

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Н. И. Жарков, А. Л. Калтыгин, Ю. Н. Мануков

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

*Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений
по техническим специальностям*

Минск 2010

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.3я73
Ж35

Рецензенты:
кафедра инженерной графики БГУИР (заведующий кафедрой
кандидат технических наук, доцент *В. А. Столер*);
кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой
инженерной графики машиностроительного профиля БНТУ
П. В. Зеленый

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или ее части не может быть осуществлено без разрешения учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет».

Жарков, Н. И.

Ж35 Начертательная геометрия : учеб. пособие / Н. И. Жарков, А. Л. Калтыгин, Ю. Н. Мануков. – Минск : БГТУ, 2010. – 152 с.
ISBN 978-985-434-910-7.

Настоящее учебное пособие содержит сжатое изложение курса по начертательной геометрии. Материал построен с использованием современных образовательных технологий в области преподавания начертательной геометрии, каждый раздел проиллюстрирован решением типовых задач, приведены контрольные вопросы для закрепления знаний, полученных студентами при изучении теоретической части курса. Для студентов высших учебных заведений по техническим специальностям.

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.3я73

ISBN 978-985-434-910-7

© УО «Белорусский государственный технологический университет», 2010
© Жарков Н. И., Калтыгин А. Л., Мануков Ю. Н., 2010

ПРЕДИСЛОВИЕ

Начертательная геометрия относится к числу основных общеобразовательных дисциплин. Она изучает законы изображения пространственных предметов на плоскости и служит теоретической основой для изучения инженерно-технических дисциплин: инженерной графики, теоретической механики, деталей машин и т. д.

Начертательная геометрия способствует развитию пространственного воображения и логического мышления.

Впервые отдельные правила и приемы построения изображений были систематизированы и представлены французским ученым Гаспаром Монжем (1746–1818). Изложенный им метод параллельного проецирования является основным методом, используемым при выполнении технических чертежей в настоящее время.

Основные цели начертательной геометрии:

- освоение методов построения изображений предметов на плоскости;
- изучение геометрических свойств предмета по заданным изображениям;
- решение пространственных задач на чертеже;
- развитие пространственного и логического мышления.

Данное учебное пособие базируется на материалах лекций, читаемых авторами в Белорусском государственном технологическом университете. При его создании принимались во внимание опыт и методика изложения материала, используемого в учебном пособии «Краткий курс начертательной геометрии» автора И. С. Альшулера (1965 г.).

Материал изложен кратко в объеме, соответствующем количеству учебного времени, отведенного на изучение предмета. Теоретический материал сопровождается примерами решения задач. В конце каждой главы имеются вопросы для закрепления проработанного материала.

Издание может быть использовано в качестве учебного пособия при обучении студентов технического профиля очной и заочной форм обучения.

Авторы выражают искреннюю благодарность преподавателям кафедры инженерной графики БГТУ Ращупкину С. В., Войтеховскому Б. В., Капышу Ю. Ф., Гиллю В. И. за оказание помощи в оформлении данного учебного пособия.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛЫ

Обозначения

1. Точки в пространстве – прописными буквами латинского алфавита (A, B, C, \dots), а также цифрами.

2. Линии в пространстве – по точкам, определяющим линию, и строчными буквами латинского алфавита (a, b, c, \dots).

3. Плоскости – строчными буквами греческого алфавита ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$).

4. Поверхности – прописными буквами русского алфавита: цилиндр – Ц, конус – К, сфера – С_ф и т. д.

5. Углы – строчной буквой греческого алфавита φ и подстрочным индексом ($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$).

6. Последовательность точек и других элементов ($A_1, A_2, A_3, \dots; a_1, a_2, a_3, \dots; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$).

7. Плоскости проекций – строчной буквой греческого алфавита π . Произвольная плоскость – π_0 , горизонтальная – π_1 , фронтальная – π_2 , профильная – π_3 , дополнительные – π_4, π_5 и т. д.

8. Оси проекций – строчными буквами x, y, z , начало координат – прописной буквой O .

9. Проекция точек:

на произвольную плоскость $\pi_0 - A^0, B^0, C^0, \dots$;

на горизонтальную плоскость $\pi_1 - A', B', C', \dots$;

на фронтальную плоскость $\pi_2 - A'', B'', C'', \dots$;

на профильную плоскость $\pi_3 - A''', B''', C''', \dots$;

на дополнительные плоскости $\pi_4, \pi_5 - A^{IV}, B^{IV}, C^{IV}, \dots, A^V, B^V, C^V$ и т. д.

10. Проекция линий – по проекциям точек, определяющих линию, кроме того:

прямые общего положения – a, b, c, \dots ;

горизонтальная прямая – h ;

фронтальная прямая – f ;

профильная прямая – p .

11. Следы плоскостей (для плоскости α):

горизонтальный след – $h_{0\alpha}'$;

фронтальный след – $f_{0\alpha}''$;

профильный след – $p_{0\alpha}'''$.

12. Проецирующие плоскости:

горизонтально проецирующая плоскость – α' ;

фронтально проецирующая плоскость – α'' ;

профильно проецирующая плоскость – α''' .

13. После преобразования чертежей вращением (плоскопараллельным перемещением):

точки в новом положении после первого преобразования – $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \dots$;

после второго преобразования – $\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{C}}$ и т. д.

Символы

Результат геометрического построения или отдельной операции: $=$.

Совпадение: \equiv .

Параллельность: \parallel .

Перпендикулярность: \perp .

Скрещивание: \sphericalangle .

Принадлежность: \in . $A \in a$ – точка A принадлежит линии a .

Пересечение: \cap, \times . $A = a \cap \alpha$ – точка A есть результат пересечения прямой a с плоскостью α .

Знак прямого угла: \square .

Глава 1. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ. ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ

1.1. Метод проекций

Изображения, с которыми приходится встречаться в искусстве и технике, отличаются большим разнообразием, вследствие чего и требования, предъявляемые к ним, различные. В картинах и рисунках основное требование – это наглядность изображения. В технических изображениях главное – возможность получить по изображению точное представление о форме и размерах предмета.

В начертательной геометрии для решения геометрических задач используется графический способ, при котором геометрические свойства предметов изучаются непосредственно по чертежу. Для того чтобы чертеж соответствовал изображаемому предмету, он должен быть построен по определенным геометрическим законам. Правила построения изображений в начертательной геометрии основаны на *методе проекций*.

Метод проекций предполагает наличие плоскости проекций, объекта проецирования и проецирующих лучей. Проекцией точки A на плоскость π_0 называется точка пересечения A^0 проецирующего луча p , проходящего в пространстве через точку A (рис. 1.1).

Различают два метода проецирования: центральное и параллельное.

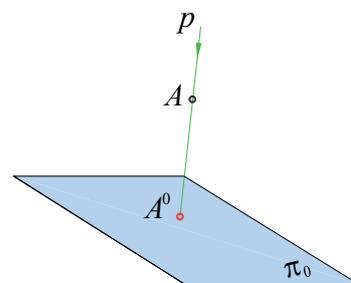


Рис. 1.1

1.2. Центральное и параллельное проецирование

При *центральной проецировании* все проецирующие лучи проходят через точку S , называемую центром проекций и не лежащую в плоскости проекций. Для построения проекций некоторых точек A, B, C, D (рис. 1.2) проводим через эти точки и центр проекций S проецирующие лучи до пересечения с плоскостью π_0 . На плоскости проекций π_0 каждой

точке будет соответствовать единственная точка – проекции A^0, B^0, C^0, D^0 .

Центральное проецирование обладает наглядностью, оно используется при построении изображений архитектурно-строительных объектов, но дает значительное искажение размеров, вследствие чего не применяется для выполнения чертежей.

При *параллельном проецировании* проецирующие лучи параллельны заданному направлению S (рис. 1.3). Точки пересечения проецирующих лучей, проходящих через точки A, B, C , с плоскостью проекций π_0 – параллельные проекции A^0, B^0, C^0 на плоскости π_0 .

Параллельное проецирование можно рассматривать как частный случай центрального

при бесконечно удаленном центре проекций. В зависимости от направления проецирующих лучей относительно плоскости проекций параллельное проецирование может быть *прямоугольным* (проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций) и *косугольным* (проецирующие лучи составляют с плоскостью проекций угол, не равный 90°).

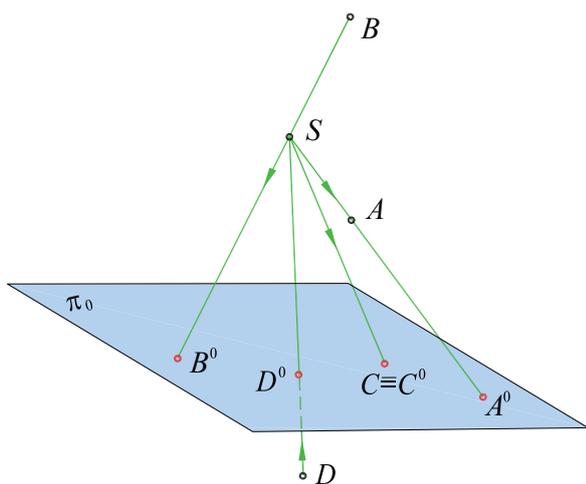


Рис. 1.2

Прямоугольной (ортогональной) проекцией точки A (рис. 1.4) является основание перпендикуляра A^0 , проведенного из точки A на плоскость π_0 . Ортогональное проектирование имеет ряд преимуществ перед центральным и косоугольным параллельным проектированием.

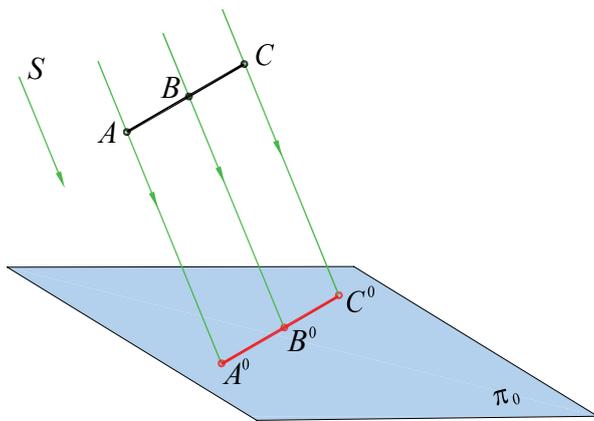


Рис. 1.3

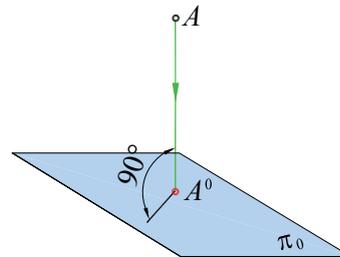


Рис. 1.4

К ним относятся простота геометрических построений и удобство измерений, поэтому прямоугольное (ортогональное) проектирование широко применяется для разработки чертежей. Прямоугольное проектирование включает в себя все свойства центрального и параллельного проектирования.

1.3. Свойства прямоугольного проектирования

1. Каждая точка и прямая в пространстве имеют единственную проекцию на плоскости, так как через любую точку в пространстве можно провести только один проектирующий луч (рис. 1.4).

2. Каждая точка на плоскости проекций может быть проекцией множества точек, если через них проходит общий проектирующий луч (рис. 1.5).

3. Если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции этой прямой (рис. 1.6).

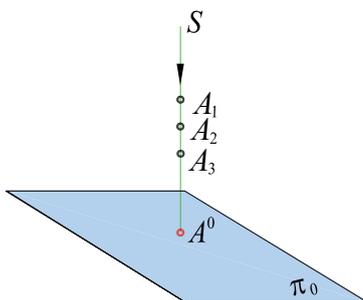


Рис. 1.5

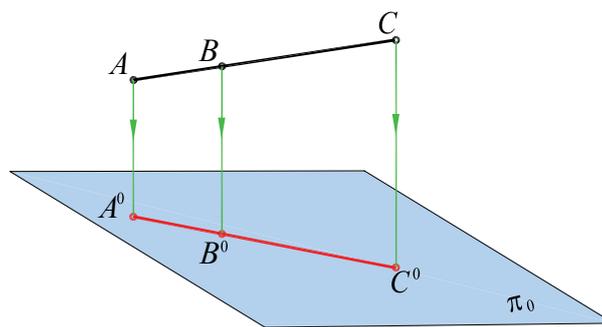


Рис. 1.6

4. Отношение отрезков прямой равно отношению их проекций (рис. 1.6):

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A^0B^0}{B^0C^0}.$$

5. Проекции параллельных прямых параллельны. Если $AB \parallel CD$ то $A^0B^0 \parallel C^0D^0$ (рис. 1.7).

6. Отношение отрезков параллельных прямых равно отношению их проекций (рис. 1.7):

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A^0B^0}{C^0D^0}.$$

7. Если прямая перпендикулярна плоскости проекций, то проекцией этой прямой является точка (прямая AB на рис. 1.8).

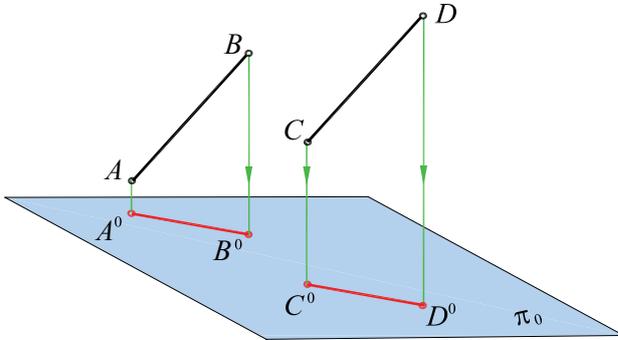


Рис. 1.7

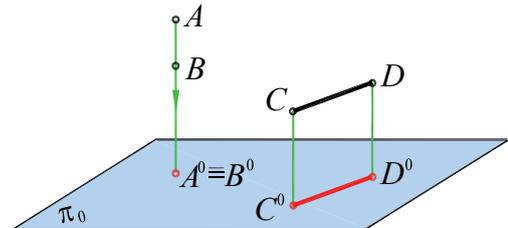


Рис. 1.8

8. Если отрезок прямой параллелен плоскости проекций, то на эту плоскость отрезок спроецируется в натуральную величину (прямая CD на рис. 1.8).

1.4. Обратимость чертежа

Технический чертеж должен быть обратимым. *Обратимость чертежа* – это однозначное определение положения точки в пространстве по ее проекциям.

Если обратиться к чертежу на рис. 1.5, то нетрудно заметить, что точка A^0 может рассматриваться как проекция точек A_1, A_2, A_3 , лежащих на одном проецирующем луче. Действительно, любая точка на плоскости π_0 является проекцией не единственной точки пространства, а целого множества точек, принадлежащих проецирующей прямой. Это значит, что одна проекция точки не определяет эту точку в пространстве. Поэтому для получения обратимого, т. е. метрически определенного чертежа, точку (или объект) проецируют на две или на три плоскости проекций, которые образуют в пространстве систему взаимно перпендикулярных плоскостей. Формой предмета с точки зрения его изображения является его поверхность, которую можно представить как геометрическое множество точек. Поэтому операция проецирования сводится к изображению множества точек предмета на плоскостях проекций.

1.5. Точка в системе двух и трех плоскостей проекций

Изучение способов построения проекций любых объектов начинают с изучения правил построения проекций точек. Возьмем в пространстве две взаимно перпендикулярные плоскости. Одна из них располагается горизонтально – ее называют *горизонтальной плоскостью проекций* и обозначают буквой π_1 . Другая плоскость перпендикулярна горизонтальной и называется *фронтальной плоскостью проекций*. Эта плоскость обозначается буквой π_2 (рис. 1.9). Линия пересечения плоскостей проекций называется *осью проекций*. Ось проекций x разделяет каждую из плоскостей на две полуплоскости. Четыре двугранных угла I, II, III, IV, образованных при пересечении плоскостей, называются четвертями или квадрантами пространства.

Спроецируем точку A , расположенную в I четверти, на плоскости проекций π_1 и π_2 .

Горизонтальной проекцией точки называют прямоугольную проекцию точки на горизонтальной плоскости проекций. Горизонтальную проекцию находим как точку пересечения перпендикуляра, проведенного из точки A , с плоскостью π_1 . Обозначим ее символом A' . Проведем из точки A' в плоскости π_1 перпендикуляр на ось Ox и отметим вспомогательную точку A_x .

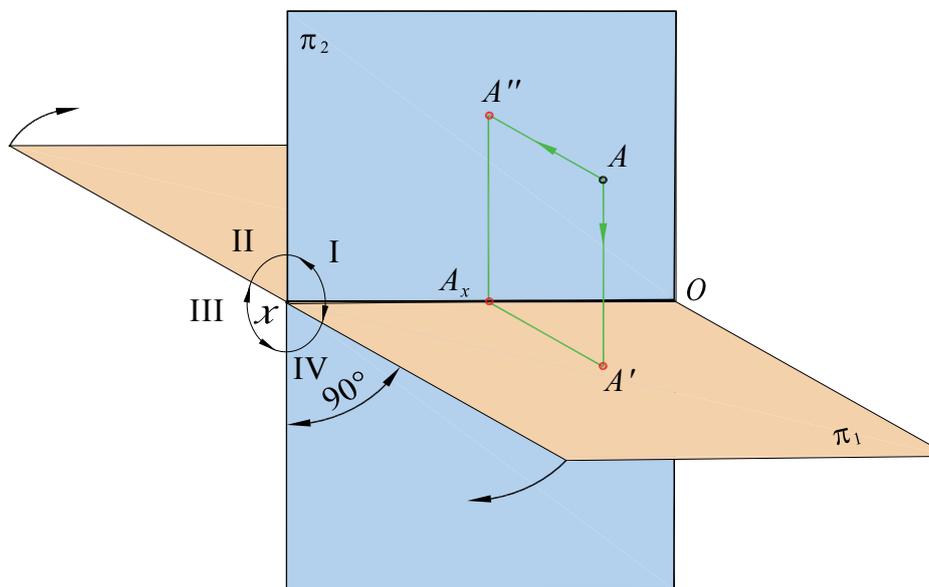


Рис. 1.9

Фронтальной проекцией точки называют прямоугольную проекцию точки на фронтальной плоскости проекций. Фронтальную проекцию находим как точку пересечения перпендикуляра, проведенного из точки A , с плоскостью π_2 . Обозначим ее A'' . Опустив перпендикуляр из точки A'' в плоскости π_2 на ось Ox , получим вспомогательную точку A_x .

Рассмотрим обратную задачу – построение точки A в пространстве по двум заданным ее проекциям – горизонтальной A' и фронтальной A'' . Точку A находим в пересечении перпендикуляров, проведенных из проекции A' к плоскости π_1 и из проекции A'' к плоскости π_2 . Эти перпендикуляры пересекутся в единственной искомой точке A пространства.

Таким образом, две прямоугольные проекции точки вполне определяют ее положение в пространстве относительно данной системы взаимно перпендикулярных плоскостей проекций – т. е. чертеж становится обратимым.

Для получения плоского чертежа точки необходимо совместить плоскость π_1 с плоскостью π_2 поворотом вокруг оси Ox на угол 90° вниз по стрелке, как это показано на рис. 1.9. При этом отрезки A_xA'' и A_xA' образуют один отрезок $A''A'$, перпендикулярный к оси Ox . Этот отрезок $A''A'$ называется *линией проекционной связи* (рис. 1.10). В результате совмещения плоскостей проекций получается чертеж, известный под названием эпюр Монжа (Epure – чертеж (франц.)). Он был назван в честь основоположника начертательной геометрии французского ученого Гаспара Монжа. Без обозначения плоскостей π_1 и π_2 этот чертеж будет выглядеть так, как это показано на рис. 1.11.

Иногда двух проекций геометрического элемента бывает недостаточно, чтобы определить его форму и истинные размеры. Тогда выполняют построение изображения на третьей плоскости. Введем в систему π_1, π_2 третью плоскость проекций, перпендикулярную плоскостям π_1 и π_2 . Ее называют *профильной* плоскостью проекций и обозначают π_3 (рис. 1.12).

Три взаимно перпендикулярные плоскости проекций называются координатными плоскостями. Они пересекаются по трем взаимно перпендикулярным прямым Ox, Oy, Oz , которые являются *осями координат* и обозначаются x, y, z . Общая точка O – начало координат.

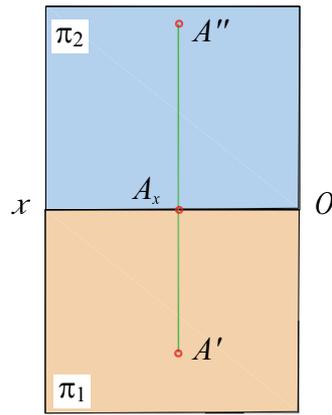


Рис. 1.10

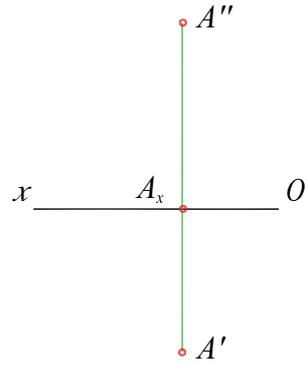


Рис. 1.11

Плоскости π_1 , π_2 , π_3 , пересекаясь между собой, делят пространство на восемь частей, называемых октантами, как это показано на рис. 1.12. В зависимости от положения точки относительно плоскостей проекций ее координаты могут иметь положительные и отрицательные значения. Например, в первом октанте все координаты имеют положительные, а в седьмом – отрицательные значения.

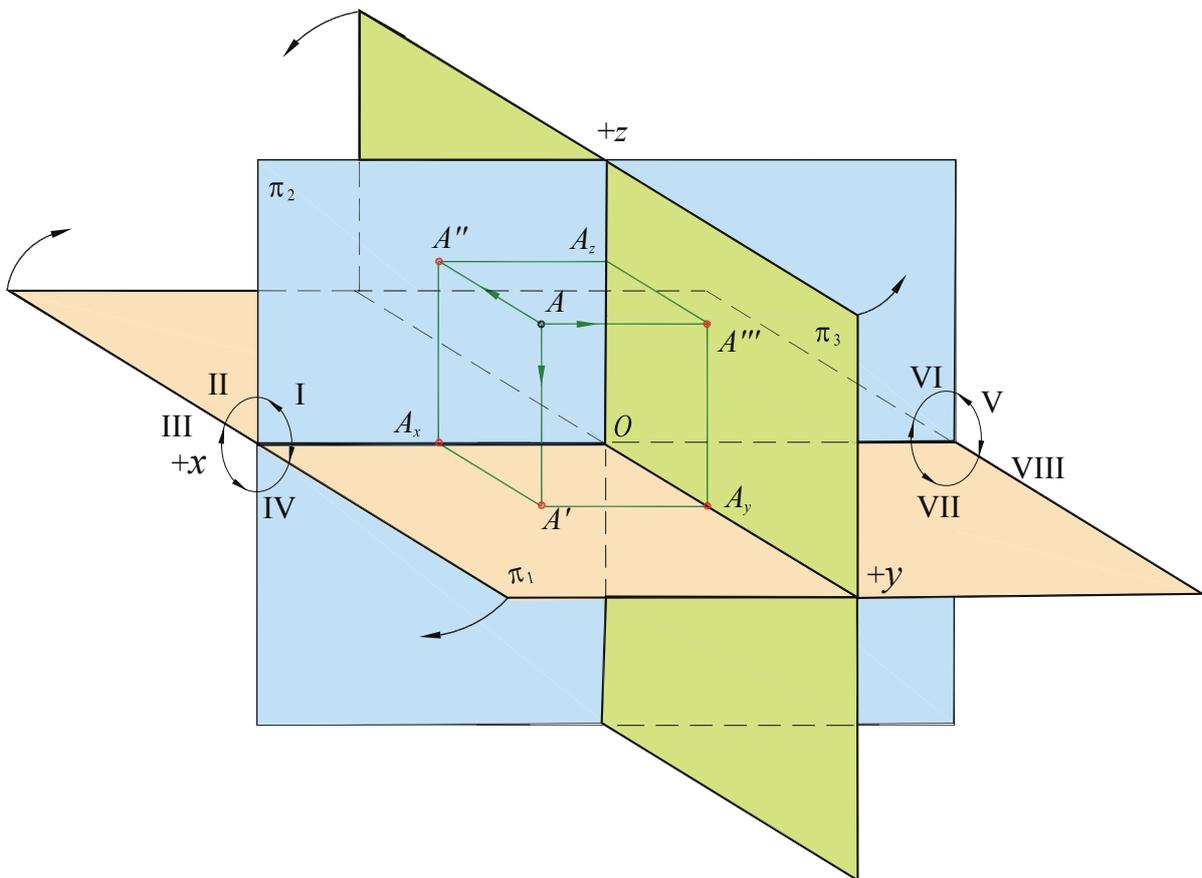


Рис. 1.12

Несмотря на то, что проецируемый объект можно расположить в любом октанте, во многих странах принято помещать изображаемый объект в первом октанте. Рассмотрим построение трех проекций некоторой точки пространства. Зададимся произвольной точкой A (рис. 1.12). Проецирование на плоскости π_1 и π_2 выполняется аналогично приведенному

выше примеру проецирования точки A на две плоскости проекций. Профильной проекцией точки является прямоугольная проекция точки на профильной плоскости проекций π_3 . Обозначим ее A''' .

Часто с осями проекций совмещают декартову систему координат. Из рис. 1.12 видно, что:
 $AA' = A''A_x = A'''A_y$ (высота z точки A – аппликата);
 $AA'' = A'A_x = A'''A_z$ (глубина y точки A – ордината);
 $AA''' = A'A_y = A''A_x$ (широта x точки A – абсцисса).

Чтобы перейти к плоскому изображению, повернем плоскость π_1 вниз вокруг оси Ox и плоскость π_3 вправо вокруг оси Oz до совмещения с плоскостью π_2 , как это показано стрелками на рис. 1.12.

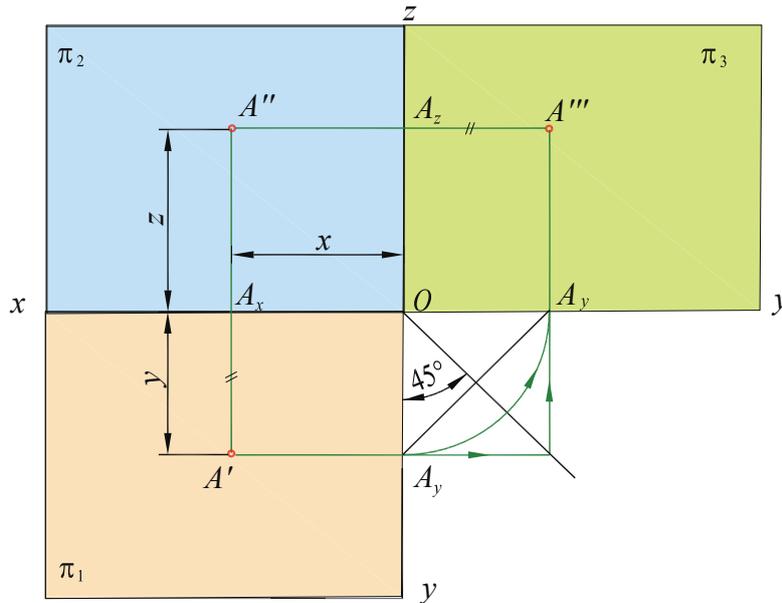


Рис. 1.13

При развороте плоскостей π_1 и π_3 ось y воспроизводится дважды. На рис. 1.13 показано расположение проекций A' , A'' , A''' точки A после совмещения плоскостей проекций.

Прямые, соединяющие на чертеже две проекции одной и той же точки, являются линиями проекционной связи, между A' и A'' – вертикальная линия связи, между A'' и A''' – горизонтальная линия связи, между проекциями A' и A''' – ломаная линия связи. Переход от оси y плоскости π_1 к оси y плоскости π_3 может осуществляться при помощи дуги или вспомогательной прямой, проведенной под углом 45° к оси y .

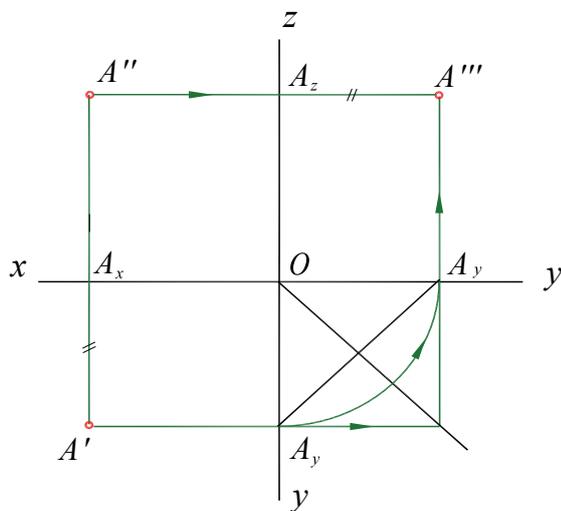


Рис. 1.14

На рис. 1.14 выполнено построение профильной проекции A''' точки A по заданной горизонтальной A' и фронтальной A'' . Построение выполняется следующим образом:

1. Проводим через проекцию A'' горизонтальную линию связи, на которой находится профильная проекция A''' .

2. Проводим ломаную линию связи через $A'A_yA_{y1}A'''$ до пересечения с горизонтальной линией связи, проведенной через фронтальную проекцию A'' .

Профильную проекцию A''' можно получить, откладывая на горизонтальной линии связи от точки A_z отрезок, равный координате y .

Как известно, положение точки в пространстве может быть задано при помощи трех ее координат (абсциссы x , ординаты y , аппликаты z), т. е. трех чисел, выражающих расстояния от этой точки до трех плоскостей проекций. Запись координат точки производится в такой форме: $A(x, y, z)$.

Предположим, задана точка $A(15, 20, 30)$. Эта запись означает, что точка A определяется координатами $x = 15, y = 20, z = 30$. Если масштаб для построения чертежа задан или выбран, то построение проводят так, как показано на рис. 1.13, 1.14 – откладывается на оси x от точки O отрезок $OA_x = 15$, а на перпендикуляре к этой оси, проведенном из точки A_x , откладывают отрезки $A_xA' = 20$ и $A_xA'' = 30$. Затем строят профильную проекцию A''' , как описано выше.

В дальнейшем все геометрические элементы (точки, прямые, фигуры, тела) будем располагать в I четверти (I октанте) пространства.

1.6. Примеры решения задач

Задача 1. По заданным координатам точки $A(15, 20, 30)$ построить ее проекции и наглядное изображение в пространстве.

Решение.

- Выбираем масштаб 1 : 1 для решения задачи.
- По оси Ox откладываем $x = 15$ (точка A_x рис. 1.15).
- В точке A_x восстанавливаем перпендикуляр к оси (линия связи) и, отложив на нем $y = 20$ и $z = 30$, получим соответственно точку A' – горизонтальную проекцию точки A и точку A'' – фронтальную проекцию точки A .
- Затем из точки A' проведем перпендикуляр к оси Oy (точка A_y).
- Радиусом OA_y переносим точку A_y на ось Oy_1 (точка A_{y1}).
- Из точки A_{y1} восстанавливаем перпендикуляр к оси Oy_1 .
- Из точки A'' проводим горизонтальную линию связи. В пересечении линий связи получим точку A''' – профильную проекцию точки A .

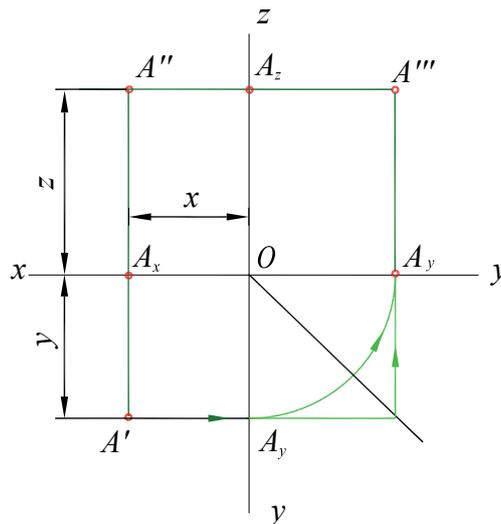


Рис. 1.15

Для определения положения точки в пространстве построим ее аксонометрическую проекцию. Для этого воспользуемся известной из средней школы косоугольной фронтальной

диметрической проекцией. Аксонометрические оси у этой проекции расположены так, как показано на рис. 1.16.

Отметим, что коэффициент искажения по осям x и z равен 1, а по оси y равен 0,5, т. е. численные значения координаты y необходимо уменьшать в два раза.

Отложив по осям значения координат ($x = 15, y = 20, z = 30$), как это показано на рис. 1.16, построим горизонтальную A' , фронтальную A'' и профильную A''' проекции точки A . Из полученных проекций проведем перпендикуляры к плоскостям проекций, которые пересекутся в точке A , являющейся аксонометрической проекцией исходной точки.

Задача 2. Построить недостающие проекции точек A, B, C, D (рис. 1.17). Заданные проекции этих точек на чертеже показаны черными точками.

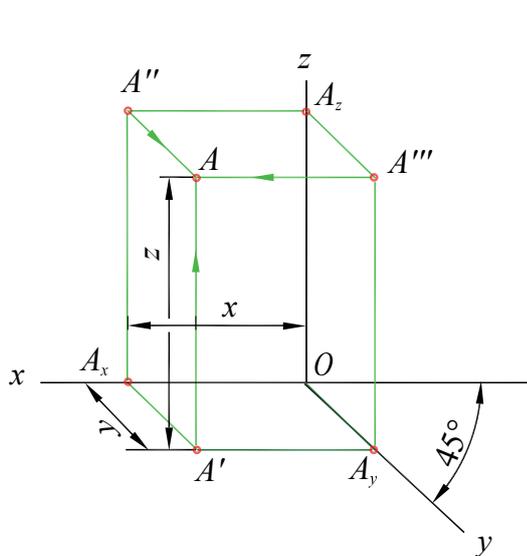


Рис. 1.16

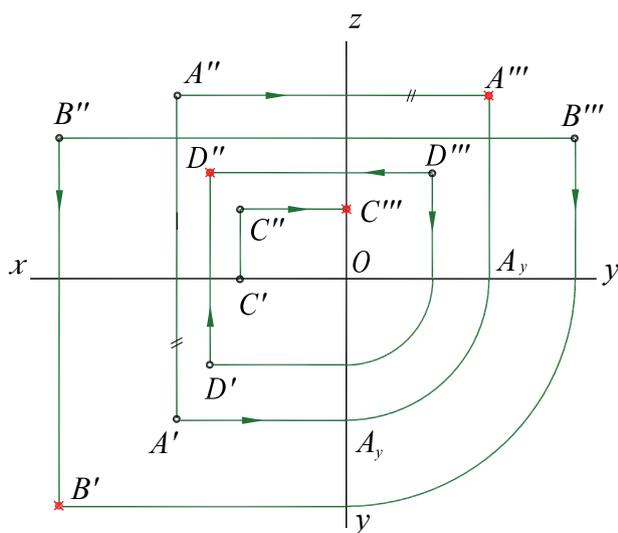


Рис. 1.17

Решение. Недостающие проекции точек строят с помощью линий связи между проекциями, направление которых указано стрелками. Выполнив необходимые построения, приведенные на чертеже, получим искомые проекции точек, отмеченные красными точками и крестиками.

Вопросы для контроля

1. Что называется прямоугольной проекцией точки?
2. Сформулируйте основные свойства прямоугольного проецирования.
3. Как называются и обозначаются плоскости проекций?
4. Что называется горизонтальной, фронтальной и профильной проекцией точки?
5. Какая существует зависимость во взаимном расположении проекций точки, изображенной в прямоугольной системе плоскостей проекций?
6. Как обозначаются проекции точек?
7. В какой последовательности записываются координаты точек?

Глава 2. ПРЯМАЯ

2.1. Проекция отрезка прямой линии

Как известно из элементарной геометрии, прямая линия определяется двумя точками, поэтому чтобы построить проекции этой прямой, необходимо иметь проекции двух точек, принадлежащих этой прямой.

Возьмем на произвольной прямой две точки A и B (рис. 2.1). Их проекции A^0 и B^0 на плоскости π_0 определяют прямую, которую можно рассматривать как линию пересечения плоскости π_0 с плоскостью β , определяемой прямой AB и проецирующими лучами AA^0 и BB^0 . Линия пересечения плоскостей π_0 и β проходит через проекции A^0 и B^0 на плоскости π_0 . Эта линия и является проекцией прямой на плоскости проекций π_0 .

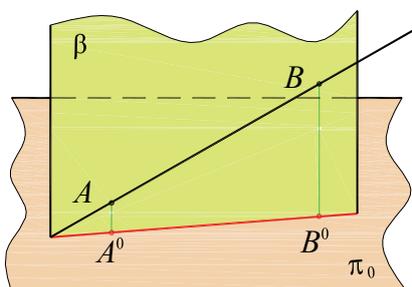


Рис. 2.1

Одна проекция прямой не определяет ее положения в пространстве. Для однозначного определения прямой в пространстве необходимы как минимум две проекции.

2.2. Прямые общего и частного положения

Прямые в пространстве могут занимать различное положение относительно плоскостей проекций. Прямую, не параллельную ни одной из плоскостей проекций, называют *прямой общего положения*. На рис. 2.2, а дано пространственное изображение, а на рис. 2.2, б – чертеж прямой AB . Точки A и B находятся на разных расстояниях от каждой из плоскостей проекций, т. е. прямая AB не параллельна ни одной из них. Значит, AB – прямая общего положения.

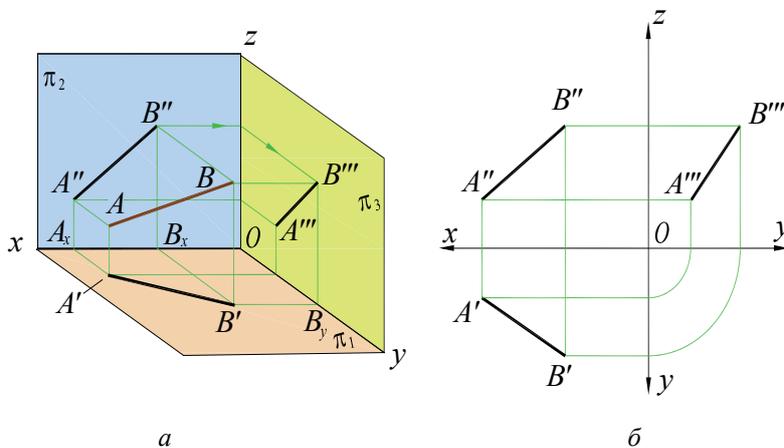


Рис. 2.2

Прямые, параллельные или перпендикулярные к плоскостям проекций, называются *прямыми частного положения*. Прямая, параллельная какой-либо одной плоскости проекций, называется *прямой уровня*. Различают три линии уровня: горизонтальная – прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций π_1 ; фронтальная – прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций π_2 ; профильная – прямая, параллельная профильной плоскости проекций π_3 . Прямая, перпендикулярная к плоскостям проекций, называется *проецирующей*. Различают три проецирующие прямые: горизонтально проецирующая – прямая, перпендикулярная к плоскости π_1 ; фронтально проецирующая – прямая, перпендикулярная к плоскости π_2 ; профильно проецирующая – прямая, перпендикулярная к плоскости π_3 .

Характерные особенности различных видов прямых частного положения и их проекций приведены в таблице.

Таблица

Прямые частного положения

Наименование и положение прямой	Наглядное изображение прямой	Чертеж прямой	Особенности проекций прямой
Прямые уровня			
Горизонтальная, $AB \parallel \pi_1$			$A''B'' \parallel x$; $A'B'$ – натуральная величина; φ_2 – угол наклона прямой AB к плоскости π_2
Фронтальная, $CD \parallel \pi_2$			$C'D' \parallel x$; $C''D''$ – натуральная величина; φ_1 – угол наклона прямой CD к плоскости π_1
Профильная, $EF \parallel \pi_3$			$E'F'$ и $E''F'' \perp x$; $E'''F'''$ – натуральная величина; φ_1 и φ_2 – углы наклона прямой EF соответственно к плоскостям π_1 и π_2
Проецирующие прямые			
Горизонтально проецирующая			$E'F'$ – вырожденная проекция (точка); $E''F'' \perp$ оси x

Наименование и положение прямой	Наглядное изображение прямой	Чертеж прямой	Особенности проекций прямой
Фронтально проецирующая			$C''D''$ – вырожденная (точка); $C'D' \perp$ оси x
Профильно проецирующая			$A'''B'''$ – вырожденная (точка); $A'B' \parallel A''B'' \parallel$ оси x

2.3. Следы прямой

Точки пересечения прямой линии с плоскостями проекций называют *следами*. В системе трех плоскостей проекций прямая общего положения имеет три следа – горизонтальный, фронтальный и профильный; прямая, параллельная одной из плоскостей проекций – два следа, и прямая, перпендикулярная к плоскости проекций – один след. На рис. 2.3 изображена прямая общего положения AB . Она пересекается с плоскостью π_1 в точке M , а с плоскостью π_2 – в точке N . Точка M – горизонтальный след этой прямой, а точка N – ее фронтальный след. Горизонтальная проекция M' горизонтального следа совпадает с самим следом M , а фронтальная проекция M'' этого следа лежит на оси проекций x . Проекции фронтального следа N находятся аналогично.

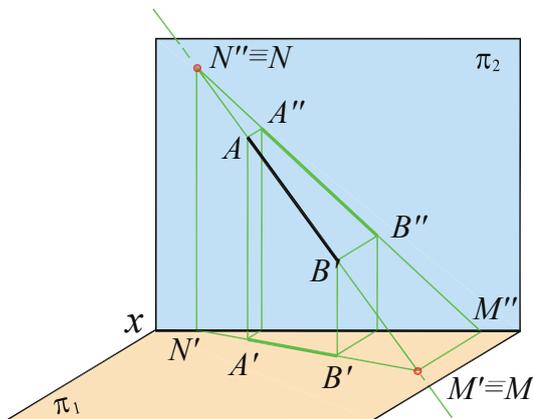


Рис. 2.3

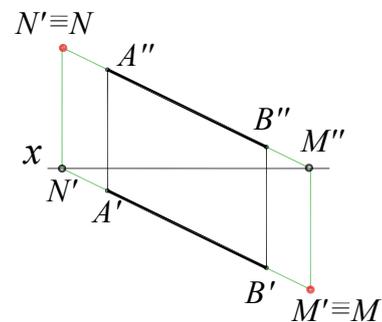


Рис. 2.4

На рис. 2.4 показано построение следов прямой AB общего положения. Чтобы найти горизонтальный след, следует продлить фронтальную проекцию $A''B''$ до пересечения с

осью x (точка M'') и из этой точки восстановить перпендикуляр к оси x (провести линию связи) до пересечения с продолжением горизонтальной проекции $A'B'$.

Точка M' – горизонтальная проекция горизонтального следа, которая совпадает с самим следом M .

Для нахождения фронтального следа необходимо продолжить горизонтальную проекцию $A'B'$ до пересечения с осью x (точка N') и через точку N' , которая является горизонтальной проекцией фронтального следа, провести перпендикуляр к оси x до пересечения с продолжением фронтальной проекции $A''B''$. Точка N'' – фронтальная проекция фронтального следа, которая совпадает с фронтальным следом N .

2.4. Определение натуральной величины отрезка прямой и углов наклона прямой к плоскостям проекций

Как отмечалось выше, отрезки прямых общего положения не проецируются в натуральную величину ни на одну из плоскостей проекций.

Длину (натуральную величину – HB) отрезка можно определить на основании свойства ортогонального проецирования. Из рис. 2.5 видно, что натуральная величина отрезка AB общего положения является гипотенузой прямоугольного треугольника $AB1$. В этом треугольнике один катет $A1$ параллелен плоскости π_1 и равен по длине горизонтальной проекции отрезка AB ($A1 = A'B'$), а величина второго катета равна разности расстояний точек B и A до плоскости проекций π_1 , т. е. $B1 = BB' - AA' = \Delta z$.

Угол φ_1 – угол наклона прямой AB к горизонтальной плоскости проекций π_1 .

Таким образом, на горизонтальной проекции отрезка (рис. 2.6) можно построить прямоугольный треугольник, взяв вторым катетом Δz . Гипотенуза этого треугольника $A'B^*$ будет натуральной величиной отрезка AB , а угол φ_1 определяет угол наклона отрезка AB к горизонтальной плоскости проекций π_1 .

Аналогичное построение можно сделать на фронтальной плоскости проекций, взяв в качестве второго катета разность расстояний концов отрезка (Δy) до фронтальной плоскости проекций π_2 . Отрезок A^*B'' – натуральная величина отрезка AB , угол φ_2 – угол наклона AB к плоскости π_2 .

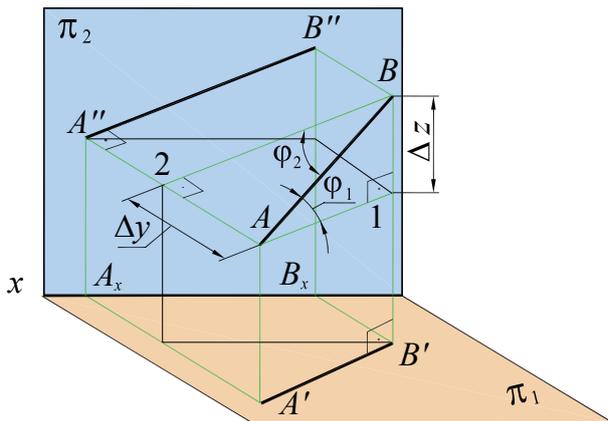


Рис. 2.5

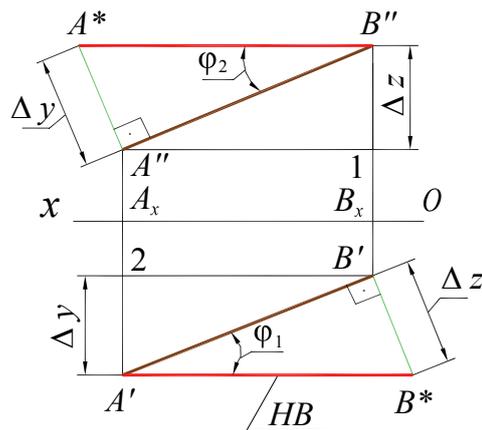


Рис. 2.6

Из вышесказанного вытекает, что длина (HB) отрезка общего положения равна гипотенузе прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен проекции отрезка на плоскости проекций, а другой катет равен разности расстояний концов отрезка до этой плоскости.

2.5. Относительное положение точки и прямой. Деление отрезка прямой в данном отношении

Точка и прямая в пространстве могут занимать различное положение относительно друг друга. Если точка принадлежит прямой, то проекции этой точки лежат на одноименных проекциях данной прямой. Точка B принадлежит прямой a (рис. 2.7), так как ее проекции B' и B'' лежат на одноименных проекциях прямой a' и a'' . Точки C, D, E, F, G, K, L, M не принадлежат прямой a , так как по крайней мере одна из проекций каждой из этих точек не лежит на соответствующей проекции прямой.

Определить положение точек, заданных на рис. 2.7, относительно прямой a можно сравнивая координаты z и y каждой из этих точек с соответствующей точкой (обозначенной крестиком) прямой a , лежащей на одной и той же линии связи.

Точка C находится позади прямой a , точка D – впереди прямой a , точка E – под прямой a , точка F – над прямой a , точка G – над и позади прямой a , точка K – над и впереди прямой a , точка L – под и впереди прямой a , точка M – под и позади прямой a .

Иногда требуется разделить отрезок в данном отношении.

Из свойств параллельного проецирования известно, что отношение отрезков прямой равно отношению проекций этих отрезков. Чтобы разделить отрезок прямой в заданном отношении, необходимо разделить в этом отношении одну из проекций данного отрезка, а затем с помощью линий связи перенести делящую точку на другие проекции.

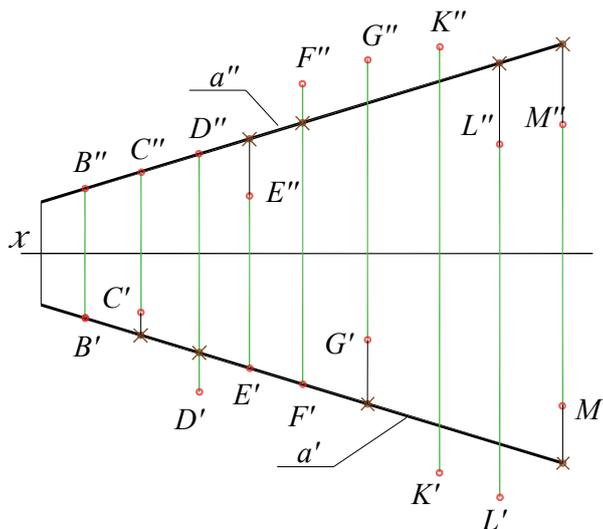


Рис. 2.7

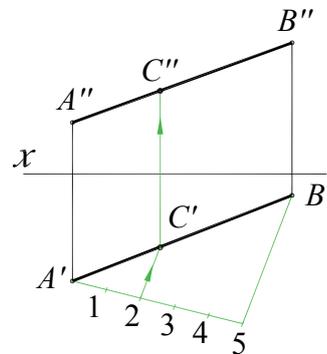


Рис. 2.8

На рис. 2.8 дан пример деления отрезка прямой линии AB в отношении $2 : 3$. Из точки A' проведен вспомогательный отрезок прямой, на котором отложено пять одинаковых частей произвольной длины. Проведя отрезок $B'5$ и параллельно ему через точку 2 прямую, получим проекцию точки C' , причем $A'C' : C'B' = 2 : 3$; затем по линии связи находим точку C'' . Точка C делит отрезок AB в отношении $2 : 3$.

2.6. Относительное положение двух прямых в пространстве

Прямые в пространстве могут занимать различное взаимное положение – они могут быть параллельными, пересекаться и скрещиваться. Из свойств параллельного проецирования следует, что проекции параллельных прямых параллельны между собой. Действительно, если

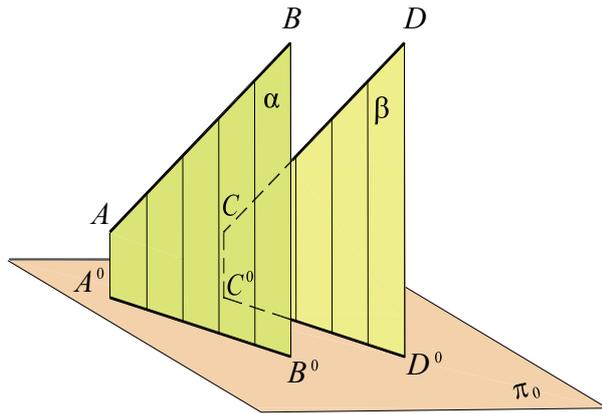


Рис. 2.9

провести через данные параллельные прямые AB и CD плоскости α и β , перпендикулярные π_0 (рис. 2.9), то эти две плоскости будут параллельны и в их пересечении с плоскостью проекций π_0 получатся две взаимно параллельные прямые A^0B^0 и C^0D^0 , являющиеся ортогональными проекциями прямых AB и CD на плоскость π_0 .

На рис. 2.10 приведен пример параллельных прямых AB и CD , при этом одноименные проекции этих прямых параллельны, т. е. $A'B' \parallel C'D'$, $A''B'' \parallel C''D''$, $A'''B''' \parallel C'''D'''$.

Справедливо и обратное утверждение:

если в системе плоскостей проекций π_1, π_2, π_3

проекция двух прямых параллельны, то прямые в пространстве параллельны. Это утверждение правильно для прямых общего положения. Для прямых, параллельных одной из плоскостей проекций, оно может не подтвердиться, если заданы параллельные проекции прямых только на двух плоскостях проекций.

На рис. 2.11 профильные прямые AB и CD заданы параллельными проекциями $A'B' \parallel C'D'$, $A''B'' \parallel C''D''$, но сами прямые не параллельны, так как не параллельны их профильные проекции $A'''B'''$ и $C'''D'''$.

Таким образом, для определения параллельности профильных прямых необходимо построить их проекции на профильной плоскости проекций.

Если прямые в пространстве пересекаются, то на чертеже пересекаются их одноименные проекции и точки пересечения проекций этих прямых лежат на одной линии связи.

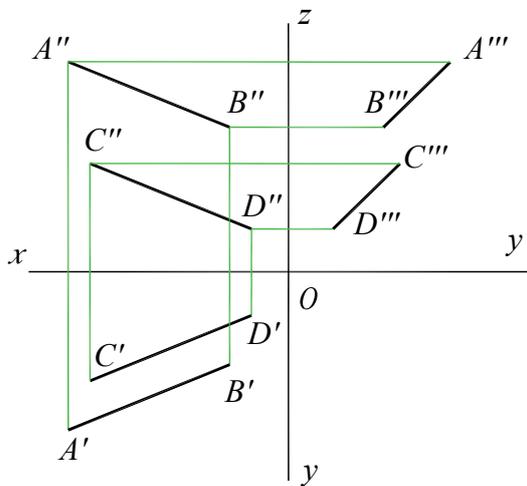


Рис. 2.10

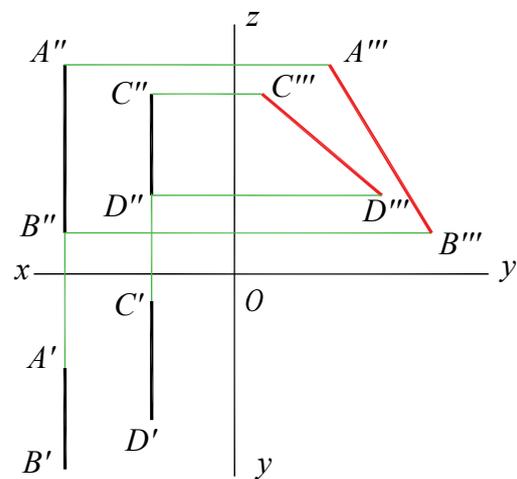


Рис. 2.11

Действительно, взаимно пересекающиеся прямые AB и CD (рис. 2.12) имеют общую точку K . Поэтому горизонтальная (K') и фронтальная (K'') проекции этой точки должны лежать на пересечении одноименных проекций данных прямых (рис. 2.12, а).

На рис. 2.12, б проекции точки K' и K'' располагаются на одном перпендикуляре к оси проекций (на одной линии связи).

Если две прямые не параллельны и не пересекаются, то они называются скрещивающимися. Как видно из рис. 2.13, а и б горизонтальные проекции точек A и C (A' , C') прямых m и n и фронтальные проекции точек B и D (B'' , D'') сливаются в одну, так как

расположены на одной проецирующей прямой. Но эти точки пересечения одноименных проекций ($A' \equiv C'$ и $B'' \equiv D''$) не являются общими для двух прямых и, следовательно, прямые m и n скрещиваются.

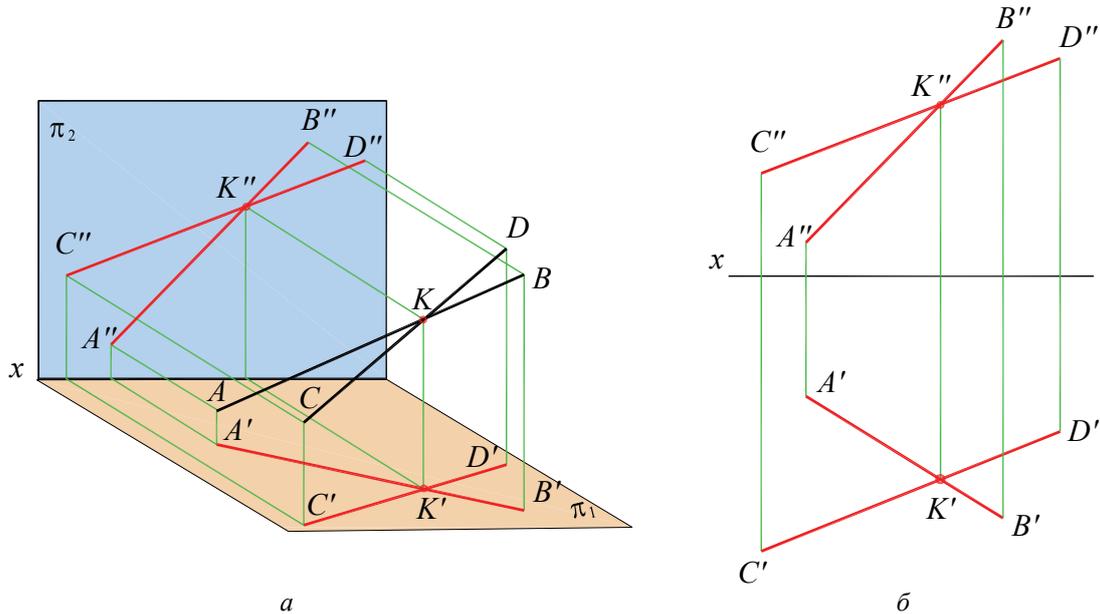


Рис. 2.12

Пары точек A и C , лежащие на горизонтально проецирующей прямой, или B и D , лежащие на фронтально проецирующей прямой, называются *конкурирующими*.

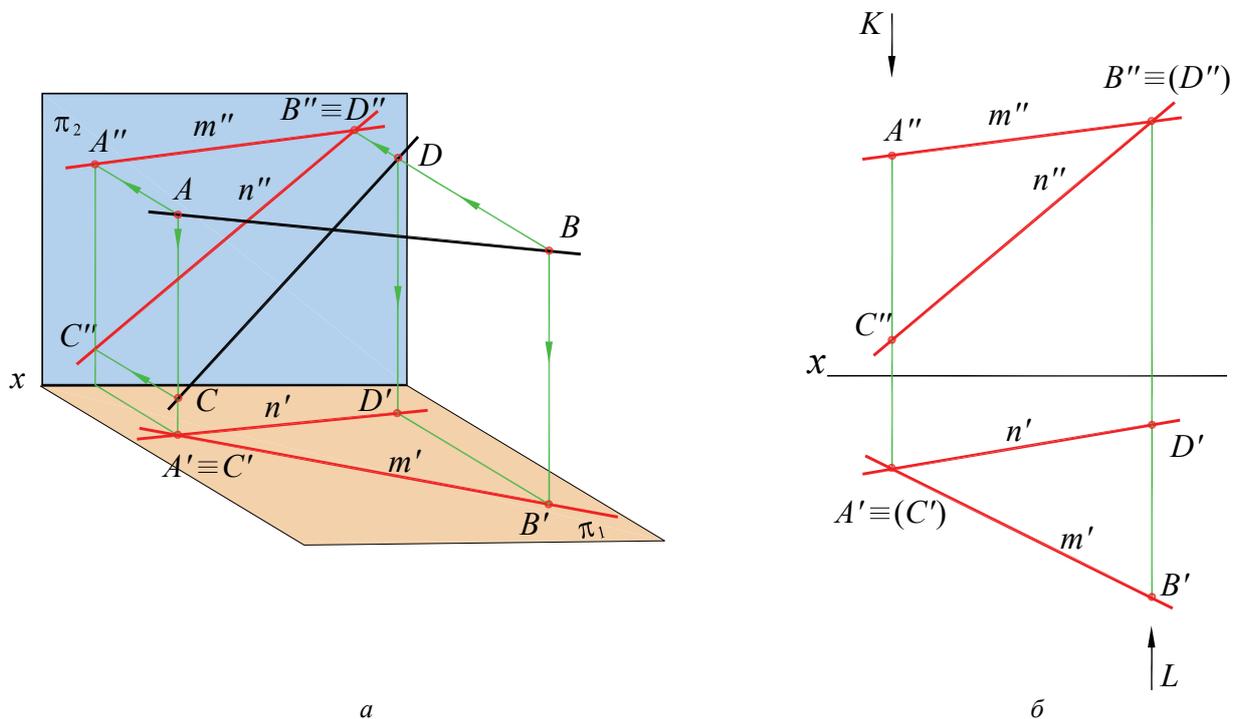


Рис. 2.13

Определим, какая из изображенных прямых (рис. 2.13, б) выше другой или ближе к наблюдателю. При взгляде сверху по стрелке K точка A закрывает точку C , так как ее фронтальная проекция A'' выше фронтальной проекции C'' (проекция A'' отстоит дальше

от оси x). Поэтому горизонтальная проекция A' закрывает проекцию C' . При взгляде спереди по стрелке L видно, что точка B прямой m закрывает точку D прямой n . Проекция B' находится дальше от оси x , поэтому фронтальная проекция B'' закрывает проекцию D'' . Обозначение проекций невидимых (закрытых) точек показано в скобках. Такой способ определения видимости элементов чертежа называется способом *конкурирующих точек*.

