

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ  
КАК ОСНОВНОЙ МЕТОД ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ КОЛЕСНЫХ ЛЕСНЫХ  
АГРЕГАТНЫХ МАШИН**

**Симанович В. А., доц., к.т.н., Исаченков В. С., ассист.,  
Арико С. Е., доц., к.т.н.**

Белорусский государственный технологический университет  
(Минск, Республика Беларусь), e-mail: sergeyariko@mail.ru

**MATHEMATICAL MODELING OF DYNAMIC PROCESSES  
AS THE MAIN METHOD OF INVESTIGATION OF WHEELED FOREST  
AGGREGATES MACHINES**

**Simanovich V. A., Assoc. Prof., PhD, Isachenkov V. S., Assist.,  
Ariko S. Ye., Assoc. Prof., PhD**

Belarussian State Technological University  
(Minsk, Republic of Belarus)

A methodology for compiling calculation schemes for mathematical models of wheeled vehicles has been developed. A system of differential equations is compiled that describes the dynamic processes occurring in the subsystems of the vehicle. Calculation of dynamic loading indicators was made taking into account statistical indicators of impacts from external and internal factors. The adequacy of the mathematical model is estimated using an equivalence test of the normalized spectral densities.

Расчетные исследования при создании новых образцов лесозаготовительной техники являются одним из важнейших этапов при внедрении ее в серийное производство. Исследовательские работы в конечном счете дают возможность получить реальную картину нагружения узлов и агрегатов базовой машины и устанавливаемого на ней оборудования, что позволит производить корректирующие действия при выборе параметров.

Рассмотрение самой простой лесной машины подтверждает тот факт, что она является сложной динамической системой взаимодействующей с внутренними и внешними воздействиями с различной степенью взаимовлияния. Многолетний опыт исследований показывает, что при решении многих прикладных задач в качестве расчетной динамической модели используется твердое тело или система тел, на которую действуют силы. Такой подход был взят в качестве основного при создании расчетных моделей машин и предмета труда, пачки деревьев при трелевке, а также перемещении ее на транспортном средстве. Аналогичные методы расчета присутствуют при исследовании работы современных харвестеров и форвардеров. В исследованиях описанных в литературе, колебания твердого изучаются на основе анализа линейных уравнений движения, полученных путем упрощений из точных нелинейных уравнений его движения. Линейная теория колебаний твердого тела допускает то обстоятельство, что в направлении некоторые его обобщенных координат при выполнении определенных условий колебания могут происходить независимо друг от друга. По этой причине принцип связанности и взаимовлияния позволит исключить это обстоятельство и рассматривать подсистемы самостоятельно. В большинстве случаев такое положение, основанное на линейной теории колебаний стало основой выбора числа степеней свободы твердого тела, а это значит, что в основу идеализации движения тела в одной плоскости рассматриваются его поступательное и угловое движения при ограничительных предположениях.

Принятый подход был положен в основу теоретических исследований колесных трелевочных тракторов 4К4 с различной компоновкой технологического оборудования. В нашем понимании компоновка принимается таким усовершенствованием, что в первом приближении можно рассматривать как изменение колесной формулы базовой машины в сторону увеличения несущих осей транспортного средства с целью перераспределения нагрузки на его оси.

Разработка расчетных схем и соответствующих им математических моделей движения колесного трелевочного тягача в таких вариантах его использования необходима для исследования динамических явлений в машинах с компоновкой 6К6 и 8К8.

Подход предполагает нахождение независимых, изменяющихся во времени координат (степеней свободы), определяющих положение всех масс данной машины при рассмотрении эксплуатационных режимов движения, что позволяет наряду с общими задачами, решать круг вопросов, связанных с динамической нагруженностью узлов и агрегатов.

Колесные трелевочные тракторы имеют раздельно-агрегатную компоновку, поэтому в расчетных схемах двигатель, трансмиссия, ведущие мосты и т.д. представлены как подсистемы, соединенные между собой упругими элементами. Распределенные массы машины, технологического оборудования и пачки хлыстов при этом заменены сосредоточенными, соединенными безинерционными упругодемпфирующими связями, т.е. реальная динамическая система с бесконечным числом степеней свободы заменена схемой с конечным числом степеней свободы. Основными упругодемпфирующими элементами являются: шины, установленные на колесах, подвеска переднего моста, элементы трансмиссии, элементы технологического оборудования и пачка хлыстов.

