ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977

В. В. Игнатенко[1], В. В. Крахотко[2], Г. П. Размыслович[2]
[1]Белорусский государственный технологический университет
[2]Белорусский государственный университет

К УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДЕСКРИПТОРНЫМИ РЕГУЛЯТОРАМИ

В статье рассматривается задача управляемости линейной динамической системы. При исследовании управляемости в классическом виде (по Калману) управление выбирается из класса кусочно-непрерывных функций. В работе в качестве управления изучается выход другой линейной системы, так называемого динамического регулятора. При таком управлении достаточно выбирать только начальные условия динамического регулятора, а дальнейшее управление будет строиться автоматически. Особенностью динамического регулятора, рассматриваемого в статье, является то, что он представляет собой дескрипторную систему, т. е. систему дифференциально-алгебраических уравнений. Получены критерии управляемости линейной системы дескрипторным динамическим регулятором, который выражается через параметры исходной системы и динамического регулятора, что удобно при технической реализации.

Ключевые слова: линейные системы, линейные дескрипторные системы, управляемость, динамические регуляторы.

V. V. Ignatenko[1], V. V. Krakhotko[2], G. P. Razmyslovich[2]
[1]Belarusian State Technological University
[2]Belarusian State University

TO THE CONTROLLABILITY OF LINEAR SYSTEMS WITH REGULATORS DESCRIPTOR

The article considers the problem of controllability of linear dynamical systems. In the study of controllability by Kalman control is selected from the class of piecewise continuous functions. To work as management deals with the output of another linear system, the so-called dynamic control. Under such control, it is sufficient to choose only the initial conditions of the dynamic controller, and further management will be built automatically. The feature of the dynamic controller considered in the article is that it is a descriptor system, i.e. the system of differential-algebraic equations. Criteria are obtained for the controllability of linear descriptor systems by the dynamic regulator that is expressed through the parameters of the original system and the dynamic controller, which is convenient for technical implementation.

Key words: linear systems, linear descriptor system, controllability, dynamical regulator.

Введение. В теории оптимального управления важную роль играет задача получения параметрических критериев управляемости. В классическом определении управляемости (по Калману) входной сигнал выбирается из класса кусочно-непрерывных функций. Представляет интерес возможность управления системой с помощью функций из более узкого класса, который легко технически реализуем.

Основная часть. Рассмотрим систему управления

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где x – n-вектор состояния; A – $n \times n$-матрица; b, x_0 – заданные n-векторы; u – скалярное управление.

Определение 1. Система (1) называется управляемой, если для любого начального состояния x_0

найдутся момент времени t_1, $0 < t_1 < +\infty$ и кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $0 \le t \le t_1$ такие, что состояние системы (1), соответствующее этому управлению, удовлетворяет условию $x(t_1) = 0$.

Известно, что для управляемости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rank}\left(b, Ab, ..., A^{n-1}b\right) = n. \quad (2)$$

В качестве управления $u(t)$ будем рассматривать выход

$$u(t) = c^T y(t) \quad (3)$$

линейной дескрипторной системы

$$D_0\, \dot{y}(t) = Dy(t),\; y(t_0) = y_0 \quad (4)$$

(здесь $c, y, y_0 \in R^n$, D, D_0 – $n\times n$-матрицы, $\det D_0 = 0$), которую назовем дескрипторным динамическим регулятором или просто динамическим регулятором.

Определение 2. Система (1) называется управляемой динамическим регулятором (4), если найдется момент времени t_1, $0 < t_1 < +\infty$ такой, что для любого начального состояния x_0 найдется начальное состояние y_0 регулятора (4), при котором решение системы (1), соответствующее управлению (3), удовлетворяет условию $x(t_1) = 0$.

Считаем в дальнейшем, что система (4) является регулярной, т. е. найдется число $\lambda_0 \in C$ такое, что $\det(\lambda_0 D_0 - D) \ne 0$, и, кроме того, матрицы D_0 и D удовлетворяют условию $D_0 D = D D_0$. Последнее условие не является ограничением для регулярной системы (4), ибо это условие выполняется [1] после умножения системы (4) на матрицу $(\lambda_0 D_0 - D)^{-1}$.

Запишем решение системы (1) с учетом (3), (4). Имеем:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \left(\int_0^t e^{A(t-\tau)} bc^T e^{\left(D_0^d D\right)\tau} d\tau\right) y_0, \quad (5)$$

$$y_0 = D_0^d D_0 q, \quad (6)$$

где $q \in R^n$, а D_0^d – обратная Дразина для матрицы D_0 [1].

Исходя из (5), (6) нетрудно видеть, что система (1) управляема динамическим регулятором (4) тогда и только тогда, когда при некотором $t_1 > 0$ для любого n-вектора x_0 найдется n-вектор q, такой, что выполняется равенство:

$$-x_0 = \left(\int_0^{t_1} e^{-A\tau} bc^T e^{\left(D_0^d D\right)\tau} D_0\, D_0^d\, d\tau\right) q. \quad (7)$$

Из соотношения (7) получаем неявный критерий управляемости системы (1) регулятором (4).

