УДК 514.765.12

Н. П. Можей
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

КАНОНИЧЕСКИЕ СВЯЗНОСТИ НА ТРЕХМЕРНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ

Цель работы – классификация трехмерных симметрических однородных пространств, допускающих нормальную связность, описание всех инвариантных аффинных связностей на таких пространствах вместе с их тензорами кривизны и кручения, канонических связностей и естественных связностей без кручения. Также исследованы алгебры голономии однородных пространств и найдено, когда связность нормальна. Рассмотрены пространства, на которых действует разрешимая группа преобразований. Локальная классификация однородных пространств эквивалентна описанию эффективных пар алгебр Ли. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят главным образом локальный характер. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств.

Ключевые слова: каноническая связность, группа преобразований, симметрическое пространство, алгебра голономии.

N. P. Mozhey
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

CANONICAL CONNECTIONS ON THREE-DIMENSIONAL SYMMETRIC SPACES SOLVABLE LIE GROUPS

The purpose of the work is the classification of three-dimensional symmetric homogeneous spaces, admitting a normal connection, description of all invariant affine connections on those spaces together with their curvature and torsion tensors, canonical connections and natural torsion-free connections. We study the holonomy algebras of homogeneous spaces and findout when the invariant connection is normal. We concerned the case, when Lie group of transformations is solvable. The local classification of homogeneous spaces is equivalent to the description of the effective pairs of Lie algebras. Studies are based on the use of properties of the Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces and they mainly have local character. The peculiarity of techniques presented in the work is the application of purely algebraic approach, as well as the combination of methods of differential geometry, the theory of Lie groups and algebras and the theory of homogeneous spaces.

Key words: canonical connection, transformation group, symmetric space, holonomy algebra.

Введение. Симметрическое пространство в смысле Э. Картана – это пространство аффинной связности без кручения, тензор кривизны которого сохраняется при параллельном перенесении. Примерами симметрических пространств могут служить пространства постоянной кривизны, классические области в комплексном аффинном пространстве и т. д. В работе изучаются симметрические пространства с разрешимой группой преобразований, их исследование существенно затруднено тем, что, в отличие от полупростых групп, не разработана теория их классификации, а сама классификация является громоздкой и трудоемкой. Понятие нормальной связности ввел Э. Картан для риманова многообразия (см. [1]), в [2] можно ознакомиться с понятием канонической связности и естественной связности без кручения.

Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $(M, \bar{G})$ – однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G}, G)$, где $G \subset \bar{G}$, так как M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$ (см., например, [3]). Изучая однородные пространства, важно рассматривать не саму группу $\bar{G}$, а ее образ в $Diff(M)$, т. е. достаточно изучать только эффективные действия группы $\bar{G}$ на многообразии M. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. *Изотропное действие* группы G на касательном пространстве T_xM – это фактор-действие присоединенного действия G на $\bar{\mathfrak{g}}$: $s.(x + \mathfrak{g}) = (Ads)(x) + \mathfrak{g}$ для всех $s \in G$, $x \in \bar{\mathfrak{g}}$.

При этом алгебра $\mathfrak{g}$ действует на $T_xM = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ следующим образом:

$$x.(y+\mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g} \text{ для всех } x \in \mathfrak{g},\ y \in \bar{\mathfrak{g}}.$$

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Это означает, что естественное действие стабилизатора $\bar{G}_x$, $x \in M$ на T_xM имеет нулевое ядро. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [2]. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и фактор-пространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. *Аффинной связностью* на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии (см., например, [4]) с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Говорят, что многообразие M с аффинной связностью является *аффинным симметрическим*, если для каждого $x \in M$ симметрия s_x может быть продолжена до глобального аффинного преобразования для M. На каждом связном аффинном симметрическом пространстве группа аффинных преобразований транзитивна, т. е. аффинное симметрическое пространство M может быть представлено как однородное пространство $\bar{G}/G$. Более того, поскольку $M = \bar{G}/G$ редуктивно (а $\bar{G}$ транзитивна), для классификации симметрических пространств достаточно рассматривать только изотропно-точные пространства. Таким образом, симметрическое пространство есть тройка $(\bar{G}, G, \sigma)$, состоящая из связной группы Ли $\bar{G}$, замкнутой подгруппы G для $\bar{G}$ и инволютивного автоморфизма σ для $\bar{G}$ такого, что $\sigma(g) = s_o \circ g \circ s_o^{-1}$ для $g \in \bar{G}$, где s_o – симметрия для M в o. Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$ – симметрическая алгебра Ли. Поскольку σ инволютивно, то его собственными значениями являются 1 и –1, а $\mathfrak{g}$ – собственное подпространство для 1. Пусть $\mathfrak{m}$ – собственное подпространство для –1. Разложение $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ называется *каноническим разложением* для $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$. Если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ – каноническое разложение симметрической алгебры Ли $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$, то