2.7. Примеры решения задач

Задача 1. Через точку A (рис. 2.14) провести фронтальную прямую AB длиной 50 мм под углом 30° к плоскости π_1 и отложить на ней отрезок $CD = 30$ мм.

Решение. Прямая AB параллельна фронтальной плоскости проекций π_2 и спроецируется на эту плоскость в натуральную величину под углом 30° к оси x .

Из точки A'' проводим прямую под углом 30° к оси x ($\varphi_1 = 30^\circ$) и откладываем на ней отрезок $A''B'' = 50$ мм.

Горизонтальная проекция AB ($A'B'$) параллельна оси x . На фронтальной проекции $A''B''$ откладываем отрезок $A''D'' = 30$ мм. По линии связи определяем горизонтальную проекцию точки D (D').

Задача может иметь несколько решений в зависимости от положения $A''B''$ по отношению к оси x .

Задача 2. Построить следы прямой, проходящей через точки A и B (рис. 2.15).

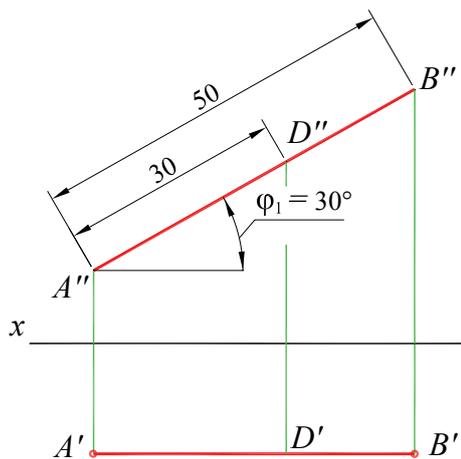


Рис. 2.14

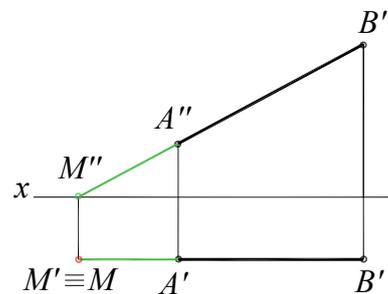


Рис. 2.15

Решение. Проводим проекции $A'B'$ и $A''B''$ прямой AB . Из построения следует, что проекция $A'B'$ параллельна оси Ox , значит $AB \parallel \pi_2$ – фронтальная прямая и фронтального следа не имеет. Для построения горизонтального следа прямой продолжим ее фронтальную проекцию до пересечения с осью x в точке M'' , которая является фронтальной проекцией горизонтального следа прямой. Из точки M'' проводим перпендикуляр (линию связи) к оси x до пересечения с продолженной проекцией $A'B'$ в точке M' . Точка M' совпадает с самим горизонтальным следом прямой – точкой M .

Задача 3. Дана фронтальная проекция отрезка AB и горизонтальная проекция точки A (рис. 2.16). Построить горизонтальную проекцию отрезка AB , если натуральная величина его равна l .

Решение. По катету $A''B''$ и гипотенузе l строим прямоугольный треугольник $A''A^*B''$. В построенном треугольнике катет $A''A^*$ будет равен Δy . Через A' проводим линию $A'1 \parallel Ox$.

От точки 1 отложим Δy и получим точку B'' . Соединив A' с B'' , получим горизонтальную проекцию отрезка AB . Задача имеет два решения.

Задача 4. Через точку A провести прямую, пересекающую заданные прямые BC и DE (рис. 2.17).

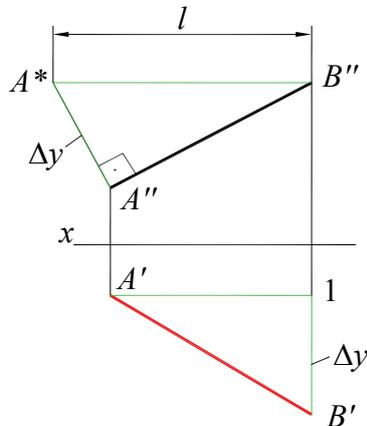


Рис. 2.16

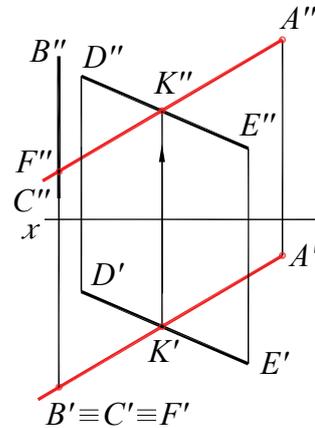


Рис. 2.17

Решение. Прямая BC ($B'C'$, $B''C''$) – горизонтально проецирующая. Горизонтальная проекция искомой прямой должна пройти через точку, являющуюся горизонтальной проекцией прямой BC . F' – горизонтальная проекция точки пересечения искомой прямой и отрезка BC . K' – горизонтальная проекция точки K пересечения искомой прямой и прямой DE . При помощи линии связи определим фронтальную проекцию K'' точки K . Через K'' проводим фронтальную проекцию искомой прямой до пересечения с проекцией $B''C''$ в точке F'' . $A'F'$ – искомая прямая.

Вопросы для контроля

1. Какая прямая называется прямой общего положения?
2. Какие частные положения может занимать прямая относительно плоскостей проекций?
3. Какое положение занимают на чертеже проекции прямых, параллельных плоскостям проекций, проецирующихся прямых?
4. Что называется следом прямой?
5. Сколько следов имеет прямая общего положения, прямая уровня, проецирующая прямая?
6. Как построить на чертеже горизонтальный и фронтальный следы прямой?
7. Как определить на чертеже взаимное положение точки и прямой?
8. Как определить натуральную величину отрезка прямой способом прямоугольного треугольника?
9. Какое взаимное положение могут занимать две прямые в пространстве?
10. Пояснить графические признаки параллельных прямых, пересекающихся прямых и скрещивающихся прямых на чертеже.

Глава 3. ПЛОСКОСТЬ

3.1. Задание плоскости на чертеже. Следы плоскости

Плоскостью называется поверхность, образуемая перемещением прямой линии, которая движется параллельно самой себе по неподвижной направляющей прямой.

На чертеже плоскость можно изобразить только в том случае, если она проецируется в линию. На рис. 3.1 плоскость α , расположенная перпендикулярно к плоскости π_1 , проецируется на нее прямой линией α' .

Если плоскость не перпендикулярна к плоскости проекций, то изобразить ее на чертеже невозможно, так как проекции плоскости на каждую плоскость проекций π_1, π_2, π_3 занимают полностью всю плоскость проекций. Однако ее можно задать на чертеже, избрав какие-либо элементы, определяющие ее. Такими элементами являются:

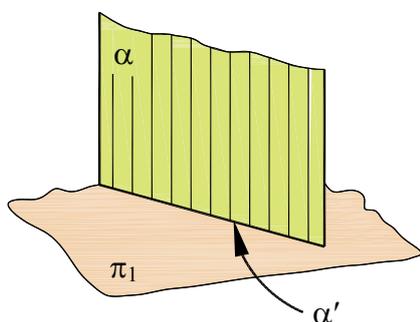


Рис. 3.1

- проекции трех точек, не лежащие на одной прямой (рис. 3.2, а);
- проекции прямой и точки, не лежащей на ней (рис. 3.2, б);
- проекции пересекающихся прямых (рис. 3.2, в);
- проекции двух параллельных прямых (рис. 3.2, г);
- проекции плоских фигур (рис. 3.2, д).

Кроме того, плоскость может быть задана следами плоскости. *Следом плоскости* называется линия пересечения заданной плоскости с любой из плоскостей проекций. На рис. 3.3, а изображена плоскость α , которая пересекается с плоскостями проекций и образует следующие следы:

- $h'_{0\alpha}$ – *горизонтальный след* – в пересечении с горизонтальной плоскостью проекций π_1 ;
- $f'_{0\alpha}$ – *фронтальный след* – в пересечении с фронтальной плоскостью проекций π_2 ;
- $p'''_{0\alpha}$ – *профильный след* – в пересечении с профильной плоскостью проекций π_3 .

На чертеже плоскость задают проекциями следов $h_{0\alpha}'$ и $f_{0\alpha}''$ (рис. 3.3, б). Так как следы плоскости расположены на одноименных плоскостях проекций, фронтальная проекция $h_{0\alpha}''$ горизонтального следа и горизонтальная проекция $f_{0\alpha}'$ фронтального следа совпадают с осью x . Проекции следов, которые совпадают с осью координат, на чертеже обычно не указывают.

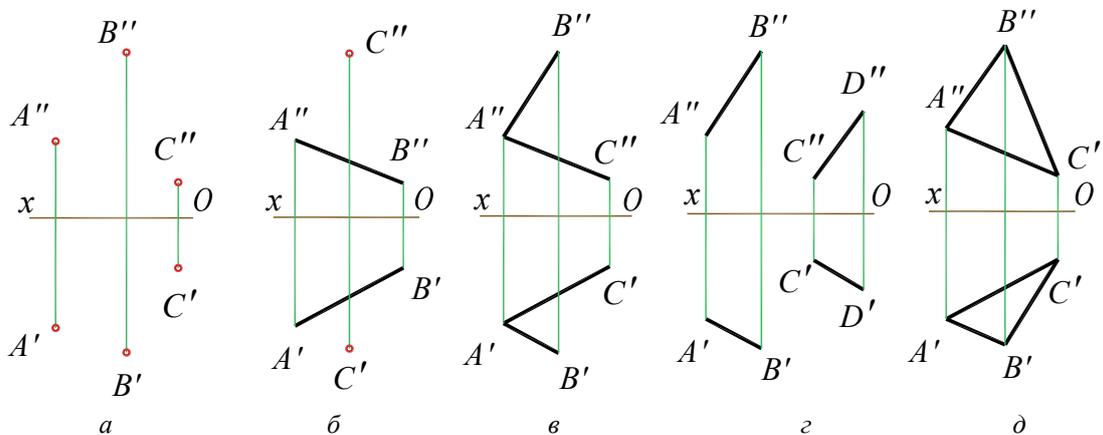


Рис. 3.2

Два следа плоскости, пересекающиеся на осях координат в точках $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$, называются *точками схода следов*. Профильный след $p_{0\alpha}'''$ можно построить по точкам схода, используя линии связи (рис. 3.3, в).

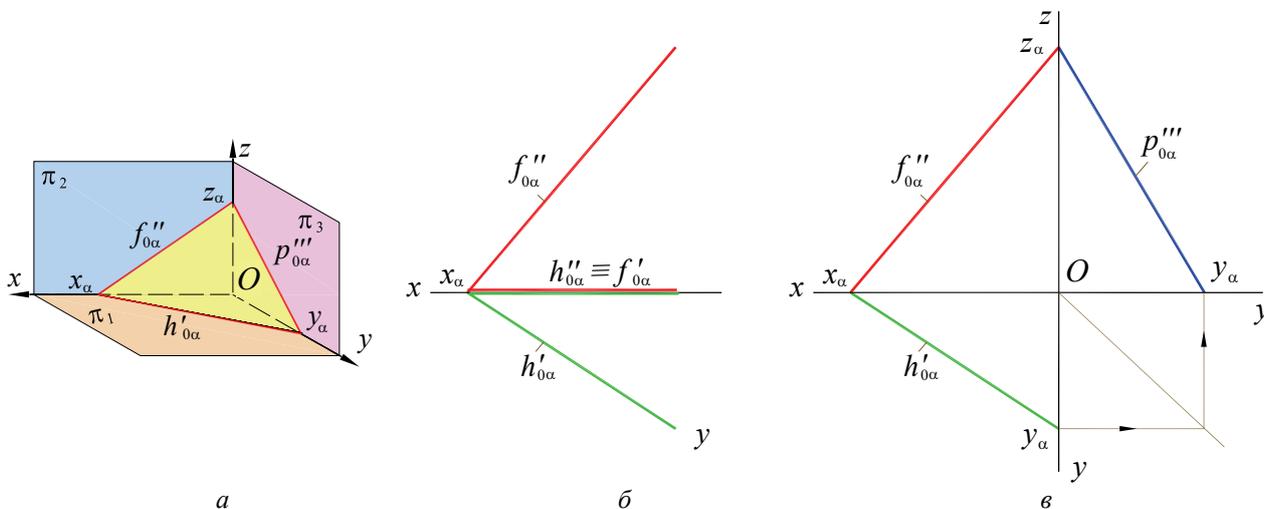


Рис. 3.3

Каждый из приведенных выше способов задания плоскости может быть преобразован в любой из них. Например, соединив точки A и B (рис. 3.2, а), получим задание плоскости, представленное на рис. 3.2, б. От задания плоскости прямой и точкой (рис. 3.2, б) можно перейти к заданию плоскости двумя пересекающимися прямыми (рис. 3.2, в) или двумя параллельными прямыми (рис. 3.2, г), или треугольником (рис. 3.2, д).

Для построения следов плоскости следует найти следы прямых, принадлежащих данной плоскости. На рис. 3.4, а и в показана плоскость α , заданная следами.

3.2. Плоскости общего и частного положения

По отношению к плоскостям проекций плоскости могут занимать различное положение. Плоскость, не перпендикулярную ни к одной из плоскостей проекций, называют *плоскостью общего положения*. Наглядное изображение плоскости общего положения α дано на рис. 3.4, а, чертеж плоскости общего положения α , заданной плоской фигурой, приведен на рис. 3.4, б и чертеж плоскости общего положения α , заданной следами, приведен на рис. 3.4, в.

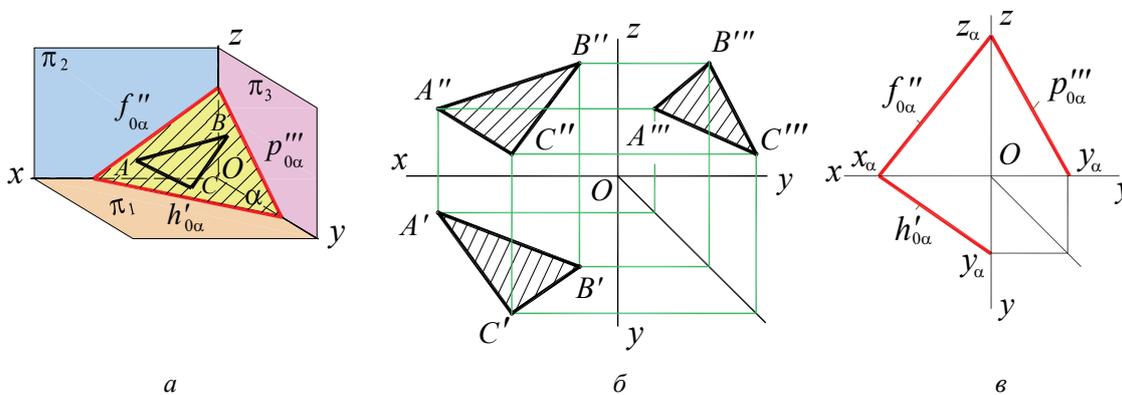


Рис. 3.4

Плоскость общего положения пересекает каждую из осей x, y, z . Следы плоскости общего положения никогда не перпендикулярны к осям проекций. При построении плоскости следами последние обычно ограничиваются участками, расположенными в первом октанте.

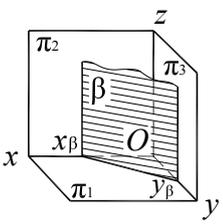
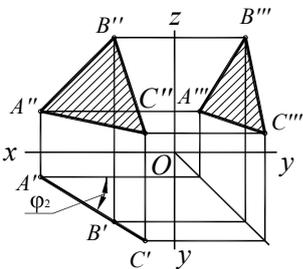
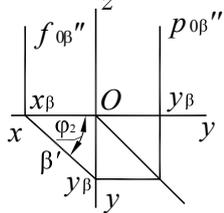
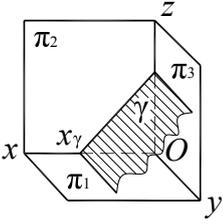
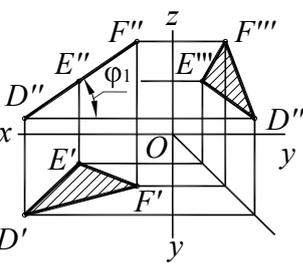
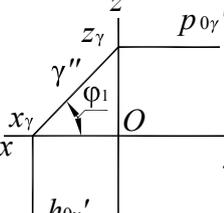
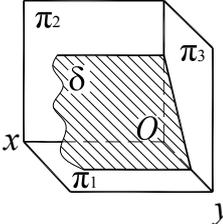
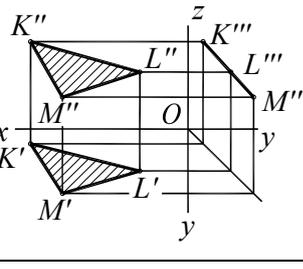
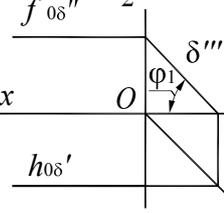
К плоскостям *частного положения* относятся плоскости, перпендикулярные к плоскостям проекций.

Если плоскости перпендикулярны к одной из плоскостей проекций, то они называются *проецирующими*.

Различают горизонтально проецирующую ($\beta \perp \pi_1$), фронтально проецирующую ($\gamma \perp \pi_2$) и профильно проецирующую ($\delta \perp \pi_3$) плоскости. Характерные особенности расположения проецирующих плоскостей приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Проецирующие плоскости

Наименование плоскости	Наглядное изображение	Плоскость задана:		Особенности проекции плоскости
		плоской фигурой	следами	
Горизонтально проецирующая, $\beta \perp \pi_1$				$A'B'C'$ – прямая линия; $f_{0\beta}'' \perp x$; $p_{0\beta}''' \perp y$; φ_2 – угол наклона плоскости β к π_2
Фронтально проецирующая, $\gamma \perp \pi_2$				$D'E'F''$ – прямая линия; $h_{0\gamma}' \perp x$; $p_{0\gamma}''' \perp z$; φ_1 – угол наклона плоскости γ к π_1
Профильно проецирующая, $\delta \perp \pi_3$				$K'''L'''M'''$ – прямая линия; $h_{0\delta}' \parallel x$; $f_{0\delta}'' \parallel x$; φ_1 – угол наклона плоскости δ к π_1 , $\varphi_2 = 90^\circ - \varphi_1$

Плоскости, перпендикулярные к двум плоскостям проекций, называются *плоскостями уровня*.

Плоскости уровня, являясь проецирующими, одновременно параллельны одной из плоскостей проекций.

К ним относятся:

1) *горизонтальная плоскость* – параллельная плоскости проекций π_1 и перпендикулярная плоскостям π_2 и π_3 ;

2) *фронтальная плоскость* – параллельная плоскости π_2 и перпендикулярная плоскостям π_1 и π_3 ;

3) *профильная плоскость* – параллельная плоскости π_3 и перпендикулярная плоскостям π_1 и π_2 .

Характерные особенности расположения проекций плоскостей уровня приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Плоскости уровня

Наименование плоскости	Наглядное изображение	Плоскость задана:		Особенности проекции плоскости
		плоской фигурой	следами	
Горизонтальная, $\alpha \parallel \pi_1$				α'' и $\alpha''' \perp z$; плоскость имеет две вырожденные проекции – фронтальную и профильную
Фронтальная, $\beta \parallel \pi_2$				$\beta' \parallel x$, $\beta''' \parallel z$; плоскость имеет две вырожденные проекции – горизонтальную и профильную
Профильная, $\gamma \parallel \pi_3$				γ' и $\gamma'' \perp x$; плоскость имеет две вырожденные проекции – горизонтальную и фронтальную

Плоскости частного положения (проецирующие плоскости и плоскости уровня) обладают *собирательным свойством*: все геометрические образы, принадлежащие плоскости, проецируются на плоскость проекций, которой заданная плоскость перпендикулярна, в линию, называемую *следом-проекцией*.

Например, если точка C расположена в профильно проецирующей плоскости δ , то ее профильная проекция находится на профильном следе – проекции δ''' (рис. 3.5).

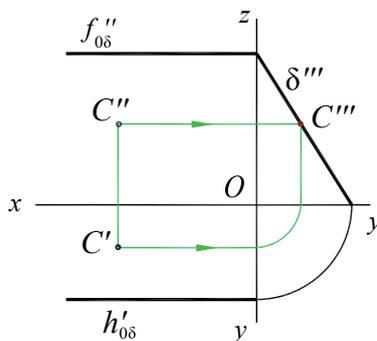


Рис. 3.5

Плоскости частного положения находят широкое применение в качестве вспомогательных элементов при решении различных задач начертательной геометрии, а также используются в техническом черчении при построении разрезов и сечений на чертежах.

3.3. Прямая и точка в плоскости

К числу основных задач, решаемых на плоскости, относят: проведение прямой в плоскости, построение недостающей проекции точки, проверка принадлежности точки плоскости.

Решение этих задач основано на известных положениях геометрии:

1. *Прямая принадлежит плоскости, если две ее точки принадлежат этой плоскости.*

Например, плоскость задана параллельными прямыми AB и CD (рис. 3.6). Требуется построить горизонтальную проекцию $E'F'$ прямой EF , лежащей в этой плоскости, если известна ее фронтальная проекция $E''F''$.

Прямые AB , CD , EF лежат в одной плоскости, поэтому точки E и F являются точками пересечения соответственно прямых AB и EF , CD и EF . По линиям связи определяем горизонтальные проекции точек F и E . Через проекции точки E' и F' проводим горизонтальную проекцию прямой.

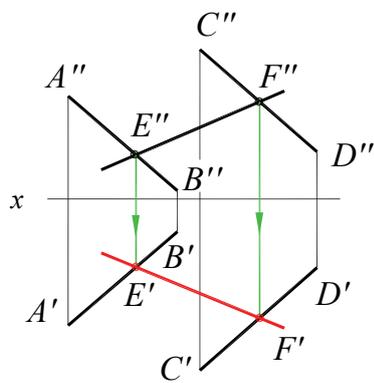


Рис. 3.6

2. *Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через точку этой плоскости параллельно какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости.*

Например, плоскость задана треугольником ABC (рис. 3.7). Требуется построить прямую, лежащую в плоскости ABC и проходящую через точку C . Через точку C проводим прямую CD , параллельную AB ($C'D' \parallel A'B'$, $C''D'' \parallel A''B''$).

Следует отметить, что через точку C в плоскости треугольника можно провести множество прямых.

3. *Если плоскость задана на чертеже следами, то прямая принадлежит плоскости, если следы прямой лежат на одноименных следах плоскости или если она параллельна одному из следов плоскости, а с другим имеет общую точку.*

Например, прямая MN принадлежит плоскости α (рис. 3.8), поэтому горизонтальный след M' прямой лежит на горизонтальном следе $h_{0\alpha}'$ плоскости α , а фронтальный след N'' прямой – на фронтальном следе $f_{0\alpha}''$ плоскости α .

Из вышеизложенного вытекает, что для определения следов плоскости достаточно найти следы прямых, определяющих данную плоскость. Через одноименные следы прямых пройдут соответствующие следы плоскости.

Например, необходимо построить следы плоскости, заданной треугольником ABC (рис. 3.9).

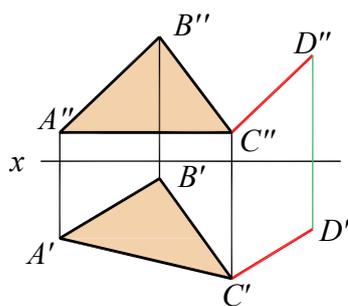


Рис. 3.7

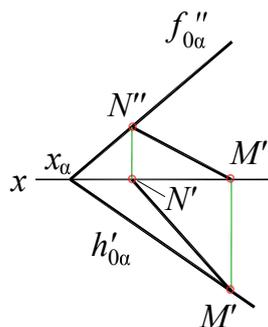


Рис. 3.8

Определим горизонтальный след прямой AB . Для этого продолжаем фронтальную проекцию $A''B''$ до пересечения с осью x и находим фронтальную проекцию M'' горизонтального следа. В пересечении линии связи и продленной проекции $A'B'$ находим точку M' – горизонтальную проекцию горизонтального следа, который совпадает с горизонтальным следом M прямой AB . Аналогично находим точку M_1' – горизонтальную проекцию горизонтального следа прямой BC . Соединив полученные точки M' и M_1' , проводим горизонтальный след $h_{0\alpha}'$.

В пересечении $h_{0\alpha}'$ с осью x получим точку схода следов x_α . Затем определим фронтальный след отрезка AB – точку $N'' \equiv N$. Соединив точку N'' с точкой x_α , получим фронтальный след $f_{0\alpha}''$ плоскости треугольника ABC .

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, принадлежащей плоскости. Например, необходимо определить фронтальную проекцию точки D , принадлежащей плоскости, заданной треугольником ABC (рис. 3.10). Через точку D' проведем горизонтальную проекцию прямой $A'1'$ и построим $A''1''$. Проекции точки принадлежат одноименным проекциям прямой $A1$. По линии связи находим фронтальную проекцию D'' точки D .

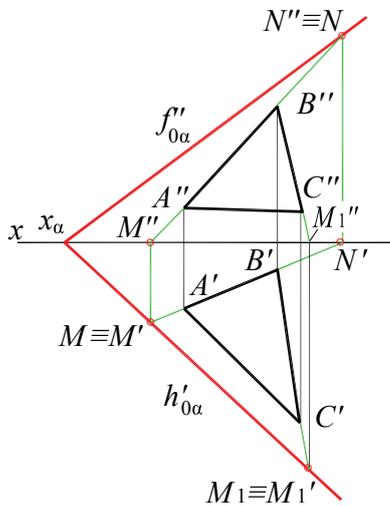


Рис. 3.9

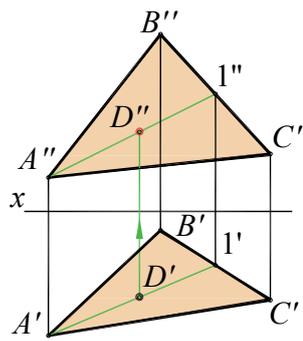


Рис. 3.10

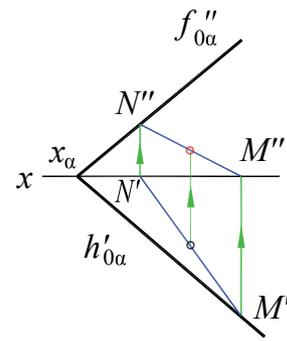


Рис. 3.11

На рис. 3.11 показано построение недостающей фронтальной проекции точки, принадлежащей плоскости α , заданной следами. Через заданную проекцию A' проводим произвольную прямую общего положения, которая пересекает ось x в точке N' , а след $h_{0\alpha}'$ – в точке M' . Из условия принадлежности прямой MN плоскости α находим фронтальную проекцию $M''N''$, на которой находится фронтальная проекция A'' .

3.4. Прямые особого положения в плоскости

К числу прямых, занимающих особое положение в плоскости, относятся *горизонтали*, *фронтоли*, *профильные линии* и *линии наибольшего наклона*. Прямая, принадлежащая данной плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций π_1 , называется *горизонталью* плоскости. Фронтальная проекция горизонтали параллельна оси x .

Для построения проекций горизонтали плоскости треугольника ABC (рис. 3.12) проводим через фронтальную проекцию вершины C фронтальную проекцию горизонтали $C''D'' \parallel Ox$, а затем по линиям связи строим ее горизонтальную проекцию $C'D'$. Горизонтальный след плоскости является одной из ее горизонталей (нулевая горизонталь). Фронтальная проекция горизонтали параллельна оси x .

Если плоскость задана следами (рис. 3.13), то построение горизонтали можно начинать как с фронтальной проекции, параллельной оси x , так и с горизонтальной, которая параллельна горизонтальному следу плоскости.

При построении горизонтали плоскости α (рис. 3.13) учтено, что следы прямых, лежащих в плоскости, расположены на одноименных следах плоскости. Поэтому, проведя горизонтальную проекцию горизонтали $h' \parallel h_{0\alpha}'$, определяем горизонтальную проекцию N' , а затем фронтальную проекцию $N'' \equiv N$ фронтального следа горизонтали. Фронтальная проекция $h'' \parallel x$.

Прямая, принадлежащая данной плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций π_2 , называется *фронталью плоскости*. Горизонтальная проекция фронтали параллельна оси x .

На рис. 3.14 построение фронтали плоскости треугольника ABC начато с ее горизонтальной проекции $A'K' \parallel x$, а затем построена ее фронтальная проекция $A''K''$.

При задании плоскости следами построение фронтали можно начинать как с горизонтальной проекции, параллельной оси x , так и с фронтальной, которая параллельна фронтальному следу плоскости.

На рис. 3.15 показано построение фронтали f плоскости β . Вначале проведена ее горизонтальная проекция $f' \parallel x$, а затем построена фронтальная проекция f'' , которая проходит через точку M'' – фронтальную проекцию горизонтального следа фронтали.

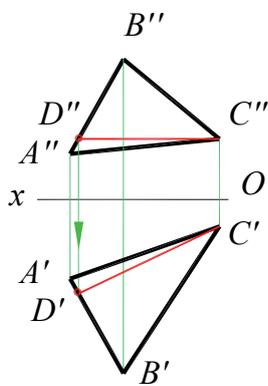


Рис. 3.12

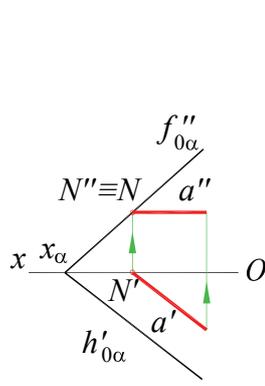


Рис. 3.13

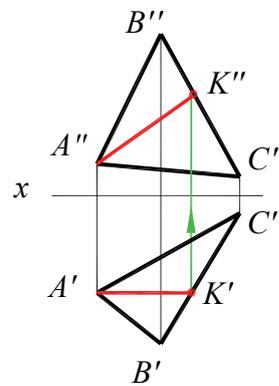


Рис. 3.14

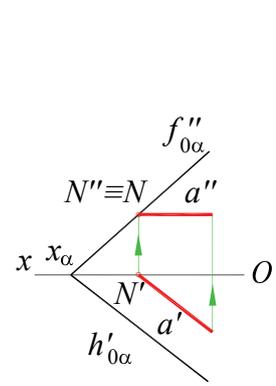


Рис. 3.15

Профильной прямой плоскости называется прямая, принадлежащая данной плоскости и параллельная профильной плоскости проекций π_3 .

На рис. 3.16 представлено построение профильной прямой BD плоскости треугольника ABC . Горизонтальная проекция $B'D' \parallel Oy$, фронтальная $B''D'' \parallel Oz$. Профильная проекция $B'''D'''$ находится с помощью линий связи.

Прямая, принадлежащая данной плоскости и перпендикулярная к ее линиям особого положения, называется *линией наибольшего наклона плоскости*.

В плоскости различают линии наибольшего наклона:

- относительно горизонтальной плоскости проекций π_1 ;
- относительно фронтальной плоскости проекций π_2 ;
- относительно профильной плоскости проекций π_3 .

Линия наибольшего наклона к плоскости π_1 называется *линией ската плоскости*.

Если плоскость задана треугольником ABC (рис. 3.17), линия наибольшего наклона этой плоскости относительно плоскости π_1 (линия ската) определяется при помощи вспомогательной горизонтали CE , проведенной через точку C этого треугольника. Горизонтальную проекцию $B'D'$ линии наибольшего наклона проводим через B' перпендикулярно к горизонтальной проекции горизонтали ($B'D' \perp C'E'$), а фронтальную проекцию – через проекцию B'' и проекцию D'' , построенную по точке D' с помощью линии связи.

Если плоскость задана следами (рис. 3.18), горизонтальная проекция линии наибольшего наклона к π_1 перпендикулярна горизонтальному следу плоскости ($M'N' \perp h_{0\alpha}'$).

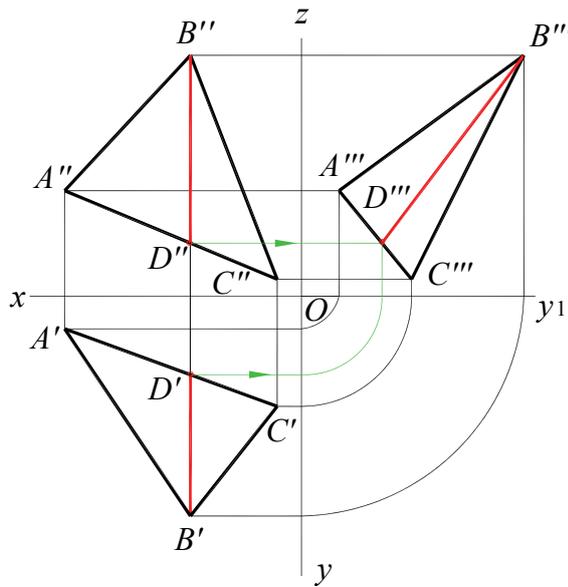


Рис. 3.16

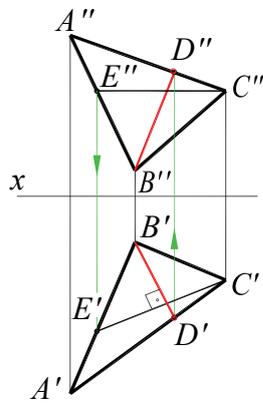


Рис. 3.17

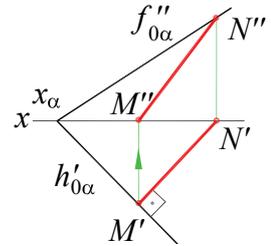


Рис. 3.18

Линия ската может служить для определения угла наклона плоскости к плоскости проекций π_1 . Аналогично линии наибольшего наклона к плоскостям π_2 и π_3 служат для определения углов между этой плоскостью и плоскостями проекций π_2 и π_3 .

3.5. Примеры решения задач

Задача 1. Плоскость задана двумя пересекающимися прямыми AB и CD . Определить, лежит ли прямая MN в этой плоскости (рис. 3.19).

Решение. Обозначим точки пересечения фронтальных проекций прямых AB и MN через K'' и прямых CD и MN через L'' . Построим их горизонтальные проекции – точки K' и L' на горизонтальной проекции прямой $M'N'$. Из построений видно, что точки K ($K'K''$) и L ($L'L''$), принадлежащие прямой MN , не лежат в плоскости пересекающихся прямых AB и CD . Значит, прямая MN не лежит в заданной плоскости.

Задача 2. Построить фронтальную проекцию отрезка прямой MN , принадлежащую плоскости, заданной двумя параллельными прямыми AB и CD (рис. 3.20).

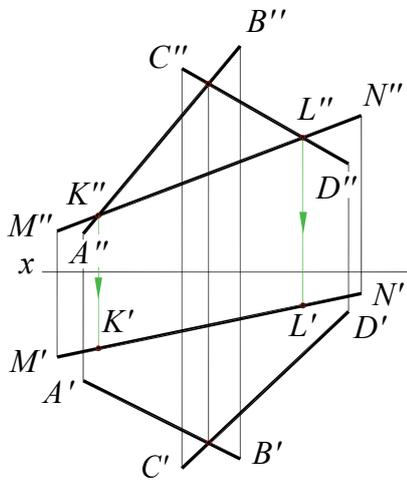


Рис. 3.19

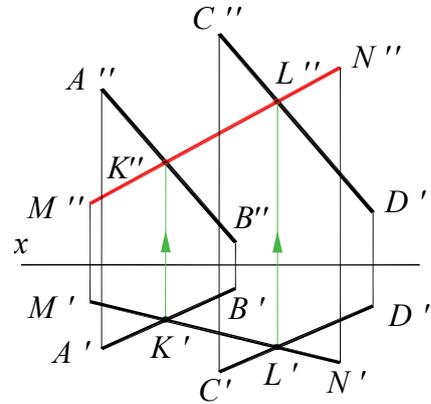


Рис. 3.20

Решение. Обозначим горизонтальные проекции точек пересечения прямой MN с прямыми AB и CD соответственно K' и L' . По линиям связи определяем их фронтальные проекции K'' и L'' и проводим искомую проекцию $M''N''$.

Задача 3. Построить следы плоскости α , заданной двумя пересекающимися прямыми AB и CD (рис. 3.21).

Решение. Находим горизонтальные следы $M (M' M'')$ и $M_1 (M'_1 M''_1)$ прямых AB и CD . Проводим горизонтальный след $h'_{0\alpha}$ плоскости α через точки M' и M'_1 до пересечения с осью x и находим точку схода следов x_α . Затем находим фронтальный след $N (N' N'')$ прямой AB . Соединив точки N'' и x_α , находим фронтальный след $f''_{0\alpha}$ плоскости α . Фронтальный след $f''_{0\alpha}$ можно также провести через $x_\alpha \parallel C''D''$, так как прямая CD является фронталью плоскости.

Задача 4. В плоскости, заданной прямой AB и точкой C , провести горизонталь на расстоянии 15 мм от горизонтальной плоскости проекций π_1 (рис. 3.22).

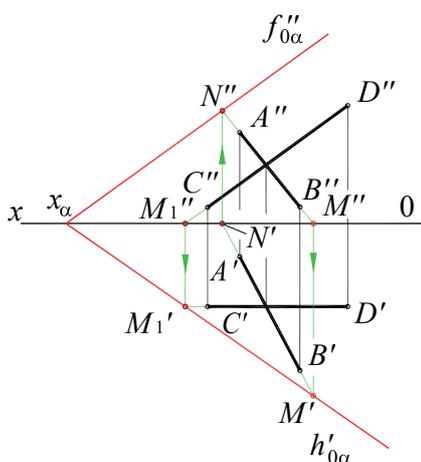


Рис. 3.21

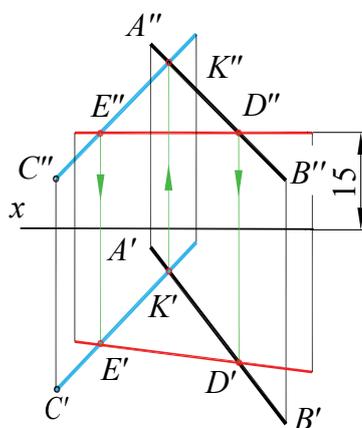


Рис. 3.22

Решение. Зададим исходную плоскость двумя пересекающимися прямыми. Для этого из точки C проведем прямую $CK (C'K', C''K'')$, пересекающую прямую AB в точке $K (K', K'')$. Затем на расстоянии 15 мм от оси x проводим фронтальную проекцию горизонтали $ED (E''D'' \parallel x)$, которая пересекает в точках D'' и E'' проекции $A''B''$ и $C''D''$. По линиям связи определяем горизонтальные проекции точек D и E и через них проводим горизонтальную проекцию $E'D'$ горизонтали.

Вопросы для контроля

1. Как можно задать плоскость на чертеже?
2. Что такое следы плоскости?
3. Какая плоскость называется плоскостью общего положения?
4. Какая плоскость называется проецирующей?
5. Какая плоскость называется плоскостью уровня?
6. Как построить точку в плоскости общего положения?
7. Как проверить, принадлежит ли точка плоскости?
8. Какие линии в плоскости называются горизонталями, фронталями и профильными прямыми?
9. Что называется линией наибольшего наклона плоскости к плоскости проекций?

Глава 4. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ, ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

Задачи, связанные с определением взаимного расположения геометрических элементов (прямых и плоскостей), называются позиционными. Обычно в этих задачах определяется взаимная принадлежность элементов или строится линия (точка) взаимного пересечения.

Задачи на взаимное положение прямой и плоскости, двух плоскостей решаются на основании геометрических признаков: параллельности прямой и плоскости, параллельности двух плоскостей, принадлежности прямой и плоскости, перпендикулярности прямой и плоскости, перпендикулярности двух плоскостей.

4.1. Параллельность прямой и плоскости

Прямая, не лежащая в плоскости, может быть параллельна плоскости или пересекаться с ней.

При решении вопроса о параллельности прямой и плоскости опираются на известное положение: прямая параллельна плоскости, если она параллельна одной из прямых, лежащих в этой плоскости.

Через точку можно провести множество прямых, параллельных плоскости. Для получения единственного решения накладывают дополнительные условия.

Пример 1. Через точку D провести горизонтальную прямую, параллельную плоскости треугольника ABC (рис. 4.1)

Построение следует начинать с построения в плоскости треугольника ABC произвольной горизонтали h . Для сокращения построений горизонталь h ($B1$) проводим через вершину B . Затем через точку D проводим прямую h_1 , параллельную h .

При определении параллельности прямой и плоскости выявляем наличие в плоскости прямой, параллельной заданной.

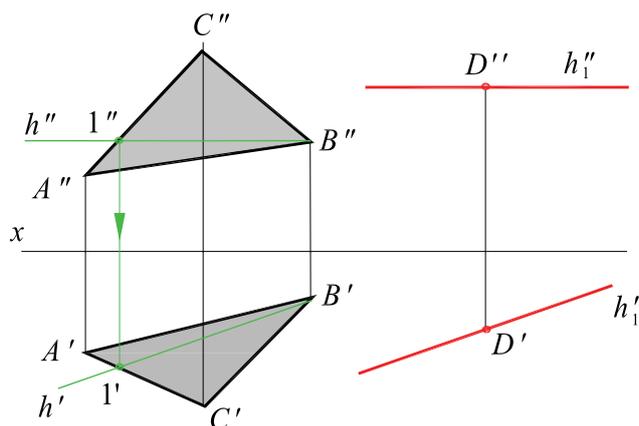


Рис. 4.1

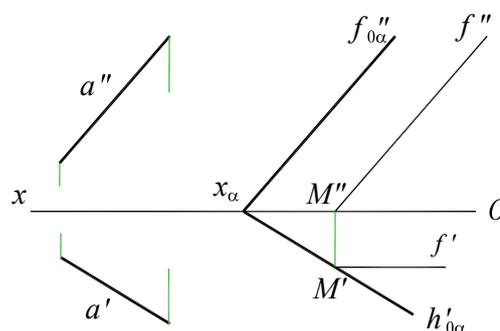


Рис. 4.2

Пример 2. Определить, параллельна ли прямая a плоскости α (рис. 4.2).

В плоскости α , заданной следами, проводим проекцию прямой, параллельную соответствующей проекции заданной прямой a . Такой является проекция $f'' \parallel a''$. Так как f'' параллельна $f_{0\alpha}''$, то горизонтальная проекция f' параллельна оси x . Так как $f' \parallel a'$, то делаем вывод: прямая a не параллельна плоскости α .

4.2. Параллельность двух плоскостей

Две плоскости параллельны в том случае, если две пересекающиеся прямые, принадлежащие одной плоскости, параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. Так, на рис. 4.3 плоскость треугольника ABC параллельна плоскости двух пересекающихся прямых a и b , проходящих через точку D , так как две стороны AB и AC соответственно параллельны прямым a и b .

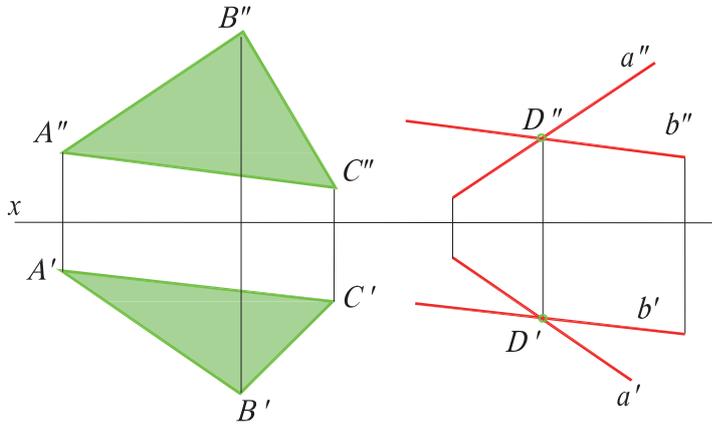


Рис. 4.3

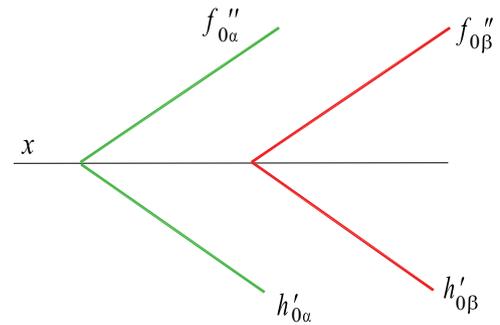


Рис. 4.4

Как следствие из этого определения вытекает: у параллельных плоскостей одноименные следы параллельны (рис. 4.4)

Пример. Через точку A провести плоскость, параллельную плоскости параллельных прямых m и l (рис. 4.5).

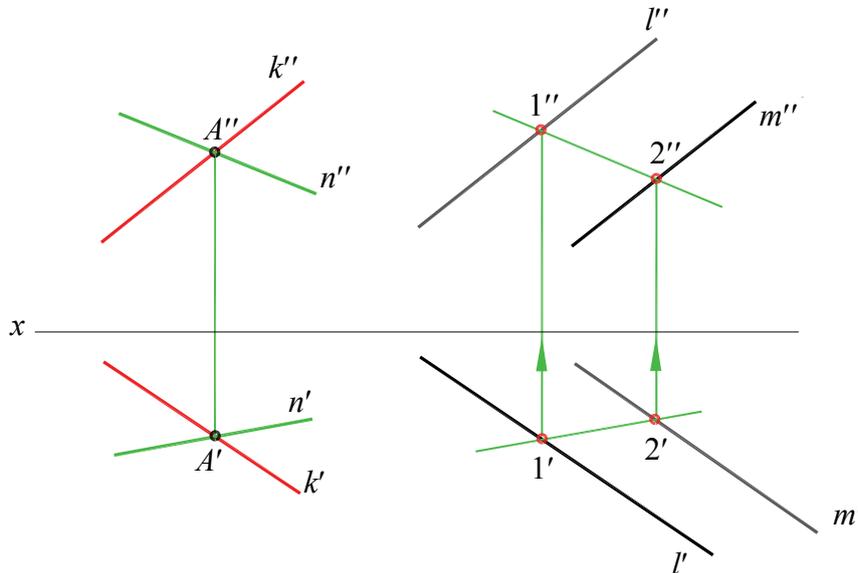


Рис. 4.5

Через точку A проводим прямую k , параллельную прямым l и m , задающим плоскость. Для того чтобы получить вторую прямую, проводим в плоскости произвольную вспомогательную прямую 1–2. Затем проводим через точку A прямую n , параллельную прямой 1–2. Прямые k и n образуют пересекающиеся прямые, которые параллельны двум пересекающимся прямым заданной плоскости.

4.3. Пересечение прямой линии с плоскостью частного положения

Так как плоскости частного положения проецируются на перпендикулярную к ней плоскость проекций в виде прямой линии (следа-проекции), то на этой прямой должна находиться соответствующая проекция точки пересечения прямой с проецирующей плоскостью. Примеры определения точек пересечения прямой с плоскостью частного положения даны на рис. 4.6.

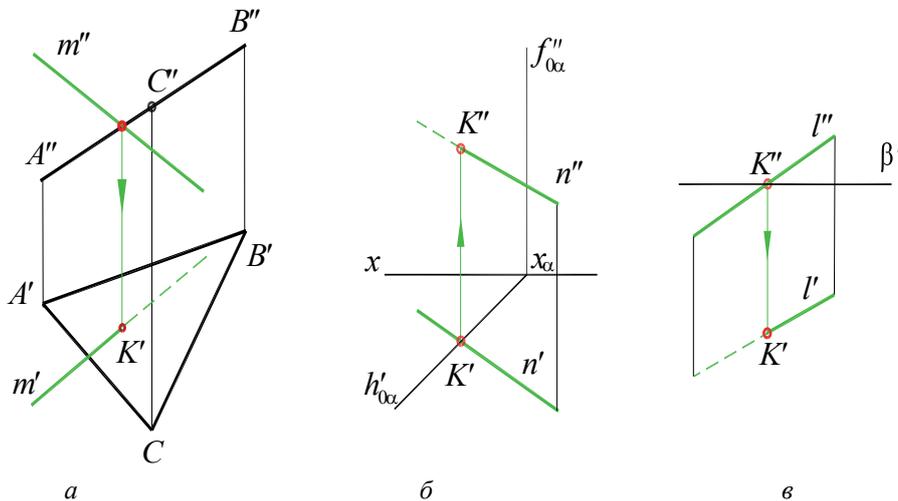


Рис. 4.6

На рис. 4.6, а прямая m общего положения пересекается с фронтально проецирующей плоскостью, заданной треугольником ABC . Фронтальная проекция K'' точки пересечения находится в точке пересечения фронтальной проекции m'' прямой со следом-проекцией $A''B''C''$. Горизонтальная проекция K' построена при помощи линий связи.

На рис. 4.6, б показано построение точки пересечения прямой n общего положения с горизонтально проецирующей плоскостью α , заданной следами. На этот раз сначала отмечается горизонтальная проекция K' точки пересечения горизонтальной проекции n' прямой со следом-проекцией α' плоскости. Фронтальная проекция K'' находится при помощи линии связи.

На рис. 4.6, в прямая l общего положения пересекается с горизонтальной плоскостью β , заданной следом-проекцией β'' . В этом случае фронтальная проекция K'' точки пересечения определена в пересечении фронтальной проекции l'' прямой со следом-проекцией β'' . Горизонтальная проекция K' построена при помощи линии связи.

Во всех случаях плоскость считается «непрозрачной»: та часть прямой, которая закрывается плоскостью, показывается штриховой линией. Часть прямой, расположенная под плоскостью или за плоскостью, очевидна из чертежей.

4.4. Пересечение двух плоскостей

Линией пересечения двух плоскостей является прямая, для построения которой достаточно определить две точки, общие обеим плоскостям, либо одну точку и направление линии пересечения плоскостей.

Из рис. 4.7 видно, что прямая MN , по которой пересекаются между собой две плоскости, проходит через точки M и N , в которых прямые AB и AC плоскости треугольника пересекают вторую плоскость, т. е. точки M и N принадлежат обеим плоскостям.

Для нахождения точек пересечения обычно приходится выполнять определенные построения. Но если хотя бы одна из пересекающихся плоскостей перпендикулярна к плоскости проекций, то построение проекций линии пересечения упрощается.

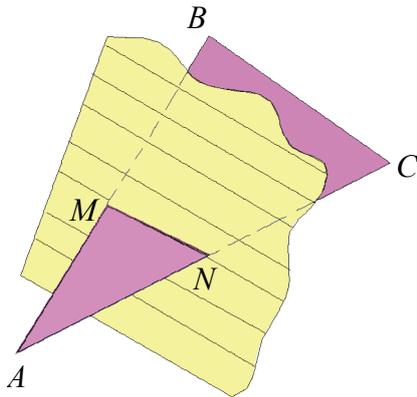


Рис. 4.7

На рис. 4.8 приведено построение линии пересечения плоскости общего положения, заданной треугольником ABC и фронтально проецирующей плоскости треугольника DEF .

Общими точками для этих двух плоскостей будут точки пересечения K_1 и K_2 сторон AB и AC треугольника ABC с «вырожденной» проекцией треугольника DEF . Фронтальная проекция $K_1''K_2''$ линии пересечения совпадает со следом-проекцией $D''E''F''$ треугольника DEF . Горизонтальные проекции K_1' и K_2' построим при помощи линий связи.

При рассмотрении фронтальных проекций пересекающихся треугольников заметно, что часть $K_1''K_2''C''B''$ треугольника ABC расположена над следом-проекцией $D''E''F''$

и на горизонтальной проекции будет видна («накрывает» плоскость треугольника DEF). Часть K_1'' и $K_2''A''$ располагается под $D''E''F''$ и «накрывается» плоскостью треугольника DEF .

На рис. 4.9 плоскость общего положения, заданная треугольником ABC , пересекается горизонтально проецирующей плоскостью α , заданной следами.

Горизонтальная проекция $M'N'$ линии пересечения совпадает со следом-проекцией α' , а фронтальная $M''N''$ определяется с помощью линий связи.

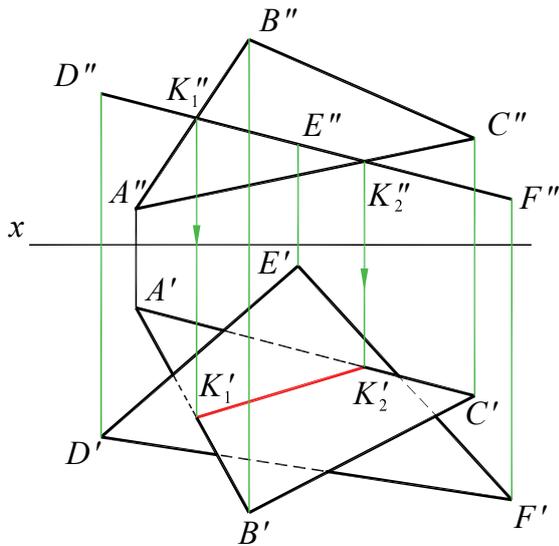


Рис. 4.8

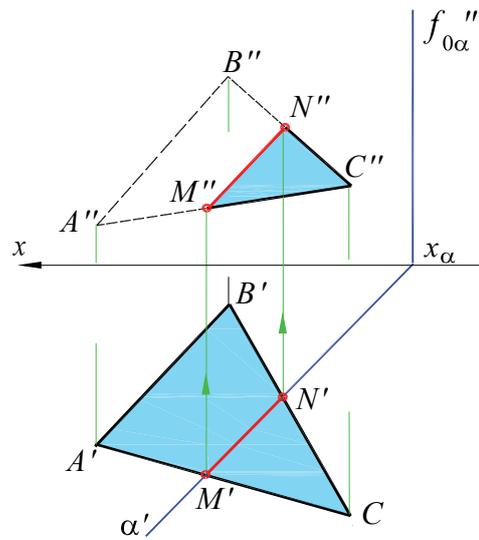


Рис. 4.9

Часть $MNAB$ треугольника ABC , расположенная за плоскостью α , невидима и изображена штриховыми линиями.

Рассмотрим общий случай построения линии пересечения двух плоскостей. Пусть в пространстве (рис. 4.10, a) заданы две плоскости общего положения α и β , плоскость α – двумя пересекающимися прямыми a и b , плоскость β – двумя параллельными прямыми c и d . Для построения линии их пересечения необходимо, как отмечалось выше, найти две точки, общие обеим плоскостям. Для определения этих точек заданные плоскости пересекают двумя вспомогательными плоскостями (посредниками). В качестве таких посредников целесообразно использовать плоскости частного положения (проецирующие или уровня). В данном случае использованы горизонтальные плоскости γ_1 и γ_2 . Плоскость γ_1 пересекает

плоскости α и β по горизонталям 1–2 и 3–4 соответственно. Эти горизонтали, пересекаясь, определяют точку M , общую для плоскостей α и β . Вторая вспомогательная плоскость γ_2 пересекает заданные плоскости по горизонталям 5–6 и 7–8, которые, пересекаясь, определяют вторую общую точку N . Прямая MN – искомая линия пересечения плоскостей α и β .

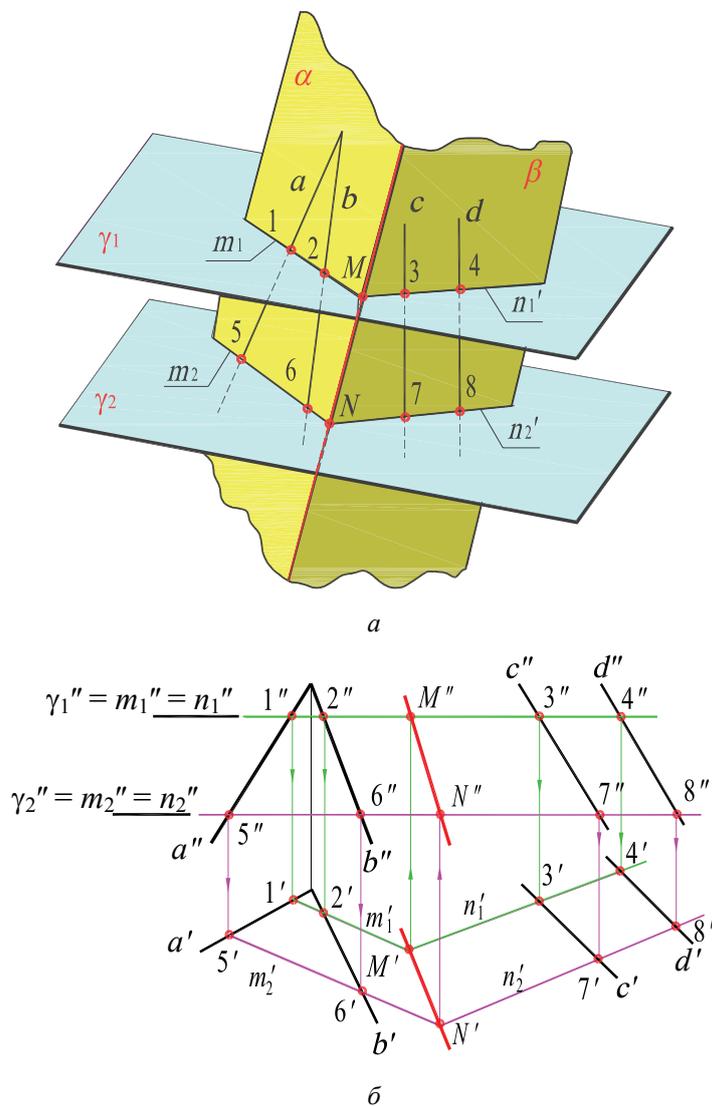


Рис. 4.10

На рис. 4.10, б описанный метод применен для проекционного решения рассмотренной выше задачи.

