный лазер является примером макроскопической квантовой системы, интенсивно исследуемой в настоящее время. В работе [1] было продемонстрировано действие однокубитного лазера в режиме генерации. В статье [2] реализованы квантовые алгоритмы на основе двухкубитного квантового процессора, в работе [3] синтезировано произвольное квантовое состояние в сверхпроводящем резонаторе. В спектре [4] наблюдался триплет Моллоу в резонансной флуоресценции одиночного искусственного атома. Трехпиковый спектр флуоресценции связан с неупругим рассеянием излучения двухуровневым атомом при воздействии мощной когерентной накачки. Кроме спектральной компоненты на резонансной частоте возникают еще и два боковых симметричных пика, отстроенных от центральной компоненты на частоту Раби. В квантовой оптике возникновение осцилляций Раби связано с расщеплением уровней энергии при взаимодействии одиночного двухуровневого атома с одиночной модой резонаторного поля (модель Джайнса – Каммингса). Если внешнее когерентное поле отсутствует, то в такой системе возможно наблюдение дублетных линий, называемых вакуумным расщеплением Раби. В данной работе мы исследуем мультипиковый спектр резонансной флуоресценции однокубитного лазера при воздействии некогерентной накачки. Стационарный спектр рассчитывается с использованием теоремы о регрессии и уравнения для матрицы плотности.

**Основная часть.** Однокубитный лазер состоит из заряженного сверхпроводящего кубита (искусственного атома), взаимодействующего с модой поля сверхпроводящего резонатора, представляющего собой копланарный волновод [1]. Кубит характеризуется двумя зарядовыми состояниями:  $|2\rangle$  – с избыточной куперовской парой и  $|0\rangle$  – без нее (рис. 1). Электронная куперовская пара поступает через контакт Джозефсона на островок (кубит) с электрода земли. Инверсная населенность в однокубитном лазере создается путем интенсивной откачки куперовских пар с островка. С этой целью к нему через туннельный переход подключен контакт стока. Напряжение на него подается такое, чтобы сначала один электрон мог протуннелировать со скоростью  $\Gamma_{21}$  после развала куперовской пары и система перешла в состояние  $|1\rangle$  с одним избыточным электроном на островке, а затем и второй электрон протуннелировал со скоростью  $\Gamma_{10}$  и система перешла в состояние  $|0\rangle$ . Избыточная энергия этого состояния высвобождается в виде испускания фотонов с частотой, настроенной на частоту перехода  $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$ .

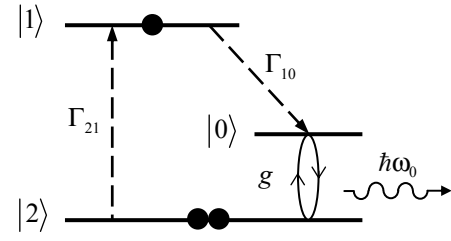


Рис. 1. Схема однокубитного лазера [1]

Взаимодействие куперовской пары и резонаторной моды поля описывается гамильтонианом Джайнса – Каммингса:

$$H_{JC} = \frac{1}{2} \hbar \omega_Q \sigma_z + \hbar \omega_R a^+ a + \hbar g (\sigma_+ a + \sigma_- a^+), \quad (1)$$

где собственные значения энергии кубита  $\hbar \omega_Q = \sqrt{\epsilon^2 + E_J^2}$  определяются через разность электростатических энергий между состояниями  $|0\rangle$  и  $|2\rangle$ ,  $\epsilon$  и энергию Джозефсона  $E_J$ ;  $\omega_Q$  – частота кубита;  $\omega_R$  – частота резонатора;  $g$  – константа взаимодействия. В дальнейшем будем рассматривать резонансное взаимодействие кубита и резонаторной моды поля, полагая равными частоты  $\omega_Q = \omega_R = \omega_0$ .