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g},\ [\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m},\ [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}.$$

Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензор кручения $T \in InvT_2^{\ 1}(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in InvT_3^{\ 1}(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_\mathfrak{m}, y_\mathfrak{m}) = \Lambda(x) y_\mathfrak{m} - \Lambda(y) x_\mathfrak{m} - [x, y]_\mathfrak{m},$$
$$R(x_\mathfrak{m}, y_\mathfrak{m}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$.

Односвязное многообразие M с аффинной связностью такой, что $T = \nabla R = 0$, порождает симметрическое пространство $(\bar{G}, G, \sigma)$ такое, что $M = \bar{G}/G$. Верно и обратное, если $(\bar{G}, G, \sigma)$ – симметрическое пространство, то однородное пространство $\bar{G}/G$ допускает инвариантную аффинную связность с $T = \nabla R = 0$.

Инвариантная связность, определяемая равенством $\Lambda|_\mathfrak{m} = 0$, называется *канонической связностью* для $(\bar{G}, G, \sigma)$ или $\bar{G}/G$ (относительно разложения $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$), ее также называют *канонической связностью второго рода*. Поскольку для симметрического пространства $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$, то каноническая связность совпадает с *естественной связностью без кручения* (единственной инвариантной аффинной связностью без кручения, имеющей те же геодезические, что и каноническая связность: $\Lambda_\mathfrak{m}(x) y = 1/2[x, y]_\mathfrak{m}$, $x, y \in \mathfrak{m}$; ее также называют *канонической связностью первого рода*), и мы имеем $T = \nabla R = 0$. Если $(\bar{G}, G, \sigma)$ – симметрическое пространство, то каноническая связность есть единственная аффинная связность на $M = \bar{G}/G$, которая инвариантна при действии симметрий для M.

Переформулируем теорему Вана об алгебре группы голономии инвариантной связности: алгебра Ли группы голономии инвариантной связности $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством

$$\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}.$$

Положим $\mathfrak{a}$, равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, порожденной $\{\Lambda(x) \mid x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Первоначально алгебра $\mathfrak{a}$ была введена в римановом случае Б. Костантом и использовалась А. Лихнеровичем и Г. Ваном в более общей ситуации. Если $\mathfrak{h}^*$ – алгебра Ли группы голономии, то $\mathfrak{h}^* \subset \mathfrak{a} \subset \mathbb{N}(\mathfrak{h}^*)$, где $N(\mathfrak{h}^*)$ – нормализатор $\mathfrak{h}^*$ в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$. Будем говорить, что связность *нормальна*, если $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}$.

Классификация симметрических пространств. Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, \ldots, e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, \ldots, e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, для нумерации пар – $d.n.m$, соответствующие приведенным в [5], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$. Будем описывать связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R – через $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$, а тензор кручения T – через $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$.

Теорема. Все трехмерные симметрические однородные пространства, допускающие нормальную связность, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ разрешимы, а $\dim\mathfrak{g}>1$, локально имеют следующий вид:

2.9.1	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-2e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0

2.9.5, 2.9.6	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	
e_1	0	e_2	u_1	0	0	
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1	$\alpha\ge 0$
u_1	$-u_1$	0	0	0	$\pm e_2$	
u_2	0	0	0	0	αu_2	
u_3	0	$-u_1$	$\mp e_2$	$-\alpha u_2$	0	

2.17.2, 2.17.3	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	0	u_1
e_2	0	0	0	0	u_2
u_1	0	0	0	0	$\pm e_1$
u_2	0	0	0	0	αe_2
u_3	$-u_1$	$-u_2$	$\mp e_1$	$-\alpha e_2$	0

2.21.1	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	$-u_1$	0	0	0
u_3	u_3	$-u_2$	0	0	0

Пара	Совпадает с 2.17.2, за исключением
2.17.4	$[u_1,u_3]=\alpha e_1-e_2$, $[u_2,u_3]=e_1+\alpha e_2,\ \alpha\ge 0$
2.17.6, 2.17.7	$[u_1,u_3]=\pm e_1$, $[u_2,u_3]=e_1+e_2$

Для получения этого результата из изотропно-точных пар выбираем симметрические, т. е. для которых существует следующее разложение $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+\mathfrak{m}$, $[\mathfrak{g},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{g}$. В теореме выписаны именно такие пары, причем с каноническим разложением.