Если плоскости заданы следами, то две точки, общие для двух плоскостей, определяются в пересечении одноименных следов этих плоскостей.

На рис. 4.11, а представлено построение линии пересечения плоскостей α и β общего положения. Горизонтальная проекция M' одной общей точки M находится в пересечении горизонтальных следов плоскостей, а фронтальная N'' другой общей точки N – в пересечении фронтальных следов. Недостающие проекции M'' и N' точек M и N определяются на оси x при помощи линии связи. Соединив одноименные проекции точек M и N , построим проекции линии пересечения MN заданных плоскостей.

На рис. 4.11, б дано наглядное изображение представленной выше задачи.

Линия пересечения двух плоскостей, заданных следами, может быть определена и одной точкой, если известно ее направление.

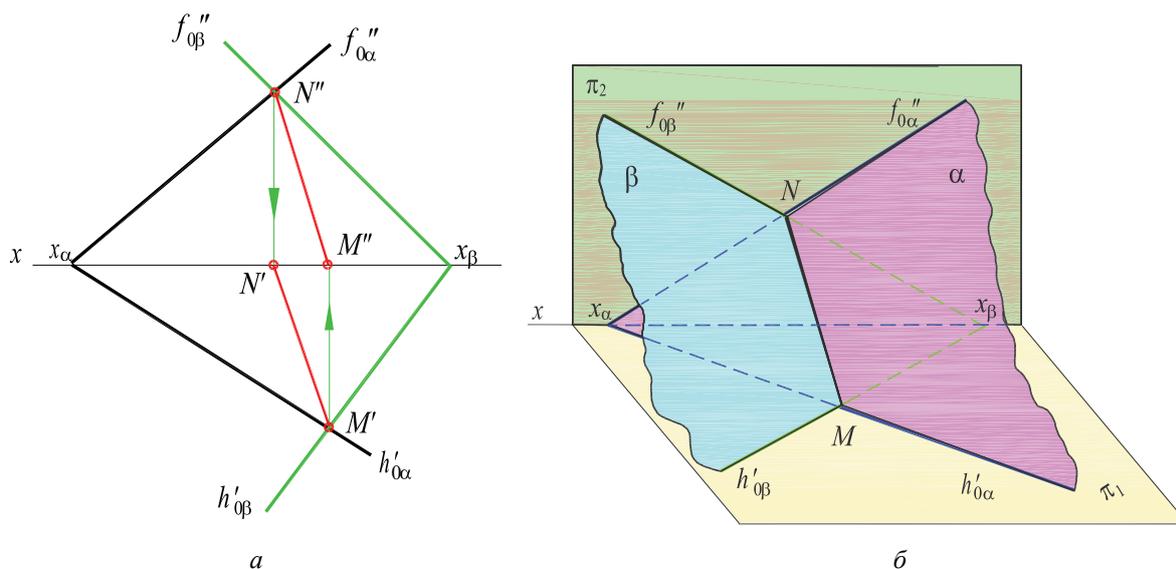


Рис. 4.11

На рис. 4.12, *a* плоскость общего положения α пересекается с горизонтальной плоскостью β (β''). Линия пересечения этих плоскостей – горизонталь. Ее фронтальная проекция h'' совпадает с фронтальным следом-проекцией β'' , а горизонтальная h' параллельна горизонтальному следу $h'_{0\alpha}$ плоскости α . Проекции линии пересечения проходят через общую точку N (N' , N'') для обеих плоскостей.

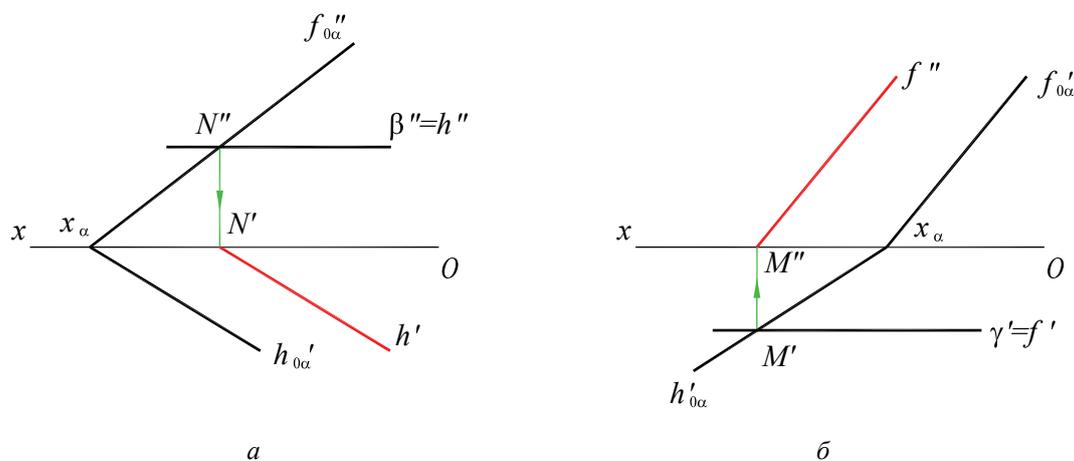


Рис. 4.12

На рис. 4.12, *б* плоскость общего положения α пересекается с фронтальной плоскостью γ (γ'). Линия пересечения этих плоскостей – фронталь f . Ее горизонтальная проекция f' совпадает с горизонтальным следом-проекцией γ' , а фронтальная f'' параллельна фронтальному следу $f'_{0\alpha}$ плоскости α . Проекции линии пересечения проходят через общую точку M (M' , M'') для обеих плоскостей.

При пересечении плоскостей общего положения с параллельными следами линией пересечения является прямая уровня, проходящая через точку пересечения непараллельных следов.

На рис. 4.13, *a* даны плоскости общего положения α и β с параллельными горизонтальными следами. Линия пересечения этих плоскостей – горизонталь h (h' , h''), проходящая через общую точку N (N' , N'') и параллельная горизонтальным следам плоскостей.

На рис. 4.13, б плоскости общего положения α и β пересекаются с параллельными фронтальными следами по фронтали f (f' , f''), проходящей через общую точку M (M' , M'') и параллельной фронтальным следам плоскостей.

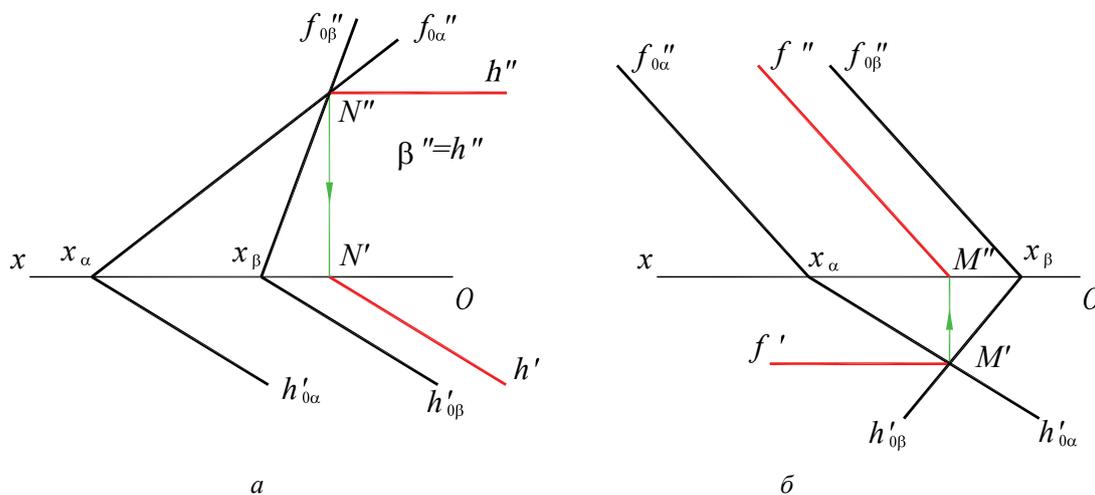


Рис. 4.13

Чтобы определить линию пересечения плоскостей, заданных следами, когда пересечение горизонтальных или фронтальных (или и тех, и других) следов этих плоскостей недоступно в пределах чертежа, приходится находить промежуточные точки линии пересечения. Для этого вводятся вспомогательные плоскости (обычно плоскости уровня как дающие наиболее простое построение линии пересечения с обеими заданными плоскостями).

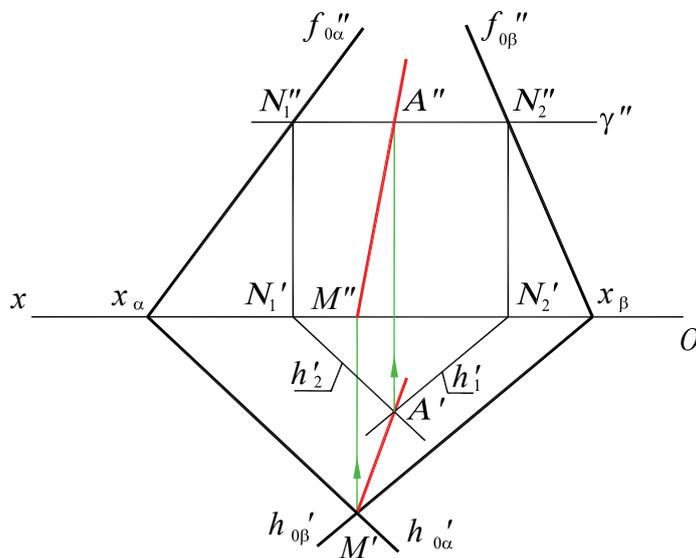


Рис. 4.14

На рис. 4.14 даны две плоскости α и β общего положения. Горизонтальные следы этих плоскостей пересекаются в точке M (M' , M''). Так как точка пересечения фронтальных следов недоступна, то для определения промежуточной точки A (A' , A'') линии пересечения вводится вспомогательная горизонтальная плоскость γ (γ'). Она пересекается с плоскостями α и β по горизонталям h_1 и h_2 , имеющим общую точку A . Линия MA ($M'A'$, $M''A''$) – искомая линия пересечения плоскостей α и β .

4.5. Пересечение прямой с плоскостью общего положения

Для определения точки пересечения прямой с плоскостью общего положения следует выполнить следующие этапы:

- через прямую провести вспомогательную плоскость (чаще всего проецирующую или уровня);
- определить линию пересечения вспомогательной плоскости с заданной;
- найти точку пересечения заданной прямой и построенной;
- определить видимые части проекций данной прямой (плоскость считается непрозрачной).

На рис. 4.15, *a* приведено построение точки пересечения прямой m (m' , m'') общего положения с плоскостью общего положения, заданной треугольником ABC ($A'B'C'$, $A''B''C''$).

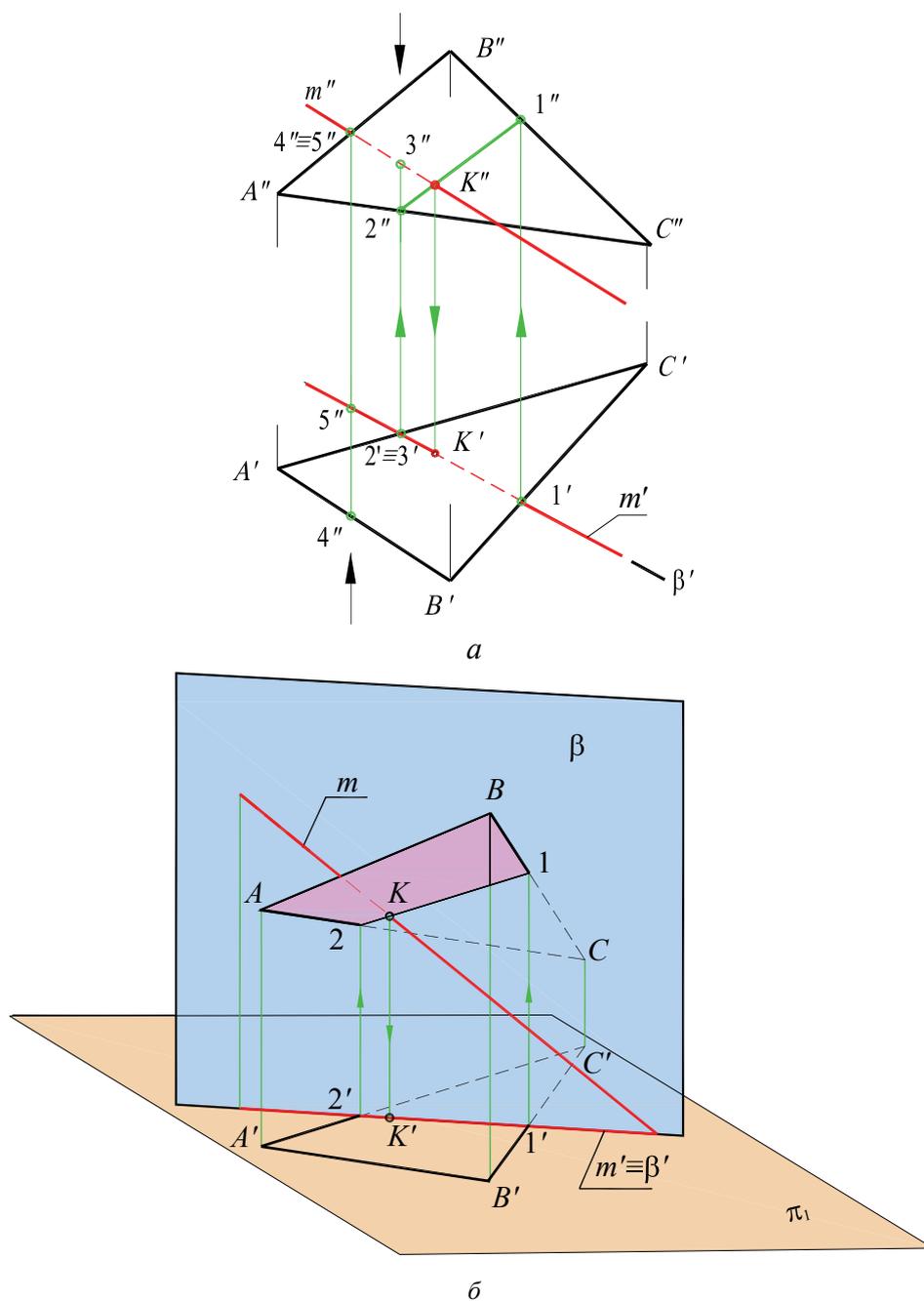


Рис. 4.15

Через прямую m проведена вспомогательная горизонтально проецирующая плоскость β (β'). По горизонтальным проекциям $1'$ и $2'$ точек 1 и 2 находим фронтальные $1''$ и $2''$, соединяя которые получаем фронтальную проекцию линии пересечения $1''2''$. Проекция $1''2''$ пересекает фронтальную проекцию m'' в точке K'' ; с помощью линии связи строим горизонтальную проекцию K' точки K . Видимость прямой и плоскости на горизонтальной плоскости проекций определяется с помощью горизонтально конкурирующих точек 2 и 3. Точка 2 лежит на стороне AC , а 3 – на прямой m . Их фронтальные проекции $2''$ и $3''$ показывают, что точка 2 находится ниже точки 3, и поэтому на горизонтальной плоскости проекций горизонтальная проекция $2'$ точки 2 будет закрыта проекцией $3'$ точки 3.

Отсюда следует, что проекция $A'C'$ стороны AC расположена ниже проекции m' и участок этой прямой с левой стороны до K' будет видимым.

Относительную видимость на фронтальной плоскости проекций можно определить с помощью фронтально-конкурирующих точек 4 и 5. Как показывают горизонтальные проекции $4'$ и $5'$ этих точек, точка 4 расположена ближе к наблюдателю, чем точка 5, но поскольку последняя принадлежит прямой m , то участок ее фронтальной проекции $K''5''$ невидим.

На рис. 4.15, б дано наглядное изображение приведенной выше задачи.

На рис. 4.16 показан пример построения точки пересечения прямой AB общего положения с плоскостью общего положения α , заданной следами.

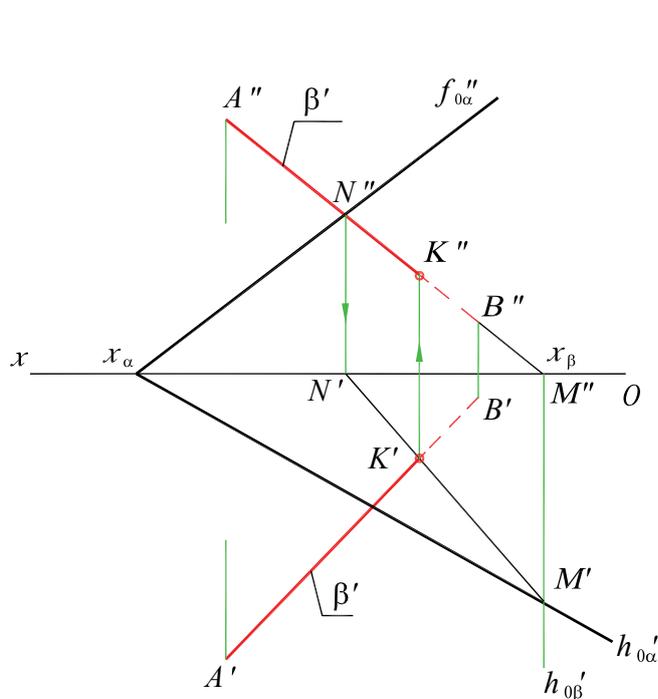


Рис. 4.16

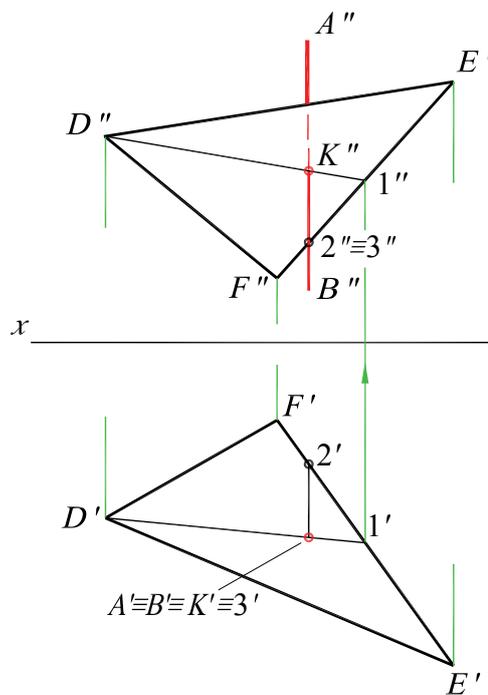


Рис. 4.17

В этом случае через прямую AB проведена фронтально проецирующая плоскость β . На фронтальной плоскости проекций линия пересечения плоскостей MN совпадает с горизонтальным следом-проекцией β' этой плоскости. Построив горизонтальную проекцию прямой $M'N'$, находим горизонтальную проекцию точки пересечения ее с прямой AB – точку K' , после чего по линии связи находим фронтальную проекцию K'' точки K . В завершении определяем видимость участков проекций прямой AB .

На рис. 4.17 изображена горизонтально проецирующая прямая AB , пересекающаяся с плоскостью общего положения, заданной треугольником DEF . Положение горизонтальной проекции K' точки пересечения K известно ($K' = A' = B'$), а положение фронтальной проекции определено при помощи прямой $D1$ треугольника DEF . Видимость фронтальной

проекция прямой AB определим, рассматривая горизонтальные проекции $2'$ и $3'$ конкурирующих точек 2 и 3 , принадлежащих EF и AB соответственно.

4.6. Перпендикулярность прямой и плоскости

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.

Перпендикуляр к плоскости перпендикулярен к любой прямой, проведенной в этой плоскости. Но прямой угол между перпендикуляром и прямой проецируется на плоскость в виде прямой лишь в том случае, если прямая параллельна плоскости. Поэтому, чтобы построить проекции перпендикуляра, используют лежащие в плоскости две прямые линии, параллельные плоскостям проекций. Итак, у перпендикуляра к плоскости его горизонтальная проекция перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали, фронтальная проекция перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали, профильная проекция перпендикулярна к профильной проекции профильной прямой этой плоскости.

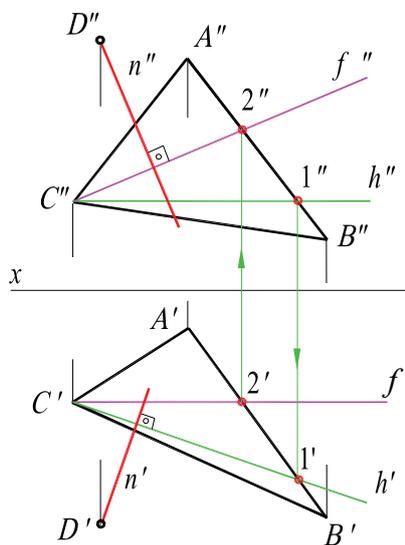


Рис. 4.18

На рис. 4.18 показано построение проекций перпендикуляра, проведенного через точку D перпендикулярно плоскости треугольника ABC . Направление проекций перпендикуляра определяется горизонталью h ($C1$) и фронталью f ($C2$) плоскости треугольника.

Так, горизонтальная проекция n' перпендикуляра проведена под прямым углом к проекции $C'1'$ горизонтали, а фронтальная проекция n'' расположена под прямым углом к фронтальной проекции $C''2''$ фронтали.

Очевидно, когда плоскость задана следами, то проекции перпендикуляра перпендикулярны одноименным следам плоскости.

На рис. 4.19 рассмотрен пример построения перпендикуляра, проведенного через точку A , к плоскости α , заданной следами, и показано построение точки K , в которой перпендикуляр пересекает плоскость α .

Горизонтальная проекция n' перпендикуляра проходит под прямым углом к горизонтальному следу $h'_{0\alpha}$ плоскости, а фронтальная – перпендикулярна фронтальному следу $f'_{0\alpha}$.

Точка K пересечения перпендикуляра n с плоскостью определена с помощью горизонтально проецирующей плоскости β , проведенной через перпендикуляр. MN – линия пересечения заданной плоскости α и вспомогательной плоскости β .

При построении плоскости, перпендикулярной прямой, руководствуемся теми же положениями.

Пусть требуется построить плоскость, проходящую через точку A и перпендикулярную данной прямой l (рис. 4.20).

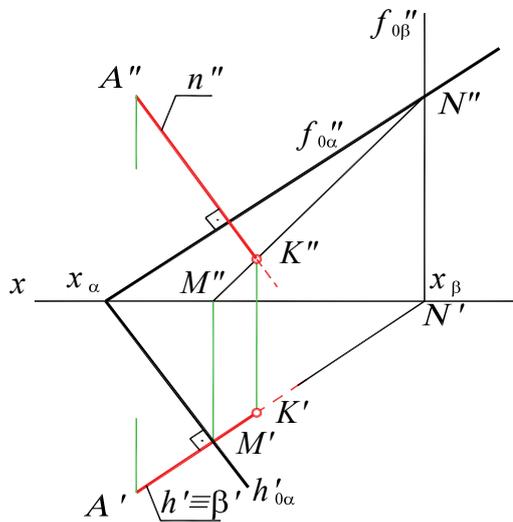


Рис. 4.19

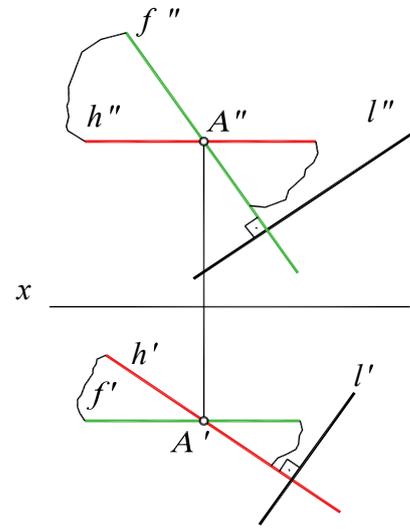


Рис. 4.20

Искомую плоскость задаем двумя пересекающимися прямыми (горизонталью h и фронталью f), проходящими через данную точки A . Горизонтальная проекция h' горизонтали h перпендикулярна горизонтальной проекции l' прямой l , фронтальная проекция f'' фронтали f перпендикулярна фронтальной проекции l'' прямой l .

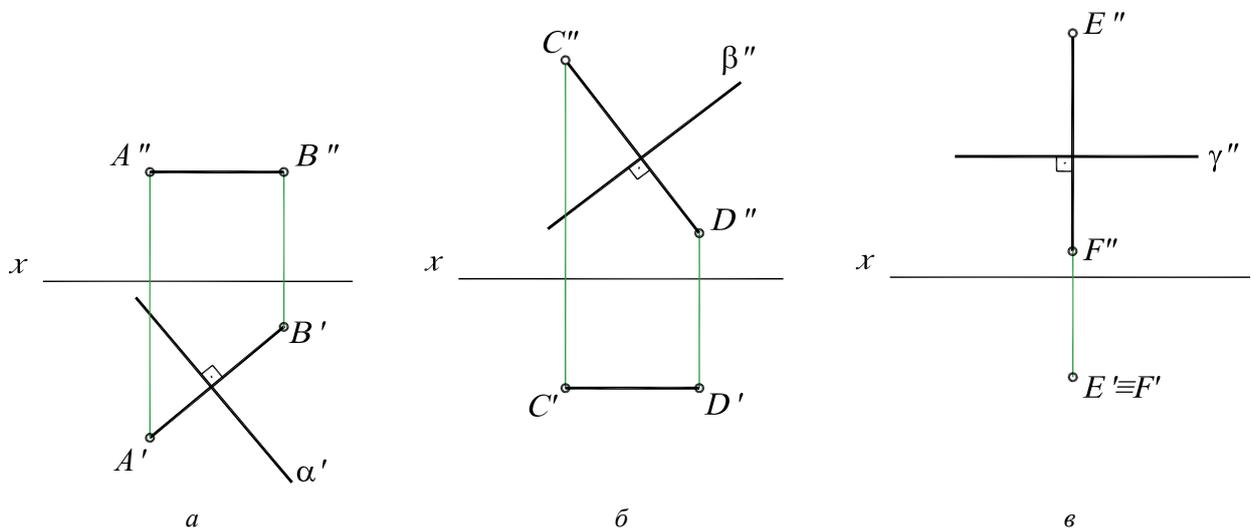


Рис. 4.21

Если плоскости занимают частное положение, то перпендикуляры к этим плоскостям располагаются параллельно плоскостям проекций. Так, перпендикуляром к горизонтально проецирующей плоскости α (α') является горизонталь AB (рис. 4.21, a). Фронтальная прямая CD перпендикулярна фронтально проецирующей плоскости β (β'') (рис. 4.21, b). Горизонтально проецирующая прямая EF является перпендикуляром горизонтальной плоскости γ (γ') (рис. 4.21, v).

4.7. Перпендикулярность двух прямых

Взаимно перпендикулярные прямые общего положения образуют прямой угол, который проецируется на плоскости проекций с искажением. Через точку можно провести бесконечное множество прямых, перпендикулярных данной, но только одна из них будет пересекать другую под прямым углом. Все эти прямые принадлежат одной плоскости, перпендикулярной данной прямой.

Так, на рис. 4.22 показано построение прямой, проходящей через точку A и пересекающей прямую BC под прямым углом. Вначале через точку A проводим плоскость, перпендикулярную к прямой BC . Эта плоскость задается двумя пересекающимися прямыми: горизонталью h и фронталью f (при этом горизонтальная проекция h' горизонтали h перпендикулярна к горизонтальной проекции $B'C'$ прямой BC , а фронтальная проекция фронтали f'' перпендикулярна к фронтальной проекции $B''C''$). Затем определяем точку пересечения K прямой BC с проведенной плоскостью. Для этого через прямую BC проводим фронтально проецирующую плоскость α (α''), которая пересекает плоскость, заданную горизонталью h и фронталью f , по линии 1–2 ($1'-2'$, $1''-2''$). В пересечении прямой 1–2 с прямой BC получается точка K . Прямая AK является искомым перпендикуляром, так как пересекает прямую BC и находится в плоскости, перпендикулярной прямой BC .

При построении проекций перпендикуляра к прямым частного положения задача упрощается, так как одна из сторон прямого угла параллельна плоскости проекции и прямой угол на эту плоскость проекций проецируется без искажения.

Так, на рис. 4.23, *а* показано построение проекций перпендикуляра, проведенного из точки C к горизонтали AB . Горизонтальная проекция $C'K'$ перпендикуляра CK располагается под прямым углом к горизонтальной проекции $A'B'$ прямой AB . Фронтальная проекция $C''K''$ определяется при помощи линий связи (точка K принадлежит прямой AB).

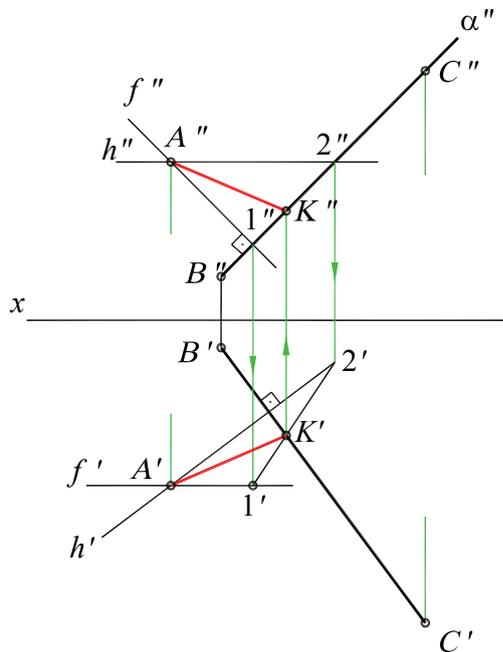


Рис. 4.22

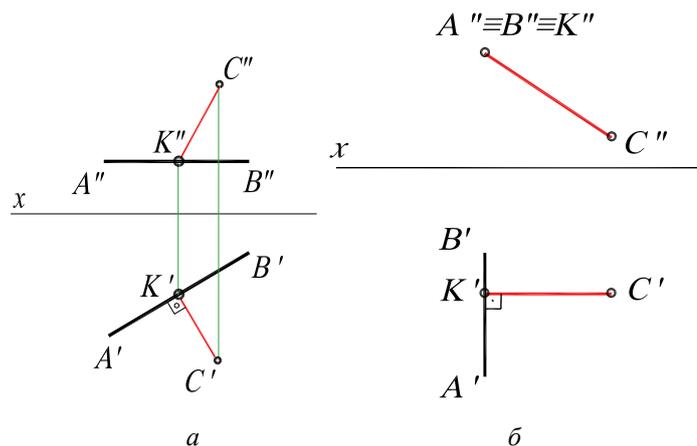


Рис. 4.23

На рис. 4.23, *б* показано построение проекций перпендикуляра, проведенного из точки C к фронтально проецирующей прямой AB . Построение фронтальной проекции $C''K''$ перпендикуляра очевидно из рисунка, а его горизонтальная проекция $C'K'$ перпендикулярна к горизонтальной проекции $A'B'$ прямой AB .

4.8. Перпендикулярность двух плоскостей

Известно, что две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой.

Через данную точку A можно провести бесчисленное множество плоскостей, перпендикулярных к заданной плоскости α . Все эти плоскости проходят через перпендикуляр n , проведенный из точки A на плоскость α . Для получения единственного решения требуются дополнительные условия.

На рис. 4.24 показано построение плоскости, перпендикулярной к плоскости, заданной треугольником CDE . Дополнительным условием здесь служит то, что искомая плоскость должна проходить через прямую AB .

Следовательно, искомая плоскость определяется прямой AB и перпендикуляром к плоскости треугольника. Для проведения этого перпендикуляра в плоскости CDE взяты горизонталь h ($C1$) и фронталь f ($C2$). Через точку A прямой AB проведены проекции перпендикуляра n к плоскости CDE ($n' \perp C'1'$, $n'' \perp C''2''$).

Образованная пересекающимися прямыми AB и n плоскость перпендикулярна к плоскости CDE , так как проходит через перпендикуляр к этой плоскости.

На рис. 4.25 приведено построение плоскости, проходящей через данную точку A и перпендикулярную двум данным плоскостям: плоскости треугольника BCD и плоскости α , заданной следами.

Искомая плоскость задается двумя пересекающимися перпендикулярами n_1 и n_2 , проходящими через точку A , каждый из которых перпендикулярен одной из заданных плоскостей. Горизонтальная проекция n_1' перпендикуляра n_1 расположена перпендикулярно горизонтальной проекции $C'1'$ горизонтали $C1$ плоскости треугольника BCD ($n_1' \perp C'1'$). Фронтальная проекция n_1'' этого перпендикуляра перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали $C''D''$ треугольника BCD . Проекции перпендикуляра n_2 соответственно перпендикулярны к одноименным следам плоскости ($n_2' \perp h'_{0\alpha}$, $n_2'' \perp f''_{0\alpha}$).

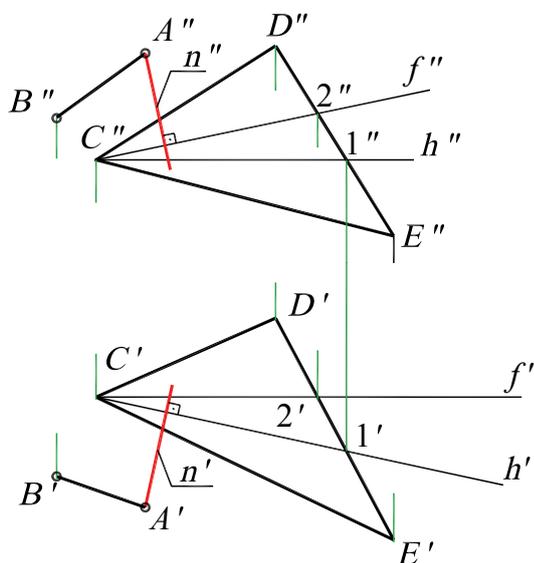


Рис. 4.24

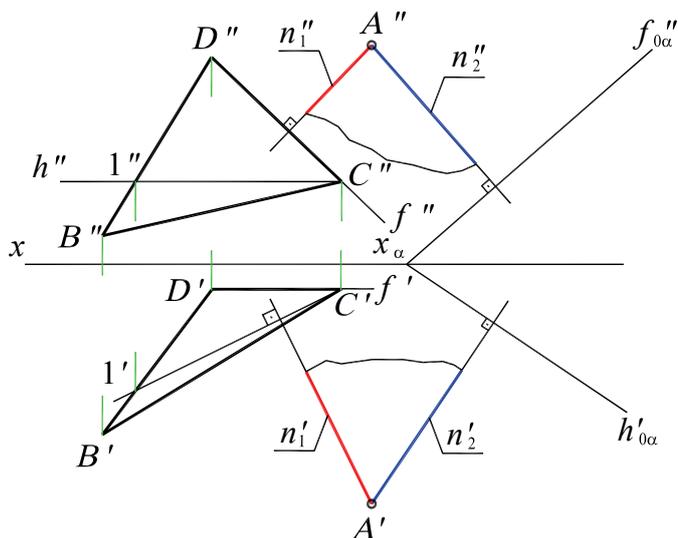


Рис. 4.25

Если плоскости заданы следами, то у взаимно перпендикулярных плоскостей общего положения их одноименные следы не перпендикулярны между собой.

Рассмотрим две плоскости α и β общего положения (рис. 4.26), у которых одноименные следы взаимно перпендикулярны.

Проведем в плоскости α одну из линий уровня, например, горизонталь h (h' , h''). Поскольку h' не перпендикулярна к горизонтальному следу $h'_{0\beta}$ плоскости β , то указанное выше условие перпендикулярности двух плоскостей не соблюдается.

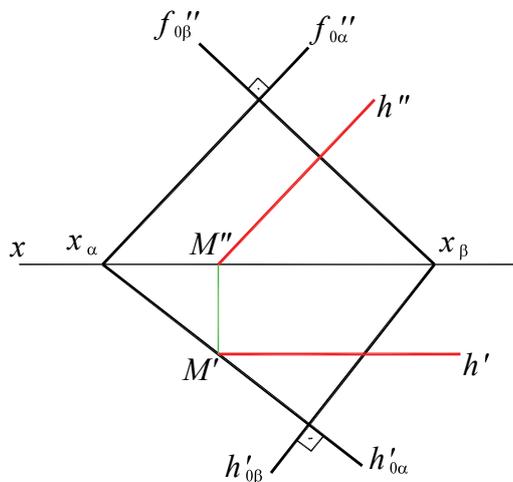


Рис. 4.26

Если же одна из заданных плоскостей (или обе) являются плоскостями частного положения, то взаимная перпендикулярность на чертеже одной пары одноименных следов свидетельствует о перпендикулярности плоскостей.

На рис. 4.27 представлены две плоскости: плоскость общего положения α и горизонтально проецирующая плоскость β .

Горизонтальные следы этих плоскостей перпендикулярны между собой. Так как плоскость β перпендикулярна прямой $h'_{0\alpha}$ (горизонтальному следу), лежащей в плоскости α , условие перпендикулярности двух плоскостей между собой соблюдено.

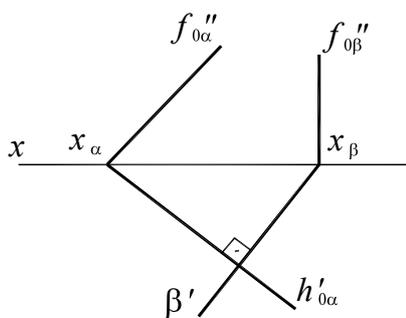


Рис. 4.27

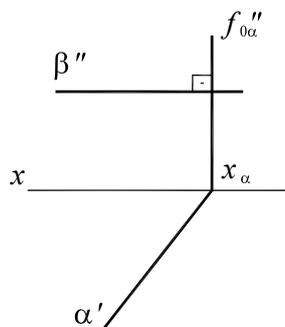


Рис. 4.28

На рис. 4.28 представлены две взаимно перпендикулярные плоскости частного положения: горизонтально проецирующая α и горизонтальная β .

4.9. Примеры решения задач

Задача 1. Построить линию пересечения двух плоскостей, заданных треугольниками ABC и DEF (рис. 4.29, а).

Решение. Для построения линии пересечения двух плоскостей общего положения используют вспомогательные плоскости (рис. 4.10). Другой способ построения линии

пересечения плоскостей заключается в том, что находят точки пересечения двух прямых, принадлежащих одной из плоскостей, с другой плоскостью, т. е. решается задача на пересечение прямой линии с плоскостью общего положения.

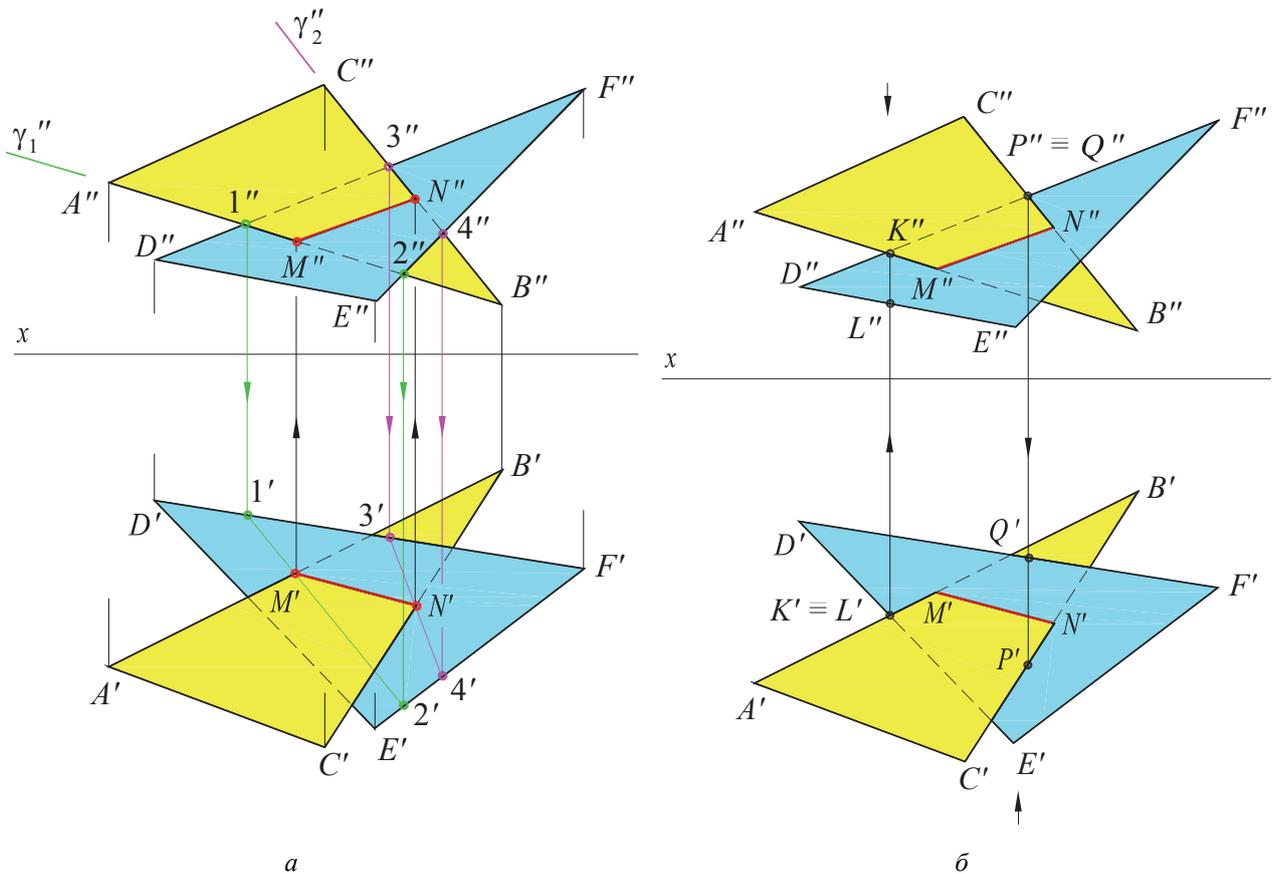


Рис. 4.29

На рис. 4.29, *a* приведено построение линии пересечения, которая проходит через точки M и N . Точка M найдена как точка пересечения прямой AB с плоскостью треугольника DEF . Для ее построения через сторону AB проведена фронтально проецирующая плоскость γ_1 (на рисунке изображен след-проекция γ_1'' , совпадающий с проекцией $A''B''$ прямой AB). Плоскость γ_1 пересекает плоскость треугольника DEF по прямой 1–2; точка M получается как точка пересечения прямых AB и 1–2. Сначала находим горизонтальную проекцию точки M' , затем по линии связи строим фронтальную проекцию M'' .

Точка N линии пересечения треугольников получена с помощью второй плоскости γ_2 , которая проведена через прямую BC треугольника ABC и, также как γ_1 , является фронтально проецирующей. Фронтальный след-проекция γ_2'' плоскости совпадает с проекцией $B''C''$ прямой BC . Плоскость γ_2 пересекает треугольник DEF по линии 3–4. На пересечении прямых BC и 3–4 получается точка N , принадлежащая линии пересечения двух треугольников. Сначала находится горизонтальная проекция точки N' , затем по линии связи определяется фронтальная проекция N'' .

Для определения видимости сторон треугольников надо сравнивать положение двух точек, из которых одна принадлежит стороне треугольника ABC , вторая – стороне треугольника DEF , и у которых совпадают либо горизонтальные, либо фронтальные проекции (конкурирующие точки). В первом случае устанавливается, какая из этих точек «закрывает» другую по отношению к горизонтальной плоскости проекций, во втором – относительно фронтальной плоскости проекций.

На рис. 4.29, б в качестве примера приведены две горизонтально конкурирующие точки – K и L . У этих точек совпадают горизонтальные проекции ($K' = L'$). Но точка K принадлежит стороне AB треугольника ABC и расположена выше, чем точка L , принадлежащая стороне DE треугольника DEF . Следовательно, для наблюдателя, смотрящего на плоскость π_1 сверху, точка K «закрывает» точку L , а это значит, что данная часть треугольника ABC , которой принадлежит точка K , закрывает треугольник DEF . Поэтому часть горизонтальной проекции $D'E'$ стороны, закрытой треугольником ABC , показывается штриховой линией.

Для определения видимости фронтальных проекций треугольников рассмотрим относительное положение двух фронтально конкурирующих точек P и Q (рис. 4.29, б), у которых фронтальные проекции совпадают ($P'' = Q''$). Точка P , расположенная на стороне BC треугольника ABC , находится ближе к глазу наблюдателя, смотрящего на плоскость π_2 , чем точка Q , расположенная на стороне DF треугольника DEF . Это значит, что часть треугольника ABC , которой принадлежит точка P , закрывает треугольник DEF . Поэтому часть фронтальной проекции стороны DF , закрытой треугольником ABC , показывается штриховой линией.

Задача 2. Построить проекции прямой призмы высотой 50 мм, основанием которой является треугольник ABC (рис. 4.30).

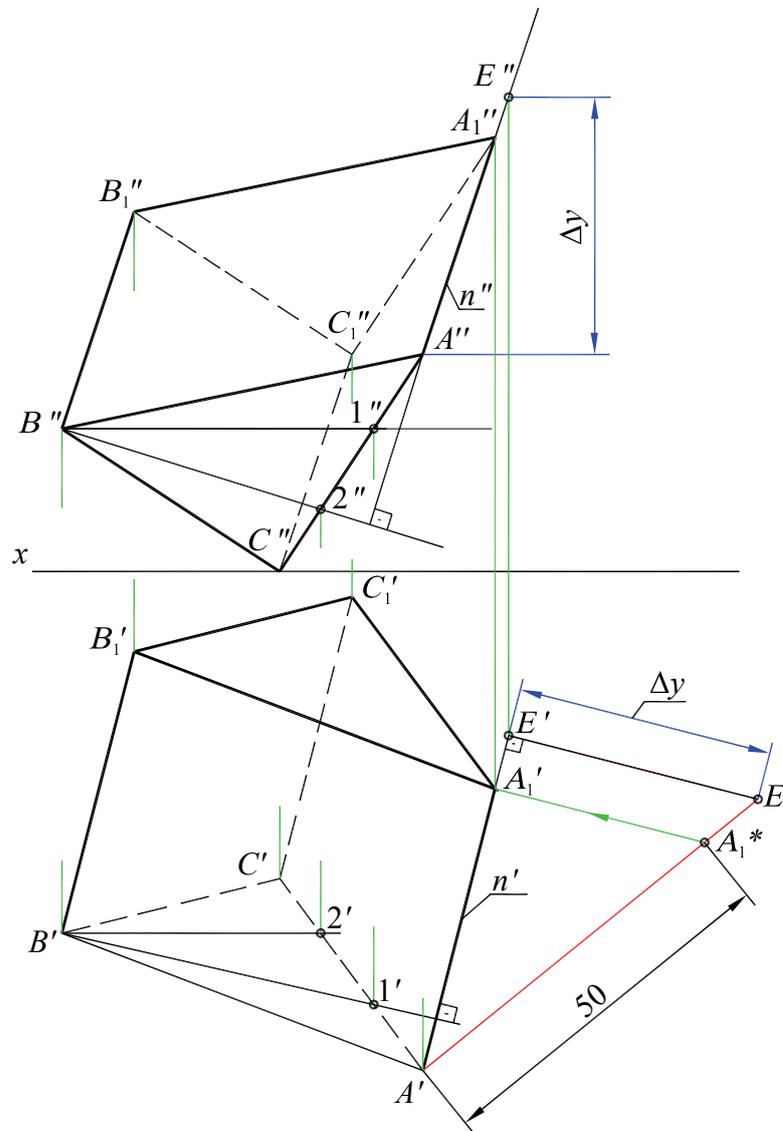


Рис. 4.30

Решение. Поскольку призма прямая, то боковые ребра перпендикулярны плоскости основания ABC . Поэтому для того, чтобы определить положение боковых ребер призмы, следует из какой-либо вершины основания ABC провести перпендикуляр к плоскости основания. Для построения проекций перпендикуляра в плоскости ABC проведены горизонталь $B1$ и фронталь $B2$. Через вершину A основания проведены проекции перпендикуляра n ($n' \perp B'1', n'' \perp B''2''$).

Для построения проекций ребра, натуральная величина которого 50 мм, использовано правило прямоугольного треугольника. Вначале на перпендикуляре n выбирается произвольная точка $E(E', E'')$ и определяется натуральная величина $A'E^*$ отрезка AE . Затем на натуральной величине $A'E^*$ откладывается длина 50 мм и находится положение точки A_1' , которое ограничивает длину горизонтальной проекции бокового ребра. Фронтальная проекция A_1'' точки A_1 определяется при помощи линии связи.

Далее построение проекций призмы сводится к проведению прямых, параллельных проекциям бокового ребра и сторонам основания. Видимость проекций призмы выявляется из расположения оснований призмы по отношению к наблюдателю. На горизонтальной проекции основание $A_1B_1C_1$ будет видимым, так как его фронтальная проекция расположена выше проекции основания ABC . На фронтальной проекции видимым является основание ABC , потому что его горизонтальная проекция расположена ближе к наблюдателю, чем основание $A_1B_1C_1$.

Вопросы для контроля

1. Каков признак параллельности прямой и плоскости, двух плоскостей?
2. Как проверить на чертеже параллельность прямой и плоскости?
3. Как располагаются на чертеже одноименные следы параллельных между собой плоскостей?
4. Как строится точка пересечения прямой линии с плоскостью частного положения?
5. Как строится линия пересечения двух плоскостей, из которых хотя бы одна является плоскостью частного положения?
6. В чем заключается общий способ построения линии пересечения двух плоскостей?
7. В какой последовательности выполняются действия для построения точки пересечения прямой с плоскостью общего положения?
8. Каков признак перпендикулярности прямой и плоскости, двух плоскостей?
9. Как располагаются проекции перпендикуляра к плоскости?
10. Как через точку провести перпендикуляр к прямой общего положения?
11. Как располагаются между собой одноименные следы двух взаимно перпендикулярных плоскостей?

Глава 5. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА

Решение задач значительно упрощается, если прямые линии и плоскости занимают частное положение относительно плоскостей проекций. В этом случае ответ получается или непосредственно по данному чертежу, или при помощи простейших построений.

Переход от общего положения геометрических элементов к частному выполняется следующими способами:

- введением дополнительных плоскостей проекций, расположенных либо параллельно, либо перпендикулярно рассматриваемому геометрическому элементу;
- изменением положения линии или плоской фигуры в пространстве при неизменной системе плоскостей проекций.

Основные задачи преобразования:

- 1) прямая общего положения становится прямой уровня;
- 2) прямая общего положения становится проецирующей прямой;
- 3) плоскость общего положения становится проецирующей плоскостью;
- 4) плоскость общего положения становится плоскостью уровня.

5.1. Способ замены плоскостей проекций

Сущность способа заключается в том, что положение заданных элементов (точек, линий, фигур, поверхностей) в пространстве остается неизменным, а система плоскостей проекций π_1/π_2 дополняется новыми плоскостями, по отношению к которым элементы задачи (прямая, плоскость) занимают частное положение. При этом новые плоскости проекций образуют с π_1 и π_2 или между собой системы взаимно перпендикулярных плоскостей проекций.

На рис. 5.1 показана точка A , заданная в системе плоскостей проекций π_1/π_2 . Заменяем π_2 другой вертикальной плоскостью π_4 и построим новую фронтальную проекцию A^{IV} на эту плоскость. Так как плоскость проекций π_1 является общей для систем π_1/π_2 и π_1/π_4 , то координата z точки A остается неизменной. Следовательно, расстояние от новой фронтальной проекции до новой оси x_1 равно расстоянию от заменяемой проекции до оси x . При этом проекция A^{IV} определена как основание перпендикуляра, опущенного из A на π_4 . Горизонтальная проекция A' остается прежней, а координата y в системе π_1/π_4 будет теперь иной и определяется расстоянием от точки A до плоскости π_4 .

Для получения плоского чертежа плоскость π_4 вращением совмещается с π_1 . Совмещается с π_1 и новая фронтальная проекция A^{IV} , которая располагается на общем перпендикуляре с оставшейся без изменения горизонтальной проекцией A' (рис. 5.2).

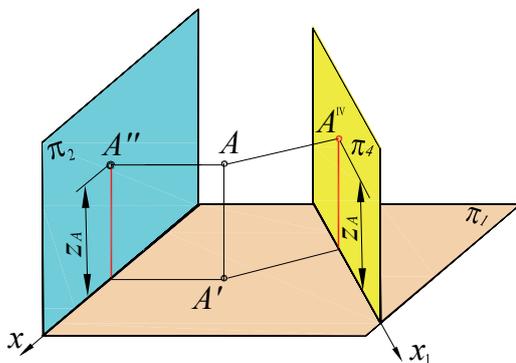


Рис. 5.1

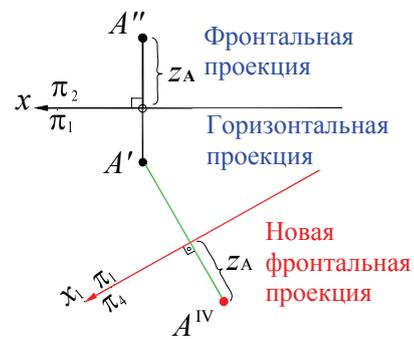


Рис. 5.2

Аналогично можно заменить горизонтальную плоскость проекций π_1 на новую, перпендикулярную π_2 . В этом случае не изменяется величина координаты y , которая определяет расстояние от точки до общей для двух систем плоскости π_2 .

Можно ввести новую плоскость проекций, сохранив в качестве общей (связующей) плоскости не π_1 , а π_2 . При этом все построения проводят аналогично предыдущему случаю.

5.1.1. Преобразование прямой общего положения в положение прямой уровня

Для преобразования прямой AB в прямую уровня (т. е. параллельную плоскости проекций) (рис. 5.3) вводят новую плоскость проекций π_4 так, чтобы ось проекций x_1 была параллельна какой-либо проекции AB (в данном случае $A'B'$). Затем проводятся линии связи перпендикулярно оси x_1 и откладываются координаты Z для построения проекций A^{IV} и B^{IV} , равные координатам z проекций A'' и B'' . Новая проекция прямой A^{IV} и B^{IV} дает натуральную величину отрезка AB и позволяет определить угол наклона φ_1 этого отрезка к плоскости проекций π_1 .

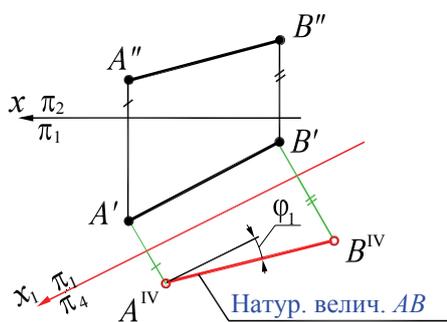


Рис. 5.3

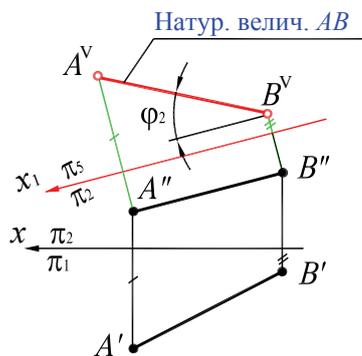


Рис. 5.4

Угол наклона отрезка AB к фронтальной плоскости проекций φ_2 можно определить, построив его изображение на дополнительной плоскости проекций π_5 (рис. 5.4). Ось x_1 параллельна фронтальной проекции отрезка $A''B''$. Проекция $A^V B^V$ также будет представлять собой натуральную величину отрезка AB .

5.1.2. Преобразование прямой общего положения в проецирующую

Преобразование прямой общего положения в проецирующее положение требует двойной замены плоскостей проекций, так как плоскость, перпендикулярная прямой, не будет перпендикулярна ни к π_1 , ни к π_2 , т. е. она не образует с плоскостью проекций ортогональной системы.

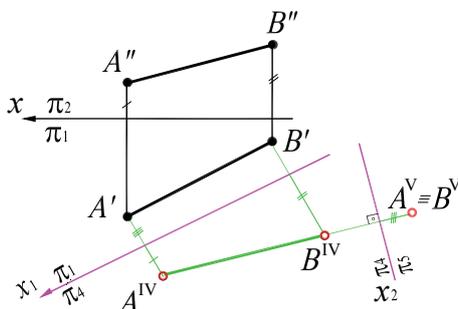


Рис. 5.5

На рис. 5.5 выполнено преобразование прямой AB общего положения в проецирующее.

Вначале производится преобразование прямой AB в прямую, параллельную плоскости π_4 . Для этого проводится новая ось проекций $x_1 \parallel A'B'$ и находится проекция $A^{IV} B^{IV}$.

Затем переходим к системе плоскостей π_4/π_5 , сделав прямую AB перпендикулярной к π_5 . При этом ось проекций x_2 проводится перпендикулярно к $A^{IV}B^{IV}$. На плоскость проекций π_5 прямая AB спроецируется в точку.

5.1.3. Преобразование плоскости общего положения в проецирующее положение

Известно, что если одна плоскость перпендикулярна другой, то она должна содержать прямую, перпендикулярную этой плоскости. В качестве такой прямой для преобразований плоскости в проецирующее положение следует взять прямую уровня, например горизонталь $h(A1)$ (рис. 5.6).

Плоскость π_4 , перпендикулярная к горизонтали $A1$ и плоскости π_1 , является плоскостью, перпендикулярной к плоскости треугольника ABC . Новая ось проекций x_1 проводится перпендикулярно проекции горизонтали $A'1'$. Затем определяются проекции вершин треугольника на плоскость π_4 . Проекция $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$ вырождается в прямую, что свидетельствует о том, что плоскость треугольника перпендикулярна плоскости π_4 . При этом угол φ_1 наклона плоскости треугольника ABC к плоскости π_1 на плоскость π_4 проецируется без искажения.

Аналогичное преобразование выполнено на рис. 5.7, где плоскость π_1 заменена плоскостью π_4 , перпендикулярной к π_2 и плоскости треугольника ABC . Для этого в плоскости ABC проведена фронталь $f(A1)$, перпендикулярно к которой располагается плоскость π_4 . Новая ось x_1 проведена перпендикулярно $A''1''$.