Операторы  $\sigma_i$  удовлетворяют коммутационным соотношениям для ферми-частиц:

$$[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z. \quad (2)$$

Операторы  $a$  и  $a^+$  удовлетворяют коммутационным соотношениям для бозе-частиц:

$$[a, a^+] = 1. \quad (3)$$

Взаимодействие с окружением в однокубитном лазере сопровождается диссипацией энергии кубита и резонатора. Затухание кубита описывается параметром  $\gamma$ , а затухание резонаторной моды поля – параметром  $k$ . Управление кубитом осуществляется при помощи некогерентной накачки с интенсивностью  $\Gamma$ . Дефазировка кубита учитывается параметром  $\Gamma_\phi^*$ . Редуцированное уравнение для матрицы плотности  $\rho$ , описывающей эволюцию однокубитного лазера, имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H_{JC}, \rho] + L_Q \rho + L_R \rho. \quad (4)$$

Здесь лиувиллиан  $L_Q$  описывает релаксацию и возбуждение кубита:

$$L_Q \rho = \frac{\Gamma_\phi^*}{2} (\rho - \sigma_z \rho \sigma_z) + \frac{\gamma}{2} ([\sigma_-, \rho \sigma_+] + [\sigma_-, \rho \sigma_+]) + \frac{\gamma}{2} ([\sigma_+, \rho \sigma_-] + [\sigma_+, \rho \sigma_-]), \quad (5)$$

лиувиллиан  $L_R$  описывает релаксацию резонансной моды поля в случае пренебрежения числом тепловых фотонов:

$$L_R \rho = k([\rho, a^+] + [a, \rho a^+]). \quad (6)$$

Спектр резонансной флуоресценции состоит из рассеянного искусственным атомом излучения вдоль микроволновой линии (рис. 2). Он описывается Фурье-преобразованием двухвременной атомной корреляционной функции:

$$S_\sigma(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2 \operatorname{Re} \int_0^\infty d\tau \exp(i\omega\tau) \langle \sigma_+(t+\tau) \sigma_-(t) \rangle}{\langle \sigma_+(t) \sigma_-(t) \rangle} \right\}, \quad (7)$$

нормированной на среднее число возбуждений в системе. Такие корреляционные функции вычисляются, согласно теореме о регрессии, через неунитарный оператор эволюции (матрицу Грина)  $\exp(L\tau)$ :

$$\langle \sigma_+(t+\tau) \sigma_-(t) \rangle = Sp(\sigma_+ e^{L\tau} \sigma_- \rho(t)). \quad (8)$$

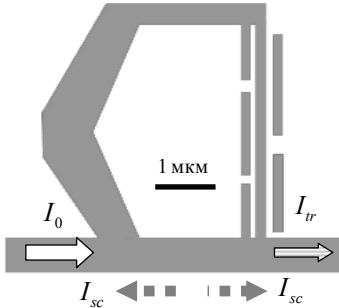


Рис. 2. Искусственный атом, взаимодействующий с излучением волновода. Падающее излучение интенсивности  $I_0$  частично рассеивается в прямом и обратном направлениях волновода ( $I_{sc}$ ) и частично проходит через микроволновую линию ( $I_{tr}$ ) [4]

Для нахождения матрицы Грина и стационарного решения уравнения (4) будем использовать разложение по базису фоковских состояний  $|n\rangle$  ( $n$  – число фотонов) и атомных состояний  $|i\rangle$ ,  $i=2,0$ . В этом базисе уравнения для диагональных  $\rho_{ii}^{n,n}$  и недиагональных  $\rho_{02}^{n,n+1} = (\rho_{20}^{n+1,n})^*$  элементов образуют замкнутую систему:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{22}^{n,n} &= 2g\sqrt{n}\rho_{02}^{n-1,n} - (2kn + \Gamma)\rho_{22}^{n,n} + \\ &+ \gamma\rho_{00}^{n,n} + 2k(n+1)\rho_{22}^{n+1,n+1}, \\ \dot{\rho}_{00}^{n,n} &= \Gamma\rho_{22}^{n,n} - (2kn + \gamma)\rho_{00}^{n,n} - \\ &- 2g\sqrt{n+1}\rho_{02}^{n,n+1} + 2k(n+1)\rho_{00}^{n+1,n+1}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{02}^{n,n+1} &= g\sqrt{n+1}\rho_{00}^{n,n} - k(2n+1) + \\ &+ \left(\frac{R}{2} + \Gamma_\phi^*\right)\rho_{02}^{n,n+1} - g\sqrt{n+1}\rho_{22}^{n+1,n+1} + \\ &+ 2k\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\rho_{02}^{n+1,n+2}, \end{aligned}$$