Действительно, пусть $\mathfrak{g}$ – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ такая, что пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ допускает нормальную связность, $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ разрешимы, а $\dim\mathfrak{g}>1$. Тогда $\mathfrak{g}$ сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр [6]:

$$2.9\ \boxed{\begin{matrix} y & & x \\ & & \\ & & \mu y\end{matrix}},\ \mu=0,-1,$$

$$2.17\ \boxed{\begin{matrix} & & x \\ & & y \\ & & \end{matrix}},\ 2.21\ \boxed{\begin{matrix} x & y & \\ & & y \\ & & -x\end{matrix}}.$$

Здесь предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$.

Для каждой такой подалгебры найдем изотропно-точные пары. Рассмотрим, например, пару типа 2.9. Пусть $E=\{e_1,e_2\}$ – базис $\mathfrak{g}$, где

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\mu\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Через $\mathfrak{h}$ обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденную вектором e_1. Тогда имеем:

$$\mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}e_1,\qquad U^{(1)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}u_1,$$
$$\mathfrak{g}^{(1-\mu)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}e_2,\qquad U^{(\lambda)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}u_2,$$
$$U^{(\mu)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}u_3,$$

положим:

$$[u_1,u_2]=a_1e_1+a_2e_2+\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3,$$
$$[u_1,u_3]=b_1e_1+b_2e_2+\beta_1u_1+\beta_2u_2+\beta_3u_3,$$
$$[u_2,u_3]=c_1e_1+c_2e_2+\gamma_1u_1+\gamma_2u_2+\gamma_3u_3.$$

Пусть $\mu\notin\{0,1/2,2\},\lambda\ne\pm(1-\mu)$. Проверим тождество Якоби для троек (e_i,u_j,u_k), $i=1,2$, $1\le j<k\le 3$, и (u_1,u_2,u_3):

1. $[e_1,[u_1,u_2]]+[u_1,[u_2,e_1]]+[u_2,[e_1,u_1]]=0,$

$(1-\mu)a_2e_2+\alpha_1u_1+\lambda\alpha_2u_2+\mu\alpha_3u_3-(\lambda+1)[u_1,u_2]=0,$

1. $(\lambda+1)a_1=0$, 2. $(\mu+\lambda)a_2=0$, 3. $\lambda\alpha_1=0$,

4. $\alpha_2=0$, 5. $\alpha_3=0$,

2. $[e_2,[u_1,u_2]]+[u_1,[u_2,e_2]]+[u_2,[e_2,u_1]]=0,$

$(\mu-1)a_1e_2=0$, 6. $(\mu-1)a_1=0$,

3. $[e_1,[u_1,u_3]]+[u_1,[u_3,e_1]]+[u_3,[e_1,u_1]]=0,$
$$(1-\mu)b_2e_2+\beta_1u_1+\lambda\beta_2u_2+\mu\beta_3u_3-(\mu+1)[u_1,u_3]=0,$$
$$7.\ (\mu+1)b_1=0,\ 8.\ b_2=0,\ 9.\ \beta_1=0,$$
$$10.\ (\lambda-\mu-1)\beta_2=0,\ 11.\ \beta_3=0,$$
4. $[e_2,[u_1,u_3]]+[u_1,[u_3,e_2]]+[u_3,[e_2,u_1]]=0,$
$$(\mu-1)b_1e_2=0,\ 12.\ b_1=0,$$
5. $[e_1,[u_2,u_3]]+[u_2,[u_3,e_1]]+[u_3,[e_1,u_2]]=0,$
$$(1-\mu)c_2e_2+\gamma_1u_1+\lambda\gamma_2u_2+\mu\gamma_3u_3-(\lambda+\mu)[u_2,u_3]=0,$$
$$13.\ (\lambda+\mu)c_1=0,\ 14.\ (1-\lambda-2\mu)c_2=0,$$
$$15.\ \gamma_1=0,\ 16.\ \gamma_2=0,\ 17.\ \lambda\gamma_3=0,$$
6. $[e_2,[u_2,u_3]]+[u_2,[u_3,e_2]]+[u_3,[e_2,u_2]]=0,$
$$(\mu-1)c_1e_2+\gamma_3u_1+a_2e_2+a_1e_1+\alpha_1u_1=0,$$
$$18.\ a_1=0,\ 19.\ a_2+(\mu-1)c_1=0,\ 20.\ \gamma_3+\alpha_1=0,$$
7. $[u_1,[u_2,u_3]]+[u_2,[u_3,u_1]]+[u_3,[u_1,u_2]]=0,$
$$-c_1e_1+\gamma_3\beta_2u_2-a_2u_1-\alpha_1\beta_2u_2=0,\ 21.\ c_1+a_2=0,$$
$$22.\ \beta_2(\gamma_3-\alpha_1)=0.$$