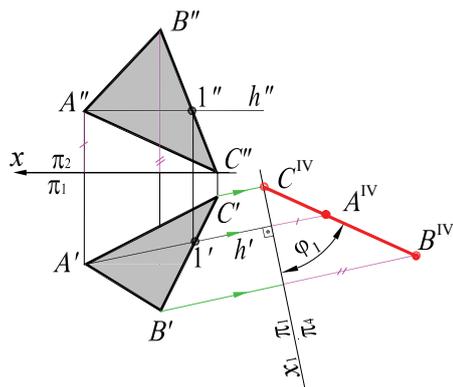


Рис. 5.6

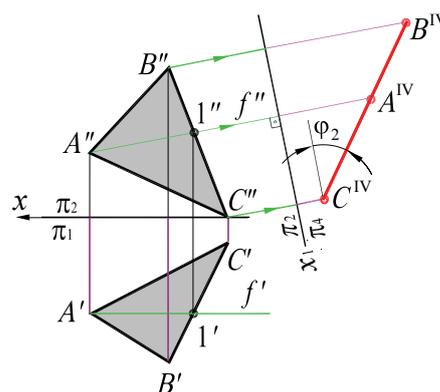


Рис. 5.7

На линиях связи, проведенных из вершин треугольника ABC перпендикулярно оси x_1 , откладывают отрезки, равные y_A, y_B, y_C (отмечены черточками). Плоскость треугольника относительно π_4 стала проецирующей. Угол φ_2 наклона плоскости треугольника ABC к плоскости π_2 на плоскости π_4 проецируется без искажения.

5.1.4. Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня

Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня требует двойной замены плоскостей проекций, так как плоскость, параллельная заданной плоскости, не будет перпендикулярна ни π_1 ни π_2 , т. е. она не образует с плоскостью проекций ортогональной системы. На рис. 5.8 показано преобразование плоскости треугольника ABC общего положения в положение уровня.

При первой замене (π_2 на π_4) используется горизонталь треугольника $h(A1)$. Новая ось проекций x_1 проводится перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали $h(A'1')$. Спроецировав треугольник ABC на новую плоскость проекций π_4 , получим проекцию $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$. Эти построения описаны выше.

На втором этапе преобразуем плоскость треугольника ABC в плоскость уровня. Для этого перейдем от системы π_1/π_4 к системе π_4/π_5 . Новая плоскость π_5 устанавливается параллельно треугольнику, а значит, новая ось x_2 на чертеже проводится параллельно прямой, на которой расположены точки A^{IV}, B^{IV}, C^{IV} .

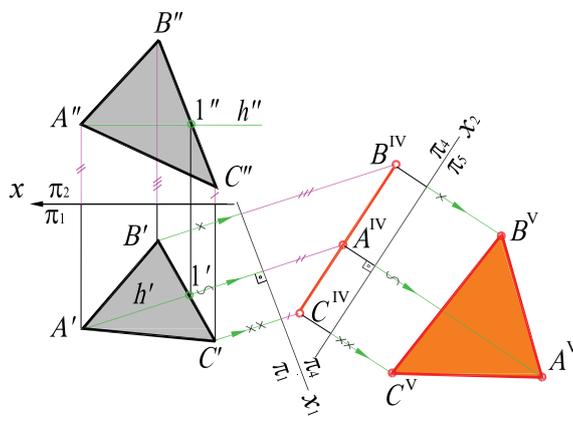


Рис. 5.8

Через указанные точки проводят перпендикуляры – линии связи к новой оси x_2 , и откладывают на них в плоскости π_5 отрезки, равные по длине расстояниям от оси x_1 до вершин A', B' и C' соответственно. Полученная проекция $A^VB^VC^V$ определяет истинную величину треугольника.

Подобные двойные преобразования используются для решения задач на определение углов при вершинах треугольника, построение высот и биссектрис его углов, центра вписанной (описанной) окружности и т. п., так как эти задачи требуют определения натуральных величин треугольников.

5.2. Способ вращения

При использовании способа вращения положение плоскостей проекций не изменяется, изменяется лишь положение заданных геометрических элементов.

При вращении вокруг неподвижной прямой (оси вращения) каждая точка геометрического элемента перемещается в плоскости, перпендикулярной к оси вращения (плоскости вращения). Точка перемещается по окружности, центр которой находится в точке пересечения оси с плоскостью вращения (центр вращения), а радиус вращения равен расстоянию от вращаемой точки до центра (радиус вращения). Если точка находится на оси вращения, то она остается неподвижной.

5.2.1. Вращение точки вокруг проецирующих прямых

На рис. 5.9 дано наглядное изображение точки A , вращающейся вокруг оси i , перпендикулярной к плоскости π_1 .

Точка A , вращаясь вокруг оси i , описывает окружность, плоскость α которой перпендикулярна i . Центр окружности O (центр вращения) расположен в точке пересечения оси вращения i с плоскостью α , а радиус вращения R – это отрезок OA . Так как плоскость вращения α параллельна плоскости π_1 , то проекция траектории вращающейся точки на плоскость π_1 представляет собой окружность радиуса R , а на плоскость π_2 – отрезок прямой, параллельной оси x .

Через A обозначено новое положение точки A , которое она занимает после поворота на угол φ .

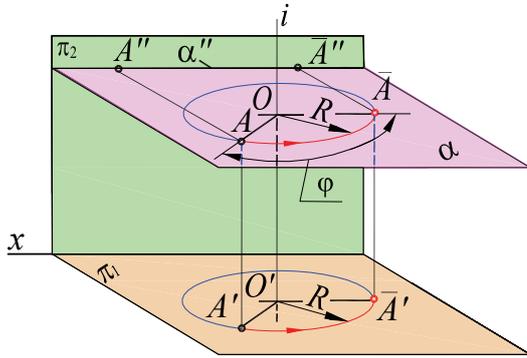


Рис. 5.9

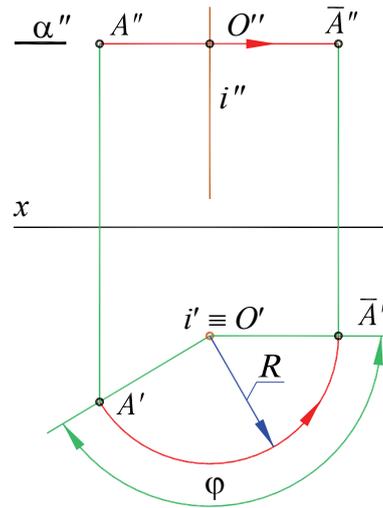


Рис. 5.10

На рис. 5.10 приведен ортогональный чертеж точки A , вращающейся вокруг горизонтально проецирующей оси i . После поворота на угол φ точка A займет новое положение \bar{A} (α – плоскость вращения, O – центр вращения, R – радиус вращения).

Если ось вращения i расположена перпендикулярно плоскости π_2 (рис. 5.11), то фронтальная проекция точки A будет перемещаться по окружности, а горизонтальная – по прямой, перпендикулярной линиям связи. Новое положение точки, которое она занимает после поворота на угол φ – точка \bar{A} . Плоскость вращения – фронтальная плоскость α (α').

Для поворота отрезка прямой на заданный угол необходимо повернуть на этот угол две точки, определяющие отрезок. Каждая из этих точек вращается в плоскости, перпендикулярной оси вращения, и будет иметь свой радиус вращения.

Для решения задач, связанных с вращением отрезка прямой, удобно использовать способ, приведенный на рис. 5.12. Отрезок прямой AB следует повернуть на угол φ вокруг горизонтально проецирующей оси i . Из проекции оси i проводим перпендикуляр $i'C'$ к проекции $A'B'$ и поворачиваем основание перпендикуляра O' на заданный угол φ .

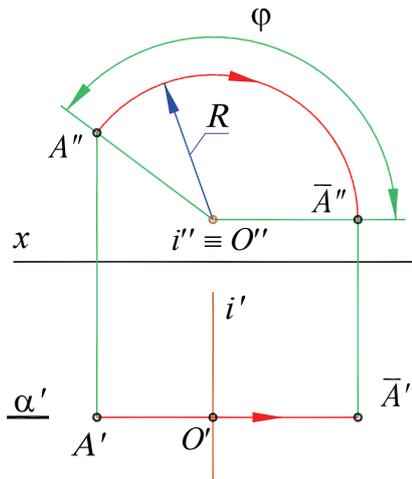


Рис. 5.11

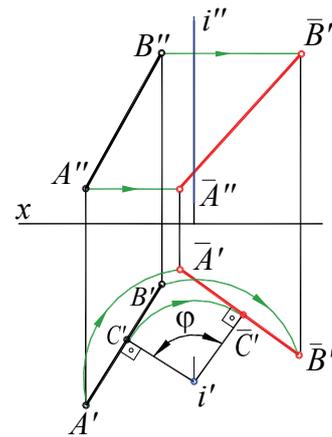


Рис. 5.12

Проводим через \bar{C}' (новое положение точки C') прямую, перпендикулярную к $i'\bar{C}'$, и получаем направление нового положения горизонтальной проекции отрезка. При пересечении построенной прямой с дугами радиусов $i'A'$ и $i'B'$ получают точки \bar{A}' и \bar{B}' , определяющие новое положение отрезка. Фронтальные проекции A'' и B'' точек A и B перемещаются

по горизонтальным прямым, перпендикулярным линиям связи, и находятся на пересечении этих прямых с линиями связи, проведенными через проекции A' и B' .

В ряде случаев ось вращения может быть выбрана проходящей через один из концов отрезка. Тогда поворот отрезка упрощается, так как точка, через которую проходит ось, остается неподвижной и для поворота отрезка надо построить новое положение проекций только одной точки – другого конца.

На рис. 5.13 горизонтально проецирующая ось i проведена через конец отрезка AB – точку A . Точка A остается неподвижной, а точку B повернем так, чтобы горизонтальная проекция $A'B'$ расположилась перпендикулярно линиям связи. В этом случае отрезок AB будет параллелен плоскости проекций π_2 и спроецируется на нее в натуральную величину. Построив фронтальную проекцию $A''B''$, найдем натуральную величину отрезка AB . Угол φ_1 – угол наклона прямой AB к плоскости π_1 .

На рис. 5.14 представлен поворот прямой AB вокруг фронтально проецирующей оси i , проведенной через точку A . Фронтальную проекцию точки B повернем так, чтобы проекция $A''B''$ расположилась перпендикулярно линиям связи. Отрезок AB станет параллельным плоскости проекций π_1 и спроецируется на нее в натуральную величину. Построив горизонтальную проекцию $A'B'$, определим натуральную величину отрезка AB и угол наклона φ_2 к плоскости π_2 .

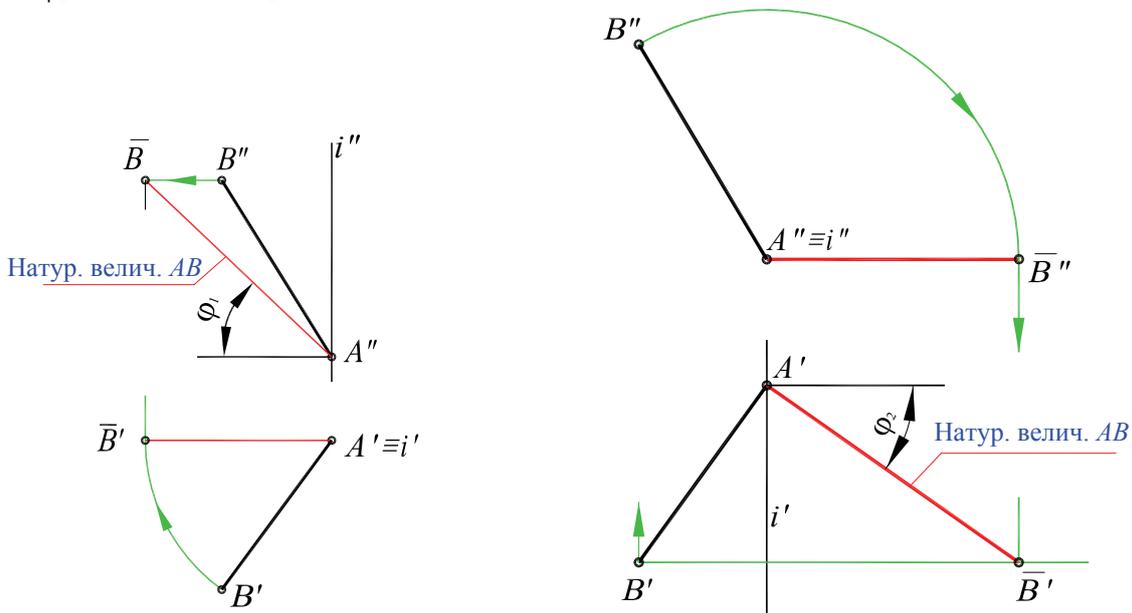


Рис. 5.13

Рис. 5.14

Поворот плоскости вокруг оси сводится к повороту принадлежащих ей точек и прямых линий. Если плоскость задана плоской фигурой, то одна из проекций, поворачиваясь, не изменяет размеров и формы, а проекции точек другой перемещаются по прямым, перпендикулярным линиям связи.

5.2.2. Плоскопараллельное перемещение отрезка

Применение способа вращения часто приводит к тому, что преобразованная проекция фигуры накладывается на заданную. Построение и чтение такого чертежа становится затруднительным. Этого недостатка лишен способ плоскопараллельного перемещения, позволяющий более свободно пользоваться полем чертежа для размещения преобразованных проекций геометрической фигуры.

При плоскопараллельном перемещении все точки геометрической фигуры движутся в плоскостях, параллельных плоскости проекций, т. е. сохраняется основной принцип

вращения вокруг проецирующих осей. Поэтому можно считать плоскопараллельное перемещение вращением вокруг проецирующих осей, но без указания осей вращения.

На рис. 5.15 приведено наглядное изображение плоскопараллельного перемещение отрезка AB . На рис. 5.15, а дано исходное положение отрезка AB – прямой, занимающей относительно плоскостей проекций общее положение. На рис. 5.15, б отрезок AB перемещен в новое положение, точки A и B движутся в горизонтальных плоскостях α и β .

Отметим, что при таком движении угол наклона φ_1 отрезка к плоскости π_1 сохраняется неизменным. Поэтому не изменяется и длина горизонтальной проекции отрезка, т. е. $A'B' = \bar{A}'\bar{B}'$. Последнее свойство имеет важное значение, так как используя его, мы получаем возможность проецировать объект в удобном для решения задач положении.

На рис. 5.16 приведен комплексный чертеж, на котором выполнено плоскопараллельное перемещение отрезка AB , занимающего общее положение, в новое положение, параллельное фронтальной плоскости проекций.

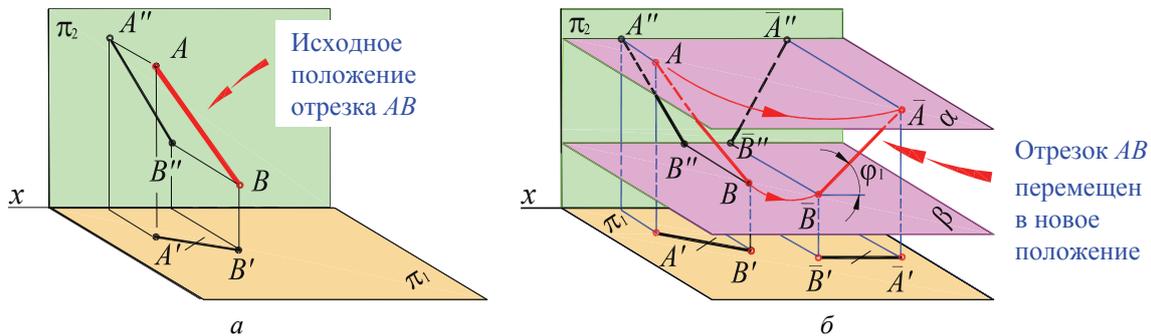


Рис. 5.15

На этом чертеже отрезок AB перемещается в новое положение параллельно фронтальной плоскости проекций. При этом сначала перемещается в новое положение, параллельное оси x , горизонтальная проекция отрезка, причем $A'B' = \bar{A}'\bar{B}'$. Затем по линиям связи строится фронтальная проекция $\bar{A}''\bar{B}''$.

После перемещения отрезка AB в положение $\bar{A}\bar{B}$ он станет параллельным плоскости π_2 и его новая фронтальная проекция будет равна натуральной величине. Соответственно угол φ_1 наклона проекции $\bar{A}''\bar{B}''$ к оси проекций будет равен углу наклона отрезка AB к плоскости π_1 . Отметим, что в данном случае новое положение горизонтальной проекции выбрано произвольно, оно исключает наложение проекций отрезка.

На рис. 5.17 приведено двойное плоскопараллельное перемещение отрезка AB с целью преобразования его в фронтально проецирующее положение.

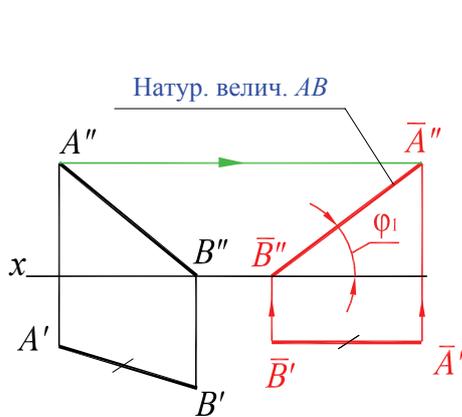


Рис. 5.16

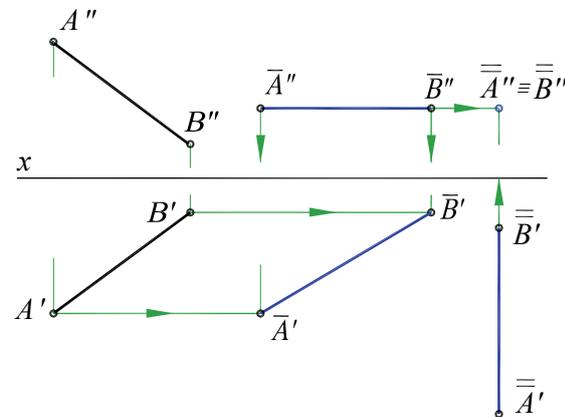


Рис. 5.17

Вначале производим перемещение фронтальной проекции в положение, параллельное оси x , причем $\overline{A'B'} = A''B''$. Отрезок AB занял положение, параллельное плоскости π_1 , и его горизонтальная проекция $\overline{A'B'}$ равна длине отрезка. Затем перемещаем горизонтальную проекцию в положение, перпендикулярное оси x , причем $\overline{A'B'} = \overline{A''B''}$. Отрезок AB занял фронтально проецирующее положение и его фронтальная проекция $A' \equiv B''$.

На рис. 5.18 показаны стадии перемещения треугольника ABC , расположенного в плоскости общего положения, в положение плоскости уровня.

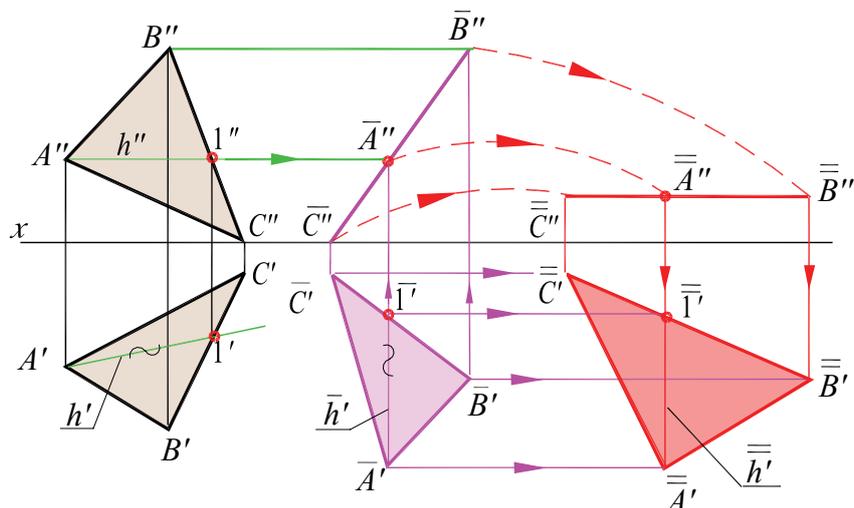


Рис. 5.18

При первом движении треугольник ABC переводится во фронтально проецирующее положение. С этой целью в плоскости треугольника строится горизонталь $A1$, затем ее горизонтальная проекция (отрезок $A'1'$) перемещается в проецирующее положение (на свободном поле чертежа проводится отрезок $\overline{A'1'} = A'1'$ параллельно линиям связи). В процессе перемещения размеры и форма горизонтальной проекции треугольника не изменяются. Построение вершин C' и B' выполняются засечками с помощью циркуля.

Все вершины треугольника на фронтальной плоскости проекций перемещаются по горизонталям, пересечение которых с линиями связи, проведенными из соответствующих вершин новой горизонтальной проекции, образует вырожденную в прямую новую фронтальную проекцию $\overline{A''B''C''}$. При втором движении все точки треугольника перемещаются в плоскостях, параллельных фронтальной плоскости проекций, в результате чего он займет положение горизонтальной плоскости уровня и его вырожденная фронтальная проекция $A''B''C''$ расположится перпендикулярно линиям связи, оставаясь неизменной по длине. Горизонтальная проекция $A'B'C'$ треугольника ABC будет равна его натуральной величине.

5.2.3. Способ вращения вокруг прямой уровня

Поворот плоской фигуры используется для определения ее натуральной величины. Например, чтобы определить форму и размеры плоской фигуры, ее можно повернуть вокруг горизонтали так, чтобы в результате вращения фигура расположилась параллельно плоскости π_1 .

Рассмотрим сначала поворот точки вокруг прямой уровня (рис. 5.19).

Точка A вращается вокруг некоторой горизонтально расположенной оси ON'' , описывая дугу окружности, лежащую в плоскости α .

Эта плоскость перпендикулярна к оси вращения и, следовательно, является горизонтально проецирующей; поэтому горизонтальная проекция окружности, описываемая

точкой A , должна находиться на следе-проекции α' . Если радиус OA займет положение, параллельное плоскости π_1 , то проекция $O'A'$ окажется равной натуральной величине радиуса OA .

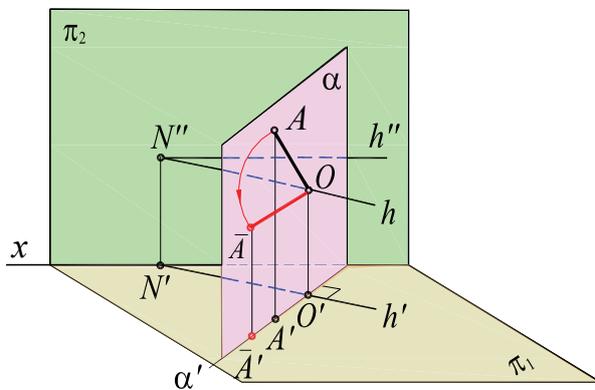


Рис. 5.19

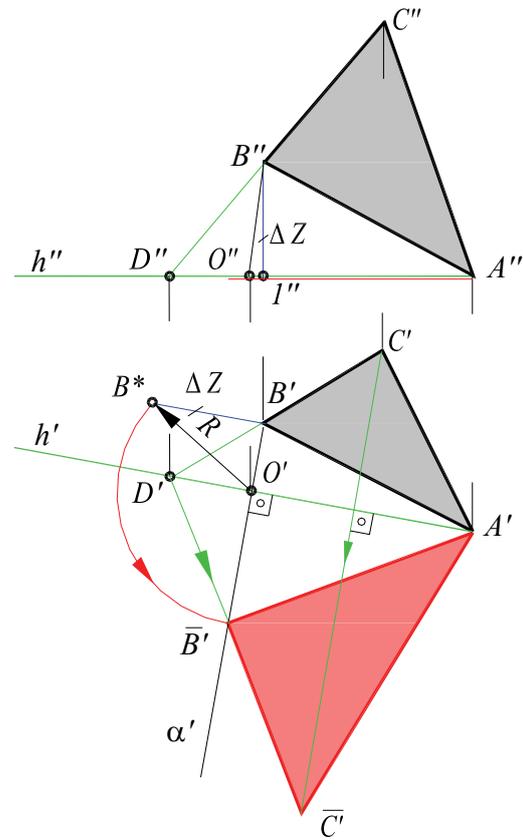


Рис. 5.20

На рис. 5.20 рассмотрим поворот треугольника ABC вокруг горизонтали h (AD) до положения, параллельного плоскости π_1 .

Точка A , расположенная на оси вращения, останется на месте. Следовательно, для изображения горизонтальной проекции треугольника после поворота надо найти положение проекций других двух вершин.

Так, точка B , вращаясь вокруг горизонтали AD , будет перемещаться в горизонтально проецирующей плоскости α , след-проекция α' которой перпендикулярен проекции $A'D'$. Точка пересечения α' и проекции горизонтали $A'D'$ определяет горизонтальную проекцию центра вращения – точку O' . По линии связи находим фронтальную проекцию O'' центра вращения. Соединив одноименные проекции точек O и B , получим проекции радиуса вращения $O'B'$ и $O''B''$.

Теперь надо определить натуральную величину радиуса вращения точки B . Для этого применяется способ прямоугольного треугольника. По катетам $O'B'$ и $B'B^* = \Delta z$ строим прямоугольный треугольник $O'B'B^*$, гипотенуза его равна радиусу R вращения точки B . Новое положение горизонтальной проекции B' точки B определяем, делая засечку на следе-проекции α' дугой радиуса R , равной натуральной величине радиуса вращения точки B . Для нахождения C' можно не определять натуральную величину радиуса вращения точки C . Положение точки C определяется в пересечении двух прямых, из которых одна является перпендикуляром, проведенным из точки C' к прямой $A'D'$, а другая проходит через найденную точку B' и точку D' (горизонтальную проекцию точки D , принадлежащей стороне BC , расположенную на оси вращения). Проекция $A'B'C'$ выражает натуральную величину

треугольника ABC , так как после поворота плоскость треугольника параллельна плоскости π_1 . Фронтальная проекция треугольника совпадает с фронтальной проекцией горизонтали, т. е. представляет собой прямую линию.

На рис. 5.20 дано построение для случая, когда горизонталь проведена вне проекций треугольника. Это позволяет избежать наложения проекций одной на другую, но чертеж занимает несколько большую площадь.

Если требуется повернуть плоскую фигуру до положения, параллельного плоскости π_2 , то за ось вращения надо выбрать фронталь.

5.3. Примеры решения задач

Задача 1. Определить кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD общего положения и построить проекции общего перпендикуляра (рис. 5.21).

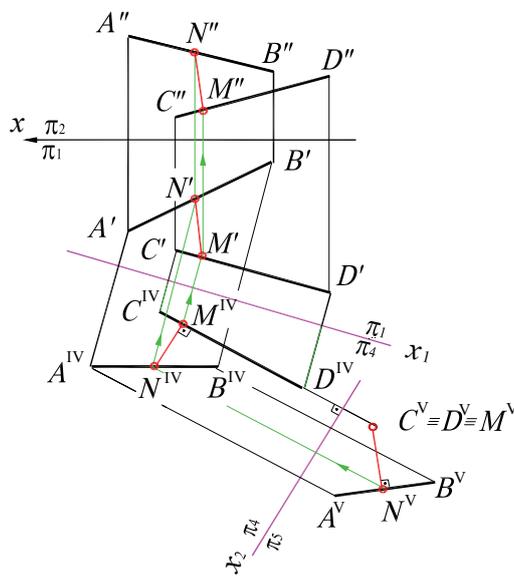


Рис. 5.21

Решение. Расстояние между скрещивающимися прямыми измеряется длиной перпендикуляра, общего к заданным прямым. Для решения задачи используем способ замены плоскостей проекций. Если в результате преобразования одна из прямых станет проецирующей относительно какой-то плоскости проекций, то перпендикуляр, опущенный из «вырожденной» проекции прямой на другую прямую, параллелен этой плоскости проекций и проецируется на нее в натуральную величину.

Двойной заменой плоскостей проекций преобразуем прямую CD в проецирующую. Вначале построим проекции $A^{IV} B^{IV}$ и $C^{IV} D^{IV}$ на плоскость π_4 , параллельную прямой CD ($x_1 \parallel C'D'$). Затем найдем проекции прямых $A^V B^V$ и $C^V D^V$ на плоскость π_5 , перпендикулярную прямой CD . На плоскость π_5 прямая CD спроецируется в точку ($C^V = D^V$), а расстояние между нею и проекцией $A^V B^V$ (отрезок $M^V N^V$) будет искомым натуральной величиной расстояния между заданными прямыми.

Методом обратного проецирования строим проекцию отрезка MN на плоскость π_4 , причем точку M^{IV} на проекции $C^{IV} D^{IV}$ находим из того, что проекция $M^{IV} N^{IV}$ располагается параллельно оси x_2 (или перпендикулярно $C^{IV} D^{IV}$, так как отрезок MN параллелен плоскости π_5). Пользуясь линиями связи, находим проекции отрезка MN сначала на плоскости π_1 , а затем на плоскости π_2 .

Задача 2. Определить двугранный угол, образованный треугольниками ABC и ABD (рис. 5.22).

Решение. Используем способ замены плоскостей проекций. Ребром двугранного угла служит общая сторона двух треугольников – отрезок AB . Если в результате преобразования AB окажется перпендикулярным к какой-то плоскости проекций, то обе грани двугранного угла спроецируются на нее в виде отрезков, угол между которыми равен по величине линейному углу данного двугранного угла.

Преобразуем двойной заменой плоскостей проекций ребро AB в проецирующее положение. Последовательно переходя от системы π_1/π_2 к π_1/π_4 , а затем к π_4/π_5 , сделаем отрезок AB проецирующим. При этом ось $x_1 \parallel A'B'$, а ось $x_2 \perp A^{IV}B^{IV}$. На плоскость π_5 ребро AB спроецируется в точку ($A^V \equiv B^V$), а двугранный угол – в виде линейного угла φ .

Задача 3. Повернуть точку A вокруг оси i до совмещения ее с плоскостью α общего положения, заданной пересекающимися прямыми BC и CD (рис. 5.23).

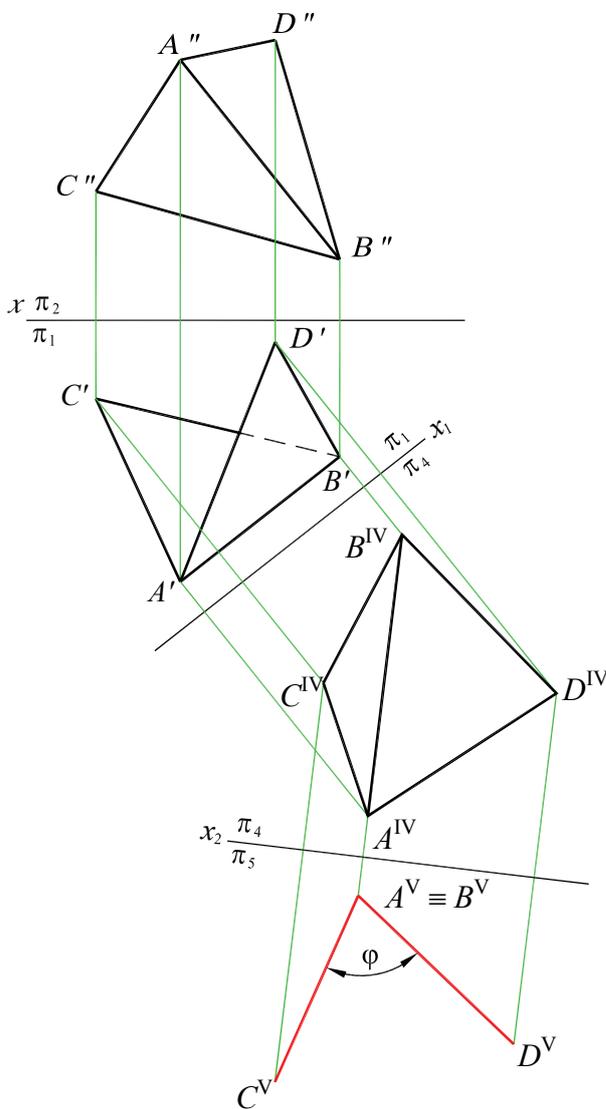


Рис. 5.22

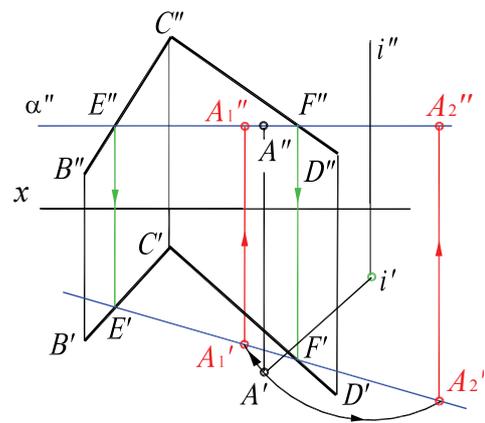


Рис. 5.23

Решение. Точка A вращается вокруг оси i , перпендикулярной к плоскости проекций π_1 . Через точку A проведена плоскость α (α''), перпендикулярная к оси вращения i , следовательно,

параллельная π_1 . Горизонтальная плоскость α пересекает заданную ($BC \times CD$) по горизонтали FF ($E''F''$, $E'F'$). При вращении точка A описывает окружность радиуса $A'i'$, величина которого определяется длиной перпендикуляра, проведенного из точки A на ось. Окружность проецируется на плоскость π_1 без искажения и пересекается с проекцией горизонтали $E'F'$ в точках A'_1 и A'_2 , которые являются горизонтальными проекциями точки A , совмещенной вращением с заданной плоскостью. Задача имеет два возможных решения.

По линиям связи находим фронтальные проекции точек A_1 и A_2 , лежащих на горизонтали EF .

Задача 4. Плоскопараллельным перемещением расположить пирамиду $SABC$ так, чтобы ее основание ABC принадлежало горизонтальной плоскости проекций (рис. 5.24).

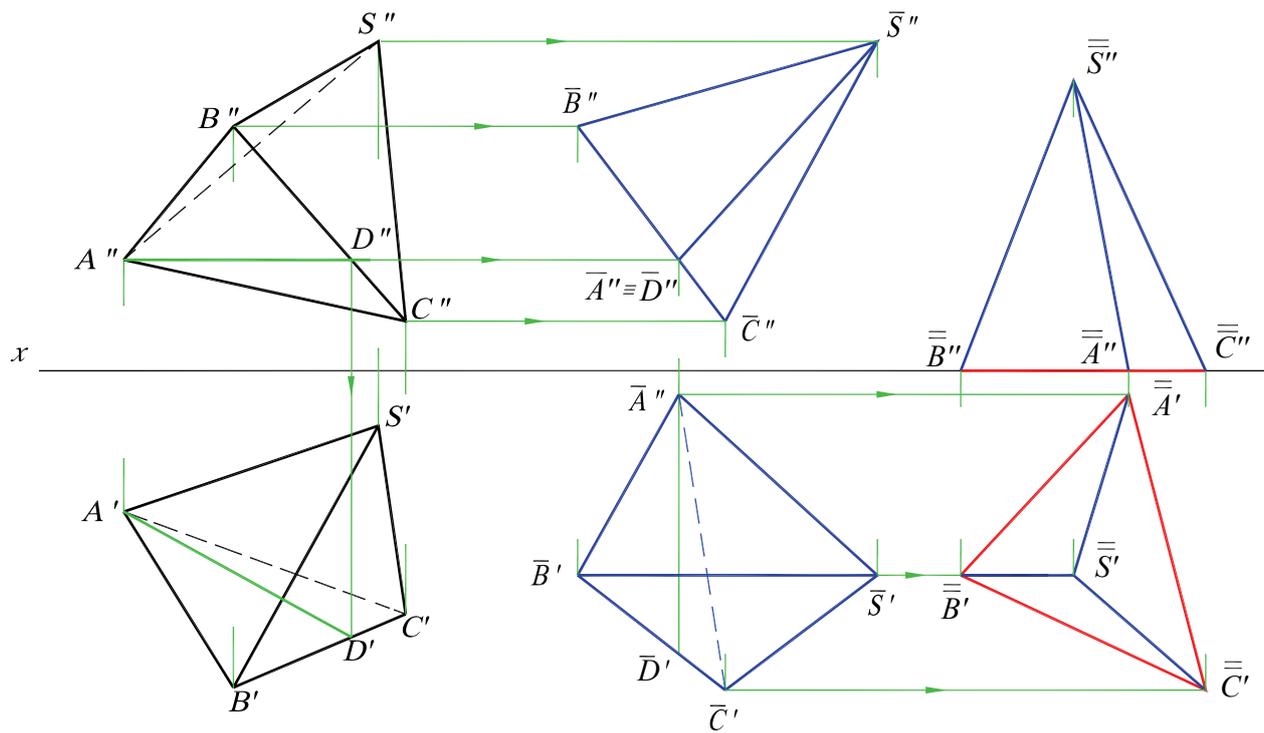


Рис. 5.24

Решение. Перемещение пирамиды в искомое положение осуществим за две последовательные стадии.

1. Преобразуем проекции пирамиды $SABC$ так, чтобы основание ABC заняло фронтально проецирующее положение, т. е. перпендикулярное плоскости π_2 . Для этого в плоскости треугольника ABC проводим горизонталь AD ($A''D''$, $A'D'$). Перемещаем горизонтальную проекцию основания так, чтобы проекция горизонтали $A'D'$ расположилась перпендикулярно оси x . Горизонталь окажется перпендикулярной плоскости π_2 , а треугольник ABC , содержащий эту горизонталь, будет перпендикулярным π_2 . Вместе с основанием перемещается и вершина S пирамиды так, что вид и величина горизонтальной проекции ее не меняется. Новое положение горизонтальной проекции – $S'A'B'C'$. Фронтальные проекции S'' , A'' , B'' , C'' перемещаются по прямым, параллельным оси. Новое положение фронтальной проекции – $S''A''B''C''$.

2. Так как основание ABC пирамиды должно принадлежать плоскости π_1 , то «вырожденная» проекция треугольника ABC будет совпадать с осью x . Исходя из этого, выполним второе перемещение пирамиды в положение $\overline{\overline{SABC}}$, причем фронтальная проекция

пирамиды не изменяет вида и размеров, а горизонтальные проекции точек S, A, B, C перемещаются по прямым, параллельным оси x .

Задача 5. Определить центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC (рис. 5.25).

Решение. Центр описанной окружности треугольника определяется в пересечении перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника. Так как стороны треугольника являются отрезками прямых общего положения, то прямые углы, образованные перпендикулярами и сторонами, проецируются с искажением. Определение центра описанной окружности можно выполнять только на натуральной величине треугольника.

Для нахождения натуральной величины использован способ вращения вокруг линии уровня. В плоскости треугольника ABC проведена горизонталь AD ($A''D'', A'D'$).

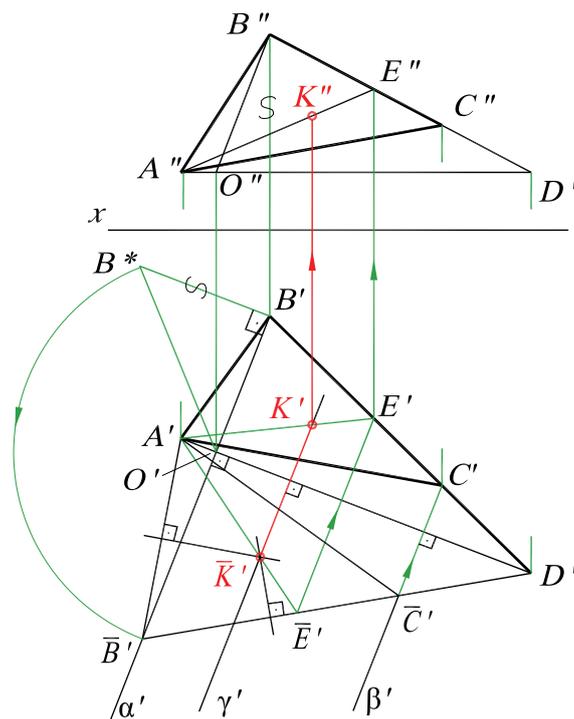


Рис. 5.25

Точки A и D , расположенные на оси вращения, остаются неподвижными, а точка B вращается в горизонтально проецирующей плоскости α (α'). Определим для точки B проекции центра вращения (O', O'') и проекции радиуса вращения ($B'O', B''O''$).

По двум проекциям радиуса вращения определим его истинную величину B^*O' , используя способ прямоугольного треугольника. Откладываем натуральную величину радиуса вращения от O' на направлении следа-проекции α' , так как радиус в исходном положении располагается параллельно плоскости π_1 . Получаем точку \bar{B}' .

Положение точки \bar{C}' определяем в пересечении отрезка $\bar{B}'D'$ со следом-проекцией β' плоскости вращения точки C ($\beta' \perp A'D'$). Соединяя найденные точки \bar{B}' и \bar{C}' с неподвижной вершиной A' , получим новую горизонтальную проекцию $A'\bar{B}'\bar{C}'$, определяющую натуральную величину треугольника ABC .

По истинной величине треугольника находим точку \bar{K}' – центр описанной окружности. Для построения проекций K' и K'' использована прямая AE , проходящая через центр описанной окружности. Так, проекция K' находится в пересечении проекции $A'E'$ с плоскостью вращения точки K – горизонтально проецирующей плоскостью γ (γ').

След-проекция γ' перпендикулярна $A'D'$. Проекцию K'' построим с помощью линии связи как находящуюся на прямой AF .

Вопросы для контроля

1. Сформулируйте основные задачи преобразования чертежа.
2. Перечислите способы преобразования чертежа.
3. В чем заключается способ замены плоскостей проекций?
4. Как преобразовать заменой плоскостей проекций прямую общего положения в прямую уровня; проецирующую прямую?
5. Как заменой плоскостей проекций определить углы наклона к плоскостям проекций плоской фигуры, расположенной в плоскости общего положения?
6. Как заменой плоскостей проекций определить натуральную величину фигуры, плоскость которой занимает общее положение?
7. Как перемещаются проекции точки при вращении ее вокруг проецирующих осей?
8. В чем заключается способ плоскопараллельного перемещения?
9. Как располагается плоскость вращения точки при вращении ее вокруг горизонтали, фронтали?

Глава 6. МНОГОГРАННИКИ

6.1. Общие сведения о многогранниках

Одним из видов пространственных форм являются многогранники – замкнутые пространственные фигуры, ограниченные плоскими многоугольниками. Эти многоугольники образуют грани; общие стороны многоугольников называются *ребрами*; вершины многогранных углов, образованных его гранями, сходящихся в одной точке – *вершинами* многогранника.

Если вершины и ребра многогранника находятся по одну сторону от плоскости любой его грани, то многогранник называют выпуклым.

Наибольший практический интерес представляют собой призмы, пирамиды и правильные многогранники (тела Платона).

Призма – многогранник, две грани которого представляют равные многоугольники с взаимно параллельными сторонами (основаниями). Ребра, не принадлежащие основаниям и параллельные друг другу, называют боковыми. Призму, ребра которой перпендикулярны к основаниям, называют *прямой*. Прямая призма называется *правильной*, если ее основаниями являются правильные многоугольники.

Пирамида – многогранник, одна грань которого – плоский n -угольник (основание), а остальные грани – треугольники с общей вершиной. Если основанием пирамиды является правильный многоугольник и высота ее проходит через центр этого многоугольника, пирамиду называют *правильной*.

Многогранник называют *правильным*, если его грани представляют собой правильные и равные многоугольники. Гранями правильных многогранников могут быть только правильные треугольники, четырехугольники (квадраты) и пятиугольники.

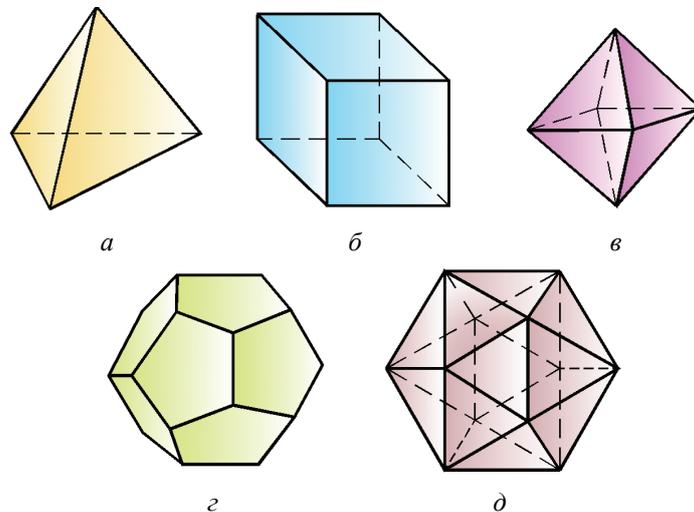


Рис. 6.1

Существует пять видов правильных многогранников (рис. 6.1):

1) правильный четырехгранник (тетраэдр) ограничен четырьмя равными правильными треугольниками. Представляет собой правильную пирамиду, основанием которой может быть выбрана любая из 4 граней (рис. 6.1, *a*);

2) правильный шестигранник (гексаэдр) ограничен 6 равными квадратами – это куб. Представляет собой частный случай правильной призмы (рис. 6.1, *б*);

3) правильный восьмигранник (октаэдр) ограничен 8 равносторонними и равными треугольниками (рис. 6.1, *в*);

4) правильный двенадцатигранник (додекаэдр) ограничен 12 правильными и равными пятиугольниками (рис. 6.1, з);

5) правильный двадцатигранник (икосаэдр) ограничен 20 равносторонними и равными треугольниками (рис. 6.1, д).

У всякого выпуклого многогранника число граней (Γ) плюс число вершин (B) минус число ребер (P) равно двум, т. е. $\Gamma + B - P = 2$.

6.2. Точка и прямая линия на поверхности многогранника

Грани многогранника представляют собой плоскости. Поэтому построение точек и прямых на поверхности многогранника сводится к построению точек и прямых линий на плоскости.

Точки на гранях призмы и пирамиды строятся при помощи вспомогательных прямых, принадлежащих соответствующим плоскостям граней.

Чтобы определить по данной проекции $1''$ точки 1, лежащей на грани AA_1BB_1 наклонной призмы, горизонтальную проекцию $1'$ (рис. 6.2), проводим через точку $1''$ фронтальную проекцию вспомогательной прямой DD_1 , параллельную ребрам призмы. Определив горизонтальную проекцию $D'D_1'$ вспомогательной прямой, по линии связи найдем горизонтальную проекцию $1'$.

Фронтальная проекция $2''$ точки 2, лежащей на грани BB_1CC_1 , построена с помощью вспомогательной прямой EF , проведенной через проекцию $2'$. Недостающую проекцию точки 3, расположенную на ребре AA_1 , определим с помощью линии связи.

Нахождение недостающих проекций точек, находящихся на боковой поверхности прямой призмы (рис. 6.3), упрощается, так как боковые грани призмы являются горизонтально проецирующими плоскостями. Так, горизонтальная проекция $1'$ точки 1, расположенной на грани AA_1BB_1 , находится на отрезке $A'B'$ ($A_1'B_1'$). Профильную проекцию точки 1 определим с помощью линий связи.

Горизонтальная проекция $2'$ точки 2, расположенной на боковом ребре BB_1 , совпадает с горизонтальной проекцией этого ребра. Профильную проекцию точки 2 построим при помощи горизонтальной линии связи.

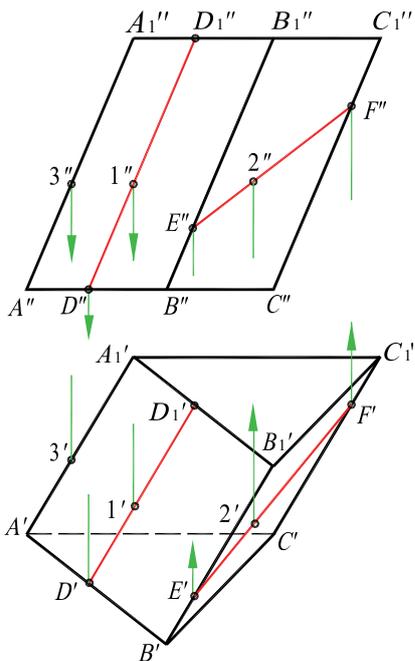


Рис. 6.2

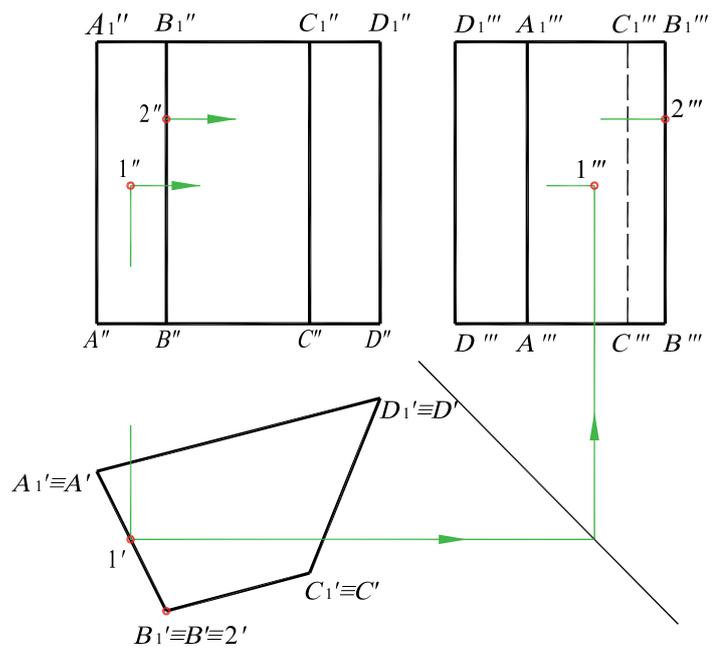


Рис. 6.3

На рис. 6.4 показано построение недостающих проекций точек, находящихся на боковой поверхности пирамиды $SABC$. Фронтальная проекция $1''$ точки 1, расположенная на грани SBC , представляющей собой профильно проецирующую плоскость, построена с помощью линий связи.

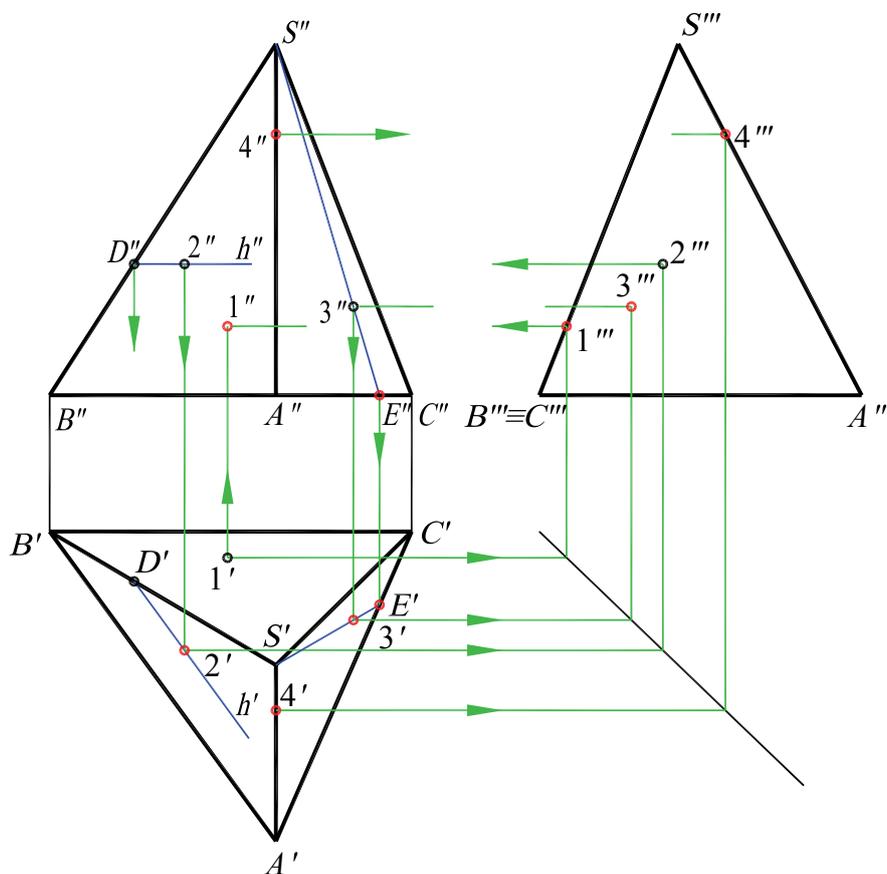


Рис. 6.4

Чтобы определить по заданной проекции $2''$ точки 2, лежащей на грани SAB , проекцию $2'$ (рис. 6.4), используем горизонталь h . Фронтальная проекция горизонтали h'' проведена через проекцию $2''$ до пересечения с проекцией $B''S''$ ребра BS в точке D'' . Горизонтальная проекция h' горизонтали h проходит через точку D' параллельно проекции $A'B'$ стороны AB .

Чтобы определить по заданной проекции $3''$ точки 3, расположенной на грани SAC , проекцию $3'$, используем прямую SE . Фронтальная проекция $S''E''$ проведена через проекцию $3''$. Построив горизонтальную проекцию $S'E'$, по линии связи найдем $3'$. Фронтальная проекция $4''$ точки 4, расположенной на ребре SA , построена с помощью линий связи сначала на профильной проекции ребра $S'''A'''$, а затем на фронтальной $S'A'$.

6.3. Пересечение многогранников плоскостью. Развертка поверхности многогранника

6.3.1. Общие сведения

При пересечении многогранника плоскостью в сечении получается многоугольник, вершинами которого являются точки пересечения ребер многогранника плоскостью, а сторонами – отрезки прямых, по которым грани многогранника пересекаются этой плоскостью.

Определение вершин многоугольника сводится к построению точек пересечения прямых (ребер многогранника) с плоскостью – *способ ребер*.

При определении сторон многоугольника решаются задачи на пересечение двух плоскостей – *способ граней*.

Разверткой называется фигура, полученная при совмещении поверхности геометрического тела с плоскостью (без наложения элементов поверхности друг на друга).

Развертки необходимы при изготовлении изделий из листового материала.

6.3.2. Пересечение многогранника проецирующей плоскостью

На рис. 6.5, *а* показано построение проекций линии пересечения прямой четырехугольной призмы фронтально проецирующей плоскостью α (α'').

Пересечение следа-проекции α'' с фронтальными проекциями боковых ребер призмы дает проекции $1''$, $2''$, $3''$, $4''$ вершин многоугольника сечения. Горизонтальные проекции этих вершин совпадают с «вырожденными» проекциями соответствующих ребер, так как призма прямая. Профильные проекции $1'''$, $2'''$, $3'''$, $4'''$ вершин определим при помощи горизонтальных линий связи на соответствующих проекциях ребер призмы.

Натуральная величина многоугольника сечения найдена способом плоскопараллельного перемещения. Переместим фронтальную проекцию сечения в горизонтальное положение. Проекция $1'2'3'4'$ – натуральная величина многоугольника сечения.

Развертка боковой поверхности призмы состоит из четырех прямоугольников, у которых одна сторона равна высоте призмы, а другие стороны равны сторонам основания призмы. Достроив к сторонам прямоугольника верхнее и нижнее основание призмы, получим полную развертку ее поверхности (рис. 6.5, *б*).

Для построения развертки боковой поверхности усеченной призмы наносим на развертку точки 1_0 , 2_0 , 3_0 , 4_0 , расположенные на соответствующих ребрах. Чтобы получить полную развертку усеченной части призмы, к одному из участков линии пересечения (3_04_0) пристраиваем натуральную величину сечения.

Развертку усеченной части призмы обводим сплошной толстой основной линией, линии сгиба – на развертке – штрихпунктирной с двумя точками линией.

На рис. 6.6, *а* приведено построение проекций линии пересечения четырехугольной пирамиды $SABC$ фронтально проецирующей плоскостью α (α'').

Фронтальные проекции $1''$, $2''$, $3''$, $4''$ вершин многоугольника сечения находятся в пересечении следа-проекции α'' плоскости α с фронтальными проекциями боковых ребер пирамиды. Проекции $2''$ и $3''$ точек 2 и 3, лежащих на ребрах SB и SC , совпадают, так как грань SBC является фронтально проецирующей плоскостью. Горизонтальные и профильные проекции точек 1, 2, 3, 4 определяются по линиям связи на соответствующих ребрах пирамиды.

Натуральная величина многоугольника сечения найдена способом перемены плоскостей проекций. Это четырехугольник $1^{IV} 2^{IV} 3^{IV} 4^{IV}$.

Развертка боковой поверхности пирамиды состоит из четырех треугольников – боковых граней пирамиды.

Одна из сторон треугольников определяется величиной, соответствующей горизонтальной проекции ребра основания пирамиды, поскольку основание пирамиды занимает горизонтальное положение.

Из боковых ребер пирамиды ребро AS параллельно фронтальной плоскости и проекция $A''S''$ – его истинная величина. Для определения натуральной величины других боковых ребер используем способ вращения вокруг оси, проходящей через вершину S перпендикулярно плоскости π_1 .

Поворачиваем ребра SB , CS , SD до положения, параллельного плоскости π_2 . Длины проекций $S''B''$, $C''S''$, $S''D''$ являются натуральными длинами соответствующих ребер.