где  $R = \Gamma + \gamma$ . Стационарное решение системы (8)  $\rho_{ij}^{m,n}(t \rightarrow \infty) \equiv \bar{\rho}_{ij}^{m,n}$  рассчитывалось численно и использовалось для определения среднего числа возбуждений в системе и начальных значений матрицы Грина  $\exp(L\tau)$ . Вычисление корреляционной функции (8) удобно проводить при помощи вспомогательного оператора:

$$A(\tau) = e^{L\tau} \sigma_- \bar{\rho}, \quad (10)$$

матричные элементы которого определяют искомые корреляционные функции, согласно соотношениям

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \sigma_+(t+\tau) \sigma_-(t) \rangle &= \\ = Sp(\sigma_+ A(\tau)) &= \sum_n A_{02}^{n,n}(\tau). \end{aligned} \quad (11)$$

При этом уравнения для элементов  $A_{20}^{n,n}(\tau)$  также образуют замкнутую систему уравнений (аналогично системе (9)).

Для определения спектра (7) необходимо найти лапласовские образы оператора  $A(\tau)$  при мнимом значении параметра преобразования, т. е.  $\tilde{A}(-i\omega)$ . Формируя из элементов операторов  $A(\tau)$  вектора

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix}, \quad A^{(n)} = \begin{bmatrix} A_{00}^{n-1,n} \\ A_{02}^{n-1,n+1} \\ A_{20}^{n,n} \\ A_{22}^{n,n+1} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

решение уравнений для искоемых лапласовских элементов можно представить в виде

$$\tilde{\underline{A}}_\beta(-i\omega) = -(i\omega I + M)^{-1} \underline{\bar{A}}_\beta, \quad (13)$$

где начальное значение векторов  $\underline{\bar{A}}_\beta$  задается стационарными значениями элементов матрицы плотности  $\bar{\rho}$ :

$$\begin{aligned} \bar{A}(0) = \sigma_- \bar{\rho}_{ss} &= \sum_n (\bar{\rho}_{00}^{nn} |2\rangle \langle 0| |n\rangle \langle n| + \\ &+ \bar{\rho}_{02}^{n,n+1} |2\rangle \langle 2| |n\rangle \langle n+1|). \end{aligned} \quad (14)$$

Матрица  $M$ , входящая в (14), определяется аналогично работе [5]. Окончательно выражение для стационарного спектра принимает вид

$$S_\sigma(\omega) = \frac{2 \operatorname{Re} \sum_n \tilde{A}_{20}^{nn}(-i\omega)}{\sum_m \bar{A}_{20}^{mm}}. \quad (15)$$

На рис. 3 представлен спектр для однокубитного лазера, численно рассчитанный на основе формул (13), (14). Константа взаимодействия  $g$  выбрана превосходящей все остальные параметры системы для того, чтобы в спектре хорошо были разрешены резонансы, ширины которых определяются параметрами некогерентной накачки, затухания и декогеренций.