Рассмотрим следующие случаи:

1. $\lambda=0$. 1.1. $\alpha_1=0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g)$ эквивалентна тривиальной паре $(\bar{\mathfrak g}_1,\mathfrak g_1)$.

1.2. $\alpha_1\neq 0$. Если $\mu\neq 1$, тогда пара $(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g)$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak g}_4,\mathfrak g_4)$ посредством отображения $\pi:\bar{\mathfrak g}_4\to\bar{\mathfrak g}$, где
$$\pi(e_i)=e_i,\ i=1,2,\pi(u_1)=u_1,$$
$$\pi(u_2)=\alpha_1u_2,\pi(u_3)=u_3,$$
и, в случае $\mu=1$, пара $(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g)$ эквивалентна тривиальной паре при помощи отображения $\pi_{\mu=1}:\bar{\mathfrak g}_1\to\bar{\mathfrak g}$, где
$$\pi_{\mu=1}(e_i)=e_i,\ i=1,2,\pi_{\mu=1}(u_1)=u_1,$$
$$\pi_{\mu=1}(u_2)=u_2-\alpha_1e_1,\pi_{\mu=1}(u_3)=u_3.$$

2. $\lambda=1+\mu$. 2.1. $\beta_2=0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g)$ тривиальна.

2.2. $\beta_2\neq 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g)$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak g}_2,\mathfrak g_2)$ посредством отображения $\pi:\bar{\mathfrak g}_2\to\bar{\mathfrak g}$, где
$$\pi(e_1)=e_1,\pi(e_2)=\beta_2e_2,\pi(u_1)=\beta_2u_1,$$
$$\pi(u_2)=u_2,\pi(u_3)=u_3.$$

3. $\lambda\neq 1+\mu,\lambda\neq 1-2\mu$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g)$ тривиальна. Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Пусть $\mathfrak n_i$ – максимальный нильпотентный идеал алгебры Ли $\bar{\mathfrak g}_i$. Заметим, что $\dim\mathfrak n_1=4$ и $C^3\mathfrak n_1=\{0\}$, $\dim\mathfrak n_2=4$ и $C^3\mathfrak n_2\neq\{0\}$, $\dim n_i=3$ для $i=4,\dots,7$. Отсюда следует, что пары $(\bar{\mathfrak g}_i,\mathfrak g_i)$ для $i=4,\dots,7$ не эквивалентны тривиальной паре $(\bar{\mathfrak g}_1,\mathfrak g_1)$ и паре $(\bar{\mathfrak g}_2,\mathfrak g_2)$, а пары $(\bar{\mathfrak g}_1,\mathfrak g_1)$ и $(\bar{\mathfrak g}_2,\mathfrak g_2)$ не эквивалентны между собой. Пары 2.9.4–2.9.7 также не эквивалентны друг другу. Таким образом, любая пара $(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g)$ типа 2.9 при λ = 0, μ = 0, –1 эквивалентна одной и только одной из пар 2.9.1, 2.9.2, 2.9.4–2.9.7. При этом симметрическое пространство задают только пары 2.9.1, 2.9.5 (α = 0), 2.9.6 (α = 0). Другие случаи рассматриваются аналогично.

Описание связностей. Для найденных пар выписываем аффинные связности, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии, находим канонические связности, а также естественные связности без кручения.