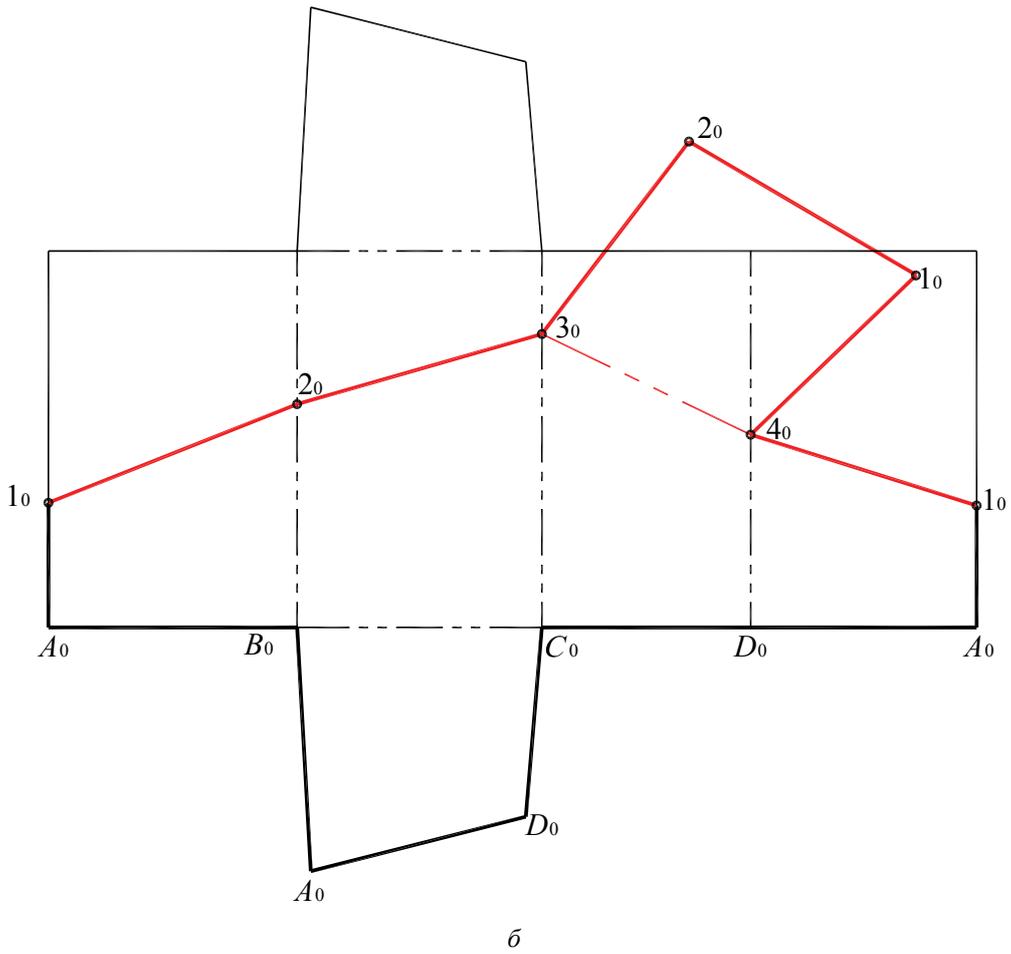
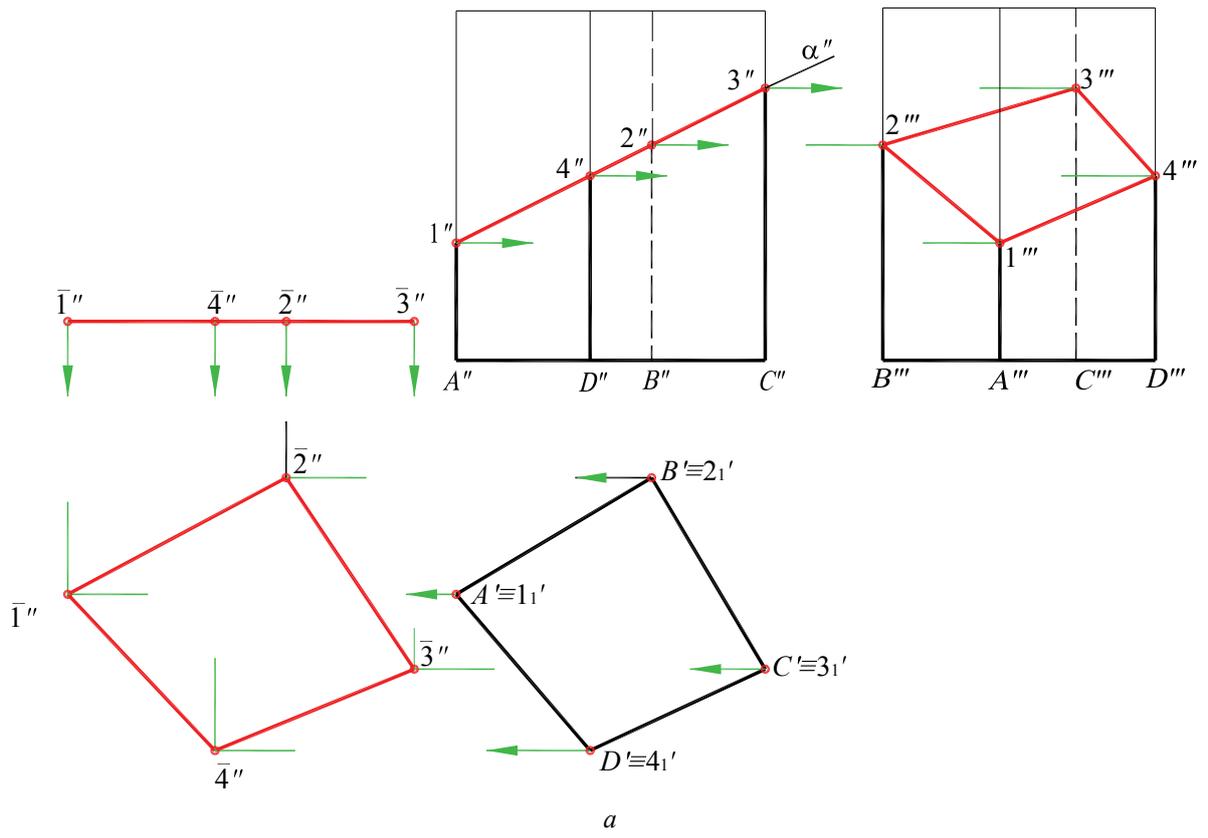
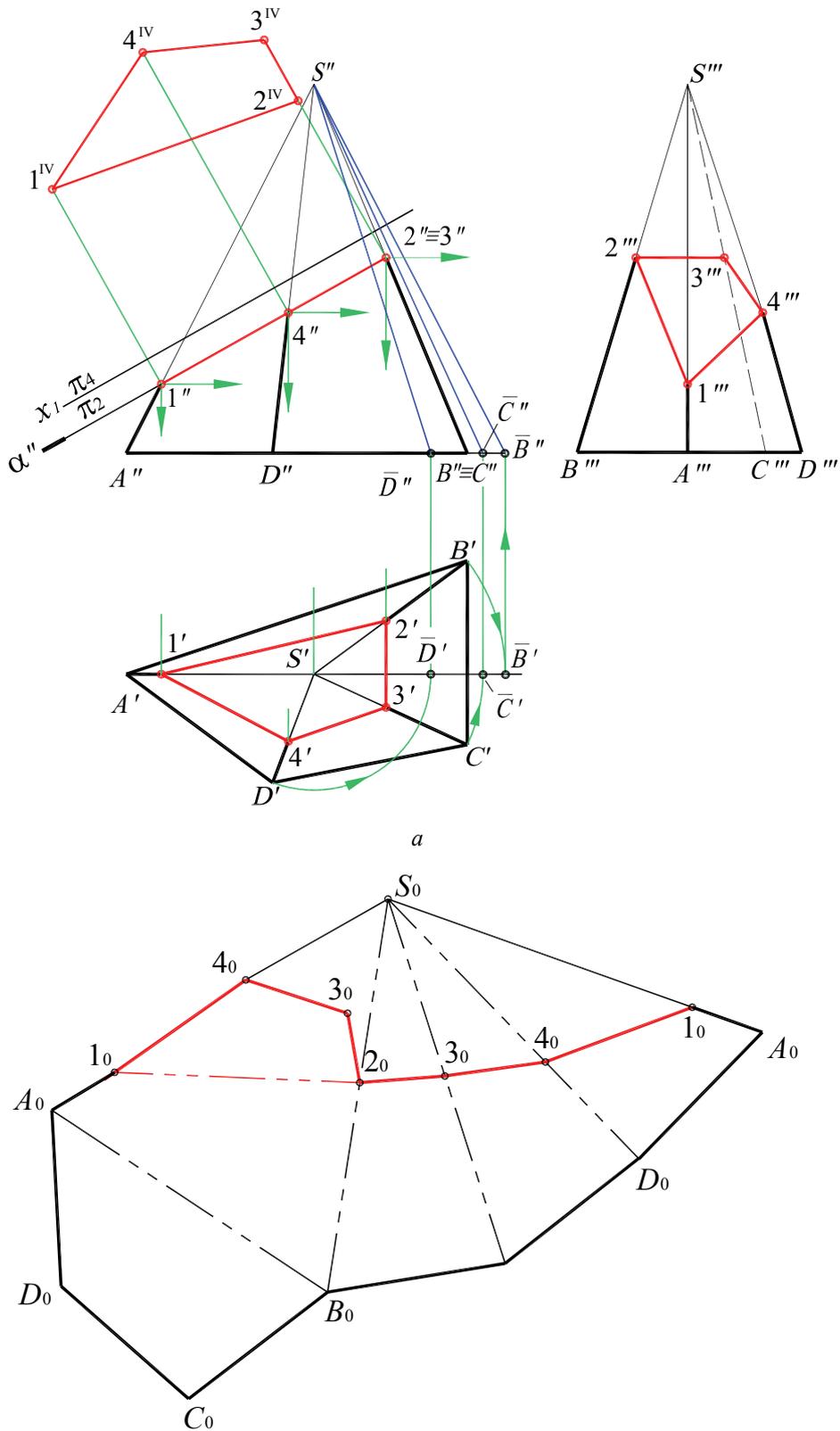


Рис. 6.5

На рис. 6.6, б представлено построение полной развертки усеченной части пирамиды. Вначале на плоскости чертежа строим треугольники – боковые грани пирамиды – по трем сторонам, последовательно пристраивая треугольники друг к другу боковыми ребрами.



б
Рис. 6.6

Пристроив к стороне A_0B_0 одного из треугольников четырехугольное основание пирамиды, получим полную развертку ее поверхности.

Чтобы выделить на развертке усеченную часть пирамиды, находим положение вершины 1_0 фигуры сечения на ребре A_0S_0 . Зная натуральную величину многоугольника сечения $1^{IV} 2^{IV} 3^{IV} 4^{IV}$, последовательно засекаем на ребрах развертки точки $2_0, 3_0$ и 4_0 , используя величину сторон многоугольника сечения. Полученные на развертке точки соединяем отрезками прямых. Пристраиваем затем натуральную величину сечения $1^{IV} 2^{IV} 3^{IV} 4^{IV}$ к одному из участков линии пересечения ($1_0 2_0$). Полученную полную развертку поверхности усеченной пирамиды обводим сплошной толстой основной линией, а линии сгиба – штрихпунктирной с двумя точками линией.

6.3.3. Пересечение многогранника плоскостью общего положения

При решении задач на построение проекций фигуры сечения многогранника плоскостью общего положения применяются вспомогательные плоскости, которые проводят через грани или ребра многогранника. В качестве вспомогательных плоскостей используют плоскости частного положения.

На рис. 6.7 приведено построение проекций линии пересечения прямой треугольной призмы плоскостью общего положения. Плоскость задана двумя пересекающимися прямыми DE и EF ($DE \parallel \pi_1, EF \parallel \pi_2$).

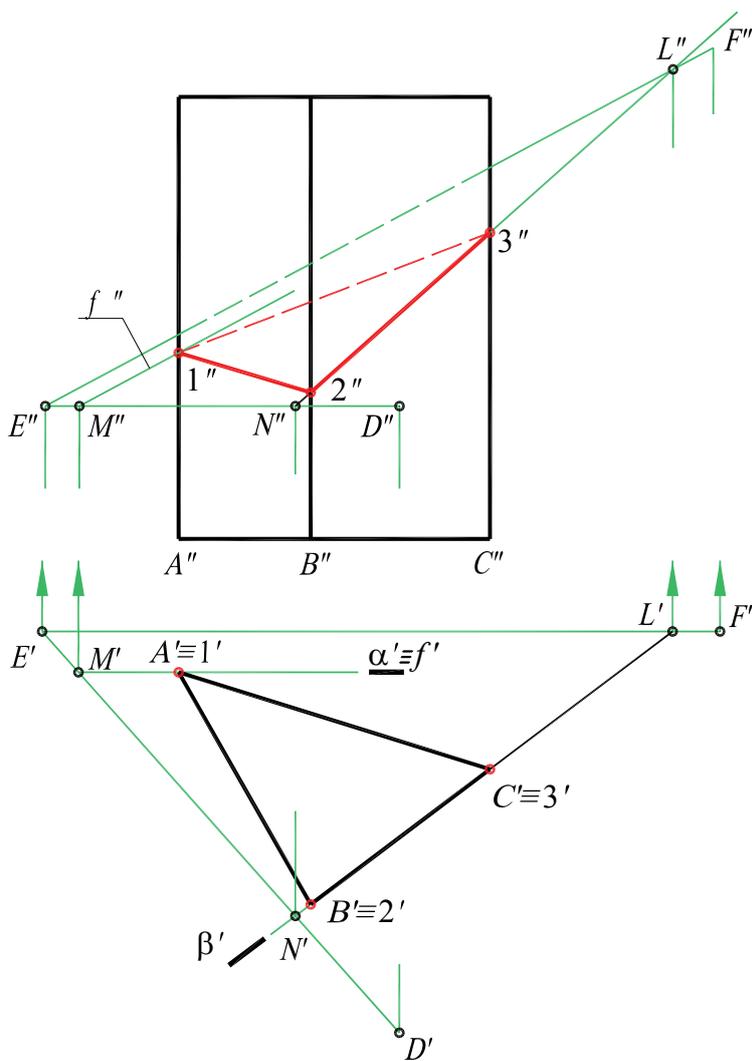


Рис. 6.7

Так как боковые грани призмы являются горизонтально проецирующими плоскостями, то горизонтальная проекция $1'2'3'$ линии пересечения совпадает с горизонтальными проекциями самих граней.

Фронтальную проекцию $1''$ точки пересечения ребра A с заданной плоскостью определим при помощи фронтальной плоскости α (α'), проходящей через это ребро.

Плоскость α пересекает заданную плоскость по фронтале f , параллельной прямой EF . Фронталь f проходит через точку M прямой ED . В пересечении проекции f'' с фронтальной проекцией ребра находится проекция $1''$. Для построения фронтальной проекции $2''3''$ линии пересечения грани BC призмы с заданной плоскостью заключаем грань во вспомогательную горизонтально проецирующую плоскость β (β'). Плоскость β пересекает заданную по прямой NL ($N'L'$, $N''L''$), на фронтальной проекции которой находится $2''3''$.

$1''2''3''$ – фронтальная проекция искомой фигуры сечения. Фронтальная проекция $1''3''$ отрезка $1-3$ расположена на невидимой грани и показана штриховой линией.

Для построения фигуры сечения многогранника плоскостью общего положения можно использовать один из способов преобразования чертежа, позволяющий преобразовать плоскость общего положения в проецирующую.

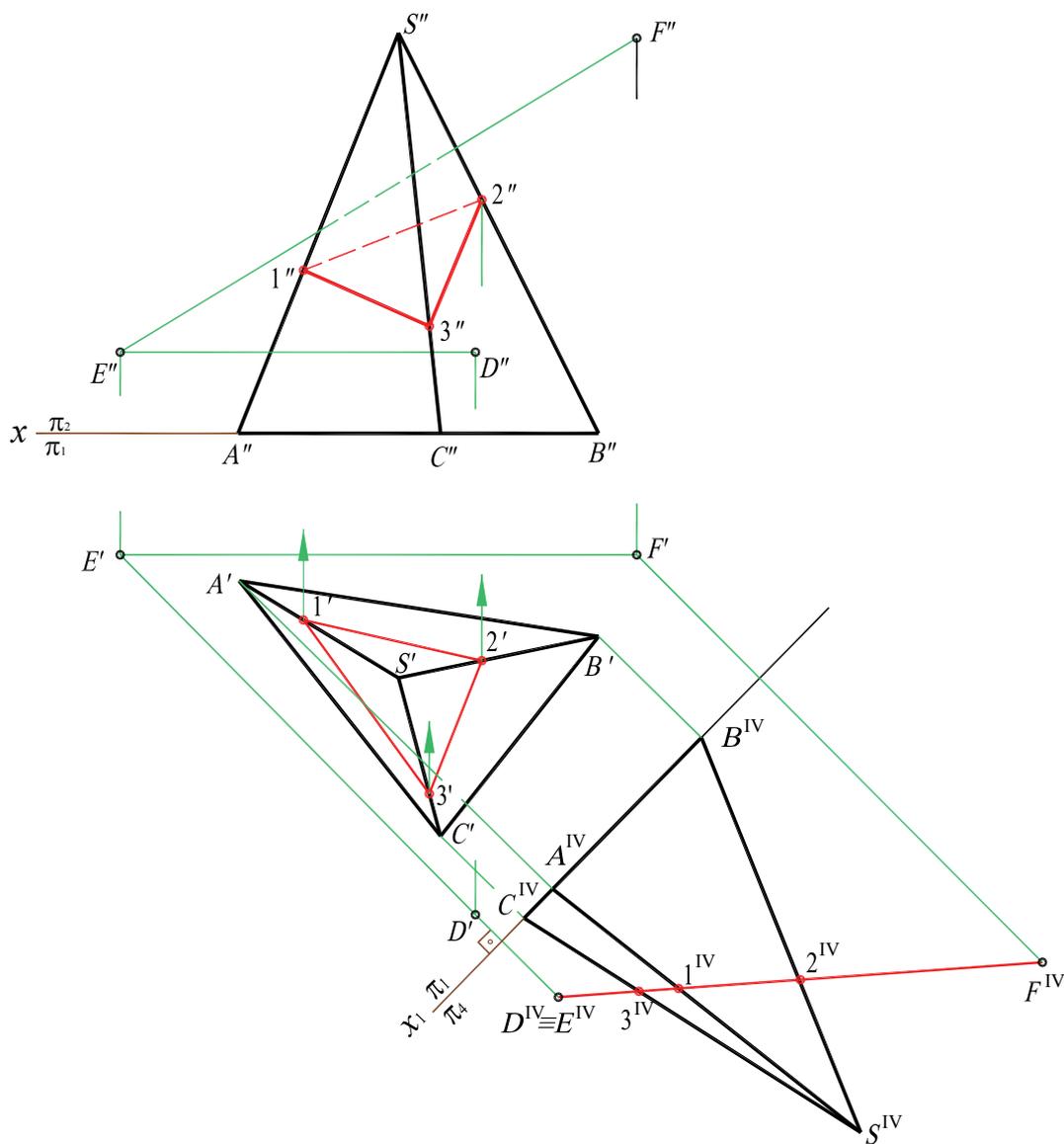


Рис. 6.8

На рис. 6.8 дано построение проекций линий пересечения пирамиды $SABC$ плоскостью общего положения, заданной двумя пересекающимися прямыми – горизонталью ED и фронталью EF .

Построение выполнено при помощи способа перемены плоскостей проекций. Дополнительная плоскость проекций π_4 , перпендикулярная плоскости π_1 , выбрана перпендикулярно горизонтали DE . При этом новая ось проекций x_1 будет расположена перпендикулярно к проекции $D'E'$.

На плоскости π_4 получим проекцию пирамиды $S^{IV}A^{IV}B^{IV}C^{IV}$, а секущая плоскость спроецируется в виде прямой, т. е. станет перпендикулярной π_4 .

На следе-проекции секущей плоскости будет находиться проекция линии пересечения $1^{IV}2^{IV}3^{IV}$.

Точка 1 расположена на ребре SA , точка 2 – на SB , точка 3 – на SC .

Путем обратного проецирования на плоскость π_1 и плоскость π_2 построим горизонтальную $1'2'3'$ и фронтальную $1''2''3''$ проекции линии пересечения.

Фронтальная проекция $1''2''$ отрезка 1–2 расположена на невидимой грани пирамиды.

6.4. Примеры решения задач

Задача 1. Правильная треугольная призма усечена двумя плоскостями: горизонтально проецирующей α (α') и фронтально проецирующей β (β'') (рис. 6.9). Построить профильную проекцию усеченной призмы.

Решение. Плоскость α пересекает верхнее основание призмы по прямой 4–5, а боковую поверхность – по горизонтально проецирующим прямым 1–5 и 3–4. Прямая 1–5 совпадает с ребром A призмы.

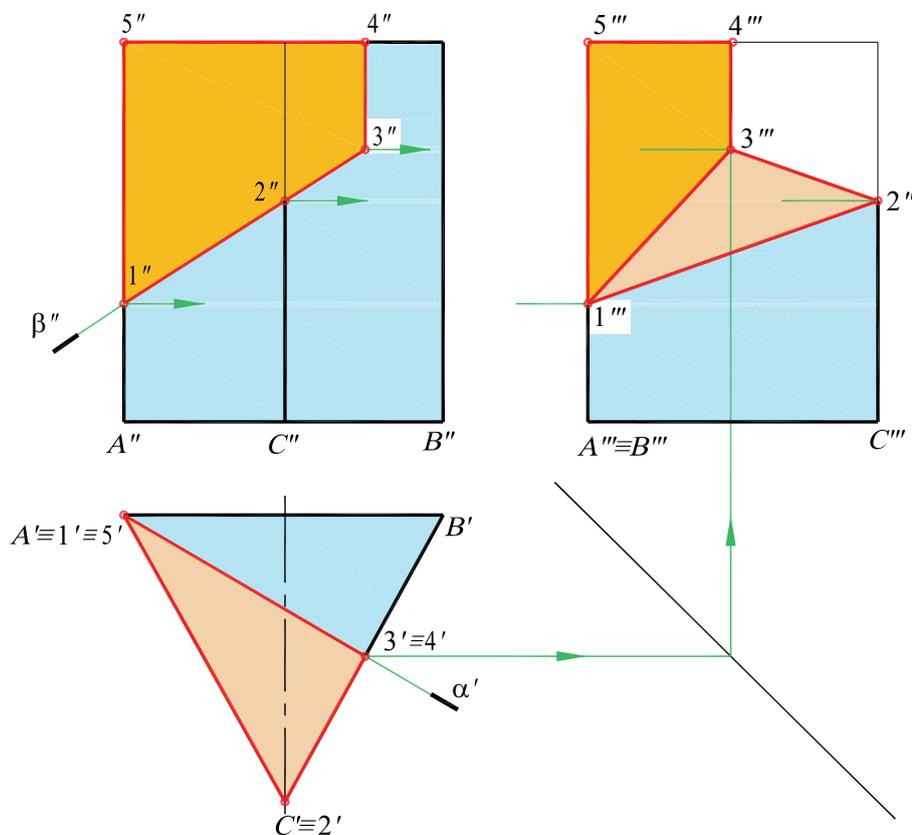


Рис. 6.9

Плоскость β пересекает ребро A призмы в точке 1, а ребро C – в точке 2.
 Плоскости α и β пересекаются по линии 1–3.
 Профильные проекции указанных выше точек определяются при помощи линий связи.
 Соединив построенные точки, получим профильную проекцию линии пересечения.

Задача 2. Правильная треугольная пирамида усечена двумя плоскостями: фронтально проецирующей α (α'') и профильной β (β'') (рис. 6.10). Построить недостающие проекции усеченной пирамиды.

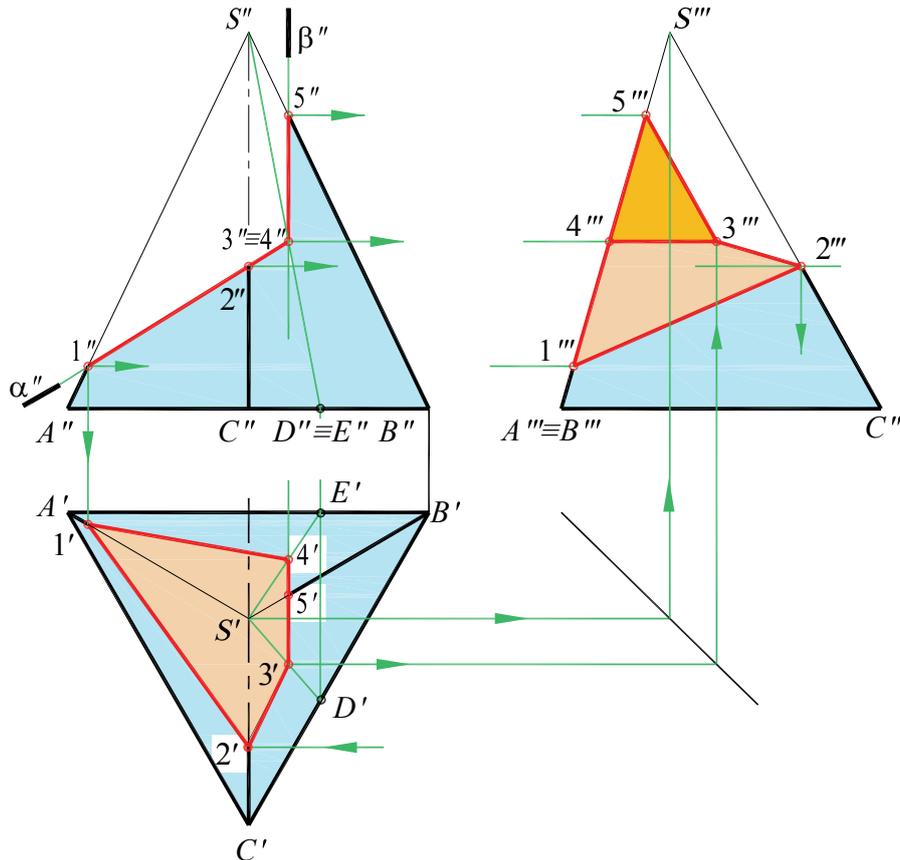


Рис. 6.10

Решение. Плоскость α пересекает грань SAC по отрезку 1–2, грань SBC по отрезку 2–3, грань SAB по отрезку 1–4.

Плоскость β пересекает грань SBC по отрезку 3–5, а грань SAB по отрезку 4–5. При построении проекций точек, принадлежащих линии пересечения, следует учитывать, что профильные проекции $S'''A'''$ и $S'''B'''$ совпадают, так как грань SAB пирамиды является профильно проецирующей плоскостью.

Недостающие проекции точки 1, расположенной на ребре SA , и точки 5, расположенной на ребре SB , построены при помощи линий связи.

Проекция точки 2, расположенной на ребре SC , определены при помощи линий связи сначала на профильной проекции ребра, а затем на горизонтальной.

Для построения горизонтальных проекций точек 3 и 4 через их фронтальную проекцию проведены вспомогательные прямые SD и SE , принадлежащие соответственно граням SBC и SAB .

Построив горизонтальные проекции $S'D'$ и $S'E'$ этих прямых, по линии связи определим горизонтальные проекции точек 3 и 4, а затем и их профильные проекции.

Плоскости α и β пересекаются по фронтально проецирующей прямой 3–4. Соединив построенные проекции точек, получим проекции линии пересечения.

Вопросы для контроля

1. Какая фигура называется многогранником?
2. Дайте определение призмы, пирамиды, правильного многогранника.
3. Как определить недостающую проекцию точки на поверхности многогранника?
4. Что представляет собой сечение многогранника плоскостью?
5. В чем различие способа ребер и способа граней?
6. Как используется способ перемены плоскостей проекций при построении сечения многогранника плоскостью?

Глава 7. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О КРИВЫХ ЛИНИЯХ И КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

7.1. Кривые линии и их проекции

Линию можно рассматривать как множество последовательных положений движущейся точки – траекторию точки.

Кривая – разновидность линии, которая получается, когда движущая точка изменяет направление своего движения. Кривая линия может являться результатом пересечения кривой поверхности плоскостью или кривых поверхностей между собой.

В начертательной геометрии кривые линии изучаются по их проекциям. Если все точки кривой лежат в одной плоскости, кривую называют плоской, в противном случае – пространственной. Чтобы установить по чертежу, какая задана кривая (плоская или пространственная), необходимо определить, принадлежат ли все точки кривой одной плоскости.

Заданная на рис. 7.1 кривая линия m (m' , m'') – пространственная, так как точки A , B , C , D не принадлежат одной плоскости (прямые AC и BD , которые соединяют точки A и C , B и D , лежащие на кривой m , являются скрещивающимися).

Кривые линии разделяют на алгебраические (определяемые в декартовых координатах алгебраическими уравнениями) и трансцендентные (определяемые неалгебраическими уравнениями).

Порядком алгебраической кривой называют наибольшую степень ее уравнения. Геометрический порядок плоской кривой определяется наибольшим числом точек пересечения ее с прямой линией, а пространственной кривой – наибольшим числом точек пересечения ее с плоскостью. При проецировании порядок алгебраической кривой в общем случае сохраняется.

Все плоские кривые разделяются на циркульные, состоящие из сопряженных дуг окружностей (их проводят при помощи циркуля), и лекальные, вычерчиваемые с помощью лекала по предварительно построенным точкам.

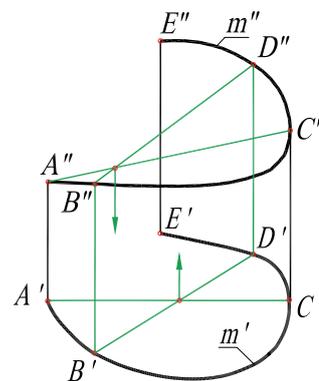


Рис. 7.1

7.2. Некоторые кривые, часто встречающиеся в практике

Рассмотрим построение некоторых плоских алгебраических кривых (эллипса, гиперболы, параболы), трансцендентных (спирали Архимеда, эвольвенты окружности, синусоиды), а также пространственных винтовых линий.

Эллипс (рис. 7.2) – плоская замкнутая кривая, у которой сумма расстояний от любой ее точки (например от точки M) до двух заданных точек F_1 и F_2 (фокусов эллипса) есть величина постоянная, равная большей оси эллипса AB ($F_1M + F_2M = AB$). Отрезок CD – малая ось эллипса, точка O – центр эллипса. Точки F_1 и F_2 расположены на большей оси AB симметрично относительно точки O и удалены от концов малой оси (точек C и D) на расстояние, равное половине большей оси эллипса.

Существует ряд способов построения эллипса. Наиболее просто построить эллипс по двум его осям при помощи вспомогательных окружностей (рис. 7.3).

Из центра проводят две окружности радиусами, равными половине большей и малой осей. Большую окружность делят на 12 равных частей и точки деления соединяют с точкой O .

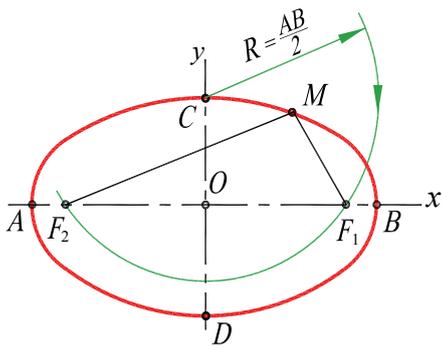


Рис. 7.2

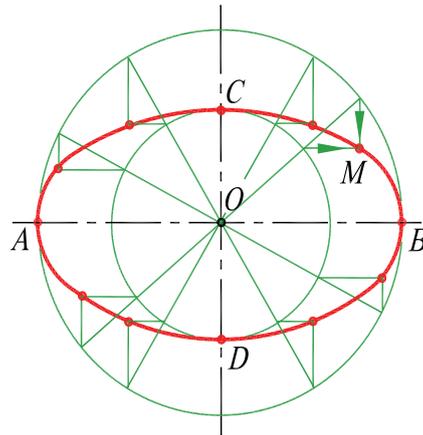


Рис. 7.3

Через точки деления меньшей окружности проводят прямые, параллельные большой оси эллипса, а через точки деления большей окружности – прямые, параллельные малой оси. Точки пересечения (например, точка M) соединяют плавной кривой.

Окружность – частный вид эллипса, у которого полуоси равны между собой и являются радиусом окружности.

Гипербола (рис. 7.4) – кривая, у которой разности расстояний от любой ее точки (например от точки M) до двух заданных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная AB . Гипербола имеет две ветви, действительную ось x и мнимую ось y , центр O , вершины A и B .

На рис. 7.4 показано построение точки M гиперболы по действительной оси AB и фокусам F_1 и F_2 . Из фокусов, как из центров, проводим дуги окружностей соответственно радиусом R и $R + AB$. Точка их пересечения является точкой гиперболы. Изменяя радиус R и повторяя построения, получаем новые точки гиперболы.

Парабола (рис. 7.5) – кривая, каждая точки которой (например точка M) равноудалена от заданной точки F (фокуса) и прямой d (директриссы) ($FM = NM$). Расстояние FO от фокуса F до директриссы d – параметр параболы (P), x – ось параболы, точка A – вершина параболы.

На рис. 7.5 показано построение точки M параболы по заданным фокусу (F) и директриссе (d). Из фокуса F делаем засечку дугой радиуса R на прямой, удаленной от директриссы d на расстояние R , причем $R > P/2$. Изменяя величину R и повторяя построения, получаем новые точки параболы.

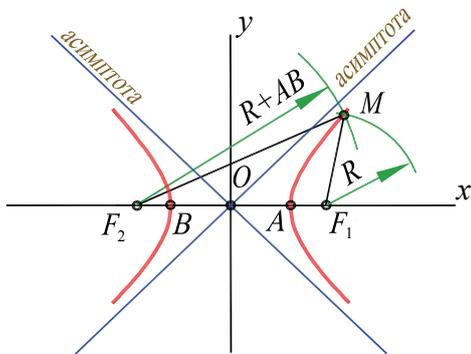


Рис. 7.4

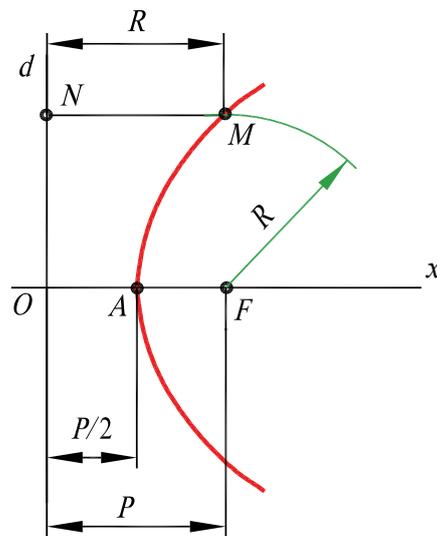


Рис. 7.5

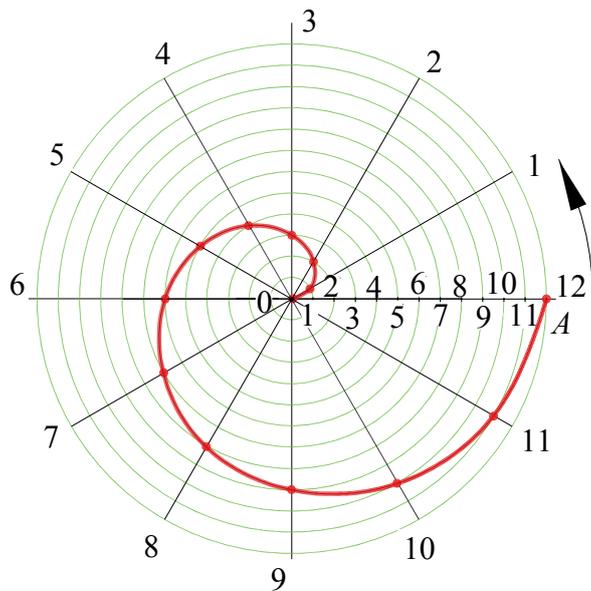


Рис. 7.6

Спираль Архимеда (рис. 7.6) – кривая, которую описывает точка, равномерно вращающаяся вокруг неподвижной точки (полюса O) и одновременно равномерно удаляющаяся от него. Расстояние OA , пройденное точкой от полюса O при повороте на 360° – шаг спирали.

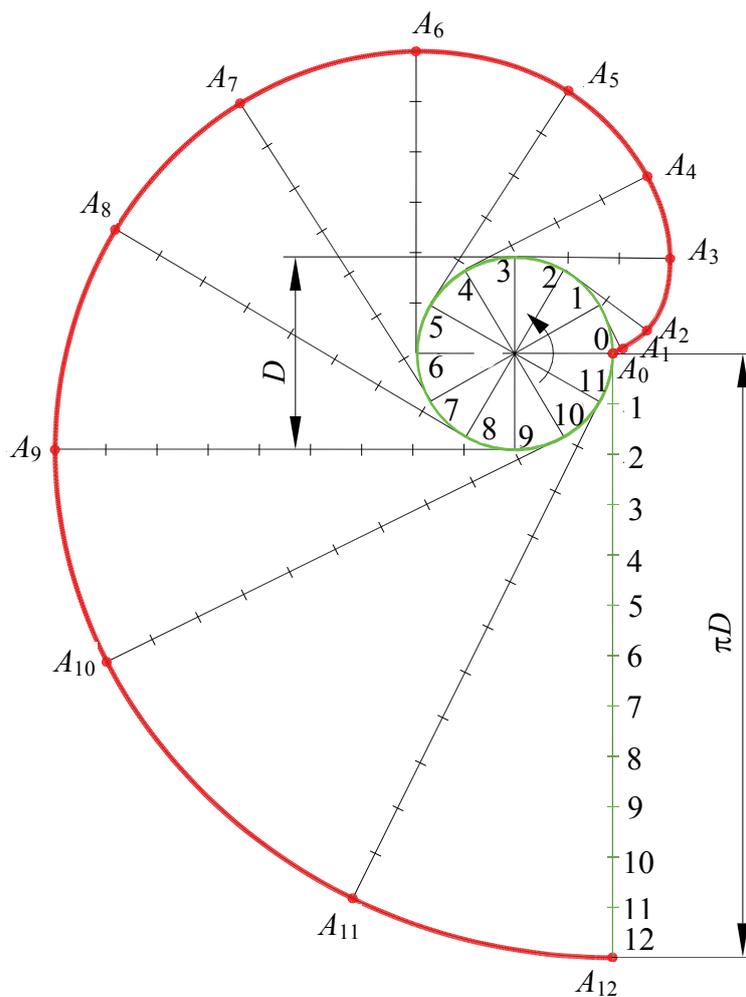


Рис. 7.7

Точки, принадлежащие спирали Архимеда, строят исходя из определения кривой, задаваясь шагом OA и направлением вращения.

Эвольвента окружности (рис. 7.7) – кривая, образуемая точками касательной прямой, катящейся без скольжения по неподвижной окружности.

На рис. 7.7 показано построение эвольвенты окружности диаметра D в указанном направлении и начальном положении точки A (точка A_0).

Через точку A_0 проводим касательную к окружности и на ней откладываем длину заданной окружности πD . Полученный отрезок и окружность делят на одинаковое число частей (12) и через точки деления окружности проводят в одном направлении касательные к ней. На каждой касательной откладывают отрезки $1A_1, 2A_2, 3A_3$ и т. д., равные соответственно A_01, A_02, A_03 и т. д. Полученные точки соединяем плавной кривой.

Синусоида (рис. 7.8) – кривая, характеризующая изменение синуса угла в зависимости от величины центрального угла.

Расстояние между крайними точками синусоиды по высоте, равное диаметру производящей окружности, называется амплитудой. Расстояние $T = 2\pi R$ – шаг синусоиды. Построение точек синусоиды ($A, A_1, A_2, \dots, A_{12}$) показано на рис. 7.8.

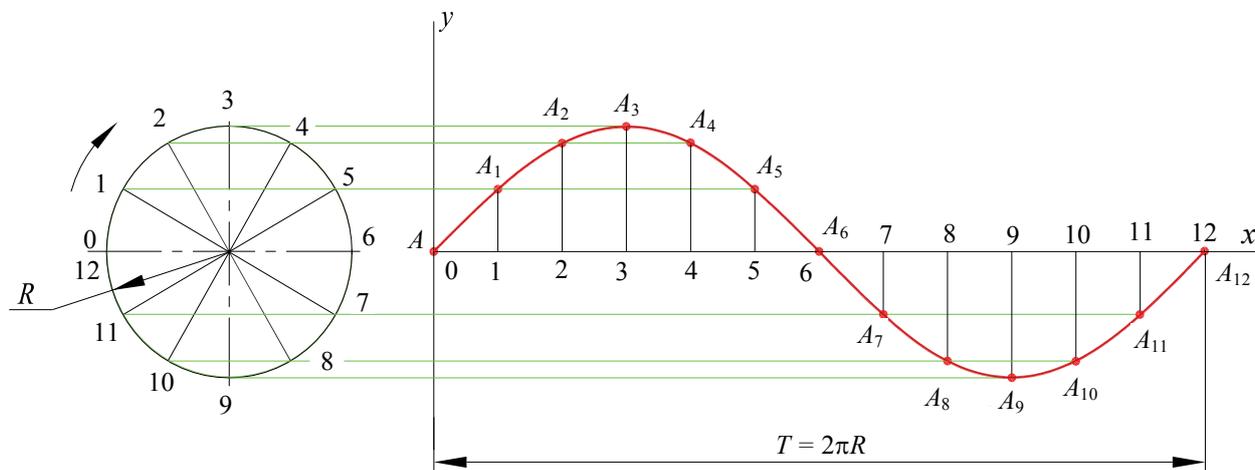


Рис. 7.8

Цилиндрическая винтовая линия (гелиса) – пространственная кривая, которая образуется на поверхности цилиндра вращения в результате двойного равномерного движения точки – вращения вокруг оси цилиндра и поступательного движения вдоль образующей цилиндра (рис. 7.9).

Шаг винтовой линии (P) – расстояние между двумя ее соседними витками в направлении, параллельном оси. Для построения цилиндрической винтовой линии делим окружность основания цилиндра и шаг P винтовой линии на равное число частей (12). Определяем соответствующие фронтальные проекции перемещаемой точки (A_0, A_1, \dots, A_0) и соединяем их плавной кривой.

Горизонтальная проекция цилиндрической винтовой линии – окружность, а фронтальная – синусоида. Разверткой цилиндрической винтовой линии ($A_0, A_1, A_2, \dots, A_0$) является прямая.

Угол φ – угол подъема винтовой линии:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{P}{2\pi R}.$$

Различают правые и левые винтовые линии. У правой подъем слева вверх направо, у левой – справа вверх налево.

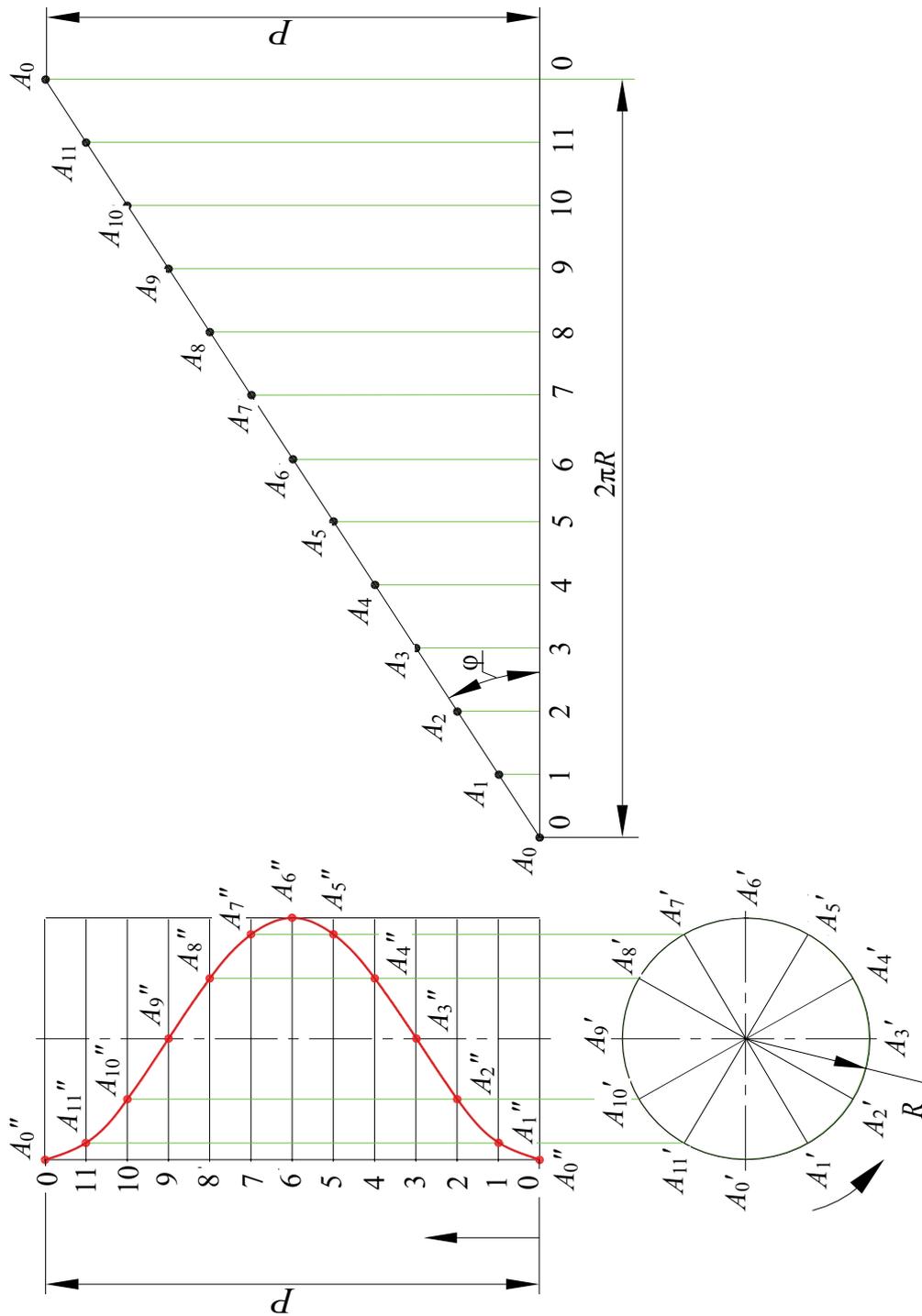


Рис. 7.9

Коническая винтовая линия (рис. 7.10) – пространственная кривая, которая образуется на поверхности конуса вращения в результате двойного равномерного движения точки – вращения вокруг оси конуса и поступательного движения вдоль образующей конуса.

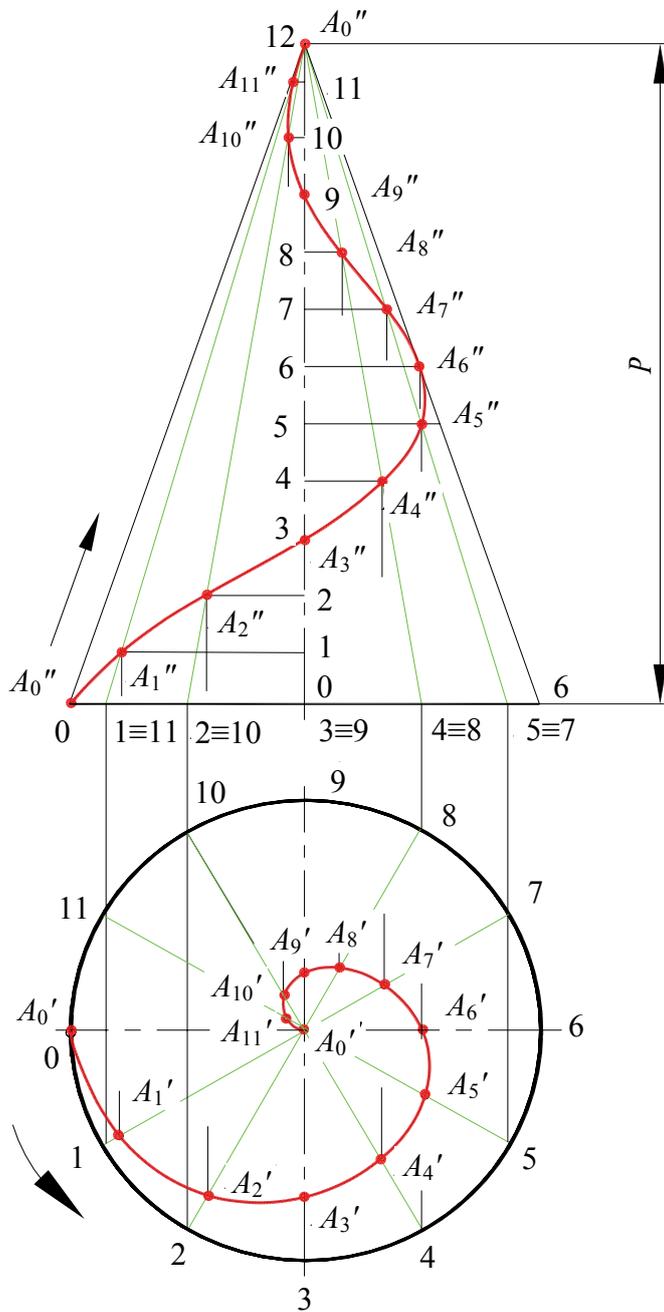


Рис. 7.10

Шаг конической винтовой линии (P) – величина прямолинейного перемещения точки в направлении оси конуса при полном обороте вокруг оси.

Для построения проекций конической винтовой линии разделим окружность основания конуса и шаг P на равное число частей (12). Проводим проекции образующих конуса, определяем на них положение соответствующих проекций точек $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{11}$ и соединяем их плавной кривой.

Горизонтальная проекция винтовой линии – спираль Архимеда, а фронтальная – затухающая синусоида (синусоида с уменьшающейся амплитудой).

7.3. Образование и классификация кривых поверхностей

Различают три основных способа задания поверхности:

- аналитический (поверхность задается уравнением);
- каркасный (поверхность задается совокупностью точек или линий);
- кинематический (поверхность образуется непрерывным перемещением в пространстве какой-либо линии поверхности).

В начертательной геометрии в основном рассматривается кинематический способ образования поверхности.

Перемещающаяся в пространстве линия или поверхность, которая при движении может сохранять или изменять свою форму, называется *образующей*.

Закон перемещения образующей обычно определяется другими линиями (иногда точками), называемыми *направляющими*, по которым скользит образующая при своем движении, а также условием движения образующей.

Совокупность геометрических элементов и условий, которые определяют поверхность в пространстве, называют *определителем*.

Следует отметить, что одна и та же поверхность может быть получена различными способами. Например, цилиндрическую поверхность получают в результате перемещения прямолинейной образующей по кривой направляющей или движением кривой образующей по прямолинейной направляющей.

Для большей наглядности изображения поверхностей в ряде случаев используют ее *очерк* – границы видимости на плоскостях проекций. Очерк проекции получается при пересечении с плоскостью проекций проецирующей поверхности, обертывающей данную. Например, очерком сферы является окружность радиуса, равного радиусу сферы.

В зависимости от формы образующей поверхности разделяются на *линейчатые* (образующая – прямая линия) и *нелинейчатые* (криволинейная образующая).

Линейчатые поверхности называются *развертывающимися*, если их можно совместить с плоскостью без разрывов и складок. *Неразвертывающиеся* поверхности не могут быть совмещены с плоскостью без наличия разрывов и складок.

Поверхности с постоянной образующей – поверхности, образующая которых не изменяет своей формы при образовании поверхности. Поверхности с переменной образующей – поверхности, образующая которых изменяется при образовании поверхности.

В зависимости от формы образующей и закона ее перемещения в пространстве поверхности можно условно разделить на группы, указанные на рис. 7.11.

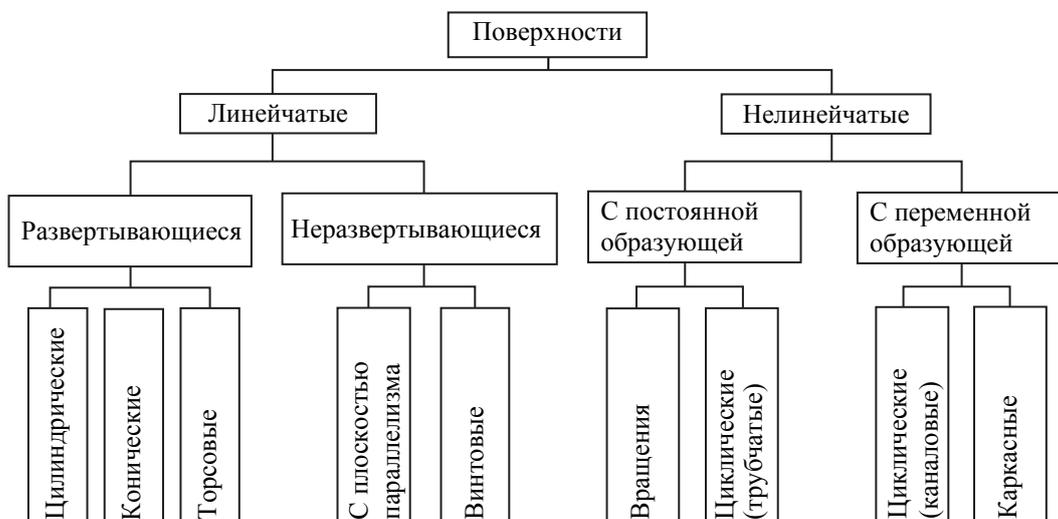


Рис. 7.11

7.4. Линейчатые поверхности

Цилиндрическая поверхность (рис. 7.12) образуется движением прямой линии l (образующей), пересекающей кривую линию m (направляющую) и имеющей постоянное направление S .

Коническая поверхность (рис. 7.13) образуется движением прямой линии l (образующей), пересекающей кривую m (направляющую) и проходящей во всех своих положениях через неподвижную точку S (вершину конической поверхности).

При задании цилиндрических и конических поверхностей на чертеже в качестве направляющей часто используют линию пересечения поверхности с одной из плоскостей проекций.

На рис. 7.12 показано построение линии пересечения заданной цилиндрической поверхности с горизонтальной плоскостью проекций. Образующая l (l_1, l_2, l_3, l_4) при своем движении, пересекаясь с плоскостью проекций π_1 , дает точки M_1, M_2, M_3, M_4 . Кривая, проведенная через эти точки, является линией пересечения (следом) цилиндрической поверхности с плоскостью проекций π_1 .

На рис. 7.13 показано построение линии пересечения конической поверхности с горизонтальной плоскостью проекций.

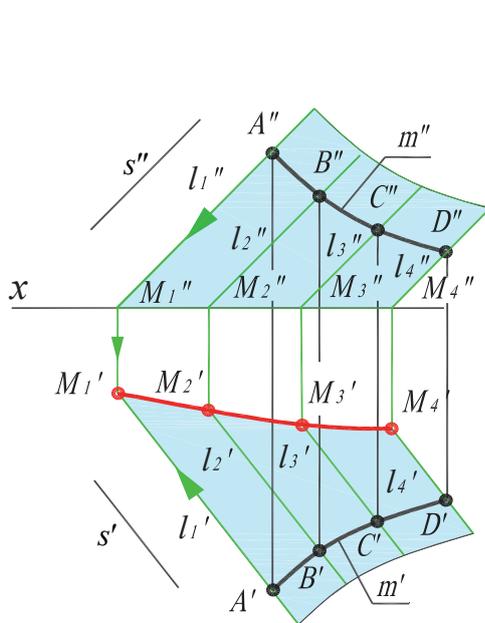


Рис. 7.12

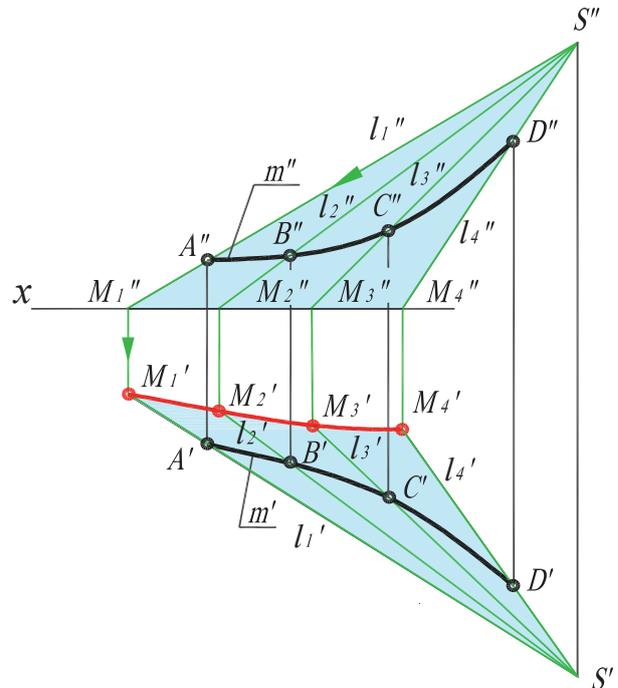


Рис. 7.13

Цилиндрическая поверхность является частным случаем конической, у которой вершина S удалена в бесконечность.

Торсовая поверхность (поверхность с ребром возврата) образуется движением прямолинейной образующей l , во всех своих положениях касающейся некоторой пространственной кривой m (рис. 7.14).

Образующая занимает положения l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 касательно кривой m (ребра возврата) в точках A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 .

Коническую и цилиндрическую поверхности можно рассматривать как частные случаи тора, когда ее ребро возврата вырождается в точку (конечную или бесконечно удаленную).

Цилиндрическая, коническая и торсовая поверхности являются *развертывающимися*.

Поверхности с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана) образуются движением прямолинейной образующей, параллельной некоторой заданной плоскости (плоскости параллелизма) и пересекающей две заданные линии (направляющие).

Цилиндроиd (рис. 7.15) получают движением прямолинейной образующей l (l_1, l_2, l_3, l_4) по двум криволинейным направляющим m и n , причем во всех положениях образующая остается параллельной плоскости параллелизма π_1 .

Коноиd (рис. 7.16) образуется движением прямолинейной образующей l (l_1, l_2, l_3, l_4) по двум направляющим, из которых одна m – кривая, а другая n – прямая. При этом во всех положениях образующая остается параллельной плоскости параллелизма π_1 (направляющая n – горизонтально проецирующая).

Косая плоскость (гиперболический параболоид) образуется движением прямолинейной образующей l (l_1, l_2, l_3, l_4) по двум направляющим – скрещивающимся прямым линиям (m и n) – параллельно плоскости параллелизма π_1 (рис. 7.17).