Пневматическую шину представляют в виде пружины, нижний конец которой движется по микропрофилю трелевочного волокна, а верхний конец соединен с осью колеса. Такое описание шины предполагает точечный контакт. Распределенная масса пачки хлыстов разбивается на три дискретные массы  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , а изгибные деформации пачки хлыстов моделируются упругим элементом с коэффициентом жесткости  $c_{11}$ . Масса  $m_1$  составляет часть пачки хлыстов, нагружающих технологическое оборудование, масса  $m_2$  сосредоточена в центре тяжести пачки хлыстов и совершает вертикальные колебания, а масса  $m_3$  часть пачки хлыстов, перемещающихся по поверхности трелевочного волокна. Связь колесного тягача с пачкой хлыстов осуществляется канатно-чокерным технологическим оборудованием, которое моделируется упругими элементами с коэффициентами жесткости  $c_9$  и  $c_{10}$ . Все упругие звенья системы в направлении своей податливости обладают также демпфирующим сопротивлением.

Установлено, что колебания в поперечной плоскости можно считать не связанными с продольным угловыми, так как система симметрична относительно продольной вертикальной плоскости, проходящей через ее центр тяжести.

При составлении дифференциальных уравнений, описывающих динамические процессы, происходящие при движении трелевочного трактора, приняты следующие допущения: машина рассматривается как плоская симметричная система относительно продольной оси, проходящей через центр тяжести; трактор движется по поверхности трелевочного волокна прямолинейно без спусков и подъемов; колебания масс системы малы; упругие характеристики шин колес и других упругих элементов линейные или кусочно-линейные, а силы сопротивления пропорциональны скорости деформации; высоты микронеровностей трелевочного волокна под шинами колес правой и левой колеи усредняются; высокочастотные колебания элементов трансмиссии тягача, как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами не рассматриваются; беговая дорожка шины колес рассматривается в виде безинерционного обруча с радиусом, равным радиусу качения, а контакт шины колеса с трелевочным волокном точечным; шины колес имеют постоянный контакт с микропрофилем без пробуксовки и бокового проскальзывания; жесткость шин колес, подвески переднего моста, трансмиссии, чокерного технологического оборудования и пачки хлыстов постоянны.

На расчетных схемах (рисунок 1) приняты следующие обозначения:

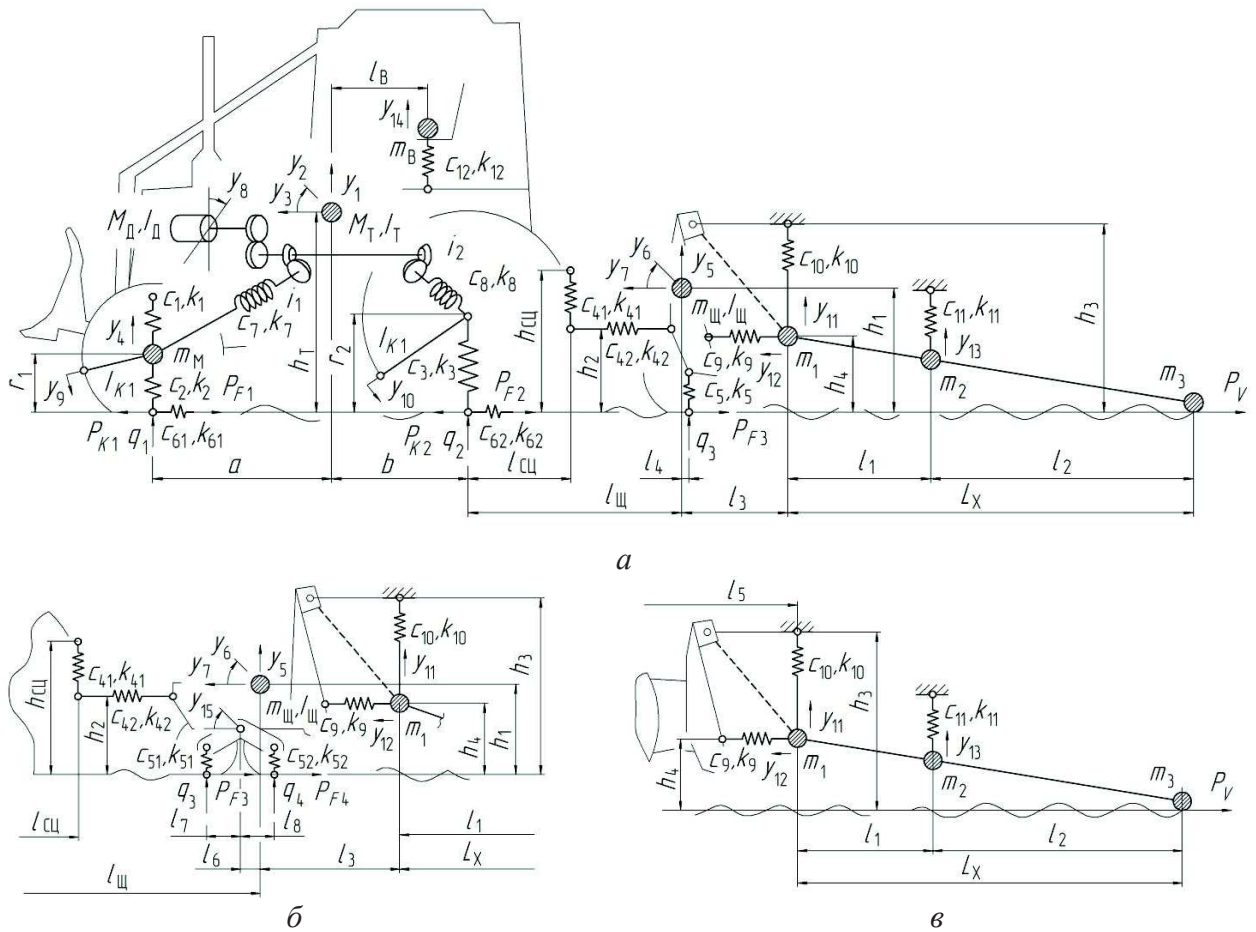
$I_0$  – момент инерции вращающихся масс двигателя и ведущих частей сцепления,  $\text{кгм}^2$ ;