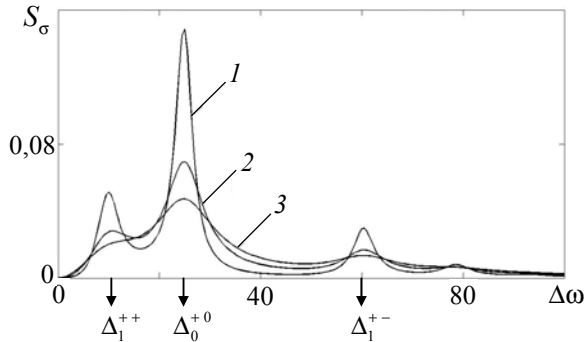


Рис. 3. Спектр резонансной флуоресценции в зависимости от частотной расстройки  $\Delta = \omega - \omega_0$  для параметров  $k = 0,5, g = 25, \Gamma = 2, \gamma = 1$ :  $1 - \Gamma_\phi^* = 0$ ;  $2 - \Gamma_\phi^* = 5$ ;  $3 - \Gamma_\phi^* = 10$ . Стрелками на рисунке обозначены положения резонансов в соответствии с переходами в модели Джейнса – Каммингса с затуханием

Из рис. 3 видно, что с ростом параметра дефазировки положение резонансов в спектре не меняется, а увеличивается их ширина пропорционально параметру  $\Gamma_\phi^*$  и уменьшается амплитуда. В случае роста параметров затухания системы в спектре резонансной флуоресценции остаются только линии, соответствующие вакуумному расщеплению Раби (рис. 4).

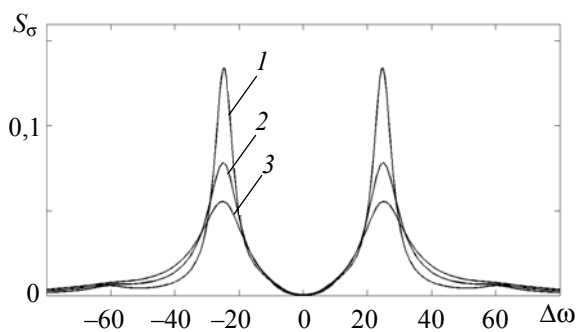


Рис. 4. Спектр резонансной флуоресценции в зависимости от частотной расстройки  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  для параметров  $k = 2, g = 25, \Gamma = 2, \gamma = 4$ :  $1 - \Gamma_\phi^* = 0$ ;  $2 - \Gamma_\phi^* = 5$ ;  $3 - \Gamma_\phi^* = 10$

Аналитический расчет положений резонансов в спектрах (рис. 3 и 4) осуществляется на основе модели Джейнса – Каммингса с затуха-

нием при помощи метода, основанного на усреднении по квантовым случайным траекториям движения (или усреднения по случайным волновым функциям) [5].

На рис. 5 представлена схема энергетических уровней, состоящая из двукратно расщепленных энергетических уровней гармонического осциллятора, равноотстоящих по частоте. Величина расщепления определяется формулой

$$\Delta E = 2\sqrt{lg^2 - \delta^2}, \quad \delta = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma - \Gamma}{2} - k\right), \quad (16)$$

где  $l$  – число фотонов в резонаторной моде поля. Согласно модели, присутствующие в спектре флуоресценции частоты (рис. 3) рассчитываются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \omega_0^{+0} &= \omega_0 + \sqrt{g^2 - \delta^2}, \\ \omega_1^{++} &= \omega_0 + \sqrt{2g^2 - \delta^2} - \sqrt{g^2 - \delta^2}, \\ \omega_1^{+-} &= \omega_0 + \sqrt{2g^2 - \delta^2} + \sqrt{g^2 - \delta^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

В формуле (17) нижний индекс у частоты определяет число фотонов в резонаторе, верхние индексы указывает, между какими подуровнями происходит переход с испусканием фотона. Верхнее расщепленное состояние обозначено индексом «+», нижнее состояние – индексом «-».