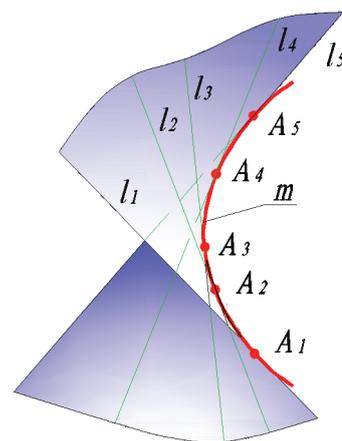
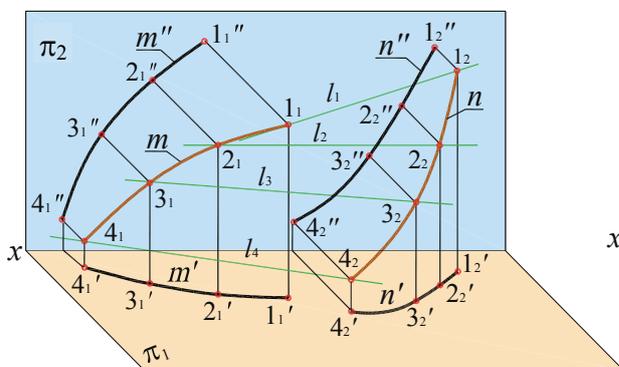
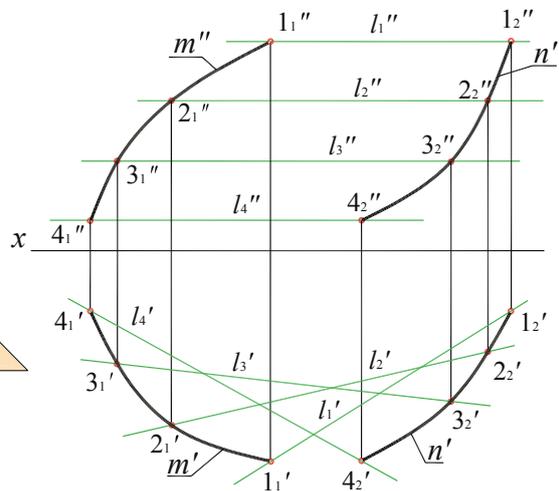


Рис. 7.14

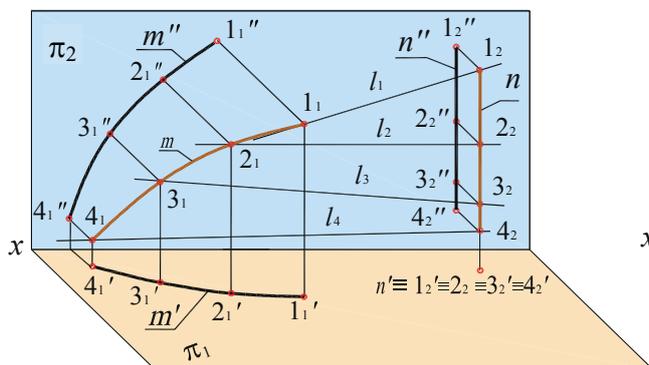


а

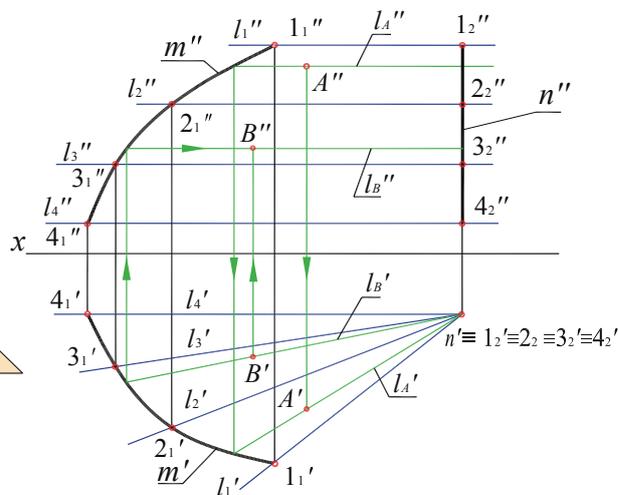


б

Рис. 7.15



а



б

Рис. 7.16

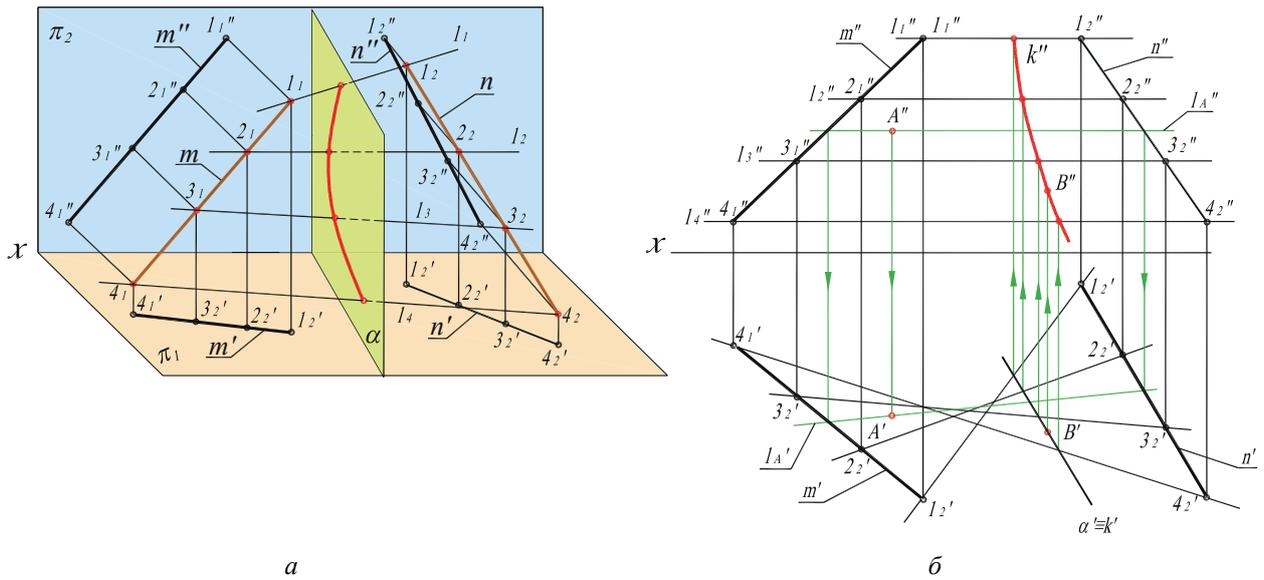


Рис. 7.17

При пересечении косо́й плоскости плоскостями кроме прямых линий могут получить параболы и гиперболы, чем и объясняется ее название – гиперболический параболоид.

Поверхности с плоскостью параллелизма имеют применение в архитектуре, строительстве, конструировании технических форм.

Винтовые поверхности получаются винтовым перемещением образующей линии.

Линейчатые винтовые поверхности (образующая – прямая линия) называются *геликоидами*.

Прямой геликоид (рис. 7.18) образуется движением прямой, которая пересекает винтовую линию, а также ось винтовой линии i под прямым углом.

Поскольку образующая перпендикулярна оси винтовой линии, то она параллельна плоскости проекций π_1 . Поэтому другое название прямого геликоида – *винтовой коноид*.

Косой геликоид (рис. 7.19) образуется движением прямой, которая пересекает винтовую линию и ось винтовой линии i под постоянным углом, не равным 90° .

Кривая пересечения поверхности косого геликоида плоскостью α (α'') перпендикулярной оси винтовой линии – спираль Архимеда. Поэтому другое название косого геликоида – *Архимедов геликоид*.

Образующая косого геликоида пересекает ось винтовой линии i под углом φ (рис. 7.19). Для определения фронтальных проекций образующих может быть использован направляющий конус, образующие которого составляют с осью i угол φ . Фронтальный очерк поверхности косого геликоида ограничен фронтальной проекцией винтовой линии и кривыми, огибающими ряд положений образующей линии.

Винтовой торс (рис. 7.20) – поверхность с ребром возврата, которым является цилиндрическая винтовая линия. Эта поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей, во всех своих положениях касающейся цилиндрической винтовой линии.

Поскольку это поверхность развертываемая, то другое ее название – *развертываемый геликоид*.

Кривая пересечения поверхности винтового торса плоскостью α (α''), перпендикулярной оси винтовой линии i , – эвольвента окружности. Отсюда и другое ее название – *эвольвентный геликоид*.

Прямолинейная образующая, касаясь винтовой линии в точках 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, пересекается с горизонтальной плоскостью проекций в точках $M_1, M_2, M_3, \dots, M_8$ и образует с ней постоянный угол φ , равный углу подъема винтовой линии.

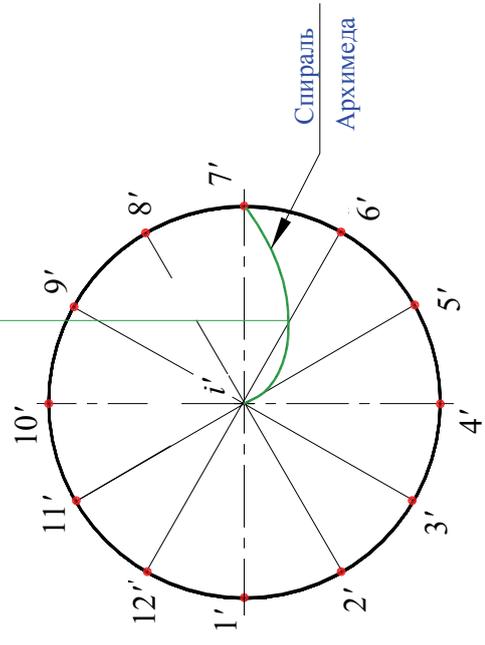
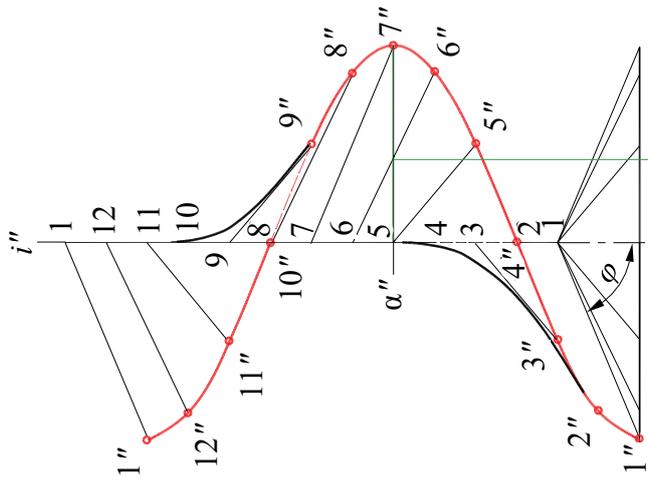


Рис. 7.19

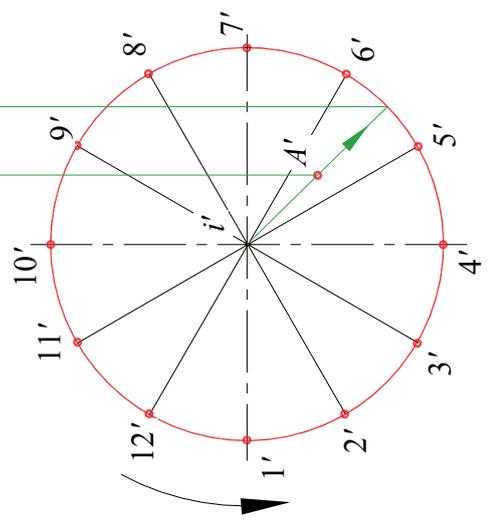
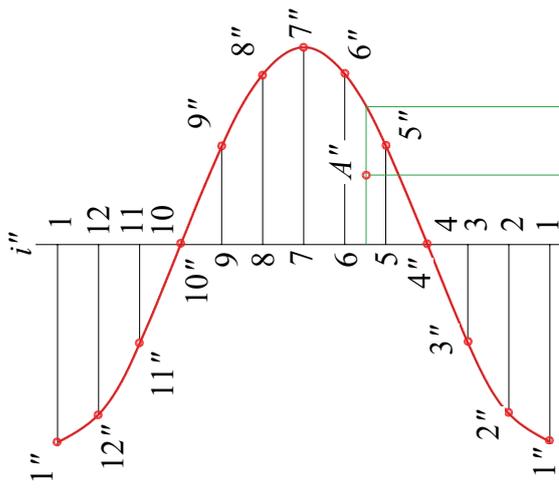


Рис. 7.18

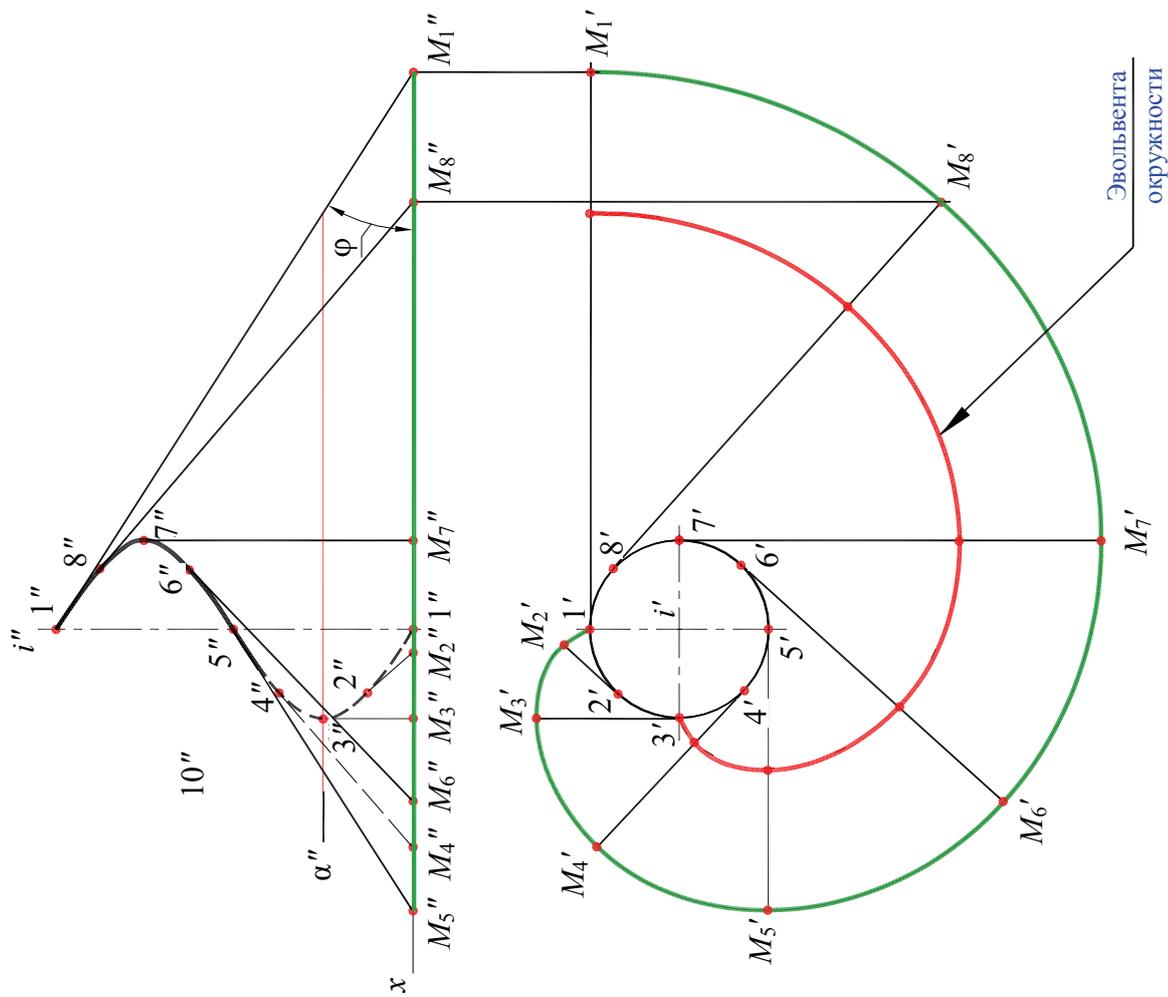


Рис. 7.20

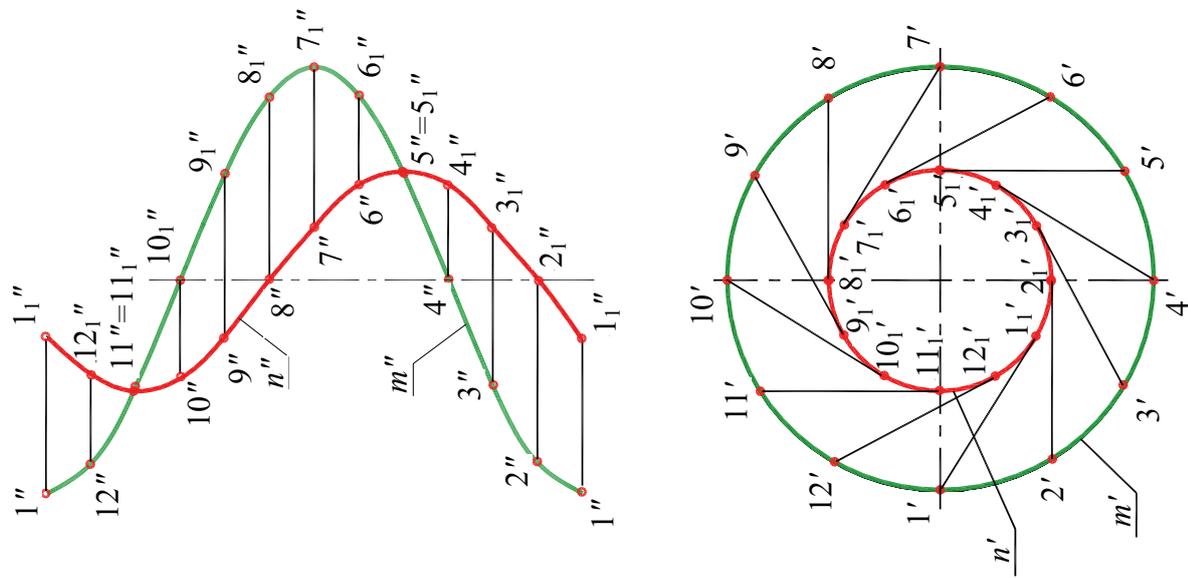


Рис. 7.21

Если прямолинейная образующая скользит по винтовой линии, а с плоскостью π_1 образует угол, не равный углу подъема винтовой линии, то образуется *конволютный геликоид*.

Винтовой цилиндр (рис. 7.21) образуется движением прямолинейной образующей по двум криволинейным направляющим (винтовым линиям m и n), причем во всех положениях образующая остается параллельной плоскости параллелизма π_1 .

Геликоиды имеют широкое применение в технике (различные профили резьб, рабочие поверхности червяков червячных передач, червячные фрезы, винтовые транспортеры и пр.) и в строительстве (винтовые лестницы и винтовые въезды, откосы насыпи и выемки полотна железной дороги на кривой с подъемом).

7.5. Поверхности вращения

Поверхность вращения (рис. 7.22) получается вращением прямолинейной или криволинейной образующей l вокруг неподвижной прямой i – оси поверхности. За ось вращения обычно принимается вертикальная прямая. Каждая точка образующей (например точка A) описывает при своем вращении окружность с центром на оси i . Эти окружности называются *параллелями*. Наибольшая из этих параллелей – *экватор*, наименьшая – *горло*.

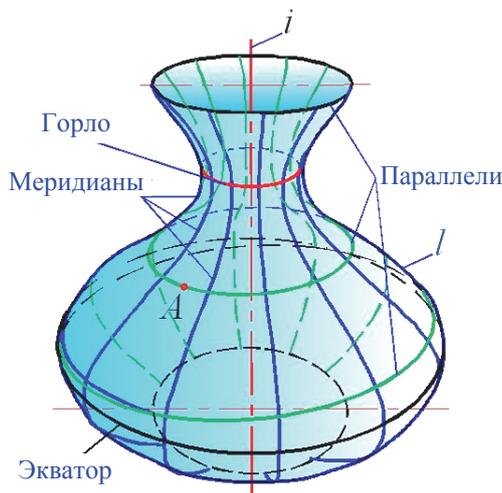


Рис. 7.22

Плоскости, проходящие через ось вращения, пересекают поверхность по *меридианам*. Меридиан, расположенный в плоскости, параллельной π_2 , называется *главным*.

Поверхность вращения называют *замкнутой*, если криволинейная образующая пересекает ось поверхности в двух точках. Если образующая – прямая линия, то получается *линейчатая поверхность вращения*, если кривая – *нелинейчатая*.

Замкнутую область пространства вместе с ее границей (поверхностью) называют *геометрическим телом*.

Цилиндр вращения (рис. 7.23) образуется вращением прямой l вокруг параллельной ей оси i . Все точки образующей l (например точка A) описывают окружности (параллели), равные окружностям оснований цилиндра.

Конус вращения (рис. 7.24) образуется вращением прямой l вокруг пересекающейся с ней оси i . Все точки образующей l описывают окружности различных радиусов (для точки A – радиус R_a). Величина радиуса изменяется от нуля до радиуса окружности основания конуса.

Однополостный гиперболоид вращения (рис. 7.25) образуется вращением прямой l вокруг скрещивающейся с ней оси i . Точки образующей l описывают окружности переменных

радиусов (для точки A – радиус R_a). Радиус параллели наименьшего радиуса (горла) равен кратчайшему расстоянию между образующей l и осью i .

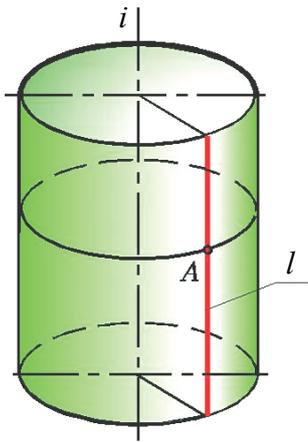


Рис. 7.23

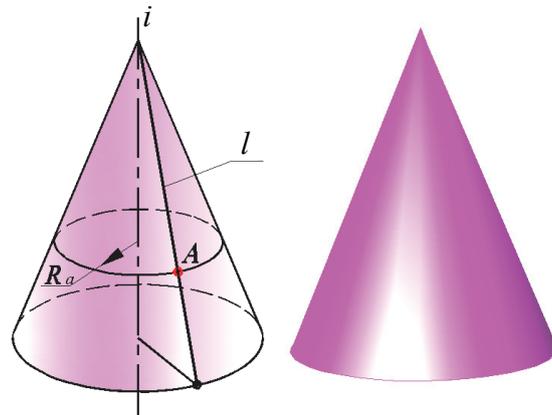


Рис. 7.24

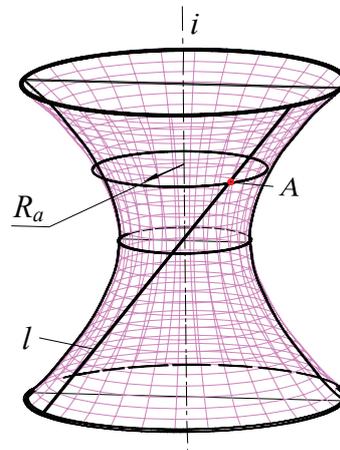


Рис. 7.25

Сфера (рис. 7.26) образуется вращением окружности вокруг ее диаметра. Точки образующей окружности описывают окружности переменных радиусов. Точка A описывает параллель наибольшего радиуса (экватор). Для сферы экватор и меридианы – равные между собой окружности.

Тор (рис. 7.27) образуется вращением окружности вокруг оси i , лежащей в плоскости окружности, но не проходящей через ее центр.

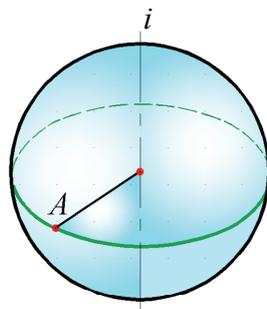


Рис. 7.26

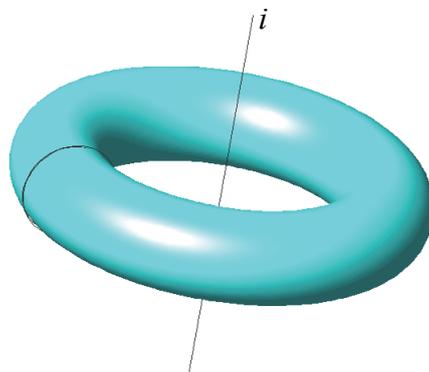


Рис. 7.27

В зависимости от взаимного расположения образующей окружности и оси вращения различают:

- а) открытый тор (круговое кольцо) (рис. 7.28, а), $r / R < 1$;
- б) замкнутый (рис. 7.28, б), $r / R = 1$;
- в) самопересекающийся (рис. 7.28, в), $r / R > 1$.

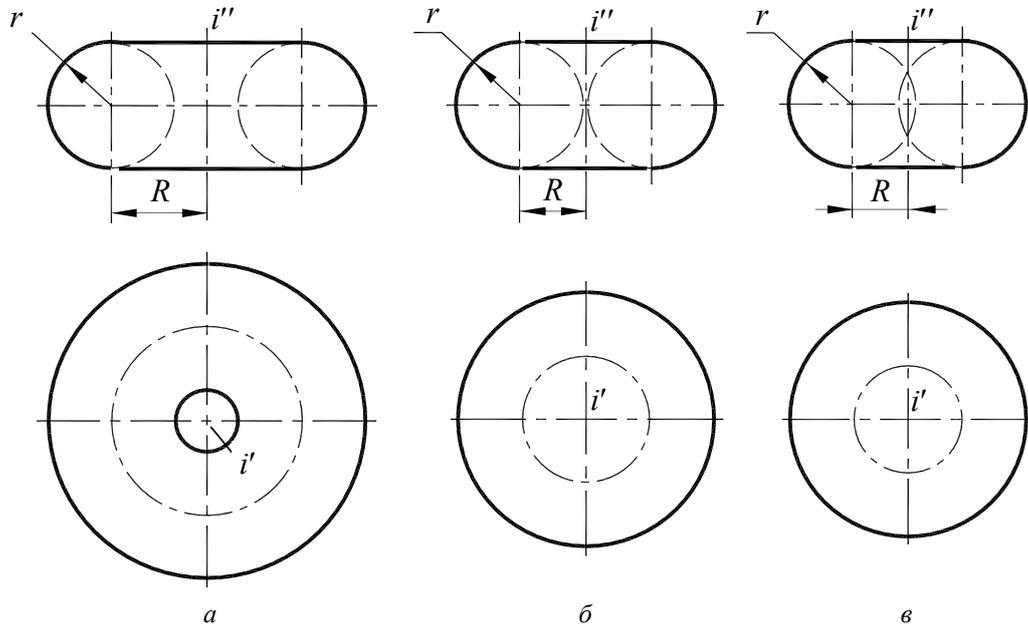


Рис. 7.28

Внутреннюю часть открытого тора в технике называют *глобондом* (рис. 7.29). Пример применения – глобондная червячная передача.

Эллипсоид вращения образуется вращением эллипса вокруг его оси. При вращении эллипса вокруг его большой оси получается вытянутый эллипсоид (рис. 7.30, а), при вращении вокруг малой – сжатый эллипсоид (рис. 7.30, б). Для эллипсоида вращения меридианом является эллипс.

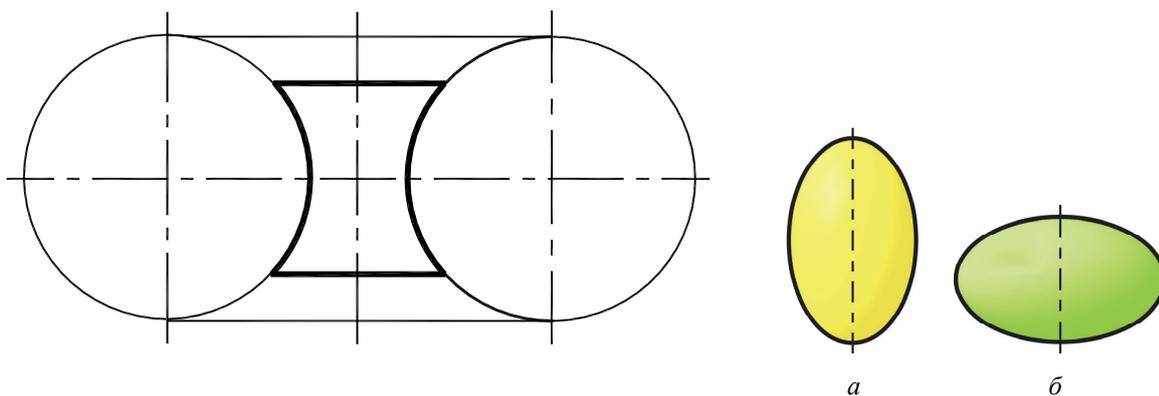


Рис. 7.29

Рис. 7.30

Однополостный гиперболоид вращения (рис. 7.31) образуется вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси.

Двуполостный гиперболоид вращения (рис. 7.32) получается вращением гиперболы вокруг ее действительной оси.

Меридианами гиперболоидов вращения являются гиперболы.

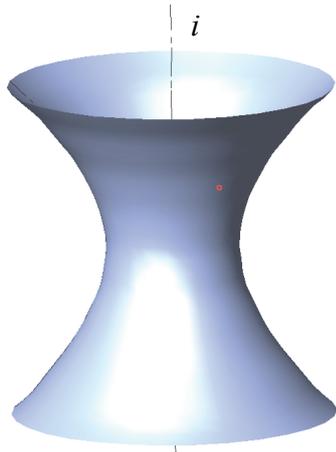


Рис. 7.31

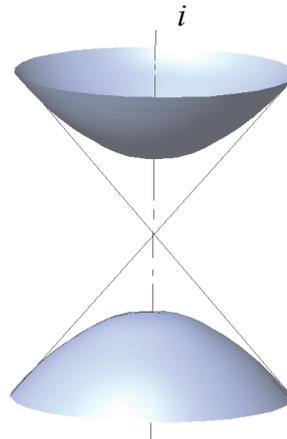


Рис. 7.32

Параболоид вращения (рис. 7.33) образуется вращением параболы вокруг ее оси. Меридианом параболоида вращения является парабола.

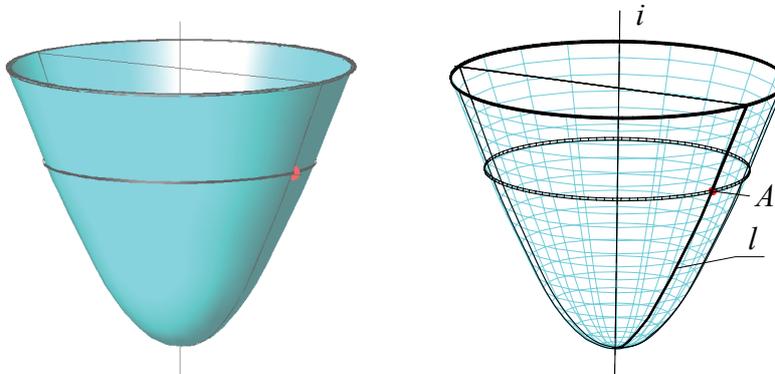


Рис. 7.33

Поверхности вращения: цилиндр, конус, однополостный гиперболоид – являются также и линейчатыми поверхностями.

Тор относится к поверхностям четвертого порядка, что соответствует максимальному числу точек пересечения поверхности с прямой линией. Все остальные перечисленные выше поверхности вращения являются поверхностями второго порядка.

7.6. Циклические и каркасные поверхности

Циклическая поверхность образуется окружностью постоянного или переменного радиуса при ее произвольном движении.

Каналовую поверхность получают движением окружности переменного радиуса вдоль кривой направляющей, причем плоскость образующей окружности остается перпендикулярной к заданной направляющей, по которой движется центр окружности. Если радиус образующей окружности постоянен, то такая каналовая поверхность называется *трубчатой*.

Когда направляющей кривой является цилиндрическая винтовая линия, образуется трубчатая винтовая поверхность (рис. 7.34). Она может быть получена и движением сферы постоянного диаметра, центр которой перемещается по цилиндрической винтовой линии. Примером такой поверхности является поверхность цилиндрической пружины с круглым сечением витков.

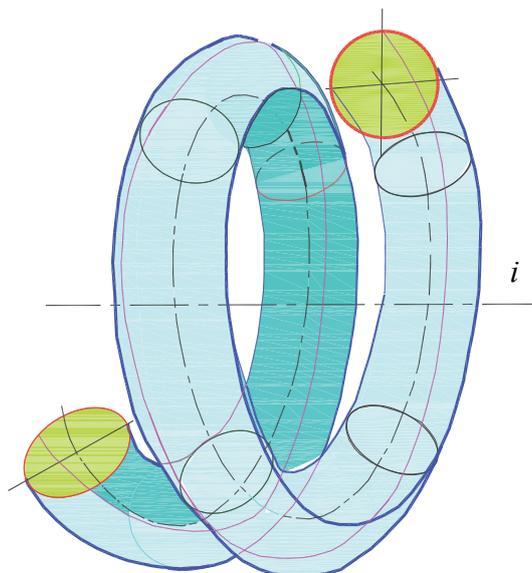


Рис. 7.34

Каркасными называют поверхности, заданные некоторым числом линий; каркас поверхности может быть получен линиями пересечения ее плоскостями, параллельными плоскостям проекций.

Примером каркасных поверхностей служат поверхности корпусов судов, самолетов, автомобилей. К разряду каркасных поверхностей относится и топографическая поверхность. Она изображается совокупностью горизонталей, т. е. линий, получаемых в сечении земной поверхности горизонтальными плоскостями.

7.7. Построение точек, лежащих на геометрических телах и поверхностях

Точка принадлежит поверхности в том случае, когда она находится на линии, принадлежащей этой поверхности. В качестве таких линий могут быть выбраны образующие, параллели, меридианы и др. Поверхность цилиндра вращения (рис. 7.35) является горизонтально проецирующей, образующие цилиндра перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций, вследствие чего поверхность цилиндра проецируется на эту плоскость окружностью.

Горизонтальные проекции точек A и B (A' и B') лежат на окружности. Профильные проекции этих точек A''' и B''' находятся при помощи линий связи.

Очерковые образующие цилиндра разделяют фронтальную и профильные проекции на видимую и невидимые части. Так, образующие l_1 и l_2 делят цилиндрическую поверхность на видимую спереди и невидимую, образующие l_3 и l_4 – на видимую слева и невидимую. Невидимые проекции точек указаны в скобках.

Конус вращения является также и линейчатой поверхностью, поэтому для построения точек на его поверхности можно использовать и образующие, и параллели.

На рис. 7.36, а показано построение горизонтальной A' и профильной A''' проекций точки A по заданной фронтальной проекции A'' .

Если задана горизонтальная проекция B' точки B , то построение начинается с проведения горизонтальной проекции $S'2'$ образующей $S2$, на которой находится точка B . Определив фронтальную проекцию $S'2''$ этой образующей, по линиям связи находим фронтальную проекцию B'' точки B , а затем и профильную B''' .

Образующие l_1 и l_2 разделяют коническую поверхность на видимую спереди и невидимую, а образующие l_3 и l_4 – на видимую слева и невидимую.

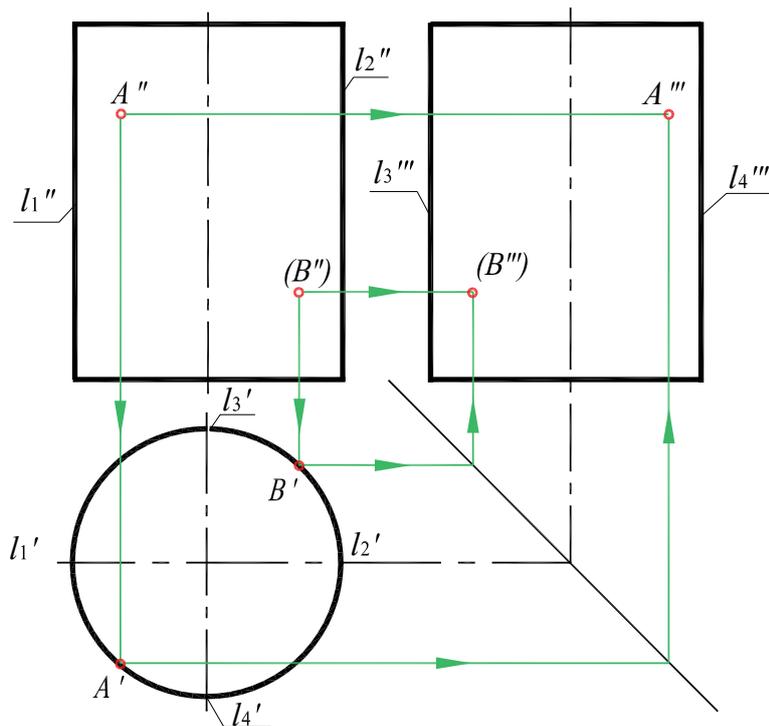


Рис. 7.35

Проекция B'' и B''' находятся на невидимой части конуса. Горизонтальная проекция поверхности конуса является видимой.

На рис. 7.36, б показано построение недостающих проекций точек A и B при помощи параллелей. Через заданные проекции A'' и B' проводятся проекции m''_1 и m'_2 параллелей m_1 и m_2 . Используя точки 1 и 2, лежащие на очерковых образующих, определим положение проекций m'_1 и m''_2 проведенных параллелей. По линиям связи найдем положение проекций A' и A''' точки A и проекций B'' и B''' точки B .

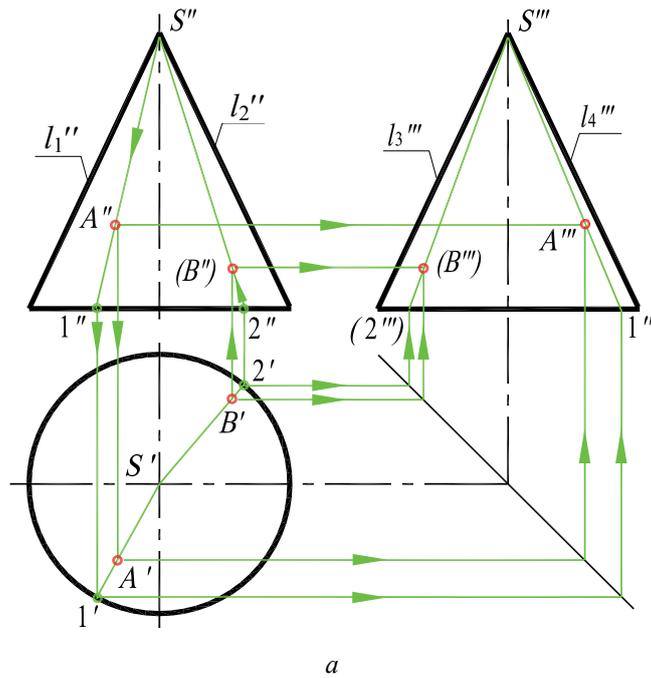
На рис. 7.37 приведены проекции сферы, которые ограничены экватором K , фронтальным меридианом m и профильным n . Каждый из них проецируется на соответствующую плоскость проекций в натуральную величину (окружность), на остальные – в виде отрезков прямых длиной, равной диаметру сферы. На этом же рисунке показано построение недостающих проекций точек A , B и C по заданным фронтальным проекциям этих точек. Точка A находится на экваторе K , точка B – на фронтальном меридиане m , точка C – на профильном меридиане n . Недостающие проекции определяются при помощи линий связи (проведение линий связи на рисунке показано стрелками).

Экватор K разделяет сферу на видимую (верхняя половина) на горизонтальной проекции и невидимую части. Фронтальный меридиан m разделяет сферу на видимую (ближняя половина) и невидимую части на фронтальной проекции.

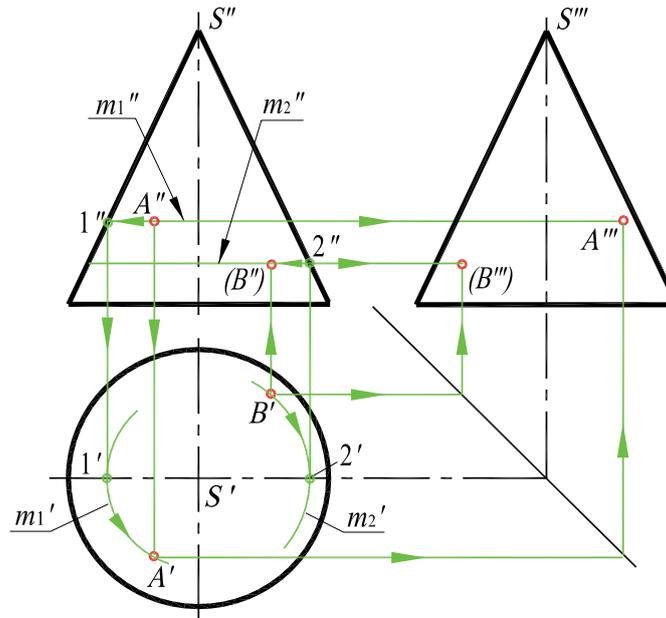
Профильный меридиан n разделяет сферу на видимую (левая половина) и невидимую части на профильной проекции.

Так, на рис. 7.37 горизонтальная проекция C' точки C невидимая (взята в скобки), так как находится на нижней (невидимой) половине сферы. На поверхности сферы можно провести множество параллелей, параллельно соответствующим плоскостям проекций. Эти параллели используются для построения проекций точек на сфере.

По данной фронтальной проекции D'' точки D найдена горизонтальная D' как принадлежащая горизонтальной параллели l . Для построения горизонтальной проекции l' использована точка 1, принадлежащая фронтальному меридиану. Профильная проекция D''' точки D построена при помощи линий связи и находится на невидимой (правой половине) части сферы.



a



б

Рис. 7.36

На рис. 7.38 представлены проекции открытого тора (кругового кольца), полученного вращением окружности радиуса r вокруг оси i . Проекции экватора обозначены k , горла – m , крайних параллелей – n_1 (верхняя) и n_2 (нижняя). Стрелками на рисунке показано построение фронтальных проекций точек A, B, C по заданным горизонтальным, расположенным соответственно на экваторе k , горле m и крайней (верхней) параллели n_1 .

Для построения горизонтальной проекции D' точки D через фронтальную проекцию D'' проведена фронтальная проекция l''_1 параллели l_1 . Горизонтальная проекция l'_1 параллели l_1 построена при помощи точки 1, лежащей на образующей окружности. Горизонтальная проекция точки D' найдена с помощью линий связи как принадлежащая параллели l_1 .

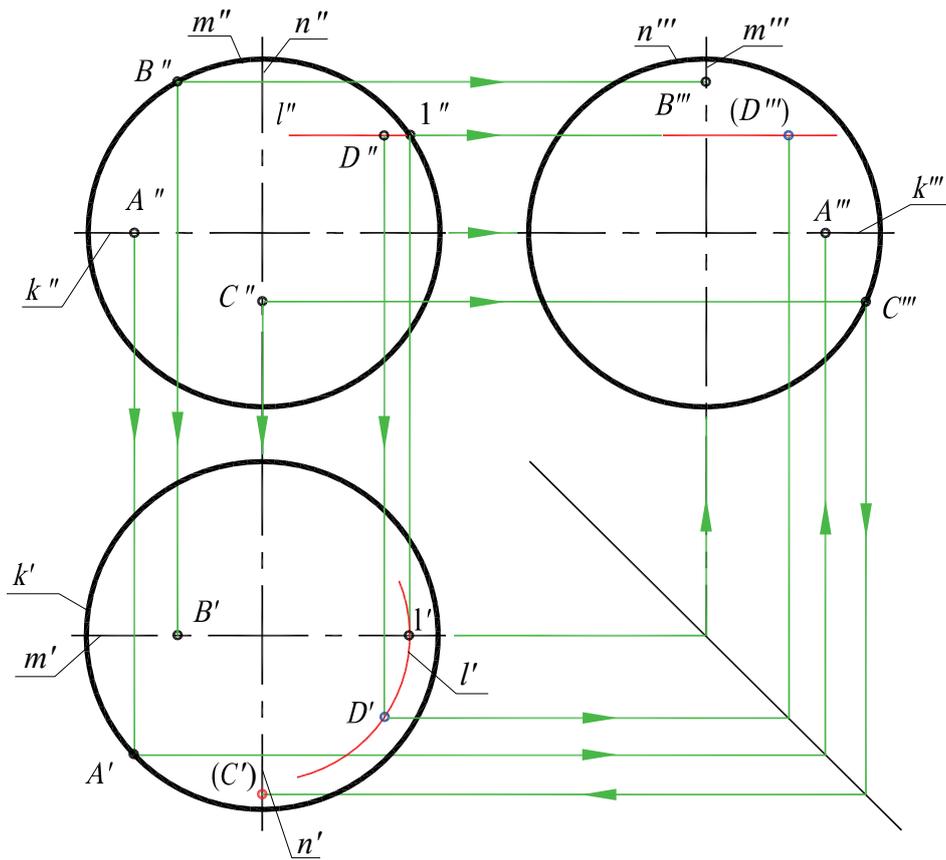


Рис. 7.37

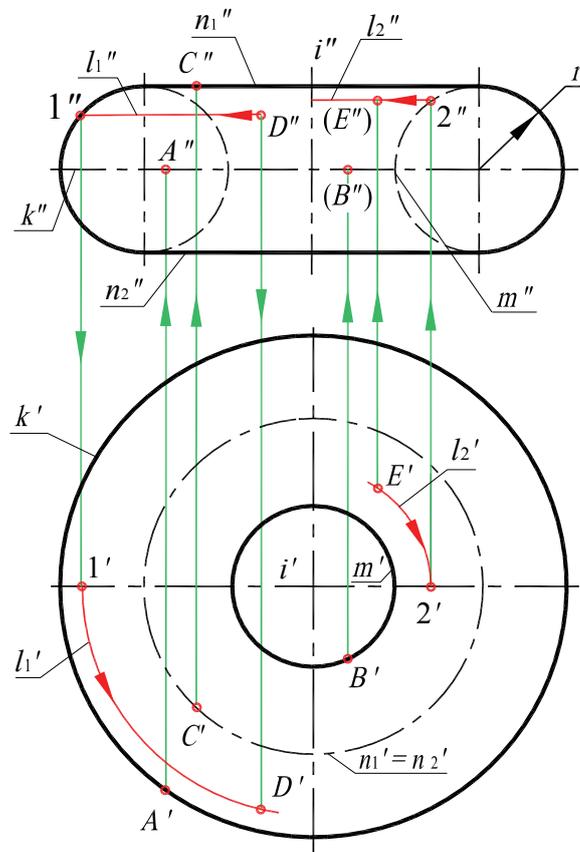


Рис. 7.38

Для построения фронтальной проекции точки E (по заданной горизонтальной), лежащей на внутренней части тора (рис. 7.38), использована параллель l_2 . Фронтальная проекция этой параллели строится при помощи точки 2, принадлежащей образующей окружности. Экватор k разделяет тор на видимую (верхняя половина) и невидимую части на горизонтальной проекции. На фронтальной проекции видимой является ближняя наружная часть открытого тора.

7.8. Примеры решения задач

Задача 1. Построить недостающие проекции линий, принадлежащих поверхности сферы (рис. 7.39).

Решение. На рис. 7.39 задана горизонтальная проекция линий AB и BC , находящихся на поверхности сферы. Любая плоская кривая сферы является окружностью. Так как линия AB – фронтальная параллель, то фронтальная проекция ее – дуга $A''1''B''$, а профильная – прямая $A'''1'''B'''$. Точки A и B расположены на экваторе сферы. Кривая BC также является частью окружности, но на фронтальную и профильную плоскости проекций она проецируется в виде эллиптических кривых. Построение проекций этих кривых сводится к построению отдельных точек (2, 3, 4, 5, 6), для нахождения которых использованы вспомогательные фронтальные параллели (см. построение точки B на рис. 7.37). Точка C принадлежит экватору сферы.

Профильные проекции точек определяются при помощи линий связи. Полученные точки соединены плавной кривой.

Видимые части проекций кривых расположены на видимых полушариях сферы.

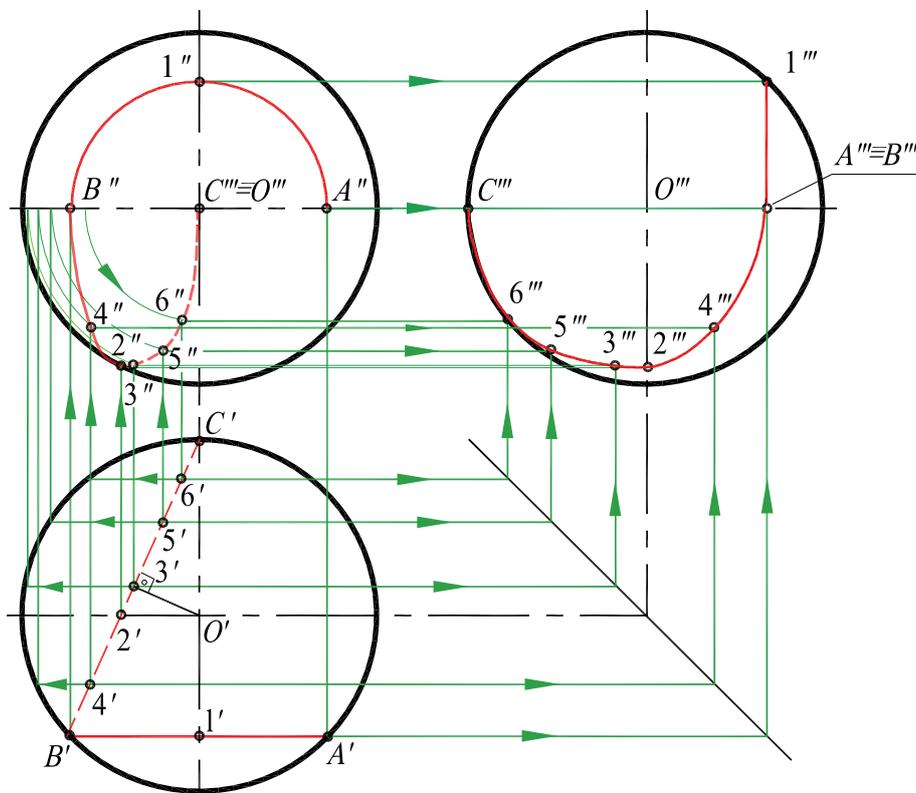


Рис. 7.39

Задача 2. Построить недостающие проекции линии, принадлежащей поверхности открытого тора (рис. 7.40).

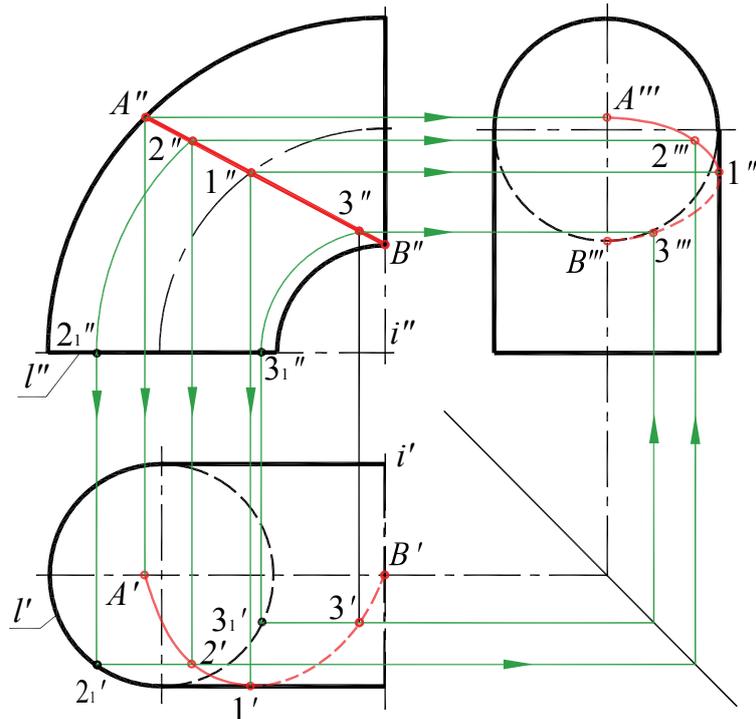


Рис. 7.40

Решение. На рис. 7.40 задана фронтальная проекция линии AB , находящейся на поверхности части открытого тора, полученного вращением образующей окружности l вокруг фронтально проецирующей оси i . Линия AB является плоской кривой, для построения недостающих проекций которой следует построить ряд точек ($A, B, 1, 2, 3$), принадлежащих этой кривой.

Построение точек на поверхности тора приведено на рис. 7.38. Точка A находится на экваторе, точка B – на горле, а точка 1 – на крайней (ближней) параллели тора. Поэтому горизонтальные проекции этих точек определяются при помощи линий связи.

Для построения горизонтальных проекций $2', 3'$ точек 2 и 3 приведены фронтальные проекции параллелей, проходящих через эти точки (дуги окружностей). Для построения горизонтальных проекций этих параллелей использованы точки 2_1 и 3_1 , лежащие на образующей окружности l .

Профильные проекции точек кривой определяются при помощи линий связи.

Полученные проекции точек соединяются плавной кривой. Видимыми проекциями кривой являются те участки, которые расположены на видимых частях тора.

Задача 3. Построить фронтальную проекцию линии AB , принадлежащую поверхности коноида (рис. 7.41).

Решение. На рис. 7.41 задана горизонтальная проекция линии AB , принадлежащей поверхности коноида. Коноид определяется двумя направляющими – m (кривая) и n (прямая), и плоскостью параллелизма α (горизонтально проецирующая плоскость).

Линия AB является плоской кривой, для построения фронтальной проекции которой следует определить фронтальные проекции ряда точек ($A, 1, 2, 3, B$).

Фронтальные проекции A'' и B'' точек A и B строятся при помощи линий связи как принадлежащие направляющим m и n .

Фронтальные проекции $1'', 2'', 3''$ точек $1, 2, 3$ определяются при помощи образующих l_1, l_2, l_3 . Горизонтальные проекции этих образующих проходят через проекции $1', 2', 3'$ точек $1, 2, 3$ параллельно плоскости параллелизма α .

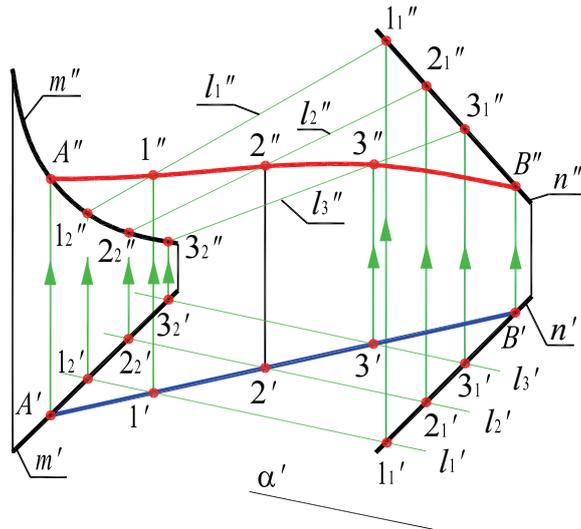


Рис. 7.41

Фронтальные проекции образующих $1''$, $2''$, $3''$ определяются с использованием точек 1_1 , 1_2 , 2_1 , 2_2 , 3_1 , 3_2 , которые принадлежат направляющим m и n . Полученные фронтальные проекции точек A'' , $1''$, $2''$, $3''$, B'' соединяются плавной кривой.

Вопросы для контроля

1. Перечислите плоские лекальные кривые.
2. Как образуется цилиндрическая винтовая линия?
3. Перечислите линейчатые поверхности (развертывающиеся и неразвертывающиеся).
4. Как образуются поверхности с плоскостью параллелизма (цилиндр, коноид, косая плоскость)?
5. Как образуются линейчатые винтовые поверхности (геликоиды)? Дайте им название.
6. Как образуются поверхности вращения?
7. Перечислите линейчатые поверхности вращения.
8. Перечислите нелинейчатые поверхности вращения.
9. Как образуется поверхность тора? Назовите его разновидности.

Глава 8. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ПЛОСКОСТЬЮ. РАЗВЕРТЫВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

8.1. Общие положения

Линия пересечения кривой поверхности с плоскостью представляет собой плоскую кривую, которая может распадаться на прямые линии в случае пересечения плоскости с линейчатой поверхностью по ее образующим.

Для построения этой кривой линии на чертеже находят проекции ее отдельных точек, соединяемых с помощью лекала.

Среди точек линии пересечения имеются точки, которые занимают особое расположение на кривой или выделяются своим местоположением относительно плоскостей проекций. Такие точки называют *опорными*, или *характерными*. К ним относятся высшие и низшие, ближние и дальние, точки, расположенные на крайних образующих (точки видимости) и др. Остальные точки называются *промежуточными*, или *случайными*.

Для нахождения точек линии пересечения применяются вспомогательные секущие плоскости (проецирующие или плоскости уровня). Вспомогательные плоскости выбираются так, чтобы в пересечении с кривой поверхностью получались простейшие линии – прямые и окружности.

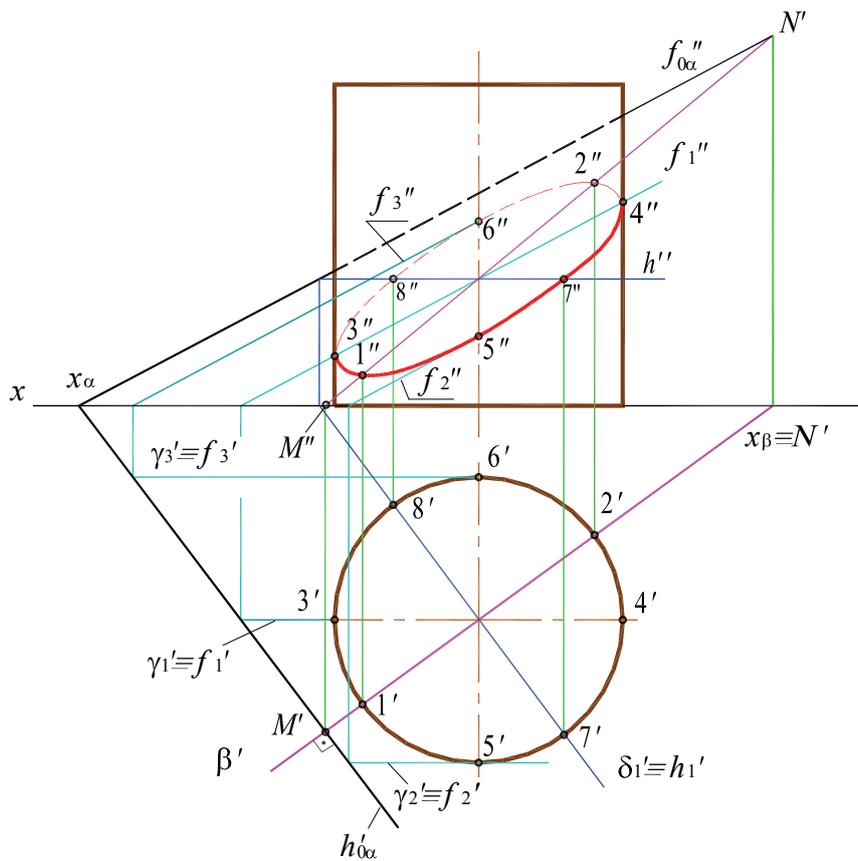


Рис. 8.1

На рис. 8.1 цилиндр вращения пересекается плоскостью общего положения α , заданной следами $h_{0\alpha}'$ и $f_{0\alpha}''$.

Горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с горизонтальной проекцией цилиндра (окружностью). Для построения фронтальных проекций точек кривой пересечения использованы вспомогательные плоскости частного положения.

Низшая 1 и высшая 2 точки определены при помощи горизонтально проецирующей плоскости β , перпендикулярной секущей плоскости α . Она пересекает плоскость α по линии MN (линии наибольшего ската), а поверхность цилиндра – по образующим.

Точки видимости 3 и 4, ближняя 5 и дальняя 6 построены при помощи фронтальных плоскостей $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, пересекающих заданную плоскость α по фронталям f_1, f_2, f_3 , а поверхность цилиндра – по образующим.

Для построения точек 7 и 8 использована горизонтально проецирующая плоскость δ , которая пересекается секущей плоскостью α по горизонтали h (как плоскости с параллельными горизонтальными следами), а с поверхностью цилиндра – по образующим.

Последовательно соединив фронтальные проекции точек, получим фронтальную проекцию линии пересечения цилиндра плоскостью – эллипс (большая ось эллипса – отрезок 1–2, малая – отрезок 7–8).

Для нахождения промежуточных точек можно воспользоваться либо фронтальными, либо горизонтальными плоскостями уровня. В последнем случае плоскости будут пересекать секущую плоскость по горизонталям, а поверхность цилиндра – по окружностям. Определив горизонтальные проекции точек, принадлежащие линии сечения, можно найти и фронтальные. Построение промежуточных точек на рис. 8.1 не показано.