$I_{K1}$ ,  $I_{K2}$  – моменты инерции элементов трансмиссии и колес КТМ приведенные к их осям,  $\text{кгм}^2$ ;

$I_T$ ,  $I_{\text{ш}} – моменты инерции тягача соответственно,  $\text{кгм}^2$ ;$

$M_T, m_M, m_{Щ}$  – масса тягача; подрессоренная масса переднего моста и масса прицепного оборудования, кг;

$m_1, m_2, m_3$  – дискретные массы пачки хлыстов, кг.



а – общая схема тягача с оборудованием;  
 б - прицепное оборудование на балансирной тележке;  
 в – навесное оборудование

**Рисунок 1 – Расчетная схема динамической системы колесной трелевочной машины**

К основным возмущающим воздействиям внешнего и внутреннего характера, влияющим на динамику колесного трелевочного трактора относятся неровности трелевочного волока и крутящий момент двигателя.

Возмущающие воздействия внешнего характера принято представлять в виде дискретных массивов микропрофилей неровностей трелевочного волока, которые задаются с помощью значений ординат, снятых с наиболее характерных опытных участков волока.

Полученная система дифференциальных уравнений, которая описывает динамические процессы, происходящие в модели движения тягача, имеет вид:

$$\ddot{y}_1 = \left[ -c_1 \left( y_1 + ay_2 - y_4 \right) - k_1 \left( \dot{y}_1 + a\dot{y}_2 - \dot{y}_4 \right) - c_3 \left( y_1 - by_2 - q_2 \right) - \right. \\ \left. - k_3 \left( \dot{y}_1 - b\dot{y}_2 - \dot{q}_2 \right) - c_{41} \left( y_1 - (b + l_{\text{ЦЦ}})y_2 - y_5 - (l_{\text{Щ}} - l_{\text{ЦЦ}})y_6 \right) - \right. \\ \left. - k_{41} \left( \dot{y}_1 - (b + l_{\text{ЦЦ}})\dot{y}_2 - \dot{y}_5 - (l_{\text{Щ}} - l_{\text{ЦЦ}})\dot{y}_6 \right) + \right. \\ \left. + c_{12} (y_{14} - y_1 - l_B y_6) + k_{12} (\dot{y}_{14} - \dot{y}_1 - l_B \dot{y}_6) \right] / M_{\blacksquare};$$