Рассмотрим, например, пару 2.9.1 при $\lambda=0$, $\mu=-1$. Тогда прямыми вычислениями получаем, что аффинная связность имеет вид
$$\begin{pmatrix}0&p_{1,2}&0\\0&0&p_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}q_{1,1}&0&0\\0&q_{2,2}&0\\0&0&q_{1,1}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&0&0\\-p_{2,3}&0&0\\0&p_{1,2}&0\end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны –
$$\begin{pmatrix}0&p_{1,2}q_{2,2}-q_{1,1}p_{1,2}&0\\0&0&p_{2,3}q_{1,1}-q_{2,2}p_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}-p_{1,2}p_{2,3}&0&0\\0&2p_{1,2}p_{2,3}&0\\0&0&-p_{1,2}p_{2,3}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&0&0\\p_{2,3}q_{1,1}-q_{2,2}p_{2,3}&0&0\\0&q_{1,1}p_{1,2}-p_{1,2}q_{2,2}&0\end{pmatrix},$$
а тензор кручения –
$$\left(p_{1,2}-q_{1,1},0,0\right),\left(0,2p_{2,3},0\right),\left(0,0,q_{1,1}-p_{1,2}\right),$$
связность является нормальной при $p_{1,2}\neq 0$, $p_{2,3}\neq 0$, $q_{2,2}=-2q_{1,1}$, тогда алгебра голономии – $\mathfrak{sl}(3,\mathbb R)$.

Рассмотрим пару 2.21.1. При $\lambda=0$ аффинная связность и тензор кривизны имеют вид соответственно:
$$\begin{pmatrix}0&p_{1,2}&0\\0&0&p_{1,2}\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-p_{1,2}&0&0\\0&0&0\\0&0&p_{1,2}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&0&0\\-p_{1,2}&0&0\\0&-p_{1,2}&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^{2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}^{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2}^{2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2}^{2} & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения –

$$(2p_{1,2},0,0),(0,2p_{1,2},0),(0,0,2p_{1,2}),$$

связность нормальна при $p_{1,2} \neq 0,$ тогда алгебра голономии –

$$\begin{pmatrix} p_3 & p_1 & 0 \\ p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & p_2 & -p_3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим пару 2.17.2. Связность имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & r_{1,3} \\ -p_{2,3} & r_{1,1}+p_{1,3}-q_{2,3} & r_{2,3} \\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix},$$

связность нормальна при $a \neq 0,$ $p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0,$ тогда алгебра голономии имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

У перечисленных ниже пар связность такая же, как в случае 2.17.2:

Пара	Аффинная связность нормальна при
2.17.3	$a \neq 0,$ $p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.4	$p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.6	$p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$
2.17.7	$p_{1,3} = r_{1,1} = p_{2,3} = q_{2,3} = q_{1,3} = 0$

Аналогично у указанных пар алгебра голономии такая же, как и в случае 2.17.2.

Аффинные связности на остальных пространствах имеют следующий вид:

Пара	Аффинная связность
2.9.5, 2.9.6	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & q_{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & p_{12} & r_{11}+p_{13} \end{pmatrix}$

Тензоры кривизны и кручения на симметрических пространствах:

Пара	Тензор кривизны
2.9.5	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12}q_{22}-q_{11}p_{12} & p_{12}q_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & p_{12}r_{22}+p_{13}p_{12}-r_{11}p_{12} & p_{12}r_{23}+p_{13}^{2}-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} -aq_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{12}q_{23}-aq_{22} & A \\ 0 & q_{11}p_{12}-p_{12}q_{22} & -p_{12}q_{23}-aq_{11} \end{pmatrix},$ $A = q_{22}r_{23}+q_{23}r_{11}+q_{23}p_{13}-r_{22}q_{23}-r_{23}q_{11}-aq_{23}$
2.9.6	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12}q_{22}-q_{11}p_{12} & p_{12}q_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & p_{12}r_{22}+p_{13}p_{12}-r_{11}p_{12} & p_{12}r_{23}+p_{13}^{2}+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} -aq_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{12}q_{23}-aq_{22} & A \\ 0 & q_{11}p_{12}-p_{12}q_{22} & -p_{12}q_{23}-aq_{11} \end{pmatrix},$ $A = q_{22}r_{23}+q_{23}r_{11}+q_{23}p_{13}-r_{22}q_{23}-r_{23}q_{11}-aq_{23}$
Пара	**Тензор кручения**
2.9.5, 2.9.6	$(p_{12}-q_{11},0,0), (p_{13}-r_{11},0,0),$ $(0,q_{23}-r_{22}-a,q_{11}-p_{12})$