Задача на построение линии пересечения кривой поверхности плоскостью значительно упрощается, если заданные секущие плоскости являются плоскостями частного положения. В этом случае одна проекция линии пересечения совпадает со следом-проекцией секущей плоскости, а построение недостающих сводится к построению ряда проекций точек на поверхности. А если секущая плоскость является плоскостью общего положения, то можно преобразовать чертеж так, чтобы секущая плоскость стала в новом положении проецирующей (например, использовать способ перемены плоскостей проекций).

В дальнейшем пересечение поверхностей будет рассматриваться только плоскостями частного положения (проецирующими или плоскостями уровня).

8.2. Пересечение цилиндра плоскостью. Построение развертки

При пересечении цилиндра вращения плоскостью возможны следующие случаи:

1) секущая плоскость параллельна оси – в сечении цилиндрической поверхности получаются две прямые (образующие) (рис. 8.2, а);

2) секущая плоскость перпендикулярна оси – в сечении получается окружность, равная окружностям оснований (рис. 8.2, б);

3) секущая плоскость наклонна к оси – в сечении получается эллипс, малая ось которого всегда равна диаметру цилиндра, а большая зависит от угла φ (рис. 8.2, в).

На рис. 8.3 показано построение проекций цилиндра вращения, усеченного плоскостями частного положения α, β, γ .

Горизонтальная плоскость α (α'') пересекает поверхность цилиндра по части окружности, профильная плоскость β (β'') – по прямым AB и CD (образующим цилиндра), фронтально проецирующая плоскость γ (γ'') – по части эллипса. Фронтальная проекция линий пересечения совпадает со следами-проекциями секущих плоскостей ($\alpha'', \beta'', \gamma''$), а горизонтальная – с окружностью основания цилиндра.

Построение профильной проекции сводится к построению профильных проекций точек по двум заданным (направление построений линий связи указано стрелками). Вместо ломаных линий связи при построении профильных проекций точек можно использовать

координаты y , которые откладываются на горизонтальных линиях связи по разные стороны оси цилиндра (см. построение точек A, B, C, D).

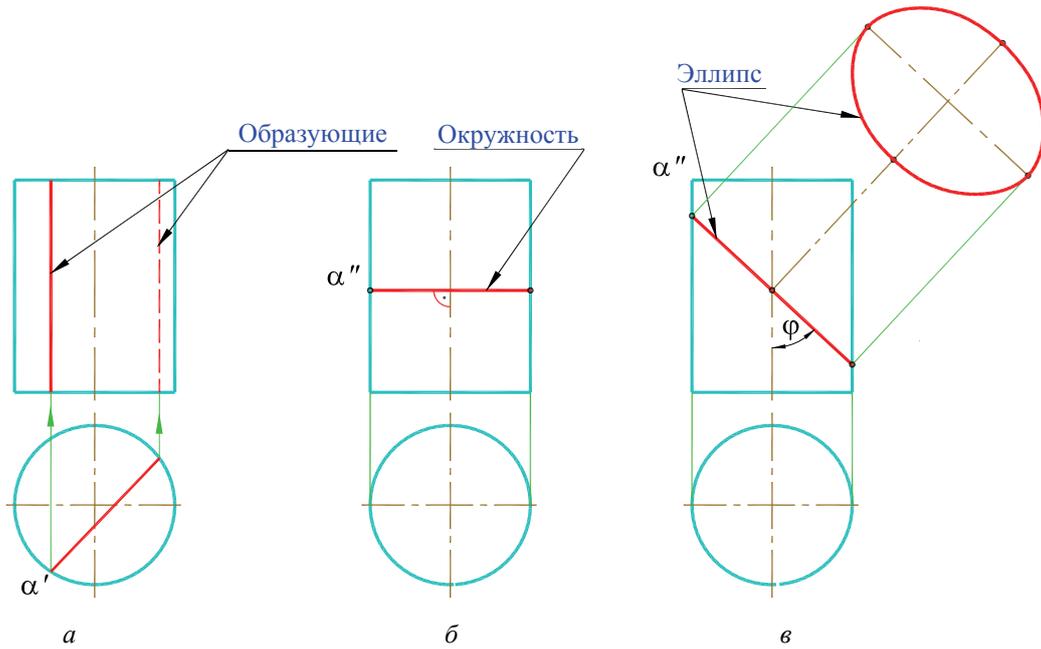


Рис. 8.2

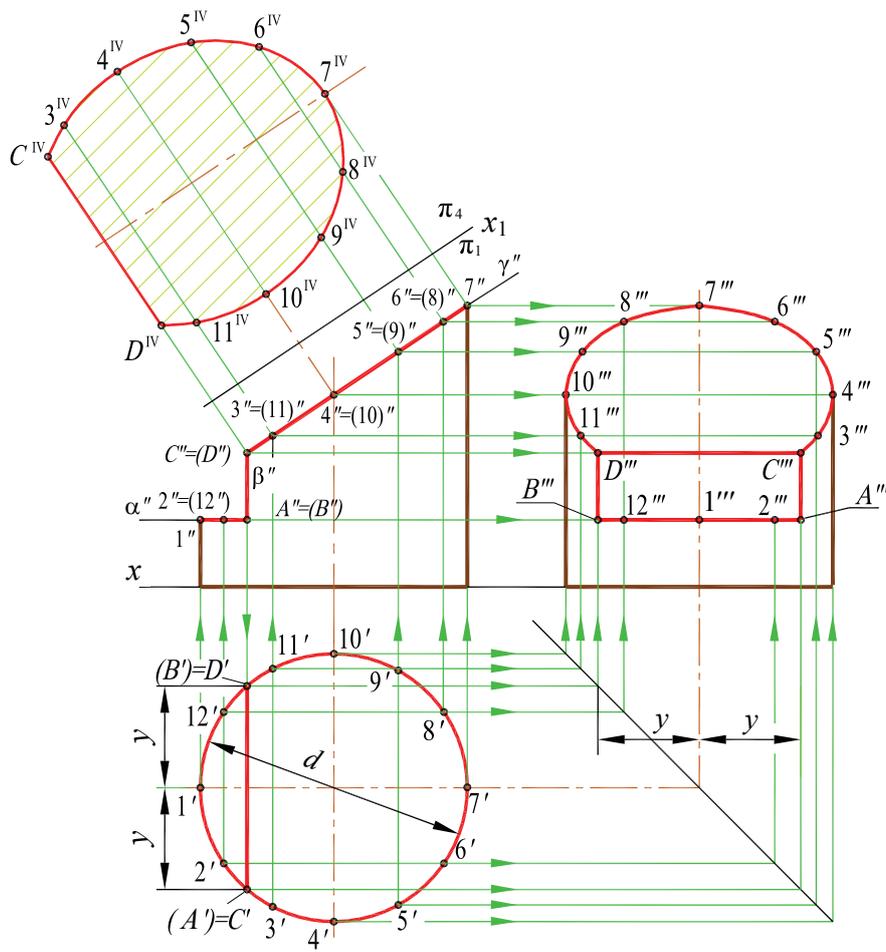


Рис. 8.3

Обычно для построения точек линий сечения пользуются образующими, равноотстоящими друг от друга. Поэтому горизонтальная проекция цилиндра (окружность) разделена на 12 частей (точки 1, 2, ..., 12). Этой равномерной «разметкой» удобно пользоваться для создания не только проекций сечений, но и развертки.

Действительный вид фигуры сечения плоскостью γ построен способом перемены плоскостей проекций. Новая ось проекций x_1 проведена параллельно следу-проекции γ'' . Выполнив соответствующие построения на плоскости π_4 , получим натуральную величину сечения цилиндра плоскостью γ .

На рис. 8.4 приведено построение полной развертки усеченного цилиндра.

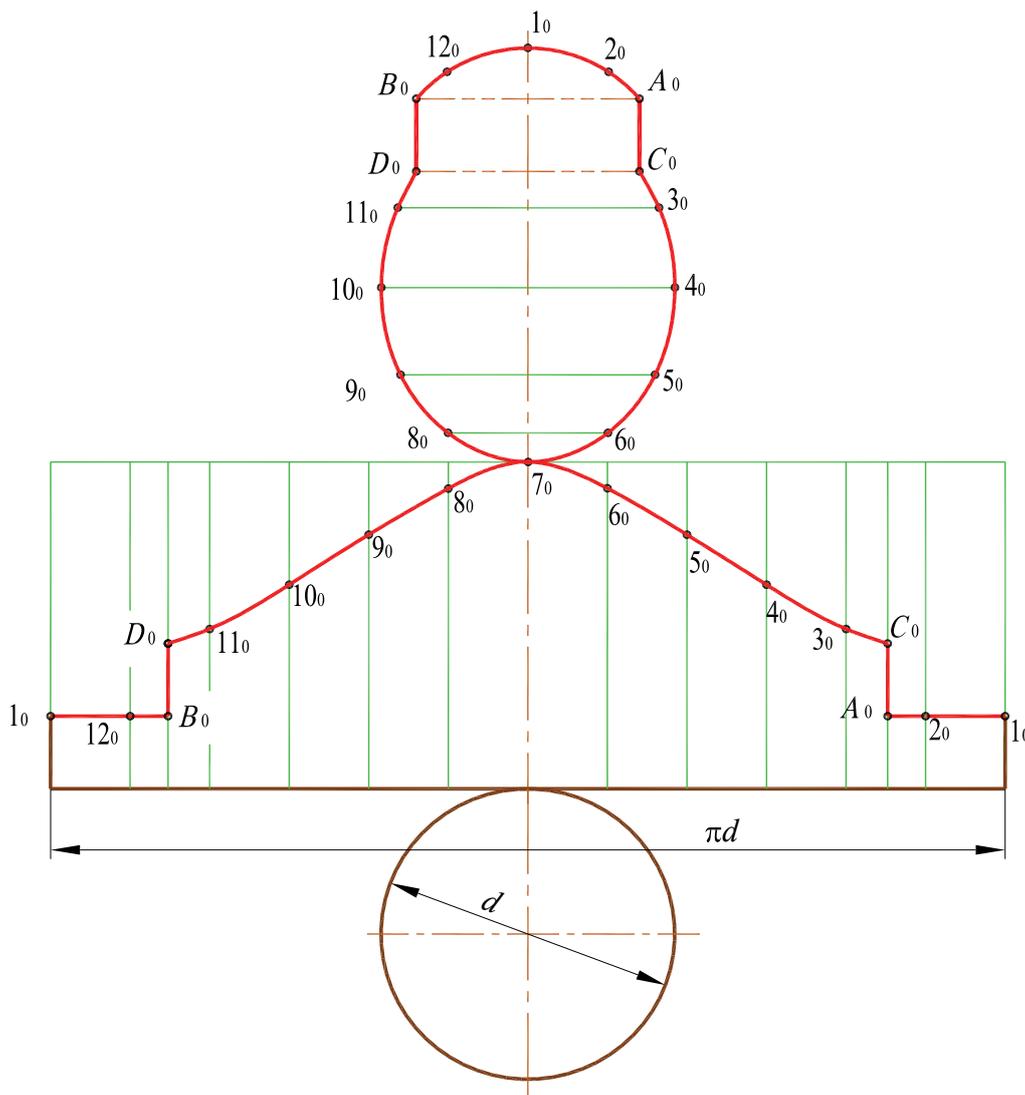


Рис. 8.4

Для построения развертки боковой поверхности на горизонтальной прямой откладывают длину окружности основания πd и делят ее на 12 равных частей (с определенной степенью точности вместо $1/12$ длины окружности можно откладывать длину соответствующей хорды). Из точек деления проводят перпендикуляры к отрезку πd и на них откладывают длины образующих от основания цилиндра до секущих плоскостей α , β , γ . Для построения точек A , B , C , D на развертке использовано расположение этих точек на горизонтальной проекции цилиндра (от точек деления откладывают длины дуг $2A$ и $12B$). Точки 1, A , C и 1, B , D соединены прямыми линиями. Точки C , 3, ..., 11, D соединяют плавной линией.

К прямой линии πd (развертка нижнего основания цилиндра) присоединяют окружность основания, а к верхней части боковой развертки – натуральные фигуры сечения плоскостями (часть эллипса, прямоугольник, сегмент окружности).

8.3. Пересечение конуса плоскостью. Построение развертки

При пересечении конуса вращения получают различные виды кривых второго порядка (конические сечения). Рассмотрим возможные случаи пересечения конуса фронтально проецирующими плоскостями (угол между следом-проекцией и осью конуса – φ , половина угла конуса при вершине – σ).

1. Секущая плоскость α (α'') пересекает все образующие конуса (не параллельна ни одной из образующих конуса) – в сечении получается эллипс ($\varphi > \sigma$) (рис. 8.5).

2. Если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса, то в сечении получается окружность (рис. 8.6).

3. Секущая плоскость α (α'') параллельна одной образующей конуса – в сечении получается парабола ($\varphi = \sigma$) (рис. 8.7).

4. Секущая плоскость α_1 (α_1'') параллельна двум образующим конуса – в сечении получается гипербола ($\varphi < \sigma$) (рис. 8.8). Профильная плоскость α_2 (α_2'') образует с осью конуса угол равный 0, что не противоречит вышеуказанному неравенству.

5. Если секущая плоскость проходит через вершину конуса, то в сечении получается пара пересекающихся в вершине прямых (образующих) (рис. 8.9).

Если конус вращения пересекается плоскостью общего положения, то о линии пересечения можно судить, преобразовав плоскость общего положения в проецирующую. Такое преобразование целесообразно выполнить переменной плоскостей проекций. На рис. 8.10 показано построение проекций усеченной части конуса вращения плоскостями частного положения α и β .

Фронтально проецирующая плоскость α (α'') пересекает поверхность конуса по эллипсу (см. рис. 8.5), профильная плоскость β (β'') – по гиперболе (см. рис. 8.8).

Фронтальная проекция линий пересечения совпадает со следами-проекциями секущих плоскостей (α'' , β'').

Горизонтальная проекция сечения конуса плоскостью α – эллипс, а горизонтальная проекция сечения плоскостью β совпадает со следом-проекцией β' .

Для построения точек линий сечения использованы образующие, равноотстоящие друг от друга. Поэтому горизонтальная проекция основания конуса (окружность) разделена на 12 равных частей (точки I, II, ..., XII). Это позволяет использовать равноотстоящие образующие для построения развертки конуса.

Фронтальные проекции образующих пересекают след-проекцию α'' в точках $1''$, $2''$, ..., $12''$. Эти точки по линиям связи находятся на горизонтальных проекциях образующих, причем точки 4 и 10 определяются на профильной проекции (на очерковых образующих), а затем на горизонтальной. Малая ось эллипса AB определена при помощи горизонтальной плоскости γ (γ''), которая проведена через середину отрезка $1'-7''$ (фронтальную проекцию линии сечения плоскостью α).

Вспомогательная плоскость γ (γ'') пересекает плоскость α по фронтально проецирующей прямой, а конус – по окружности радиуса R . В пересечении прямой и дуги радиуса R определим горизонтальные проекции A' и B' .

Построения профильных проекций точек эллипса ($1''$, $2''$, ..., $12''$) сводится к построению проекций точек по двум заданным (направления линий связи указаны стрелками).

Для построения точек, принадлежащих гиперболе, использованы точки G и H , находящиеся на образующих II и XII, а также точки E и F , принадлежащие вспомогательной горизонтальной плоскости δ (δ'').

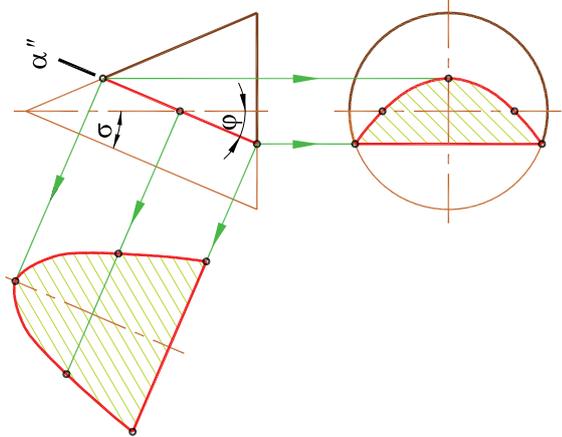


Рис. 8.7

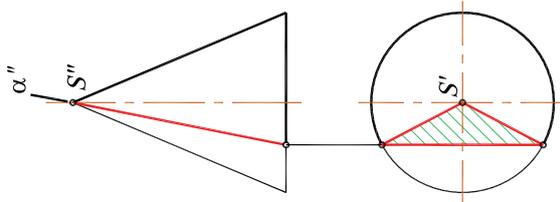


Рис. 8.9

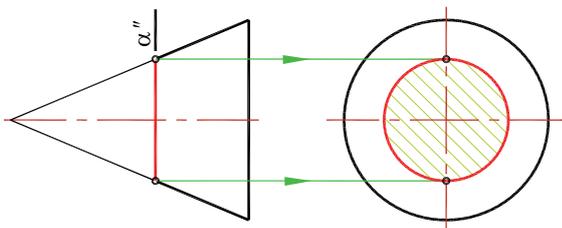


Рис. 8.6

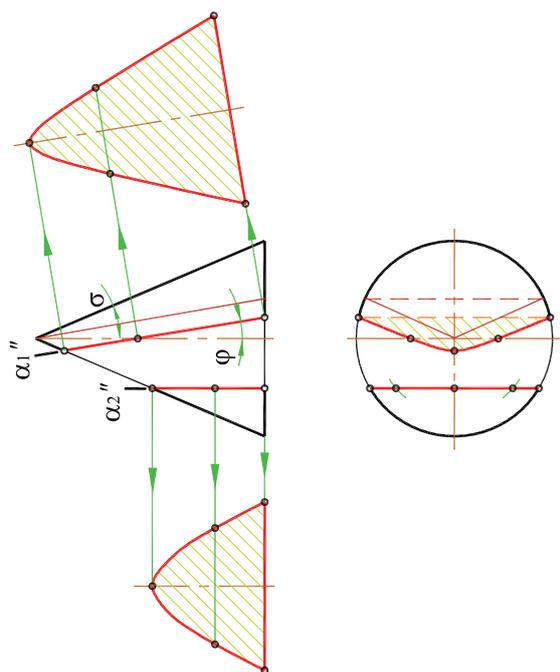


Рис. 8.8

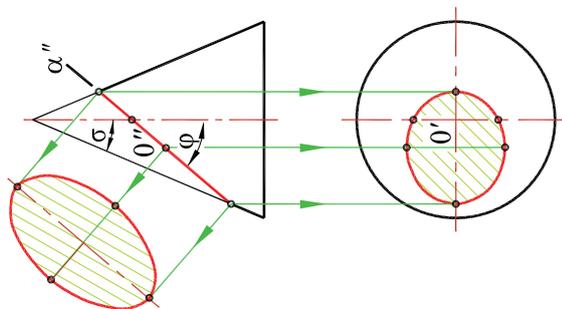


Рис. 8.5

На рис. 8.11 приведено построение полной развертки усеченного конуса, показанного на рис. 8.10.

Полная развертка состоит из развертки боковой поверхности, части основания конуса и натуральных величин сечений.

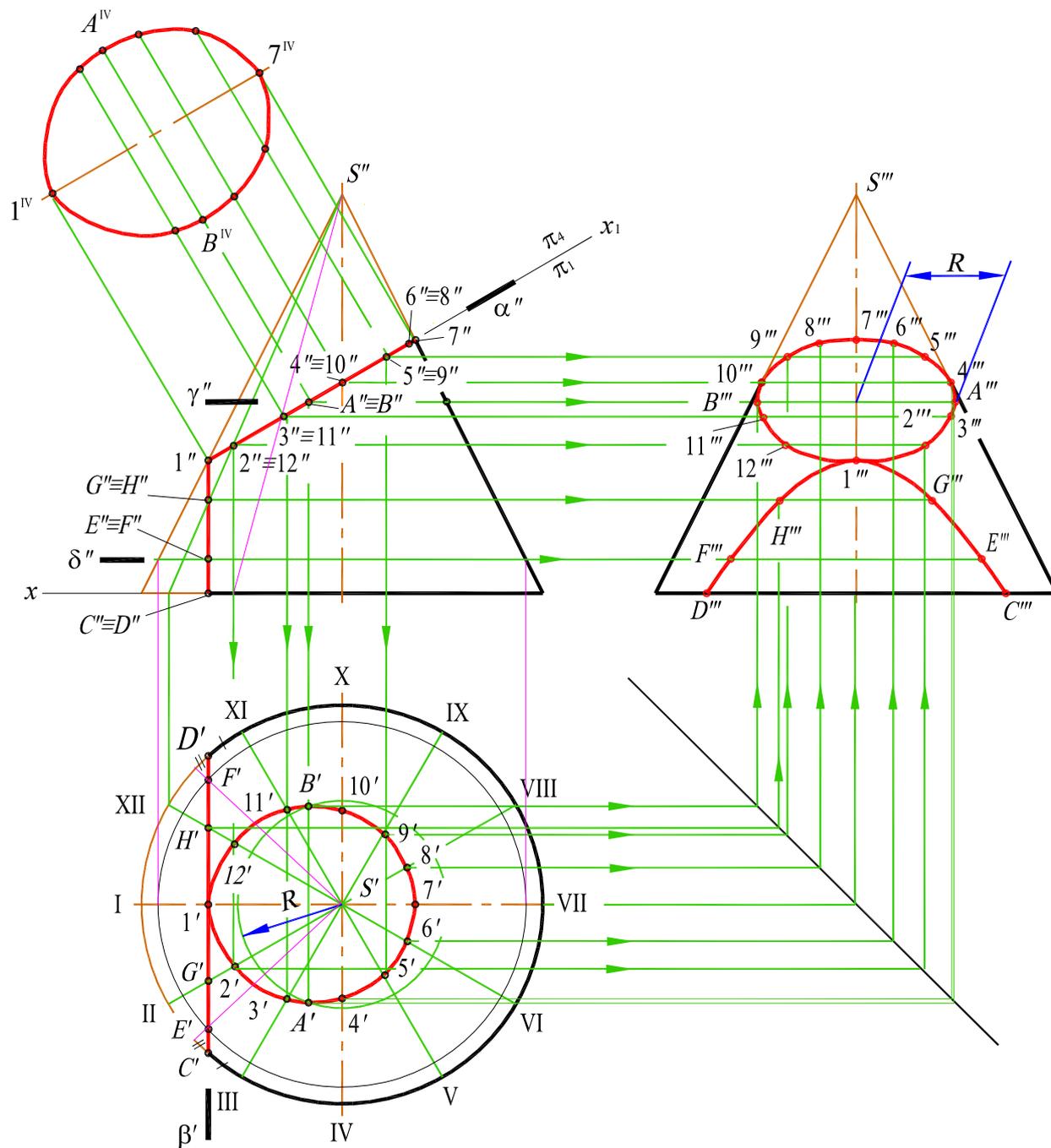


Рис. 8.10

Построение развертки боковой поверхности начинают с проведения из точки S_0 дуги окружности радиусом, равным длине образующей конуса. Длина дуги определяется центральным углом φ :

$$\varphi = 180 d/l;$$

где d – диаметр окружности основания конуса; l – длина образующей.

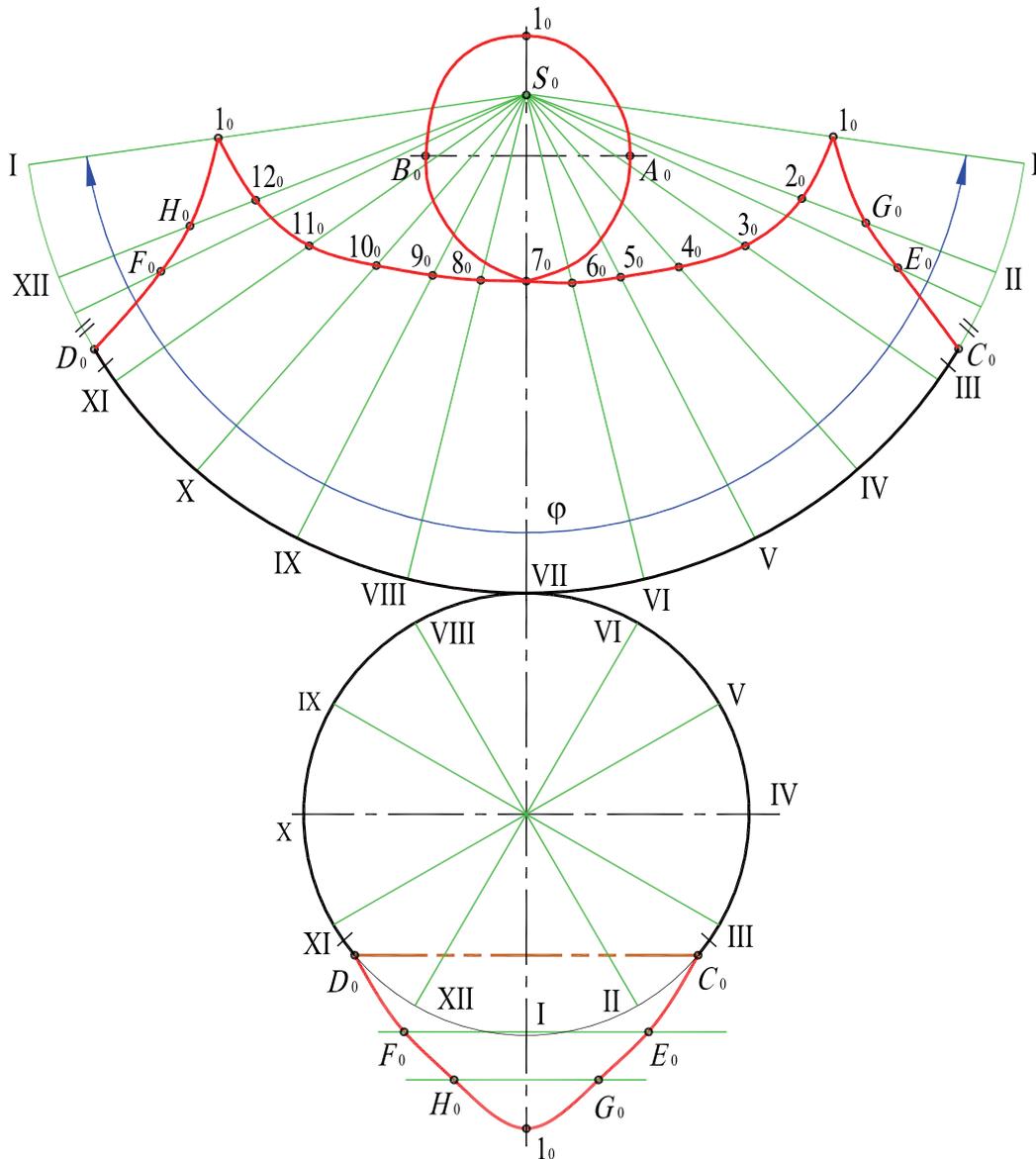


Рис. 8.11

Дугу делят на 12 частей, и полученные точки соединяют с точкой S (с определенной степенью точности вместо $1/12$ длины окружности основания конуса можно откладывать длину хорды).

От вершины S_0 на образующих откладывают действительные длины отрезков образующих от вершины конуса до секущих плоскостей. Действительные длины данных отрезков находят способом вращения вокруг оси конуса. Для этого достаточно из фронтальных проекций точек фигур сечений провести горизонтальную прямую до пересечения с контурной образующей конуса, являющейся действительной ее длиной.

Для построения точек C_0 и D_0 , лежащих на основании конуса, следует отложить от точек III и XI соответствующие дуги (эти дуги на рис. 8.10 и 8.11 отмечены одной черточкой).

Для построения точек E_0 и F_0 на развертке находят положения образующих, на которых есть эти точки, откладывая от точек II и XII соответствующие дуги (эти дуги отмечены двумя черточками). Положение точек E_0 и F_0 на образующих находим, используя действительные длины отрезков SE и SF .

Для получения полной развертки пристраивают к развертке боковой поверхности часть основания конуса и натуральные величины сечений.

Натуральная величина эллипса построена по его осям (использован способ перемены плоскостей проекций), натуральная величина сечения профильной плоскостью β находится на профильной проекции (рис. 8.10).

8.4. Пересечение сферы и тора плоскостью

При пересечении сферы плоскостью всегда получается окружность, которая в зависимости от положения секущей плоскости по отношению к плоскостям проекций проецируется в виде прямой, в виде эллипса или в виде окружности.

На рис. 8.12 показано построение проекций сферы, усеченной плоскостями частного положения α, β, γ . Фронтальная проекция линий пересечения совпадает со следами-проекциями секущих плоскостей ($\alpha'', \beta'', \gamma''$). Горизонтальная проекция сечения сферы плоскостью α – окружность радиуса R_1 , а профильная – прямая. Профильная проекция сечения плоскостью β – окружность радиуса R_2 , а горизонтальная – прямая.

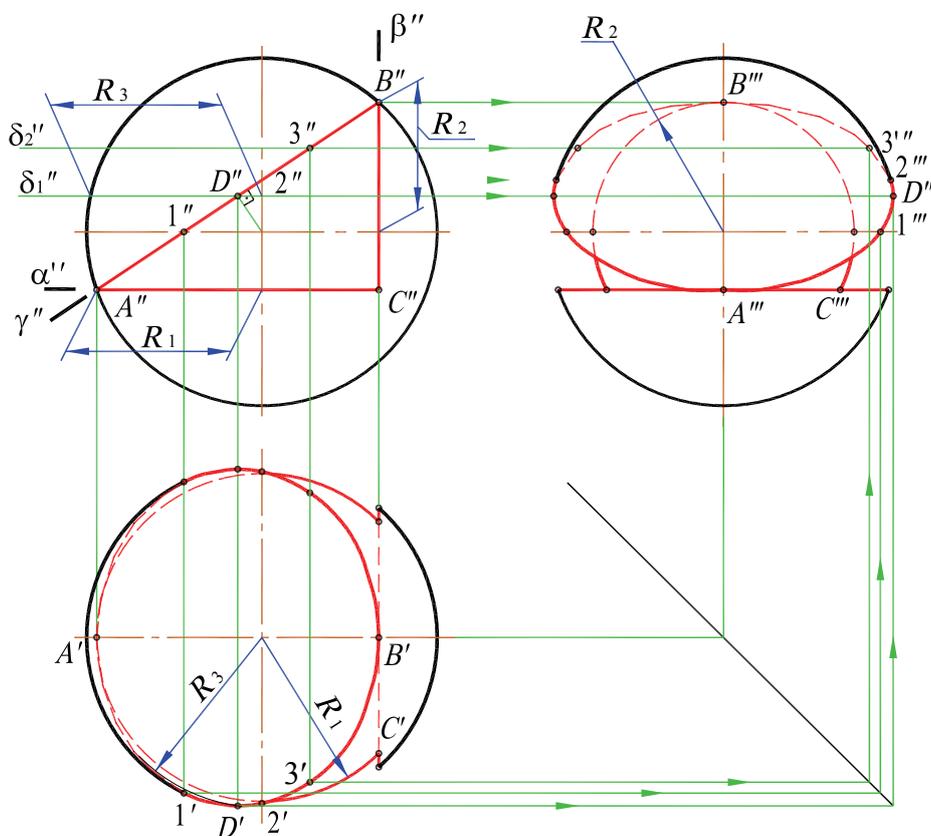


Рис. 8.12

Плоскость γ пересекает сферу по окружности, которая на плоскости π_1 и π_3 проецируется в виде эллипса. Две вершины этого эллипса (точки A и B) являются нижней и верхней точками сечения и лежат на фронтальном меридиане. Точки 1 и 2, лежащие на экваторе и профильном меридиане, отделяют видимые части горизонтальной и профильной проекций от невидимой (точки обозначены только на одной симметричной части сечения). Вершина эллипса D (конец большой оси) определена при помощи горизонтальной плоскости δ_1 (δ_1''). Плоскость δ_1 пересекает заданную плоскость γ по фронтально проецирующей прямой, а сферу – по окружности радиуса R_3 , проецирующейся на плоскость π_1 в натуральную величину. Профильная проекция D''' точки D строится по линиям

связи. Аналогичным способом находят промежуточные точки 3, используя вспомогательную плоскость δ_2 (δ_2'').

Видимость горизонтальной и профильной проекций линий сечений определяется в зависимости от расположения их относительно экватора и профильного меридиана сферы.

При пересечении тора плоскостью в общем случае получается кривая 4-го порядка, в частных случаях она может распадаться на две кривые 2-го порядка.

На рис. 8.13 показано построение проекций усеченной части открытого тора фронтально проецирующей плоскостью α (α'').

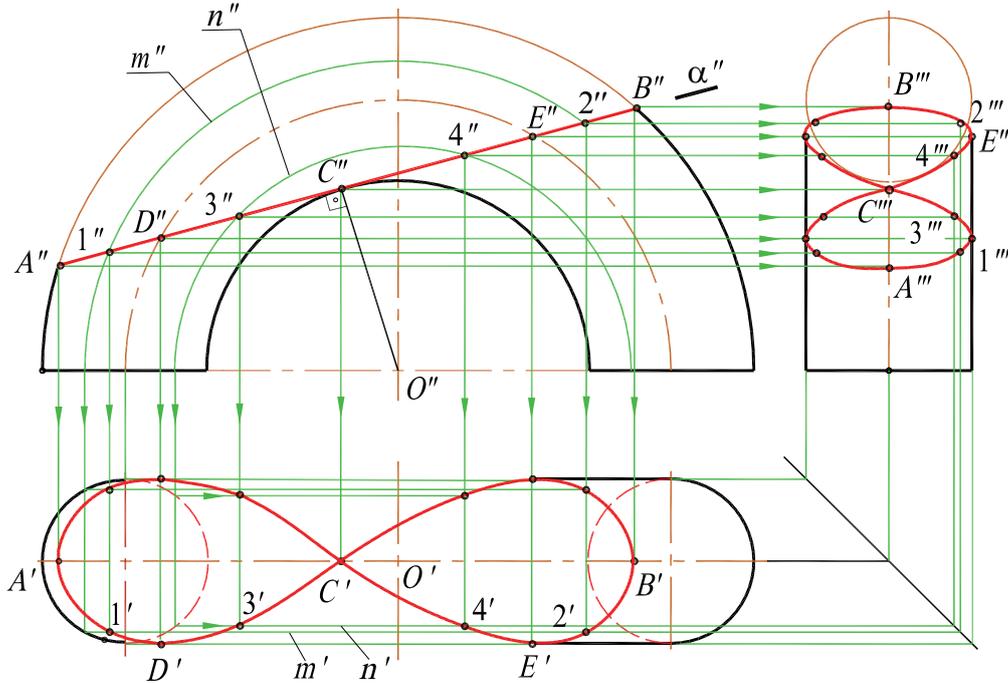


Рис. 8.13

Фронтальная проекция линии пересечения совпадает со следом-проекцией секущей плоскости α'' . Для построения кривой пересечения определены точки A, B, C, D, E и промежуточные 1, 2, 3, 4. Точки A и B лежат на экваторе (наибольшей параллели) тора, точка C – на горле (наименьшей параллели). Точки D и E лежат на крайних параллелях (точки обозначены только на одной симметричной части сечения).

Промежуточные точки 1 и 2 расположены на параллели m , точки 3, 4 – на параллели n . Построение горизонтальных проекций показано стрелками.

Профильные проекции точек кривой пересечения построены при помощи линий связи.

8.5. Построение условной развертки сферы

Так как сферическая поверхность принадлежит к числу неразвертывающихся, то возможна лишь ее приближенная (условная) развертка. Способ построения состоит в том, что сферу разбивают с помощью меридианов на узкие равные между собой доли (клинья). Каждую такую долю заменяют описанной цилиндрической поверхностью, которая касается сферы по среднему меридиану доли. Этот средний меридиан будет нормальным сечением цилиндрической поверхности. Границы цилиндрической поверхности – плоскости меридианов, ограничивающих рассматриваемую долю.

На рис. 8.14 показано построение условной развертки сферы.

Горизонтальную проекцию n' экватора n разбиваем на 12 равных частей и через полученные точки проводим горизонтальные проекции меридианов (рис. 8.14, *a*).

Рассмотрим построение приближенной развертки 1/12 части (доли) сферы, средним меридианом которой является меридиан m ($m'm''$).

Заменим часть сферы цилиндрической поверхностью, описанной около нее. Образующие этой поверхности будут фронтально проецирующими прямыми. Для построения развертки элемента цилиндрической поверхности половину фронтального меридиана разбиваем на 6 равных частей (точками 1, 2, 3, 4 отмечена только половина симметричной части). На горизонтальной прямой (рис. 8.14, *б*) откладываем отрезок A_0B_0 , равный 1/12 окружности диаметра D . Через середину A_0B_0 проводим перпендикуляр и откладываем на нем отрезки 4_03_0 , 3_02_0 , 2_01_0 , равные длине дуг меридиана m . Через полученные точки проводим горизонтальные прямые, на которых откладываем отрезки C_0D_0 , E_0F_0 , соответственно равные длине дуг $C'D'$, $E'F'$. Соединив найденные точки лекальной кривой, получим плоскую фигуру, являющейся приближенной разверткой 1/12 части сферы.

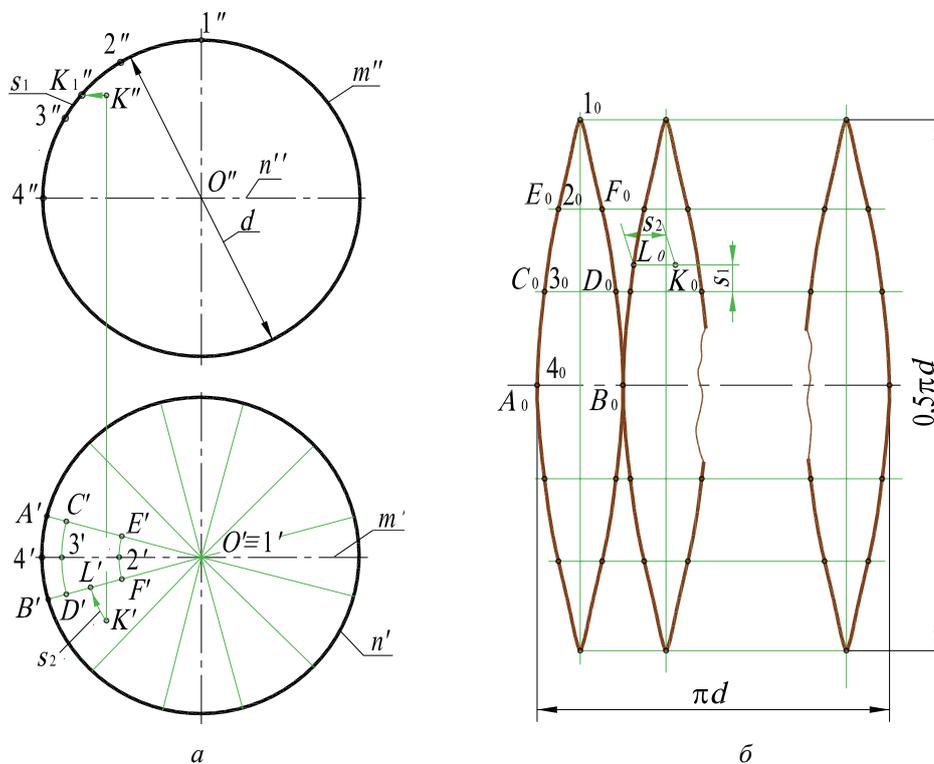


Рис. 8.14

Для придания каждой доле развертки сферической формы кроме изгибания производят растяжение и сжатие материала.

Положение произвольной точки K , принадлежащей поверхности сферы, может быть определено на развертке с помощью двух «координат» – длин дуг s_1 и s_2 . Дуга s_1 определяет смещение точки K от одной из параллелей по меридиану, а дуга s_2 – смещение ее от одного из меридианов по параллели сферы.

8.6. Примеры решения задач

Задача 1. Построить линию пересечения конуса вращения плоскостью общего положения, заданной пересекающимися прямыми AB и BC (рис. 8.15).

Решение. Для построения использован способ перемены плоскостей проекций. Преобразуем чертеж так, чтобы секущая плоскость заняла положение проецирующей, и сведем задачу к построению ряда точек на поверхности конуса.

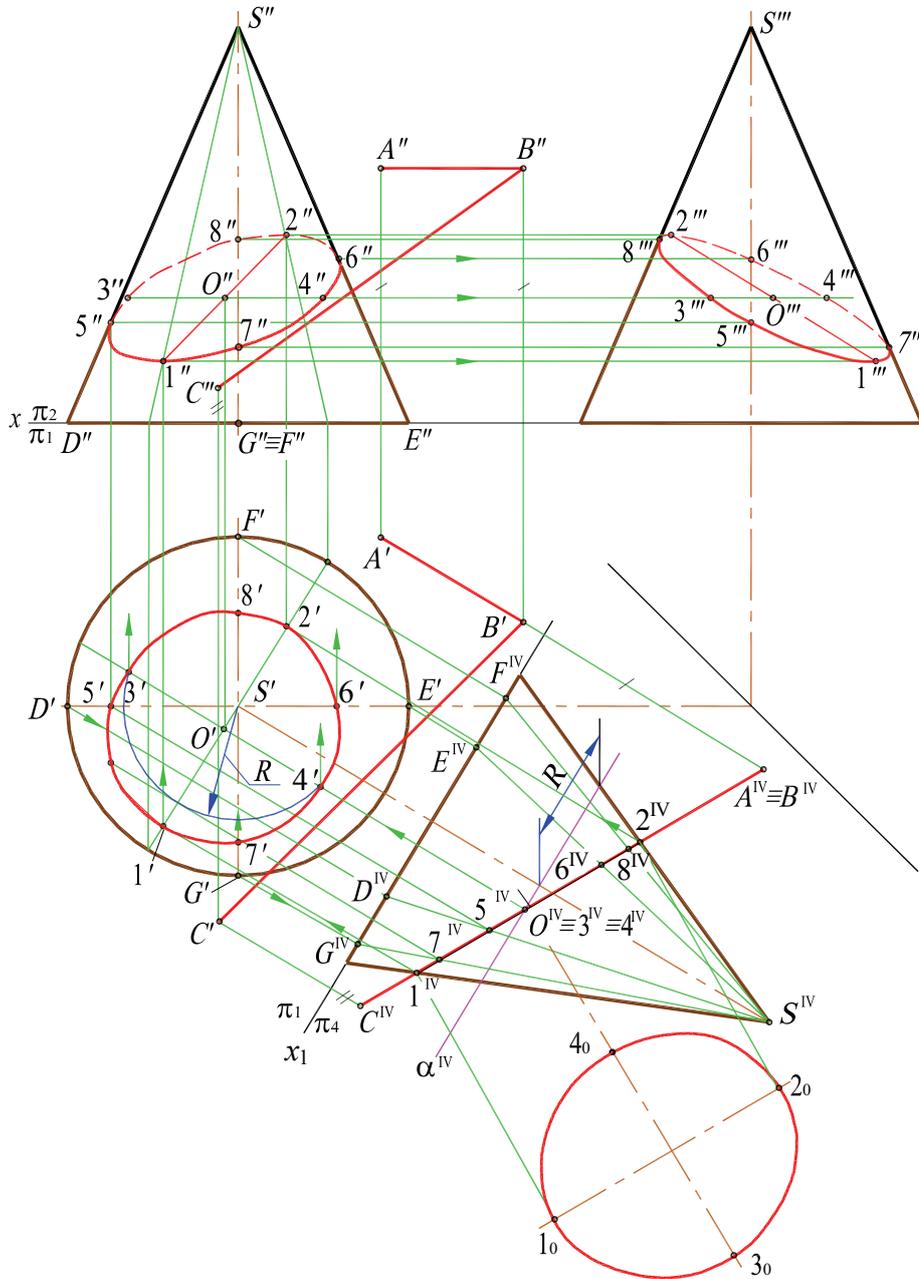


Рис. 8.15

Расположим дополнительную плоскость проекций π_4 перпендикулярно горизонтали AB секущей плоскости, а ось x_1 – перпендикулярно проекции $A'B'$. Горизонталь AB преобразуется в проецирующую прямую, а секущая плоскость ($AB \cap BC$) – в плоскость, перпендикулярную плоскости π_4 . След-проекция секущей плоскости пересекает проекцию конуса на плоскость π_4 в точках 1^{IV} и 2^{IV} , которые являются концами большой оси эллипса. В точке O , делящей отрезок $1-2$ пополам, находится проекция центра эллипса. По линиям связи на горизонтальной проекции конуса найдены проекции $0'$, $1'$, $2'$. Для нахождения проекций $3'$ и $4'$ (концов малой оси эллипса) использована плоскость α (α^{IV}), проведенная перпендикулярно к оси конуса.

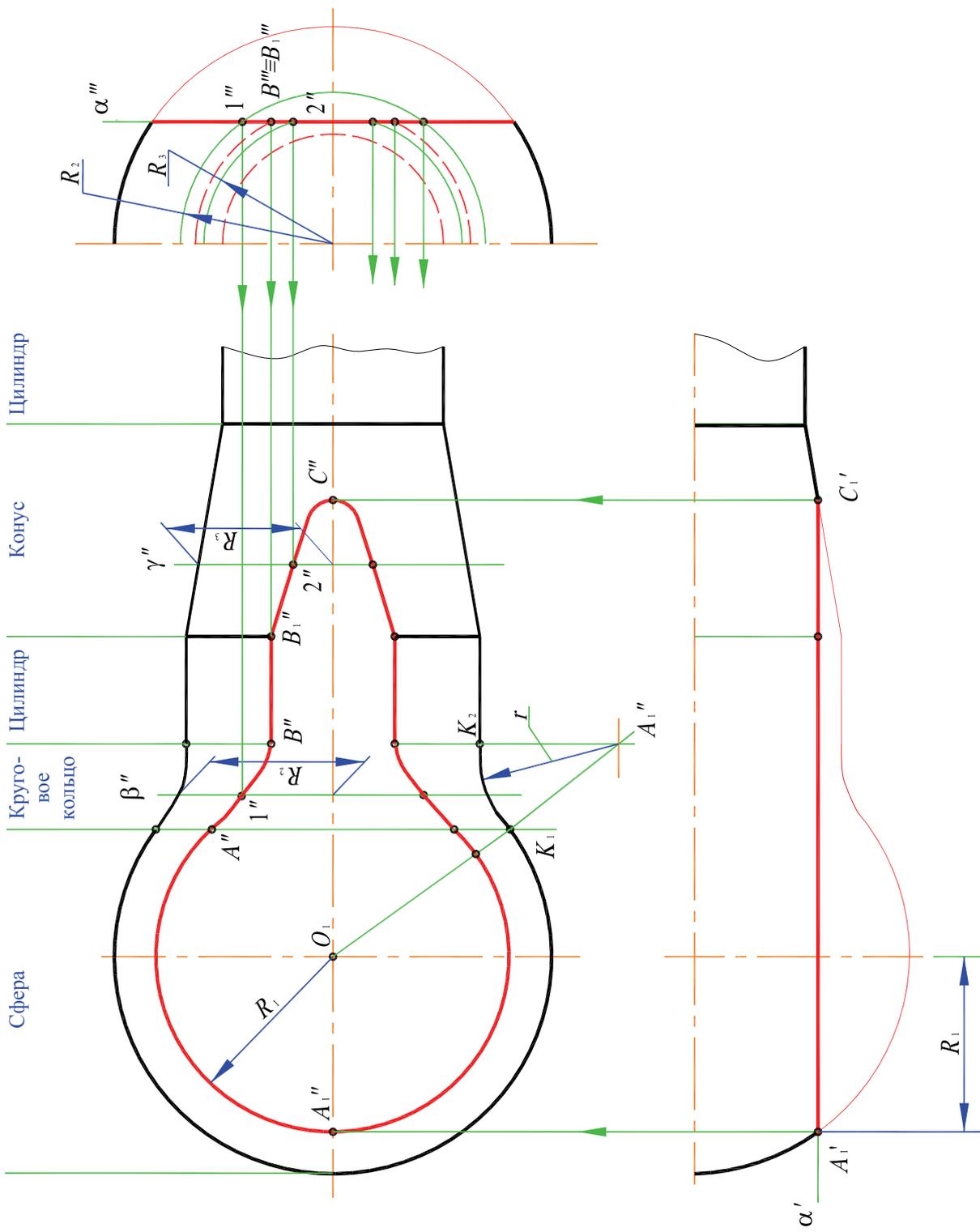


Рис. 8.16

В пересечении окружности радиуса R , проведенной из точки S' , с линией связи, проведенной из проекции O^{IV} , находятся проекции $3'$ и $4'$. Для определения положения точек 5 и 6 , в которых эллипс на фронтальной проекции разделяется на «видимую» и «невидимую» части, построены проекции $S^{IV}D^{IV}$, $S^{IV}E^{IV}$ образующих SD и SE , найдены точки 5^{IV} и 6^{IV} , по ним проекции $5'$ и $6'$. Образующие SF и SG использованы для нахождения точек 7 и 8 , расположенных на ближней и дальней образующих конуса. Фронтальные проекции точек $1''$, $2''$, $3''$, $4''$, $5''$, $6''$, $7''$, $8''$, $0''$ находятся исходя из того, что расстояния проекций на плоскость π_4 от оси x_1 равны расстоянию проекций на плоскость π_2 от оси x . Профильную проекцию линии пересечения конуса плоскостью получают с помощью линий связи.

Натуральная величина фигуры сечения эллипса строится по его большой оси ($1_02_0 = 1^{IV}2^{IV}$) и малой оси ($3_04_0 = 3'4'$).

Задача 2. Построить линию пересечения тела вращения фронтальной плоскостью α (рис. 8.16).

В практике линии, получающиеся при плоском срезе заготовки детали, поверхность которой ограничена соосными поверхностями вращения, называют линиями среза. На рис. 8.16 изображено тело вращения, ограниченное сферической поверхностью, поверхностью кругового кольца, конической и двумя цилиндрическими поверхностями, а также двумя фронтальными плоскостями α (на чертеже даны лишь половины горизонтальной и профильной проекций детали).

Вначале устанавливаются участки поверхностей вращения, ограничивающих рассматриваемое тело. Цилиндр и конус разделяют окружности (их проекции вертикальные линии), а для определения граничных окружностей, разделяющих круговое кольцо со сферой и цилиндром, выполняется сопряжение очерковых линий сферы и цилиндра. Точки сопряжения K_1 и K_2 найдены на линии центров O_1O_2 и на перпендикуляре к образующей цилиндра. Через точки сопряжения и граничные окружности проведены профильные плоскости – границы участков тела вращения (участки надписаны над фронтальной проекцией).

Линия среза сферы – параллель радиуса R_1 , построенная по горизонтальной проекции точки A_1 , линия среза цилиндра BB_1 построена по профильной проекции ($B'''B_1'''$). Линия среза конуса – гипербола, ее вершина (точка C) построена по горизонтальной проекции C' . Точки A , B , B_1 , C – характерные точки.

Для нахождения промежуточных точек линий среза кругового кольца и конуса использованы вспомогательные профильные плоскости β (β'') и γ (γ''). Плоскости β и γ пересекают тело вращения по окружностям радиусов R_2 и R_3 , которые на профильной проекции, пересекаясь с плоскостью α (α'''), дают промежуточные точки 1 и 2 .

Вопросы для контроля

1. Какие линии получают при пересечении цилиндра плоскостью?
2. Какие линии получают при пересечении конуса плоскостью?
3. Какая линия получается при пересечении сферы плоскостью и какими могут быть проекции этой линии?
4. Как должны быть расположены плоскости, пересекающие тор по окружностям?
5. Какие поверхности вращения являются разворачивающимися?

Глава 9. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С МНОГОГРАННИКАМИ И КРИВЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Точки пересечения прямой линии с геометрическими телами называют также точками встречи, одна из них является точкой входа, другая – точкой выхода.

9.1. Частные случаи определения точек пересечения

Частный способ определения указанных точек состоит в том, что одна из проекций точки пересечения принадлежит «вырожденной» проекции поверхностей или прямой, а другая определяется из условия принадлежности точки прямой или поверхности.

На рис. 9.1 показано построение точек пересечения прямых a и b с поверхностью четырехугольной прямой призмы. Боковая поверхность призмы – проецирующая (боковые грани перпендикулярны к горизонтальной плоскости проекций). Поэтому горизонтальные проекции K_1', K_2', K_3' точек пересечения находятся на «вырожденных» проекциях боковых граней. Фронтальные проекции этих точек определяются по линиям связи на фронтальных проекциях прямых a'' и b'' . Вторая точка пересечения (точка K_4) прямой b находится на пересечении с верхним основанием призмы, которое является горизонтальной плоскостью. Сначала отмечаем фронтальную проекцию K_4'' , а затем по линии связи находим горизонтальную K_4' .

Видимость фронтальных проекций точек пересечения прямых a и b определяется видимостью граней, на которых лежат указанные точки. Так, точка K_1 лежит на невидимой грани ABB_1A_1 и поэтому участок прямой a от проекции K_1 до ребра AA_1 невидим. Участки прямых, расположенных внутри тел, изображаются невидимыми. Участок горизонтальной прямой b от точки K_4' видим, так как точка K_4 расположена на верхнем основании призмы.

На рис. 9.2 показано построение точек пересечения прямых a и b с поверхностью цилиндра вращения.

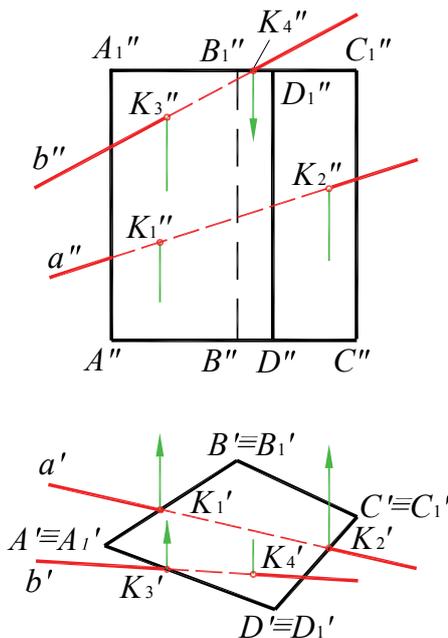


Рис. 9.1

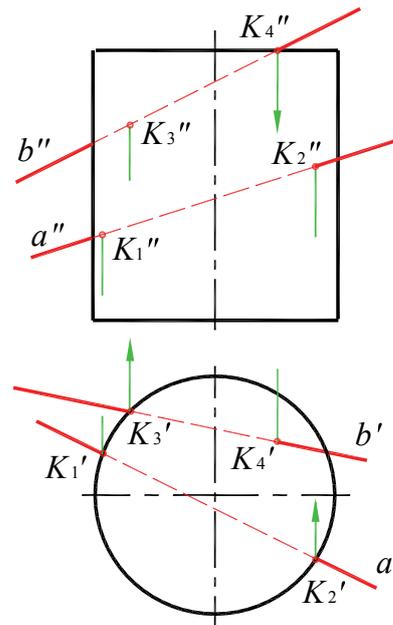


Рис. 9.2

Горизонтальные проекции точек K_1, K_2, K_3 находятся на пересечении окружности (горизонтальной проекции боковой поверхности цилиндра) с проекциями прямых, фронтальная проекция точки K_4 – на пересечении горизонтальной плоскости верхнего основания с проекцией прямой. При определении видимости фронтальных проекций прямых a и b следует учесть, что проекции K_1'' и K_3'' расположены на невидимой части цилиндра и поэтому участки прямых a и b от проекций K_1'' и K_3'' до очерковой образующей невидимы. Горизонтальная проекция точки K_4 расположена на верхнем основании цилиндра, поэтому проекция b' до точки K_4' видима.

На рис. 9.3 показано построение точек пересечения проецирующих прямых a и b с поверхностью пирамиды. Фронтальные проекции K_1'' и K_2'' точек пересечения фронтально проецирующей прямой a совпадают с «вырожденной» проекцией прямой, а горизонтальные проекции находятся на прямых $S1$ и $S2$ грани SAD и SAB .

Горизонтальные проекции точек пересечения K_3 и K_4 горизонтально проецирующей прямой b совпадают с «вырожденной» проекцией прямой, фронтальная проекция точки K_3 находится на прямой $S3$ грани SCD . Точка K_4 находится на горизонтальной плоскости основания пирамиды.

На рис. 9.4 показано построение точек пересечения проецирующих прямых a и b с поверхностью конуса вращения. Проекция K_1' и K_2' определяются с помощью параллели (окружности радиуса R) конуса, проекция K_3'' – с помощью образующей $S2$. Точка K_4 расположена на горизонтальной плоскости основания конуса.

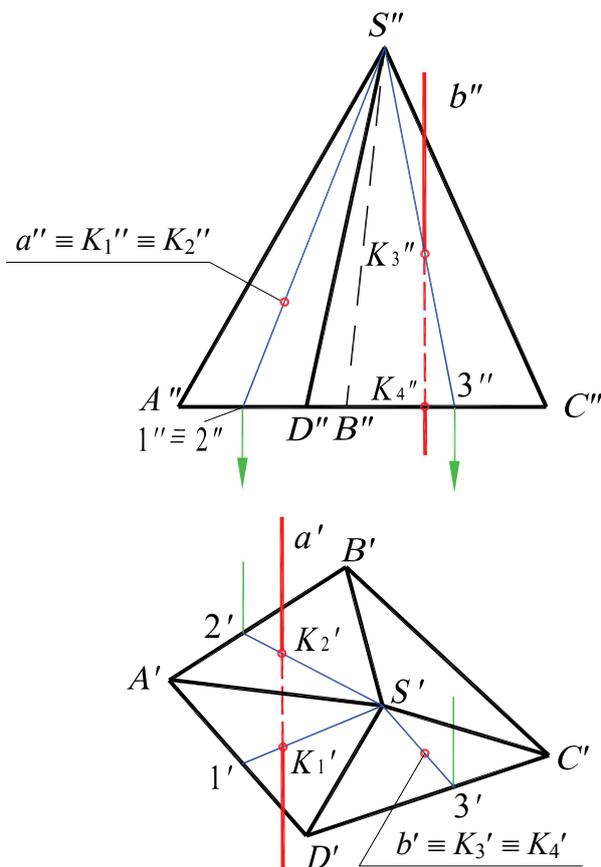


Рис. 9.3

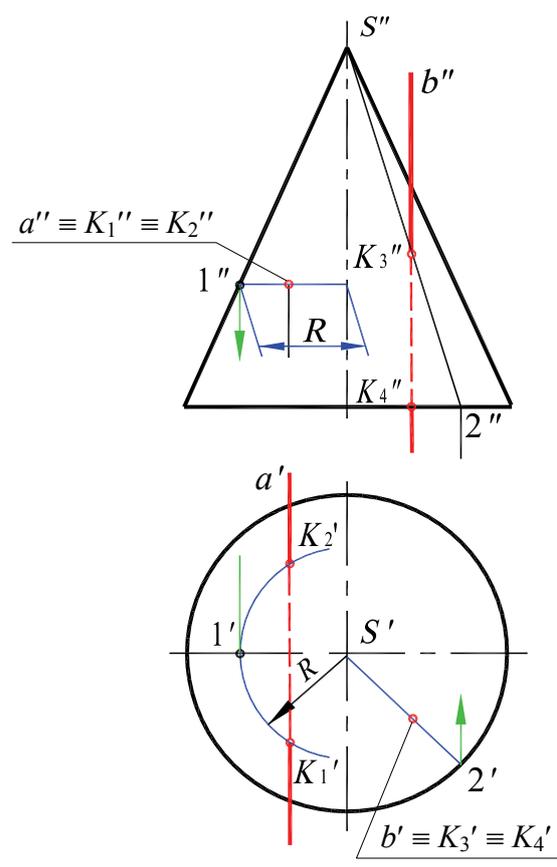


Рис. 9.4

На рис. 9.5 для нахождения горизонтальных проекций точек пересечения K_1, K_2, K_3, K_4 проецирующих прямых a и b с поверхностью сферы использованы параллели (окружности) сферы.