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_2 = & \left[ -ac_1 \left[ y_1 + ay_2 - y_4 \right] - ak_1 \left[ \dot{y}_1 + a\dot{y}_2 - \dot{y}_4 \right] + \right. \\
& + bc_3 \left( y_1 - by_2 - q_2 \right) + bk_3 \left( \dot{y}_1 - b\dot{y}_2 - \dot{q}_2 \right) + \\
& + \left( b + l_{\text{CU}} \right) c_{41} \left( y_1 - \left( b + l_{\text{CU}} \right) y_2 - y_5 - \left( l_{\text{III}} + l_{\text{CU}} \right) y_6 \right) + \\
& + \left( b + l_{\text{CU}} \right) k_{41} \left( \dot{y}_1 - \left[ b + l_{\text{CU}} \right] \dot{y}_2 - \dot{y}_5 - \left[ l_{\text{III}} + l_{\text{CU}} \right] \dot{y}_6 \right) - \\
& - \left( h_T - h_{\text{CU}} \right) c_{42} \left( y_3 + \left( h_T - h_{\text{CU}} \right) y_2 - y_7 - \left( h_1 - h_2 \right) y_6 \right) - \\
& - \left( h_T - h_{\text{CU}} \right) k_{42} \left( \dot{y}_3 + \left[ h_T - h_{\text{CU}} \right] \dot{y}_2 - \dot{y}_7 - \left( h_1 - h_2 \right) \dot{y}_6 \right) - \\
& + \left( h_T - r_1 \right) c_{61} \left( y_3 - \left( h_T - r_1 \right) y_2 - r_1 y_9 \right) - \left( h_T - r_1 \right) k_{61} \left( \dot{y}_3 - \left[ h_T - r_1 \right] \dot{y}_2 - r_1 \dot{y}_9 \right) + \\
& + \left( h_T - r_2 \right) c_{62} \left( y_3 - \left( h_T - r_2 \right) y_2 - r_2 y_{10} \right) - \left( h_T - r_2 \right) k_{62} \left( \dot{y}_3 - \left[ h_T - r_2 \right] \dot{y}_2 - r_2 \dot{y}_{10} \right) - \\
& - l_{\text{B}} c_{12} \left( y_{14} - y_1 + l_{\text{B}} y_2 \right) - l_{\text{B}} k_{12} \left( \dot{y}_{14} - \dot{y}_1 + l_{\text{B}} \dot{y}_2 \right) / I_{\text{B}}; \\
\ddot{y}_3 = & \left[ -c_{42} \left( y_3 + \left( h_T - h_{\text{CU}} \right) y_2 - y_7 - \left( h_1 - h_2 \right) y_6 \right) - \right. \\
& - k_{42} \left( \dot{y}_3 + \left[ h_T - h_{\text{CU}} \right] \dot{y}_2 - \dot{y}_7 - \left[ h_1 - h_2 \right] \dot{y}_6 \right) - \\
& - c_{61} \left( y_3 - \left( h_T - r_1 \right) y_2 - r_1 y_9 \right) - k_{61} \left( \dot{y}_3 - \left[ h_T - r_1 \right] \dot{y}_2 - r_1 \dot{y}_9 \right) - \\
& - c_{62} \left( y_3 - \left( h_T - r_2 \right) y_2 - r_2 y_{10} \right) - k_{62} \left( \dot{y}_3 - \left[ h_T - r_2 \right] \dot{y}_2 - r_2 \dot{y}_{10} \right) + \\
& + P_{F1} + P_{F2} - P_{K1} - P_{K2} \left. \right] / M_T; \\
\ddot{y}_4 = & \left[ c_1 \left[ y_1 + ay_2 - y_4 \right] + k_1 \left[ \dot{y}_1 + a\dot{y}_2 - \dot{y}_4 \right] - c_2 \left[ y_4 - q_1 \right] - k_2 \left[ \dot{y}_4 - \dot{q}_1 \right] \right] / m_{\text{II}}; \\
\ddot{y}_5 = & \left[ c_{41} \left( y_1 - \left( b + l_{\text{CU}} \right) y_2 - y_5 - \left( l_{\text{III}} - l_{\text{CU}} \right) y_6 \right) + \right. \\
& + k_{41} \left( \dot{y}_1 - \left[ b + l_{\text{CU}} \right] \dot{y}_2 - \dot{y}_5 - \left[ l_{\text{III}} - l_{\text{CU}} \right] \dot{y}_6 \right) - c_5 \left[ y_5 - l_4 y_6 - q_3 \right) - \\
& - k_5 \left( \dot{y}_5 - l_4 \dot{y}_6 - \dot{q}_3 \right) - c_{10} \left[ y_5 - l_3 y_6 - y_{11} \right] - k_{10} \left[ \dot{y}_5 - l_3 \dot{y}_6 - \dot{y}_{11} \right) - \\
& - c_{11} \left( y_5 - l_2 l_3 y_6 / L_X - y_{13} \right) - k_{11} \left( \dot{y}_5 - l_2 l_3 \dot{y}_6 / L_X - \dot{y}_{13} \right) / m_{\text{III}}; \\
\ddot{y}_6 = & \left[ \left[ l_{\text{III}} - l_{\text{CU}} \right] c_{41} \left( y_1 - \left( b + l_{\text{CU}} \right) y_2 - y_5 - \left( l_{\text{III}} - l_{\text{CU}} \right) y_6 \right) + \right. \\