Связность является канонической, если $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0.$ Выпишем, при каких условиях связность имеет те же геодезические, что и каноническая, и когда связность является естественной связностью без кручения:

Пара	Связность имеет те же геодезические, что и каноническая
2.9.1	$q_{11} = -p_{12},\ q_{22} = 0$
2.9.5, $\alpha = 0$	$q_{11} = -p_{12},\ r_{11} = -p_{13},\ r_{22} = -q_{23},$ $q_{22} = r_{23} = 0$

2.9.6, $\alpha = 0$	$q_{11} = -p_{12}$, $r_{11} = -p_{13}$, $r_{22} = -q_{23}$, $q_{22} = r_{23} = 0$
2.17.2–2.17.4	$r_{11} = -p_{13}$, $r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.6	$r_{11} = -p_{13}$, $r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.7	$r_{11} = -p_{13}$, $r_{13} = r_{23} = 0$
2.21.1	p_{12} – любое
Пара	Естественная связность без кручения
2.9.1	$p_{12} = 0$, $p_{23} = 0$, $q_{11} = 0$, $q_{22} = 0$
2.9.5, $\alpha = 0$	$p_{12} = p_{13} = q_{11} = q_{22} = q_{23} = r_{11} = r_{22} = r_{23} = 0$
2.9.6, $\alpha = 0$	$p_{12} = p_{13} = q_{11} = q_{22} = q_{23} = r_{11} = r_{22} = r_{23} = 0$
2.17.2–2.17.4	$p_{13} = p_{23} = q_{13} = q_{23} = r_{11} = r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.6	$p_{13} = p_{23} = q_{13} = q_{23} = r_{11} = r_{13} = r_{23} = 0$
2.17.7	$p_{13} = p_{23} = q_{13} = q_{23} = r_{11} = r_{13} = r_{23} = 0$
2.21.1	$p_{12} = 0$

Заключение. Таким образом, найдены инвариантные аффинные связности на трехмерных симметрических однородных пространствах с разрешимой группой преобразований вместе с их тензорами кривизны и кручения, алгебрами голономии, выписаны канонические связности, а также естественные связности без кручения. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, при изучении пространств с аффинной связностью, а также могут найти приложения в теории относительности, которая с математической точки зрения базируется на геометрии искривленных пространств, в ядерной физике, физике элементарных частиц и др.

Литература

1. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Москов. ун-т, 1960. 307 с.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. М.: Наука, 1981. 2 т.
3. Онищик А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований. М.: Физ.-мат. лит., 1995. 384 с.
4. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. Journ. Math. 1954. Vol. 76, no. 1. P. 33–65.
5. Можей Н. П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. 394 с.
6. Mozhey N. P. Normal connections on three-dimensional manifolds with solvable transformation group // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2016. Vol. 37, no. 2. P. 160–177.

References

1. Kartan E. *Rimanova geometriya v ortogonal'nom repere* [Riemannian geometry in an orthogonal frame]. Moscow, Moskovskiy universitet Publ., 1960. 307 p.
2. Kobayasi Sh., Nomidzu K. *Osnovy differentsial'noy geometrii: v 2 tomakh* [Foundations of differential geometry: in 2 vol.]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 2 vol.
3. Onishchik A. L. *Topologiya tranzitivnykh grupp Li preobrazovaniy* [Topology of transitive transformation groups]. Moscow, Fiz.-mat. lit. Publ., 1995, 384 p.
4. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *Amer. Journ. Math*, 1954, vol. 76. no. 1, pp. 33–65.
5. Mozhey N. P. *Trekhmernyye izotropno-tochnyye odnorodnyye prostranstva i svyaznosti na nikh* [Three-dimensional isotropically faithful homogeneous spaces and affine connections on them]. Kazan, Kazanskiy universitet Publ., 2015. 394 p.
6. Mozhey N. P. Normal connections on three-dimensional manifolds with solvable transformation group. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2016, vol. 37, no. 2, pp. 160–177.

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна − кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Программное обеспечение информационных технологий». Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna − PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, Software for Information Technologies Department. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила 15.12.2016