

УДК 519.86

**Н. Н. Буснюк<sup>1</sup>, В. А. Новиков<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Белорусский государственный технологический университет<sup>2</sup>Белорусский государственный аграрный технический университет**МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ  
О НАЗНАЧЕНИЯХ В СЕТЕВОМ ПЛАНИРОВАНИИ**

В связи с интенсивным развитием логистических методов оптимизации перед логистами встали новые проблемы, не описываемые классической задачей сетевого планирования. Классические математические методики не позволяют алгоритмизировать процесс модификации сетевого графа, например, из условия оптимизации логистических цепочек по критерию трудовых ресурсов. На практике особую ценность представляет формирование сетевого плана, основанного на выборе из возможных альтернативных вариантов самого оптимального. В качестве исходных данных в таких задачах задается матрица времен выполнения каждой работы каждым рабочим. Данная задача представляет собой комбинацию задачи о назначении и задачи сетевого планирования. В общем случае можно сделать предположение о возможности выполнения двух и более работ одним рабочим. Решение этой задачи на математическом уровне позволяет автоматически осуществлять контроль параллельных цепочек и выполнять минимизацию сетевого графика по критерию трудовых ресурсов. В статье предложен метод решения задачи оптимального назначения в сетевом планировании с использованием введенной дополнительно матрицы параллелизма. Применение этой матрицы дает возможность проводить оптимизацию сетевого графика с ограничением на количество работ, выполняемых одним рабочим.

**Ключевые слова:** задача о назначениях, сетевой график, критический путь, логистическая цепочка, дуга графа, вершина графа, матрица параллелизма, параллельная цепочка.

**N. N. Busnyuk<sup>1</sup>, V. A. Novikov<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Belarusian State Technological University<sup>2</sup>Belarusian State Agrarian Technical University**OPTIMAL SOLUTION METHOD  
OF ASSIGNMENT PROBLEM IN NETWORK PLANNING**

In connection with the intensive development of logistics optimization techniques the logistics specialists face new problems that are not described by the classical task of network planning. Classic mathematical techniques don't allow the algorithmization of the modification process of the network graph, for example, from the optimization condition of logistic chains on criterion of the manpower. In practice, the formation of a network plan based on the selection of the best possible alternatives is of special value. As the source data in such tasks the performance time matrix of each work done by each worker is set. This is a combination of task assignments and task network planning. Generally it is possible to make the assumption about the ability to run two or more works by one worker. The solution to this problem on a mathematical level allows you to automatically control parallel conversations and carry out the network chart according to the criterion of minimizing manpower. The optimal solution method of task assignments in network planning used the special matrix of parallelism is received in this article. Use of this matrix gives the possibility to optimize the network chart with the restriction on the amount of work performed by one working.

**Key words:** task assignments, network chart, critical path, supply chain, arc graph, a vertex of a graph, matrix parallelism, parallel chain.

**Введение.** Сетевое планирование является одной из основных задач работы менеджера. Эта задача сейчас особенно актуальна в связи с интенсивным развитием логистических методов оптимизации. В логистике такая задача более понятна как задача оптимизации логистических цепочек. От правильно спланированного сетевого графика рабочих процессов во многом зависит эффективность функционирования предприятия. Большую помощь в организации

сетевого планирования оказывают пакеты прикладных программ, например, MS Project [1]. В этих пакетах реализован, в частности, удобный ввод сетевого плана и удобное отображение информации, включая диаграмму Ганта.

В связи с развитием логистических методов перед логистами встали новые проблемы, не описываемые классической задачей сетевого планирования [2]. В классической задаче задаются фиксированные времена выполнения

работ и могут задаваться минимальное и максимальное возможные продолжительности работ. На основе этих данных строятся оптимистический и пессимистический сетевые планы работ. При этом классические математические методики не позволяют алгоритмизировать процесс модификации сетевого графа, например, из условия оптимизации логистических цепочек по критерию трудовых ресурсов.

**Основная часть.** На практике особую ценность представляет формирование сетевого плана, основанного на выборе из возможных альтернативных вариантов самого оптимального. В качестве исходных данных в таких задачах задается матрица времен выполнения каждой работы каждым рабочим. Данная задача представляет собой комбинацию задачи о назначении и задачи сетевого планирования. В общем случае можно сделать предположение о возможности выполнения двух и более работ одним рабочим. Решение этой задачи на математическом уровне позволяет автоматически осуществлять контроль параллельных цепочек и выполнять минимизацию сетевого графика по критерию трудовых ресурсов. Последняя операция в настоящее время реализуется вручную на основе визуального анализа диаграммы Ганта.

Сформулируем задачу в общем виде. Допустим, что сетевой график содержит  $n$  работ, и задана соответствующая квадратная матрица назначений  $A$ . Для нахождения оптимального назначения в сетевом графике воспользуемся матрицей  $X$  идентичной размерности с  $A$ . Значение  $x_{ij} = 1$ , если  $i$ -й рабочий выполняет  $j$ -ю работу. В противном случае  $x_{ij} = 0$ .

Целевой функцией данной задачи является критический путь сетевого графика. Оптимизация осуществляется по всем полным путям сетевого графа  $d_i$ . Величина  $K = \max(d_i)$  и будет являться критическим путем.

В классической задаче о назначениях одна работа может выполняться только одним рабочим:

$$\sum_i x_{ij} = 1. \quad (1)$$

В соответствии с (1) длительность работы  $c_i$  всегда определяется равенством:

$$c_j = \sum_i a_{ij} x_{ij}. \quad (2)$$

Для построения оптимального плана необходимо решить задачу на поиск минимума для  $K$  с ограничениями (1) и (3):

$$\sum_j x_{ij} = 1. \quad (3)$$

Эта задача легко решается средствами Excel.