& + \left( l_{\text{III}} - l_{\text{CU}} \right) k_{41} \left( \dot{y}_1 - \left[ b + l_{\text{CU}} \right] \dot{y}_2 - \dot{y}_5 - \left[ l_{\text{III}} - l_{\text{CU}} \right] \dot{y}_6 \right) + \\
& + \left( h_1 - h_2 \right) c_{42} \left( y_3 + \left( h_T - h_{\text{CU}} \right) y_2 - y_7 - \left( h_1 - h_2 \right) y_6 \right) + \\
& + \left( h_1 - h_2 \right) k_{42} \left( \dot{y}_3 + \left[ h_T - h_{\text{CU}} \right] \dot{y}_2 - \dot{y}_7 - \left[ h_1 - h_2 \right] \dot{y}_6 \right) + \\
& + l_4 c_5 \left( y_5 - l_4 y_6 - q_3 \right) + l_4 k_5 \left( \dot{y}_5 - l_4 \dot{y}_6 - \dot{q}_3 \right) - \\
& - \left( h_1 - h_4 \right) c_9 \left( y_7 + \left( h_1 - h_4 \right) y_6 - y_{12} \right) - \left( h_1 - h_4 \right) k_9 \left( \dot{y}_7 + \left[ h_1 - h_4 \right] \dot{y}_6 - \dot{y}_{12} \right) + \\
& + l_3 c_{10} \left( y_5 - l_3 y_6 - y_{11} \right) + l_3 k_{10} \left( \dot{y}_5 - l_3 \dot{y}_6 - \dot{y}_{11} \right) + \\
& + l_2 l_3 c_{11} \left( y_5 - l_2 l_3 y_6 / L_X - y_{13} \right) / L_X + l_2 l_3 k_{11} \left( \dot{y}_5 - l_2 l_3 \dot{y}_6 / L_X - \dot{y}_{13} \right) / L_X \left. \right] / I_{\text{III}}; \\
\ddot{y}_7 = & \left[ c_{42} \left( y_3 + \left( h_T - h_{\text{CU}} \right) y_2 - y_7 - \left( h_1 - h_2 \right) y_6 \right) + \right. \\
& + k_{42} \left( \dot{y}_3 + \left[ h_T - h_{\text{CU}} \right] \dot{y}_2 - \dot{y}_7 - \left[ h_1 - h_2 \right] \dot{y}_6 \right) - \\
& - c_9 \left( y_7 + \left( h_1 - h_4 \right) y_6 - y_{12} \right) - k_9 \left( \dot{y}_7 + \left[ h_1 - h_4 \right] \dot{y}_6 - \dot{y}_{12} \right) + P_{\text{III}3} \left. \right] / m_{\text{III}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_8 &= c_7 \left[ y_9 - y_8/i_1 \right] / i_1 + k_7 \left[ \dot{y}_9 - \dot{y}_8/i_1 \right] / i_1 + c_8 \left[ y_{10} - y_8/i_2 \right] / i_2 + \\
&+ k_8 \left[ \dot{y}_{10} - \dot{y}_8/i_2 \right] / i_2 - M_D \Big] / I_D; \\
\ddot{y}_9 &= \left[ r_1 c_{61} \left[ y_3 - \left[ h_T - r_1 \right] y_2 - r_1 y_9 \right] + r_1 k_{61} \left[ \dot{y}_3 - \left[ h_T - r_1 \right] \dot{y}_2 - r_1 \dot{y}_9 \right] \right] - \\
&- c_7 \left( y_9 - y_8/i_1 \right) - k_7 \left( \dot{y}_9 - \dot{y}_8/i_1 \right) \Big] / I_{\Gamma 1}; \\
\ddot{y}_{10} &= \left[ r_2 c_{62} \left[ y_3 - \left[ h_T - r_2 \right] y_2 - r_2 y_{10} \right] + r_2 k_{62} \left[ \dot{y}_3 - \left[ h_T - r_2 \right] \dot{y}_2 - r_2 \dot{y}_{10} \right] \right] - \\
&- c_8 \left( y_{10} - y_8/i_2 \right) - k_8 \left( \dot{y}_{10} - \dot{y}_8/i_2 \right) \Big] / I_{\Gamma 2}; \\
\ddot{y}_{11} &= \left[ c_{10} \left[ y_5 - l_3 y_6 - y_{11} \right] + k_{10} \left[ \dot{y}_5 - l_3 \dot{y}_6 - \dot{y}_{11} \right] \right] / m_{\Gamma}; \\
\ddot{y}_{12} &= \left[ c_9 \left[ y_7 + \left[ h_1 - h_4 \right] y_6 - y_{12} \right] + k_9 \left[ \dot{y}_7 + \left[ h_1 - h_4 \right] \dot{y}_6 - \dot{y}_{12} \right] \right] + \\
&+ P_V \Big] / (m_1 + m_2 + m_3); \\
\ddot{y}_{13} &= \left[ c_{11} \left[ y_5 - l_2 l_3 y_6 / L_X - y_{13} \right] + k_{11} \left[ \dot{y}_5 - l_2 l_3 \dot{y}_6 / L_X - \dot{y}_{13} \right] \right] / m_{\Gamma}; \\
\ddot{y}_{14} &= \left[ -c_{12} \left[ y_{14} - y_1 + l_B y_2 \right] - k_{12} \left[ \dot{y}_{14} - \dot{y}_1 + l_B \dot{y}_2 \right] \right] / m_{\Gamma}.
\end{aligned}$$