Теорема 1. Система (1) управляема динамическим регулятором (4) тогда и только тогда, когда соблюдается равенство:

$$\operatorname{rank}\left(\int_0^{t_1} e^{-A\tau} bc^T e^{\left(D_0^d D\right)\tau} D_0\, D_0^d\, d\tau\right) = n. \quad (8)$$

Укажем более удобный критерий управляемости.

Теорема 2. Для управляемости системы (1) динамическим регулятором (4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\operatorname{rank}\left[b,\ Ab,\ ...,\ A^{n-1}b\right] = n, \quad (9)$$

$$\operatorname{rank}\left[c^T D_0^d D_0,\ c^T D_0^d K D_0,\ ...,\ c^T D_0^d K^{n-1} D_0\right] = n, \quad (10)$$

где $K = D\, D_0^d$.

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим матричную функцию:

$$\Phi(t) = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} bc^T e^{\left(D_0^d D\right)\tau} D_0\, D_0^d\, d\tau,\ t \ge 0.$$

Поскольку

$$e^{-A\tau} b = \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_\nu(\tau) A^\tau b,$$

$$c^T e^{\left(D_0^d D\right)\tau} D_0 D_0^d = \sum_{\mu=0}^{n-1} \gamma_\mu(\tau) c^T \left(D_0^d D\right)^\mu D_0 D_0^d,$$

где $\alpha_\nu(\tau)$, $\gamma_\mu(\tau)$ – некоторые аналитические функции, то функцию $\Phi(t)$ можно представить в виде

$$\Phi(t) = \left[b, Ab, ..., A^{n-1}b\right] \Phi_1 \times$$
$$\times \begin{bmatrix} c^T D_0^d D_0 \\ c^T D_0^d K D_0 \\ \vdots \\ c^T D_0^d K^{n-1} D_0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где $\Phi_1 = \begin{bmatrix} \int_0^t \alpha_0(\tau)\gamma_0(\tau)d\tau ... \int_0^t \alpha_0(\tau)\gamma_0(\tau)d\tau \\ ... \quad ... \quad ... \\ \int_0^t \alpha_0(\tau)\gamma_0(\tau)d\tau ... \int_0^t \alpha_0(\tau)\gamma_0(\tau)d\tau \end{bmatrix}$.

Поскольку система (1) управляема динамическим регулятором (4), то на основании равенства (8) $\operatorname{rank} \Phi(t_1) = n$ для некоторого момента $t_1 < +\infty$. В силу неравенства Сильвестра [2] из (11) следуют равенства (9), (10).

Достаточность. Пусть выполняются соотношения (9), (10). Представим матрицу $\Phi(t)$ в виде

$$\Phi(t) = \left[b,\ Ab,\ \ldots,\ A^{n-1}b\right]R(t), t \geq 0, \quad (12)$$

где $R(t)$ – $n\times n$-матрица вида

$$R(t) = \int_0^t \alpha_\nu(\tau) c^T e^{\left(D_0^d D\right)\tau} D_0 D_0^d d\tau = \\ = \overline{0,\ n-1}.$$

Рассмотрим определитель $\Delta(t)$ = det $R(t)$ и его производную порядка n^2 в точке $t = 0$. Согласно [3], с учетом (10) получаем, что $\Delta^{(n)}(t) \neq 0$. Из аналитичности функции $\Delta(t)$ следует, что функция $\Delta(t)$ может обращаться в нуль лишь в изолированных точках полуинтервала $[0, +\infty)$.

Но тогда с учетом (9), (12) равенство (8) выполняется для почти всех $t_1 > 0$, а это значит, что система (1) управляема динамическим регулятором (4). Теорема доказана.

Заключение. При управлении с помощью динамического регулятора достаточно задать только начальное состояние регулятора, а не строить управление на всем интервале. Получены критерии управляемости линейной системы дескрипторными регуляторами, записанные в явном виде через параметры систем.

Литература

1. Campbell S. L., Meyer C. D., Rose N. J. Applications of the Drazin inverse to Linear systems of Differential equations with Singular constant Coefficients // SIAM J. Appl. Math. 1976. Vol. 31, no. 3. P. 411–425.

2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.

3. Игнатенко В. В. Управляемость динамических систем с помощью регулятора // Вестник БГУ. 1976. Сер. 1. С. 56–58.

References

1. Campbell S. L., Meyer C. D., Rose N. J. Applications of the Drazin inverse to Linear systems of Differential equations with Singular constant Coefficients. *SIAM J. Appl. Math.*, 1976, vol. 31, no. 3, pp. 411–425.

2. Gantmakher F. R. *Teoriya matrits* [Theory of matrices]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 552 p.

3. Ignatenko V. V. The controllability of dynamical systems with a controller. *Vestnik BGU* [Proceedings of BSU], 1976, series 1, pp. 56–58 (In Russian).

Информация об авторах

Игнатенко Василий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ihnatsenko@tut.by

Крахотко Валерий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры методов оптимального управления. Белорусский государственный университет (220030, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: Krakhotko@bsu.by

Размыслович Георгий Прокофьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный университет (220030, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: razmysl@bsu.by

Information about the authors

Ignatenko Vasiliy Vasil'yevich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ihnatsenko@tut.by

Krakhotko Valeriy Vasil'yevich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Optimal Control Methods. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Krakhotko@bsu.by

Razmyslovich Georgiy Prokof'yevich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: razmysl@bsu.by

Поступила 12.12.2016