Ограничение (3) является самым простым вариантом задачи и допускает выполнение работ только одной работы.

Классическая задача о назначениях не допускает одному рабочему выполнять несколько работ. В то же время сетевой график это позволяет. Более того, может оказаться, что при меньшем числе задействованных рабочих искомый критический путь окажется меньше.

В такой задаче необходимо учесть возможности выполнения нескольких работ одним рабочим. Для этого введем ключевую в предлагаемом методе матрицу  $M$  параллелизма. Каждая  $i$ -я строка этой матрицы представляет анализируемую работу, а каждый  $j$ -й столбец – связанную с  $i$  работу. Если  $i$ -я работа не может выполняться одновременно с  $j$ -й работой, то  $m_{ij} = 0$ . В противном случае  $m_{ij} = 1$ . Диагональ  $m_{ii}$  всегда равна 1. Построение матрицы параллелизма  $M$  возможно по сформированным временам позднего и раннего начала и завершения работ, что будет рассмотрено ниже.

На основе матрицы  $M$  сформируем матрицу  $N$  такой же размерности:

$$n_{ki} = \sum_j m_{kj} x_{ij}. \quad (4)$$

Решение задачи с учетом  $N$  отличается только в замене условия (3) на условие

$$n_{ki} \leq 1. \quad (5)$$

Модифицированная задача также несложно решается средствами Excel. Полученный оптимальный план минимизирует только длину критического пути. В то же время при использовании матрицы параллелизма необходима дополнительная оптимизация по путям, не являющимся критическими. Эту дополнительную оптимизацию можно выполнить, обеспечивая минимум по  $\sum_j c_j$  с дополнительным ограничением  $K \leq K_{\text{опт}}$ , где  $K_{\text{опт}}$  – значение, полученное при оптимизации критического пути.

Для решения задачи в полном объеме необходимо реализовать алгоритм вычисления критического пути с одновременным нахождением раннего и позднего начала и окончания работы. На основе полученных по алгоритму: РК – раннего окончания, ПК – позднего окончания, РН – раннего начала и ПН – позднего начала, – матрица  $M$  параллелизма может быть рассчитана автоматически по следующему алгоритму (в алгоритме дополнительно введены векторы КПН и КРК той же размерности, что и  $M$ ):

1. КПН = 0, КРК = 0,  $m_{ij} = 1, \forall i, j$ .
2. Фиксируем работу  $i = 1$ .
3. Если  $ПК_i \leq РН_j$ , то  $m_{ij} = 0, \forall j \neq i$ .

4. Если  $PH_i \geq PK_j$ , то  $m_{ij} = 0, \forall j \neq i$ .

5. Если  $KPH_j \neq 1, KPK_i \neq 1$  и  $RK_j \leq PH_i$ , то  $m_{ij} = 0, \forall j \neq i, KPH_i = 1, KPK_j = 1$ .

6. Если  $KPH_i \neq 1, KPK_j \neq 1$  и  $RK_i \leq PH_j$ , то  $m_{ij} = 0, \forall j \neq i, KPH_j = 1, KPK_i = 1$ .

7.  $i = i + 1$ , переход к п. 3.

Предлагаемая методика использования матрицы параллелизма дает возможность оптимизации сетевого графика по числу параллельных цепочек, так как это число в матрице определяется числом единиц в каждой строке матрицы. Для уменьшения числа параллельных цепочек следует только перенести одну из ветвей графа

с единицей в матрице  $M$  на критический путь. Выбор необходимой ветви графа может быть выполнен, например, перебором всех возможных вариантов с выбором самого оптимального. Такая задача не может быть решена только средствами Excel, так как требует двойного цикла оптимизации.

**Заключение.** Предлагаемая методика оптимизации логистических цепочек основана на ключевой матрице параллелизма, которая позволяет полностью формализовать процесс оптимизации любой сложности, включая и модификацию графа с позиций минимизации трудовых ресурсов. В любом случае базовой задачей является изложенная подробно задача оптимального назначения в сетевом графике.

### Литература

1. Кудрявцев Е. М. Project 2003. Сетевое планирование и управление проектами. М.: ДМК Пресс, 2006. 236 с.
2. Новицкий Н. И. Сетевое планирование и управление производством. М.: Новое знание, 2004. 220 с.

### References

1. Kudryavtsev E. M. *Project 2003. Setevoye planirovaniye i upravleniye proektami* [Project 2003. Network Planning and Project Management]. Moscow, DMK Press Publ., 2006. 236 p.
2. Novitskiy N. I. *Setevoye planirovaniye i upravleniye proizvodstvom* [Network Planning and Production Management]. Moscow, Novoye Znaniye, 2004. 220 p.

### Информация об авторах

**Буснюк Николай Николаевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: busnnn@belstu.by

**Новиков Василий Алексеевич** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры экономической информатики. Белорусский государственный аграрный технический университет (220023, г. Минск, пр-т Независимости, 99/1, Республика Беларусь). E-mail: vanovikov@tut.by

### Information about the authors

**Busnyuk Nikolay Nikolaevich** – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technology. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: busnnn@belstu.by

**Novikov Vasily Alekseevich** – PhD (Engineering), Assistant Professor, Assistant Professor, the Department of Economic Informatics. Belarusian State Agrarian Technical University (99/1, Nezavisimosti Ave., 220023, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vanovikov@tut.by

Поступила 10.03.2016