После статистической обработки микропрофилей неровностей опытных участков трелевочного волока корреляционная функция воздействия определялась из выражения:

$$R(\tau) = \frac{1}{(N+1)} \sum_{i=1}^{i=N} [(q_{ii} - m_H)(q_{ii}^{\tau} - m_H)]$$

где  $N$  – количество ординат точек микропрофиля;

$m_H$  – математическое ожидание микропрофиля, м;

$q_{ii} - m_H = H_{ii}$  – значение центрированной случайной величины ординаты точки микропрофиля в момент времени  $ti$ , м;

$q_{ii}^{\tau} - m_H = H_{ii}^{\tau}$  – значение центрированной случайной величины ординаты точки микропрофиля в момент времени  $(ti + \tau)$ , м;

$\tau$  – интервал корреляции, с.

Важное значение, при исследовании микропрофиля опытных участков трелевочного волока, имеют статистические характеристики в частотной области, которые дают представление о частоте  $\omega$  повторения длин неровностей и распределения мощности колебаний по частотам при случайном процессе. Фурье аналитического выражения корреляционной функции, была получена спектральная плотность стационарного случайного процесса, которая определялась по следующему выражению:

$$\begin{aligned}
S(\omega) &= R(0) \left[ A_1 \alpha_1 \left( \alpha_1^2 + \omega^2 + \beta_1^2 \right) / \left( \left( \alpha_1^2 + \omega^2 - \beta_1^2 \right)^2 + 4 \alpha_1^2 \beta_1^2 \right) \right] + \\
&+ A_2 \alpha_2 \left( \alpha_2^2 + \omega^2 + \beta_2^2 \right) / \left( \left( \alpha_2^2 + \omega^2 - \beta_2^2 \right)^2 + 4 \alpha_2^2 \beta_2^2 \right) \Big] / \pi
\end{aligned}$$

Приведенная методика и расчетные модели позволяют определять динамическую нагруженность элементов и систем базовой машины и технологического оборудования на различных эксплуатационных режимах с учетом статистических показателей микропрофилей волока и характеристики двигателя как источника заданной ограниченной мощности.

Оценка адекватности разработанной математической модели выполнена с помощью теста эквивалентности нормированных спектральных плотностей  $S_1(\omega_i)$  и  $S_2(\omega_i)$ , полученных в результате статистической обработки теоретических и экспериментальных данных.

При уровне значимости  $\alpha=0,05$  величина статистики  $D^2$  для спектральной плотности крутящих моментов передней полуоси тягача составила 16,22...26,68 при значении области принятия гипотезы  $\chi^2_{n,\alpha}$ , равном 43,19, что свидетельствует об эквивалентности сравниваемых спектров экспериментальных и теоретических реализаций крутящих моментов, а следовательно, об адекватности разработанных математических моделей.