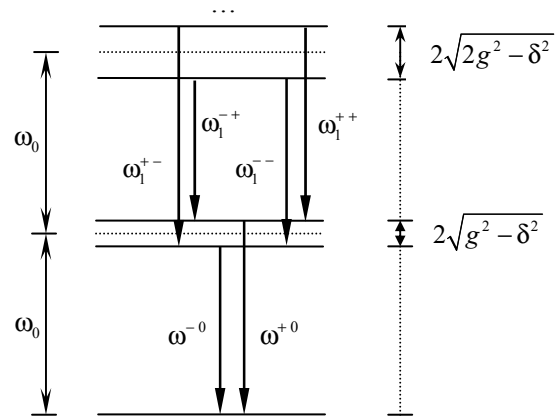


Рис. 5. Схема уровней энергии модели Джейнса – Каммингса с затуханием. Представлены первые три собственных состояния, соответствующих наличию в поле 0, 1, 2 фотонов

**Заключение.** Для модели однокубитного лазера рассчитан стационарный спектр резонансной флуоресценции с учетом некогерентной накачки и параметра дефазировки. Показано, что спектр имеет мультипиковую структуру только при малых значениях интенсивности некогерентной накачки. Продемонстрировано, что при увеличении параметров затухания искусственного

атома и резонаторной моды поля в спектре наблюдаются резонансы, соответствующие вакуумному расщеплению Раби. Аналитически рассчитаны положения спектральных линий на ос-

нове модели Джейнса – Каммингса с затуханием. Показано, что параметр дефазировки не влияет на положение линии в спектре, а только увеличивает ширину спектральной линии.

### Литература

1. Single artificial-atom lasing / O. Astafiev [et al.] // *Nature*. 2007. Vol. 449. P. 588–590.
2. Demonstration of Two-Qubit Algorithms with a Superconducting Quantum Processor / L. DiCarlo [et al.] // *Nature*. 2009. Vol. 460. P. 240–244.
3. Synthesizing Arbitrary Quantum States in a Superconducting Resonator / M. Hofheinz [et al.] // *Nature*. 2009. Vol. 459. P. 546–549.
4. Resonance Fluorescence of a Single Artificial Atom / O. Astafiev [et al.] // *Science*. 2010. Vol. 327. P. 840–843.
5. Карлович Т. Б., Килин С. Я. Авто- и кросскорреляционные функции одноатомного лазера в режиме сильного взаимодействия // *Оптика и спектр*. 2007. Т. 103, № 2. С. 260–271.

### References

1. Astafiev O., Inomata K., Niskanen A. O., Yamamoto T., Pashkin Yu. A., Nakamura Y., Tsai J. S. Single artificial-atom lasing. *Nature*, 2007, vol. 449, pp. 588–590.
2. DiCarlo L., Chow J. M., Gambetta J. M., Bishop L. S., Johnson B. R., Schuster D. I., Majer J., Blais A., Frunzio L., Girvin S. M., Schoelkopf R. J. Demonstration of Two-Qubit Algorithms with a Superconducting Quantum Processor. *Nature*, 2009, vol. 460, pp. 240–244.
3. Hofheinz M., Wang H., Ansmann M., Bialczak R. C., Lucero E., Neeley M., D’Connell A. D., Sank D., Wenner J., Martinis J. M., Cleland A. N. Synthesizing Arbitrary Quantum States in a Superconducting Resonator. *Nature*, 2009, vol. 459, pp. 546–549.
4. Astafiev O., Zagoskin A., Abdumalikov A. A., Pashkin Yu. A., Yamamoto T., Inomata K., Nakamura Y., Tsai J. S. Resonance Fluorescence of a Single Artificial Atom. *Science*, 2010, vol. 327, pp. 840–843.
5. Karlovich T. B., Kilin S. Ya. Auto- and crosscorrelation functions of a single-atom laser in the strong coupling regime. *Optika i spektr* [Opt. and Spektr], 2007, vol. 103, no. 2, pp. 260–271 (In Russian).

### Информация об авторе

**Карлович Татьяна Борисовна** – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры энергосбережения, гидравлики и теплотехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tbkar@mail.ru

### Information about the author

**Karlovich Tatyana Borisovna** – PhD (Physics and Mathematics), Senior Lecturer, the Department of Energy Saving, Hydraulics and Heating. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tbkar@mail.ru

Поступила 12.03.2016