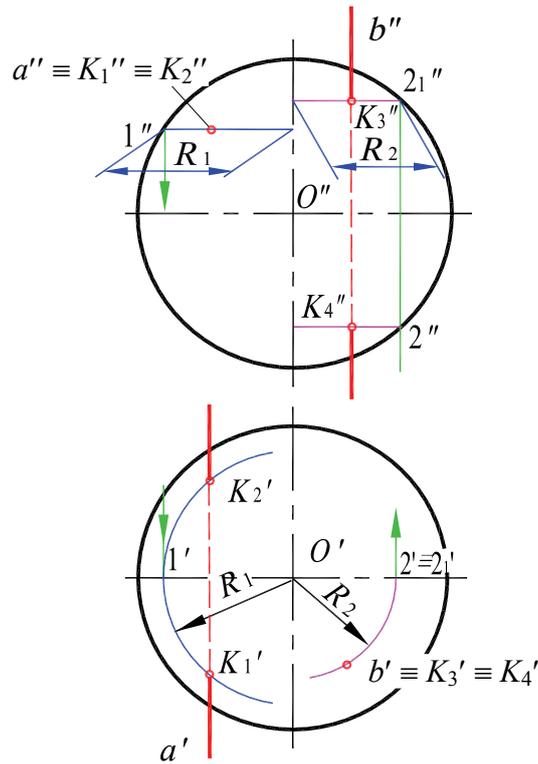


Рис. 9.5

Точки K_1 и K_2 находятся на параллели радиуса R_1 , а точки K_3 и K_4 – на параллели радиуса R_2 . Точки пересечения K_1, K_2, K_3, K_4 расположены на видимых участках проекций сферы.

9.2. Общий способ определения точек пересечения

В общем случае определение точек пересечения прямой линии с поверхностью геометрических тел аналогично тому, как решается задача на пересечение прямой линии с плоскостью, и заключается в следующем:

- через данную прямую проводим вспомогательная плоскость;
- строим линию пересечения геометрического тела вспомогательной плоскостью;
- определяем искомые точки пересечения построенной линии с данной прямой;
- определяем видимость участков прямой линии.

Вспомогательную секущую плоскость выбирают так, чтобы она пересекала поверхность геометрического тела по линии, легко определяемой на чертеже, например, состоящей из прямых или окружностей.

Обычно в качестве вспомогательной плоскости выбирают проецирующую плоскость, проходящую через заданную прямую. В этом случае построение линии пересечения поверхности с проецирующей плоскостью значительно упрощается.

На рис. 9.6 показано нахождение точек пересечения прямой общего положения AB с поверхностью пирамиды $SCDE$. Через прямую AB проведена вспомогательная фронтально проецирующая плоскость α , пересекающая поверхность пирамиды по линии 1–2–3. На пересечении этой линии с прямой AB находятся искомые точки пересечения. Видимость участков прямой линии определяется видимостью граней, на которых лежат точки пересечения K_1 и K_2 . Так, на горизонтальной проекции (рис. 9.6, б) точки K_1 и K_2 расположены на видимых проекциях $S'C'E'$ и $S'C'D'$ граней SCE и SCD , а на фронтальной проекции точка K_2 лежит на невидимой грани SCD . Поэтому участок фронтальной проекции AB от K_2 до ребра SD невидим.

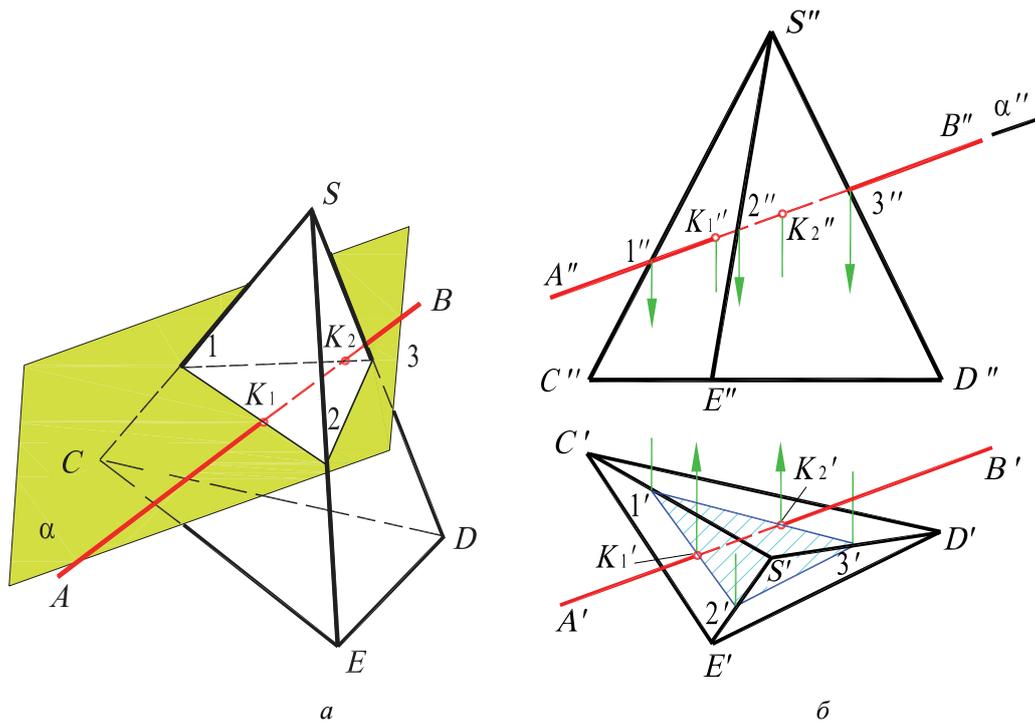


Рис. 9.6

На рис. 9.7 определены точки пересечения поверхности вращения с прямой AB . Через прямую AB нельзя провести вспомогательную плоскость, пересекающую поверхность по окружности. Поэтому использована одна из проецирующих плоскостей – горизонтально проецирующая плоскость α (α'), которая пересекает поверхность вращения по плоской кривой линии.

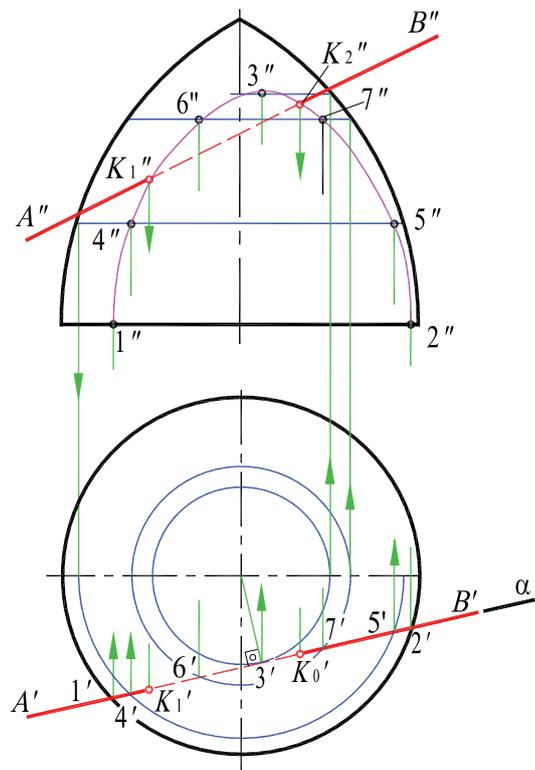


Рис. 9.7

Для получения фронтальной проекции кривой найдены опорные точки 1, 2, 3 и промежуточные 4, 5, 6, 7. Точки 1 и 2 находятся на плоскости основания, а точки 3, 4, 5, 6, 7 – на параллелях (окружностях) поверхности вращения.

Фронтальные проекции K_1'' и K_2'' определяются на пересечении полученной кривой и прямой AB . Горизонтальные проекции точек пересечения находятся при помощи линий связи.

Точки пересечения K_1 и K_2 расположены на видимых частях поверхности вращения.

Для нахождения точек пересечения конуса вращения с горизонтальной прямой AB (рис. 9.8) использована вспомогательная горизонтальная плоскость α (α''), пересекающая конус по окружности. Для определения точек пересечения сферы с фронтальной прямой AB использована фронтальная плоскость α (α'') (рис. 9.9). При определении видимости участков прямых следует учитывать, что фронтальная проекция точки K_2 расположена на невидимой части конуса, а горизонтальная проекция точки K_2 – на невидимой части сферы.

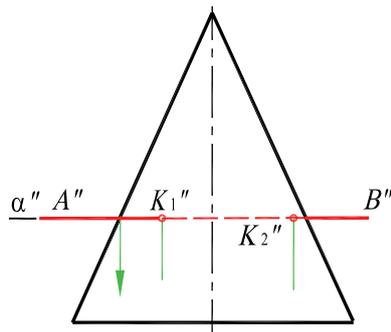


Рис. 9.8

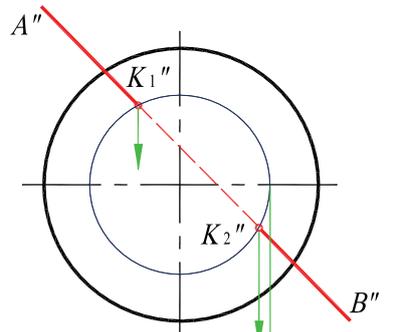
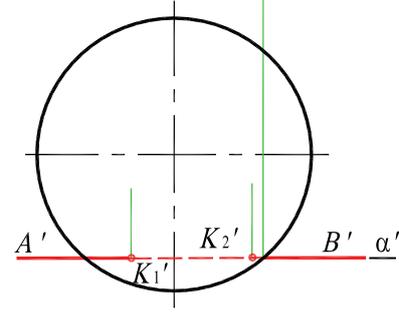
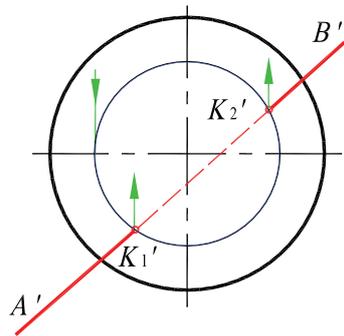


Рис. 9.9



В некоторых случаях при определении точек пересечения прямой с поверхностью целесообразно применять плоскость общего положения. Так, при пересечении конуса с прямой общего положения (рис. 9.10) применение проецирующих плоскостей приводит к построению кривых, которые нужно строить по точкам.

Если же вспомогательную плоскость α провести через прямую AB и вершину конуса S , то она пересечет конус по двум образующим $S1$ и $S2$. Эта плоскость уже не будет проецирующей, она будет плоскостью общего положения. Для определения образующих, по которым вспомогательная плоскость α пересечет конус, находится горизонтальный след $h_{0\alpha}$ на плоскости основания конуса. Плоскость основания конуса принята за плоскость проекций π_1 . Для построения следа $h_{0\alpha}$ найден горизонтальный след M_1 прямой AB и горизонтальный след M_2 вспомогательной прямой SC (C – произвольная точка на прямой AB). След $h_{0\alpha}$ пересекает окружность основания конуса в точках 1 и 2, через которые проходят образующие $S1$ и $S2$. В пересечении образующих $S1$ и $S2$ с прямой AB находятся искомые точки пересечения K_1 и K_2 . При нахождении видимости участков прямой линии руководствуются тем, что точки K_1 и K_2 расположены на видимых частях проекций конуса.

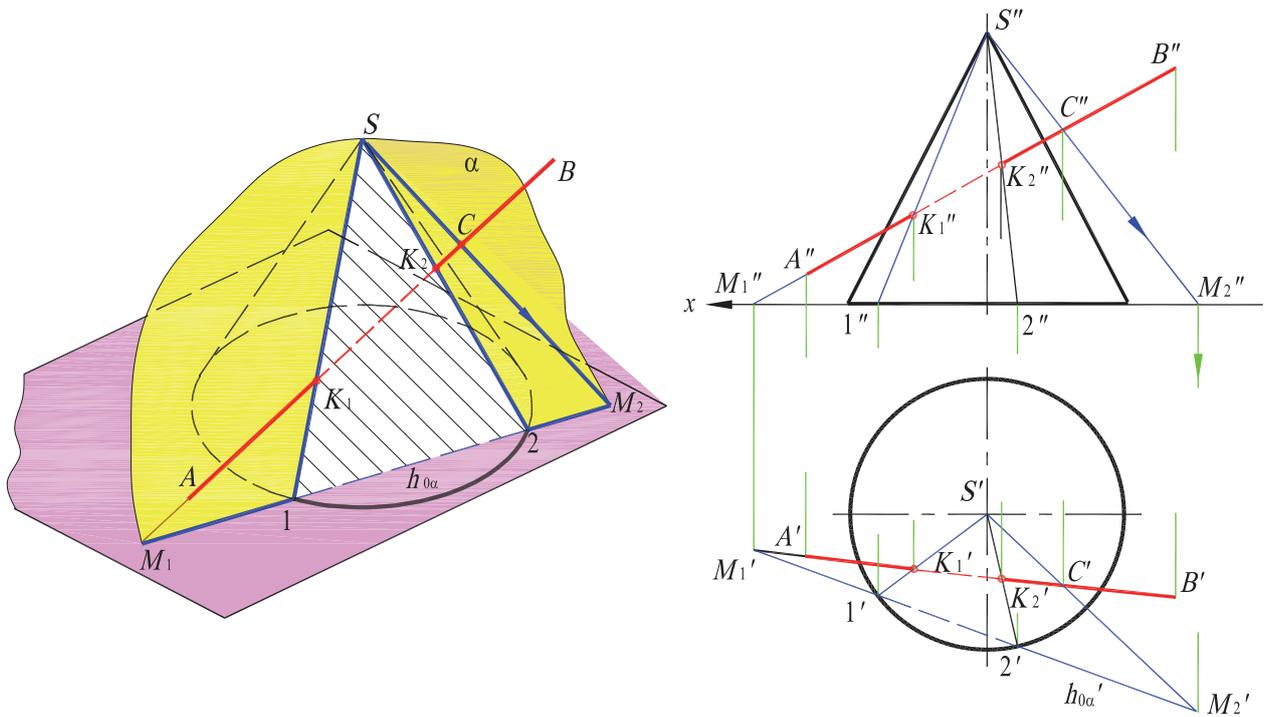


Рис. 9.10

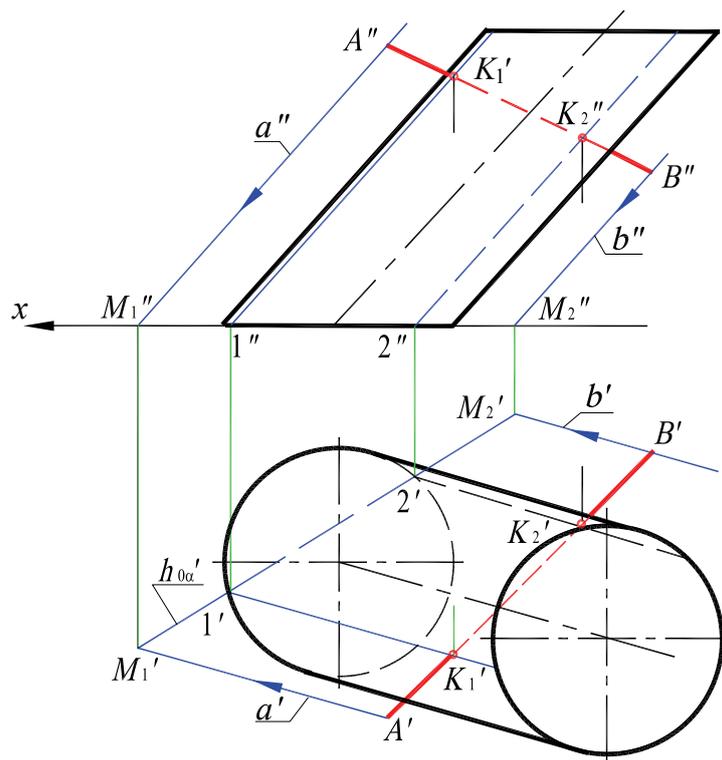


Рис. 9.11

Вспомогательная плоскость α общего положения использована при определении точек пересечения прямой AB общего положения с поверхностью наклонного цилиндра с круговым основанием (рис. 9.11). Плоскость α проводится через прямую AB параллельно образующим цилиндра. Для определения горизонтального следа $h_{0\alpha}$ на плоскости нижнего основания цилиндра проведены прямые a и b через точки A и B параллельно образующим цилиндра. Точки

пересечения $1'$ и $2'$ горизонтального следа $h_{\text{оо}'}'$ с окружностью основания определяют образующие цилиндра, по которым вспомогательная плоскость пересекает поверхность цилиндра. В пересечении этих образующих с прямой AB находятся искомые точки K_1 и K_2 .

При определении видимости проекций точек пересечения руководствуются видимостью проекций образующих, на которых расположены точки K_1 и K_2 . Точка K_1 находится на видимых проекциях образующей, точка K_2 – на невидимых.

На рис. 9.12 показано построение точек пересечения прямой AB общего положения со сферой радиуса R с центром в точке O .

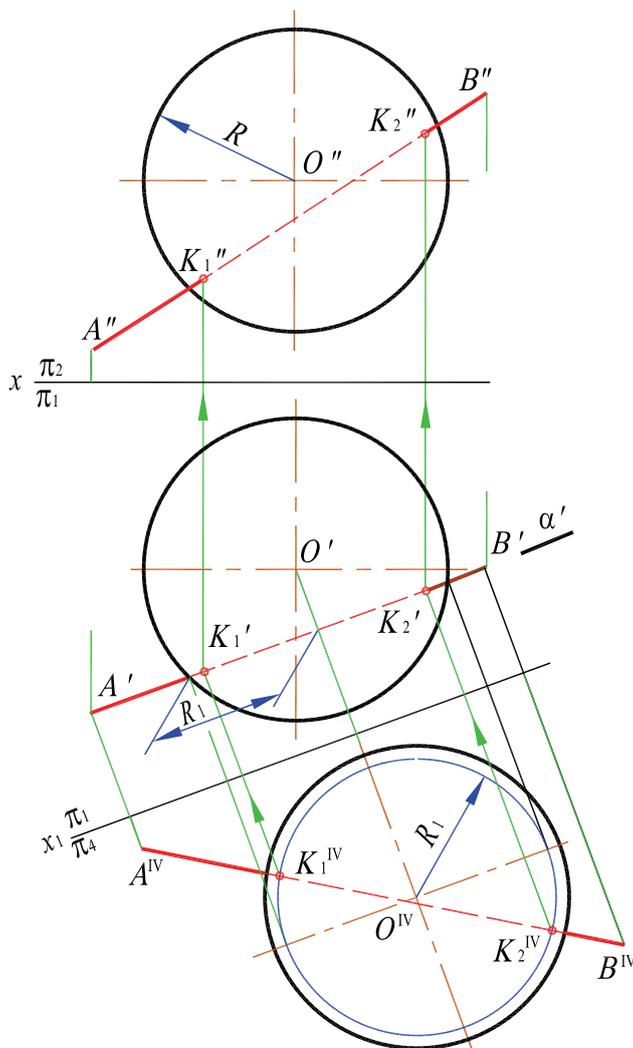


Рис. 9.12

Через прямую AB проведена горизонтально проецирующая плоскость α , которая пересекает сферу по окружности радиуса R_1 . Для того чтобы избежать проецирования этой окружности на фронтальную плоскость проекций π_2 (проекция – эллипс), задача решается способом перемены плоскостей проекций.

Преобразуем систему π_1/π_2 в новую π_1/π_4 , при этом плоскость π_4 параллельна прямой AB . Проведя новую ось проекций x_1 параллельно $A'B'$, находим положение прямой AB и центра сферы O на плоскости проекций π_4 – проекции $A^{IV}B^{IV}$ и O^{IV} .

В результате преобразования прямая AB заняла положение, параллельное плоскости π_4 , и окружность радиуса R_1 проецируется на π_4 без искажения. В пересечении проекции $A^{IV}B^{IV}$ и окружности радиуса R_1 определяются проекции точек пересечения K_1 и K_2 .

Проекции точек пересечения на плоскости π_1 и π_2 находятся при помощи линий связи. При определении видимости участков прямой AB следует учитывать, что горизонтальная проекция K_1' точки K_1 расположена на невидимой части сферы.

9.3. Примеры решения задач

Задача 1. Построить точки пересечения прямой AB с поверхностью кругового кольца (рис. 9.13).

Решение. Так как прямая AB – горизонтальная, то для построения точек пересечения применим вспомогательную горизонтальную плоскость α (α''). Плоскость α пересекает поверхность кругового кольца по двум параллелям (окружностям) радиусов R_1 и R_2 . В пересечении горизонтальных проекций параллелей с проекцией прямой AB определяются горизонтальные проекции K_1, K_2, K_3, K_4 точек пересечения.

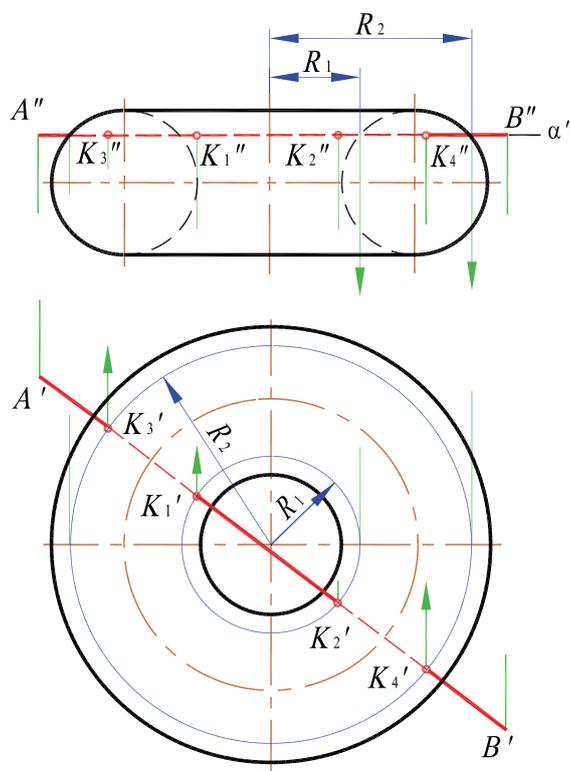


Рис. 9.13

Фронтальные проекции точек пересечения находятся при помощи линий связи. Так как поверхность тора представляет собой поверхность 4-го порядка, то прямая имеет в общем случае четыре точки пересечения.

При определении видимости участков проекций прямой руководствуемся тем, что фронтальные проекции точек K_1, K_2, K_3 расположены на невидимой части поверхности кругового кольца.

Задача 2. Построить точки пересечения прямой AB с поверхностью усеченного конуса (рис. 9.14).

Решение. Так как фронтальную проекцию вершины конуса нельзя построить (построения выходят за рамки чертежа), то принимаем очерковую образующую конуса за фронтальную проекцию вспомогательной прямой, проходящей через вершину конуса.

Обозначив точку ее пересечения с проекцией AB точкой C , находим на горизонтальной проекции AB проекцию C' и проводим горизонтальную проекцию $S'C'$ вспомогательной прямой SC . Пересекающиеся прямые AB и SC образуют плоскость, пересекающую конус по образующим. Находим ее горизонтальный след $h_{0\alpha}'$ на плоскости основания конуса, построив горизонтальные следы M_1 и M_2 прямой AB и вспомогательной прямой. След $h_{0\alpha}'$ пересекает окружность основания конуса в точках 1 и 2. Пересечение проекций образующих $S1$ и $S2$ с проекцией AB определяет горизонтальные проекции K_1 и K_2 точек пересечения.

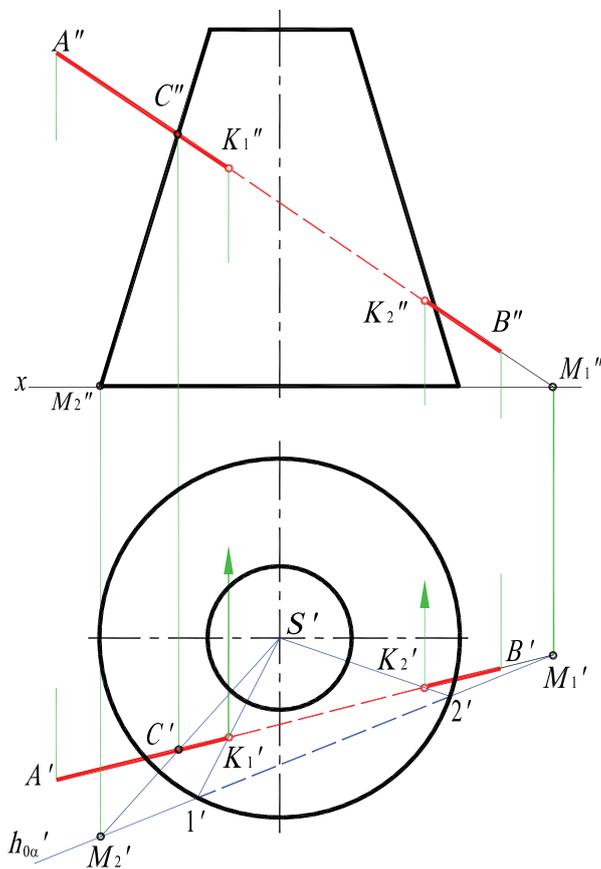


Рис. 9.14

По линиям связи получаем фронтальные проекции точек K_1, K_2 .

Видимость участков проекции отрезка AB определяем из того, что точки пересечения расположены на видимых частях проекций конуса.

Вопросы для контроля

1. При каких условиях рассматриваются частные случаи пересечения прямой с поверхностью геометрических тел?
2. Как построить точки пересечения прямой с поверхностью в частном случае?
3. В чем состоит общий способ определения точек пересечения прямой с поверхностью геометрических тел?
4. Как нужно проводить вспомогательную плоскость при пересечении конуса прямой линией общего положения, чтобы получить в сечении конуса прямые линии?
5. С помощью каких преобразований можно упростить задачу построения точек пересечения прямой общего положения со сферой?

Глава 10. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

10.1. Способы построения линий пересечения

При пересечении многогранников может иметь место *проницание* одного многогранника другим (полное пересечение) и *врезание* (неполное пересечение).

При проницании получаются две замкнутые линии пересечения. Они могут быть плоские (при проницании одной грани) и пространственные (при проницании двух и более граней). При врезании получается одна замкнутая пространственная ломаная линия пересечения.

Вершинами ломаной пересечения являются точки пересечения ребер одного многогранника с гранями другого и ребер второго с гранями первого. Звенья ломаной – это отрезки, по которым грани одного многогранника пересекают грани другого.

В соответствии с вышесказанным при решении задач используется один из следующих способов:

1) способ ребер, дающий возможность найти вершины ломаной линии пересечения (задачи на пересечение прямой линии с плоскостью);

2) способ граней, дающий возможность определить звенья ломаной линии пересечения (задачи на взаимное пересечение плоскостей).

Преимущество отдается тому из способов, который дает более простое решение. Иногда эти два способа целесообразно комбинировать. Следует отметить, что если проекция ребра одного многогранника не пересекает проекции контура другого, то данное ребро не пересекает другой многогранник. Однако пересечение проекций ребра одного многогранника с проекциями контура другого еще не означает, что ребро пересекает многогранник.

При определении видимости проекции линии пересечения следует учитывать, что видимой является та часть линии пересечения, которая находится на видимых проекциях граней обоих многогранников.

Рассмотрим случай пересечения пирамиды с призмой, боковая поверхность которой – фронтально проецирующая (рис. 10.1).

Так как фронтальные проекции ребра AA_1 призмы и ребра SF пирамиды не пересекают контур другого многогранника, то при пересечении получается одна пространственная ломаная линия (случай врезания).

Грань AA_1B_1B призмы – горизонтальная плоскость α (α''), пересекающая боковую поверхность пирамиды по ломаной линии, звенья которой параллельны сторонам основания DEF пирамиды. По фронтальной проекции точки $1''$, расположенной на ребре SD пирамиды, найдем ее горизонтальную проекцию $1'$ и, проведя звенья ломаной линии, определим точки $2', 3', 4'$ ($1'2' \parallel D'E'$, $2'3' \parallel E'F'$, $1'4' \parallel D'F'$).

Горизонтальные проекции $5'$ и $6'$ точек пересечения ребер SE и SD с гранями призмы находятся с помощью линий связи. Горизонтальные проекции $7'$ и $8'$ точек пересечения ребра CC_1 призмы с поверхностью пирамиды определим с помощью горизонтальной плоскости β , проведенной через ребро CC_1 призмы.

Плоскость β (β') пересекает поверхность пирамиды по линиям, параллельным сторонам основания пирамиды. Спроецировав точку K , лежащую на ребре SD пирамиды, через проекцию K' проведем линии, параллельные $D'E'$ и $D'F'$. Эти линии пересекаются с горизонтальной проекцией ребра CC_1 призмы в точках $7'$ и $8'$.

Последовательно соединяя каждые пары точек пересечения одних и тех же граней отрезками прямых, получим замкнутую пространственную ломаную линию $1'2'3'5'7'6'8'4'1'$.

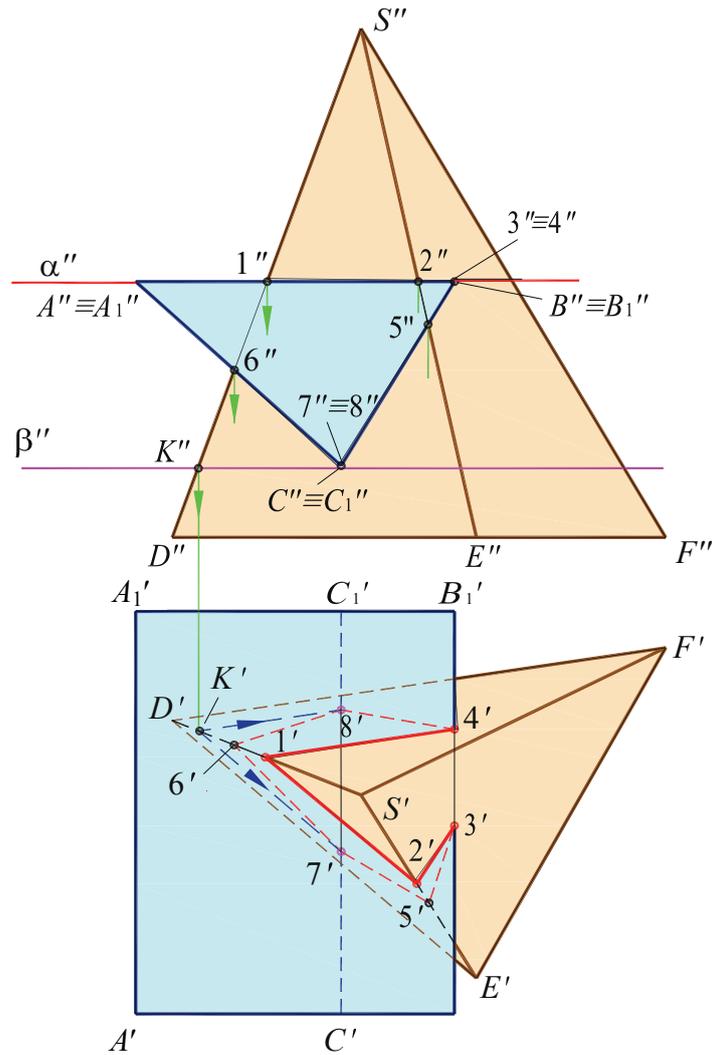


Рис. 10.1

Видимой будет часть этой линии $3'2'1'4'$, расположенная на видимой грани AA_1B_1B .

На рис. 10.2 показано построение линии пересечения двух призм, боковые поверхности которых являются проецирующими (для призмы $ABCA_1B_1C_1$ – горизонтально проецирующая, для призмы $DEFD_1E_1F_1$ – профильно проецирующая).

Рассматривая положение горизонтальных и профильных проекций многогранников, отмечаем, что призма $DEFD_1E_1F_1$ проникает в боковую поверхность призмы $ABCA_1B_1C_1$. Следовательно, при пересечении получают две замкнутые ломаные линии: одна из них – пространственная (пересекаются две грани призмы $ABCA_1B_1C_1$), другая – плоская (пересекается одна грань).

Горизонтальная проекция линий пересечения совпадает с горизонтальной проекцией вертикальной призмы, а профильная – с профильной проекцией горизонтальной призмы.

Отмечая точки пересечения $1', 2', 3', 4', 5', 6'$ горизонтальных проекций ребер $D'D_1, E'E_1, F'F_1$ с горизонтальной проекцией призмы $ABCA_1B_1C_1$, при помощи линий связи находим их фронтальные проекции.

Фронтальные проекции $7'', 8''$ точек пересечения ребра AA_1 с боковой поверхностью призмы $DEFD_1E_1F_1$ определим по линиям связи, используя их профильные проекции $7'''$ и $8'''$.

Последовательно соединяя найденные точки пересечения, принадлежащие одним и тем же граням, построим две ломаные линии $1-3-8-5-7-1$ и $2-4-6-2$.

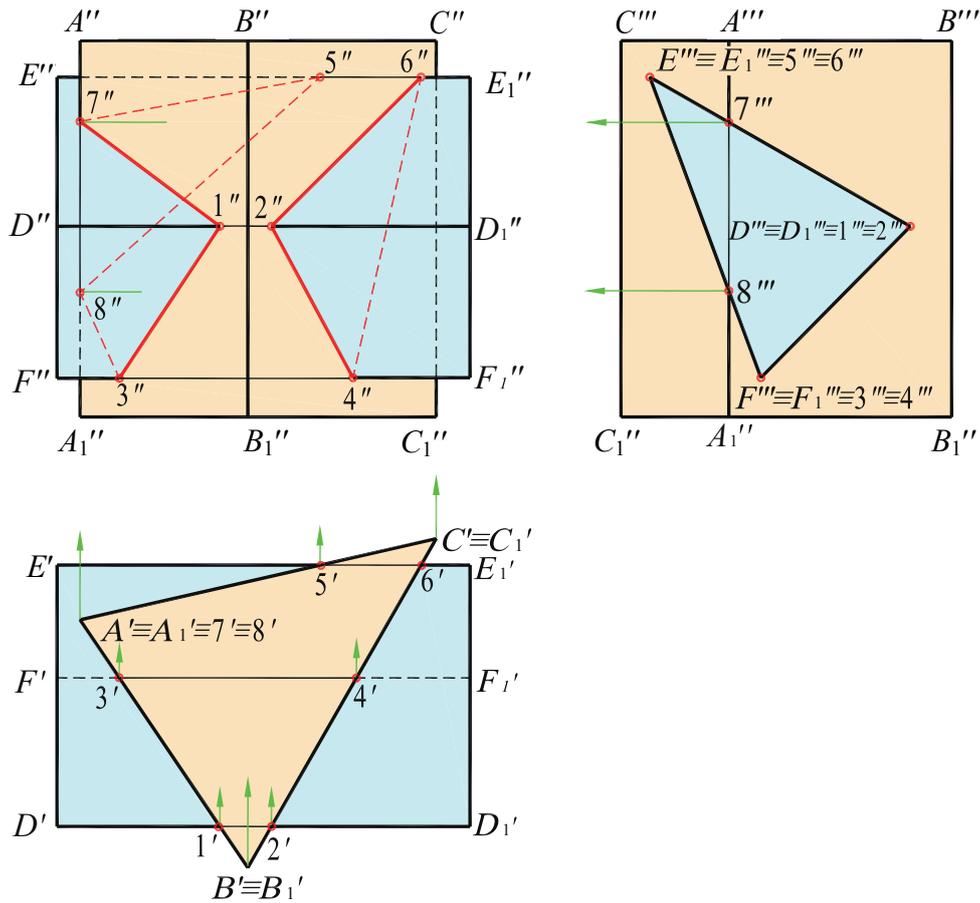


Рис. 10.2

Видимая часть линий пересечения расположена на видимых гранях обоих многогранников.

10.2. Примеры решения задач

Задача. Построить линию пересечения пирамиды с прямой призмой (рис. 10.3).

Решение. Рассматривая горизонтальные проекции многогранников, отметим, что имеет место проникание, так как все ребра пирамиды пересекаются поверхностью призмы. При этом одна из ломаных линий – плоская (поверхность пирамиды пересекается одной гранью призмы), другая – пространственная (в пересечении с пирамидой участвуют две грани призмы). Так как боковая поверхность призмы – горизонтально проецирующая, то горизонтальные проекции точек пересечения $1', 2', 3', 4', 5', 6'$ определяются в пересечении ребер пирамиды с боковыми гранями призмы. Их фронтальные проекции строятся с помощью линий связи на соответствующих ребрах пирамиды.

По горизонтальным проекциям многогранников видно, что только ребро EE_1 призмы пересекает грани пирамиды. Для определения точек пересечения его с пирамидой через это ребро и вершину S пирамиды проводим вспомогательную горизонтально проецирующую плоскость α (α'). Она пересекает грани пирамиды по прямым MS и NS . В пересечении фронтальных проекций $M''S''$ и $N''S''$ с проекцией $E''E_1''$ определяются точки пересечения (7 и 8) ребра EE_1 призмы с гранями SAB и SBC пирамиды.

Последовательно соединяя точки пересечения, принадлежащие одним и тем же граням, получим линии пересечения 1–2–3 и 4–6–8–5–7–4.

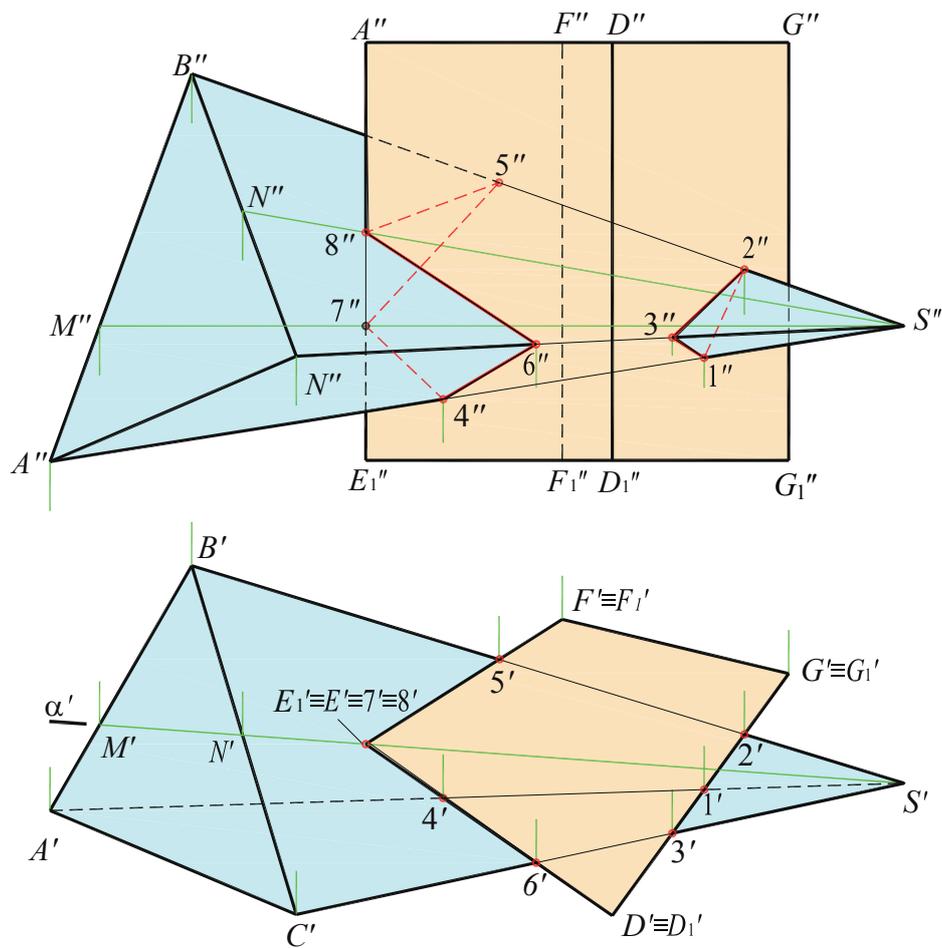


Рис. 10.3

Видимыми являются только те отрезки ломаных линий, которые принадлежат видимым граням обоих многогранников. Так, фронтальные проекции отрезков $1''3''$, $2''3''$, $4''6''$, $6''8''$ линий пересечения видимы. Отрезки $1''2''$, $4''7''$ принадлежат невидимой грани SAB пирамиды, отрезки $5''7''$, $5''8''$ расположены на невидимой грани $E E_1 F_1 F$ призмы.

Вопросы для контроля

1. Что представляет собой линия пересечения многогранников?
2. В каком случае при пересечении многогранников получается проникание, врезание?
3. В чем заключается способ ребер и способ граней?
4. В какой последовательности соединяются точки пересечения ребер и граней многогранников?
5. Как определяется видимость линии пересечения многогранников?

Глава 11. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ С МНОГОГРАННИКАМИ

11.1. Способы построения линии пересечения поверхностей

Линия пересечения многогранника с телом вращения в общем случае состоит из отдельных участков кривых линий, получающихся при пересечении граней многогранника с поверхностью вращения. Точки перехода от одного участка к другому находятся на пересечении ребер многогранника с телом вращения и называются точками излома. Участок линии пересечения может быть и прямой линией в случае пересечения линейчатой поверхности вращения гранью многогранника по образующей.

При проницании (полном пересечении) получаются две замкнутые линии пересечения. Они могут быть плоскими (поверхность вращения проницает одну грань) или пространственными, состоящими из нескольких плоских кривых с точками излома в местах пересечения поверхности вращения ребрами многогранника.

При врезании (неполном пересечении) получается одна замкнутая пространственная линия.

Таким образом, в соответствии с указанным выше, задачи данной темы решаются по следующему плану:

- определяются точки излома линии пересечения, являющиеся точками пересечения ребер многогранника с поверхностью вращения;
- находятся точки, принадлежащие линиям пересечения отдельных граней многогранника с телом вращения. При этом сначала следует найти характерные (опорные) точки кривых. Это точки, проекции которых отделяют видимую часть проекции линии пересечения от невидимой, а также это проекции наивысших и наинизших точек линии пересечения, ближайших и наиболее удаленных, крайних слева и справа на проекциях линии пересечения;
- определяется видимость линии пересечения поверхностей и их очерков. Видимость проекций участков линии пересечения устанавливается из условия расположения их на видимой стороне каждой поверхности.

При построении точек линии пересечения многогранников с телами вращения используют вспомогательные секущие плоскости. Их располагают так, чтобы они пересекали данные поверхности по простым для построения линиям (прямым или окружностям).

Рассмотрим построение линии пересечения поверхности прямой трехгранной призмы с поверхностью цилиндра вращения (рис. 11.1). Боковые грани призмы являются горизонтально проецирующими плоскостями, а ось цилиндра перпендикулярна профильной плоскости проекций.

По горизонтальной проекции видно, что в данном случае имеем проницание цилиндра призмой, и линия пересечения состоит из двух замкнутых симметричных частей (на рис. 11.1 приведены обозначения точек только одной ее части).

Грань призмы BB_1C_1C параллельна оси цилиндра и пересекает поверхность цилиндра по прямой 2–3 (образующая цилиндра).

Грани AA_1B_1B и AA_1C_1C наклонены к оси цилиндра и пересекают его поверхность по кривым (частям эллипсов).

Горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с проекцией боковой поверхности призмы, а профильная проекция совпадает с проекцией боковой поверхности цилиндра.

Характерными точками линии пересечения являются точки пересечения 1, 2, 3 ребер призмы с поверхностью цилиндра (фронтальные проекции этих точек определяем с помощью линий связи, проведенных через их профильные проекции). Точки 4 и 5, находящиеся на верхней образующей цилиндра, разграничивают фронтальную проекцию линии пересечения

на видимую и невидимую части (фронтальные проекции этих точек определим с помощью линий связи, проведенных через соответствующие горизонтальные проекции).

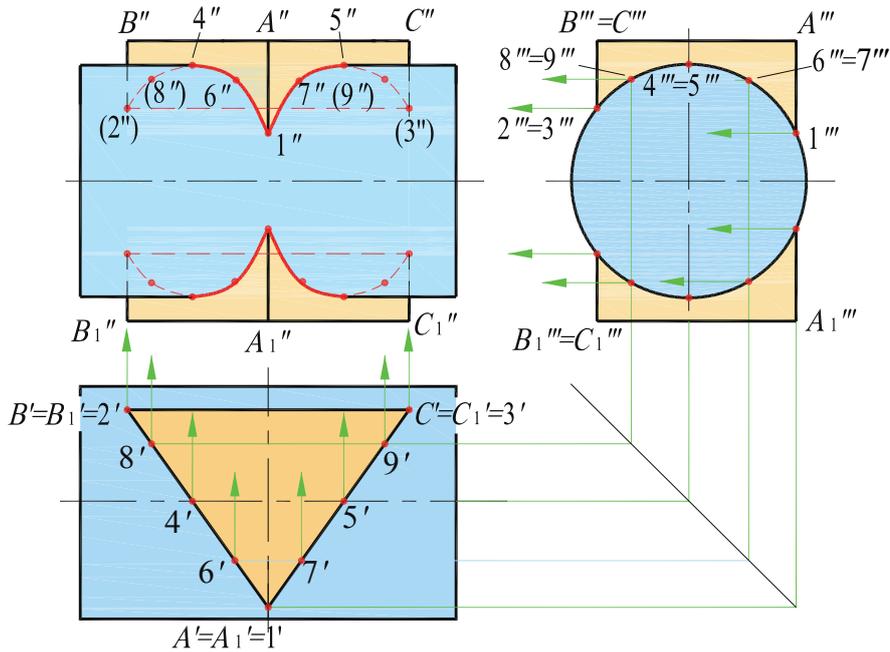


Рис. 11.1

Построение промежуточных точек 6, 7, 8, 9 выполняем следующим образом. На одной из имеющихся проекций линии пересечения (горизонтальной или профильной) намечаем проекции точек и с помощью линий связи строим недостающие проекции.

По построенным точкам проводим фронтальную проекцию линии пересечения. Видимой является часть $4''6''1''7''5''$, расположенная на видимой проекции цилиндра. Часть фронтальных проекций ребер BB_1 и CC_1 закрывается очерком цилиндра.

На рис. 11.2, а построена линия пересечения поверхности конуса вращения с поверхностью прямой четырехгранной призмы $ABCD A_1 B_1 F_1 D_1$. Боковые ребра призмы являются профильно проецирующими прямыми, а ось конуса перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций.

Из профильной проекции видно, что имеет место врезание, так как ребро BB_1 призмы не пересекает конус. Линия пересечения представляет собой замкнутую пространственную линию и состоит из четырех участков кривых второго порядка. Грань $AA_1 B_1 B$ пересекает боковую поверхность конуса по эллипсу, грань $BB_1 C_1 C$ – по гиперболе, грань $CC_1 D_1 D$ – по окружности, грань $AA_1 D_1 D$ – по параболе.

Профильная проекция линии пересечения совпадает с проекцией боковой поверхности призмы.

Характерными точками линии пересечения являются точки пересечения 3, 7, 8 ребер призмы с поверхностью конуса. Для этого через ребра AA_1 , CC_1 , DD_1 проведены горизонтальные плоскости α (α'') и β (β''), пересекающие конус по окружностям (параллелям).

На рис 11.2, а приведено обозначение точек лишь одной симметричной части линии пересечения.

Плоскость β позволяет определить также дуги окружности, по которым грань $CC_1 D_1 D$ пересекает конус. Ребро CC_1 пересекает конус в точке 7, а ребро DD_1 – в точке 8.

Характерными точками эллипса, по которому плоскость грани $AA_1 B_1 B$ пересекает боковую поверхность конуса, являются точки 1, 2, M , L . Построение этих точек начинается с профильных проекций. Высшая M и низшая 1 определяют малую ось фронтальной про-

екции эллипса и большую ось горизонтальной. Середина (точка O) отрезка $M1$ является центром эллипса.

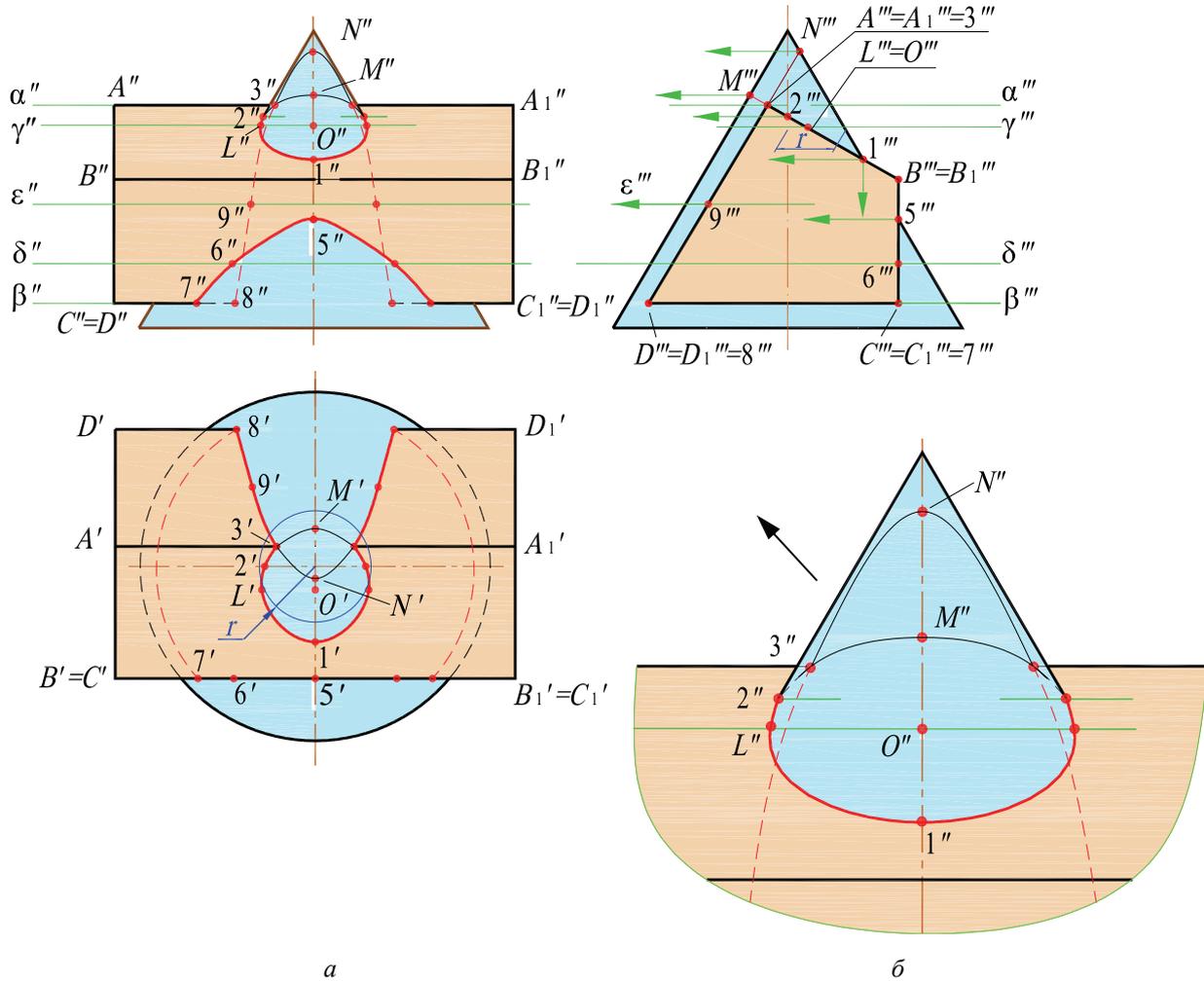


Рис. 11.2

С помощью горизонтальной плоскости γ (γ'' , γ'''), проведенной через точку O (параллель радиуса r), находится точка L , определяющая малую ось горизонтальной проекции эллипса и большую ось фронтальной проекции. Проекция $2''$ точки 2, находящейся на фронтальной очерковой образующей конуса, разделяет фронтальную проекцию эллипса на видимую и невидимую.

Вершина гиперболы (точка 5), по которой грань BB_1C_1C пересекает поверхность конуса, определяется по профильной проекции $5'''$.

Построение точки 7, принадлежащей и гиперболе, и окружности, приведено выше. Промежуточная точка 6 построена с помощью горизонтальной плоскости δ (δ'' , δ''') сначала на горизонтальной проекции, а затем на фронтальной.

Вершина параболы (точка N), по которой плоскость грани AA_1DD_1 пересекает поверхность конуса, находится за пределами грани и определяется по ее профильной проекции. Построение точек 3 и 8, принадлежащих параболе, а также эллипсу и окружности, приведены ранее. Промежуточная точка 9 определена сначала на горизонтальной проекции, а затем на фронтальной с помощью горизонтальной плоскости ε (ε'' , ε'''). Видимость проекций линии пересечения определяется видимостью граней призмы и поверхности конуса. Следует отметить, что часть ребра AA_1 на фронтальной проекции до точки 3 закрывается контуром конуса.

На рис. 11.2, б показано увеличенное изображение части фронтальной проекции.

На рис. 11.3 приведено построение линии пересечения сферы с прямой трехгранной призмой. Боковые ребра призмы перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций. Из горизонтальной проекции видно, что в данном случае имеет место проникание сферы призмой. Горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с проекцией боковой поверхности призмы. Характерными точками линии пересечения являются точки 1 и 2 – точки пересечения ребер призмы со сферой (обозначение точек линии пересечения приведено лишь на одной симметричной части). Для построения этих точек использованы фронтальные плоскости α и β , проведенные через ребра призмы и пересекающие сферу по окружностям радиусов R и R_1 .

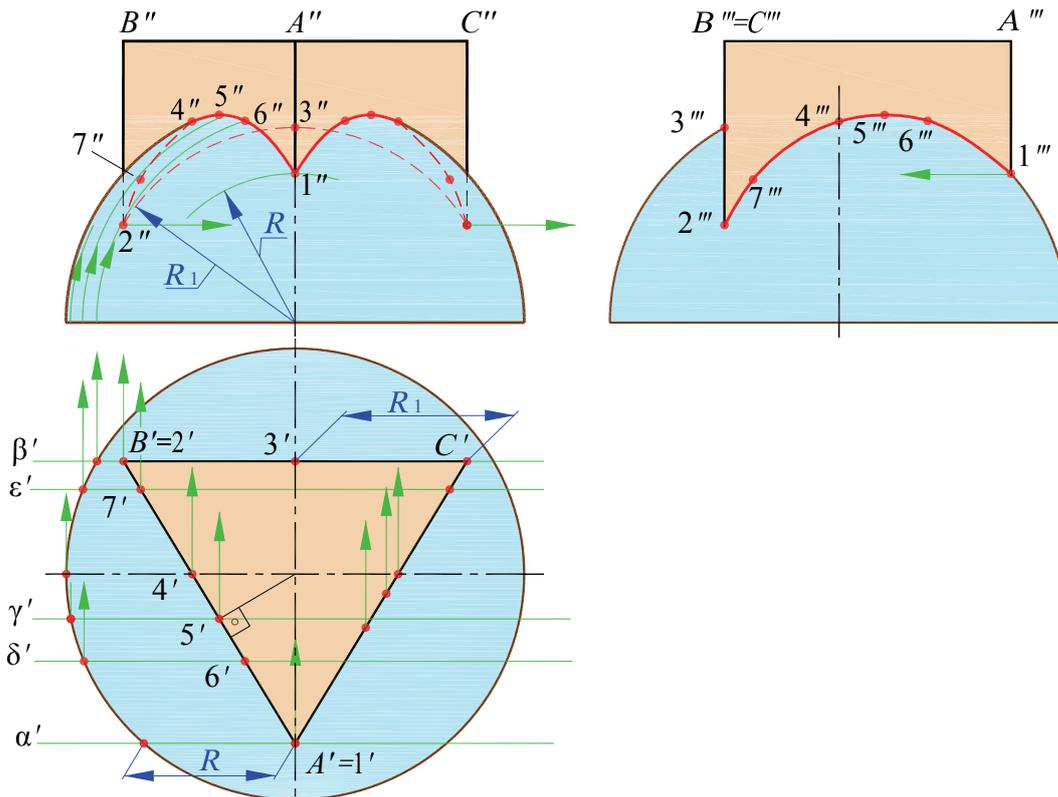


Рис. 11.3

Фронтальную проекцию $1''$ точки 1 можно определить и по профильной проекции с помощью линий связи. Так как грань BC призмы является фронтальной плоскостью, то плоскость β (β') позволяет определить дугу окружности, по которой она пересекает сферу. Точка 3 – высшая точка этой дуги.

Грани AB и AC призмы пересекают сферу по дугам окружностей, которые на фронтальную и профильную плоскости проекций проецируются в виде частей эллипсов. Фронтальная проекция линии пересечения этих граней представляет собой две симметричные части, а профильные проекции совпадают.

Характерными точками фронтальной проекции линии пересечения являются также точки $4''$ и $5''$. Точка 4 разделяет линию на видимую и невидимую части, точка 5 – высшая точка линии пересечения. Проекция $4''$ находится на очерке сферы – фронтальном меридиане, проекция $5''$ определена с помощью фронтальной плоскости γ (γ').

Для построения промежуточных точек $6''$ и $7''$ фронтальной проекции использованы фронтальные плоскости δ (δ') и ϵ (ϵ'). Каждая из фронтальных плоскостей пересекает сферу по окружности определенного радиуса, а призму – по горизонтально проецирующим прямым.

Видимой частью фронтальной проекции линии пересечения является часть эллипса $1''6''5''4''$, на профильной проекции симметричные части линии пересечения изображаются видимой линией. На фронтальной проекции части ребер B и C закрываются контуром сферы.

11.2. Примеры решения задач

Задача 1. Построить линию пересечения поверхности тора с поверхностью трехгранной призмы (рис. 11.4).

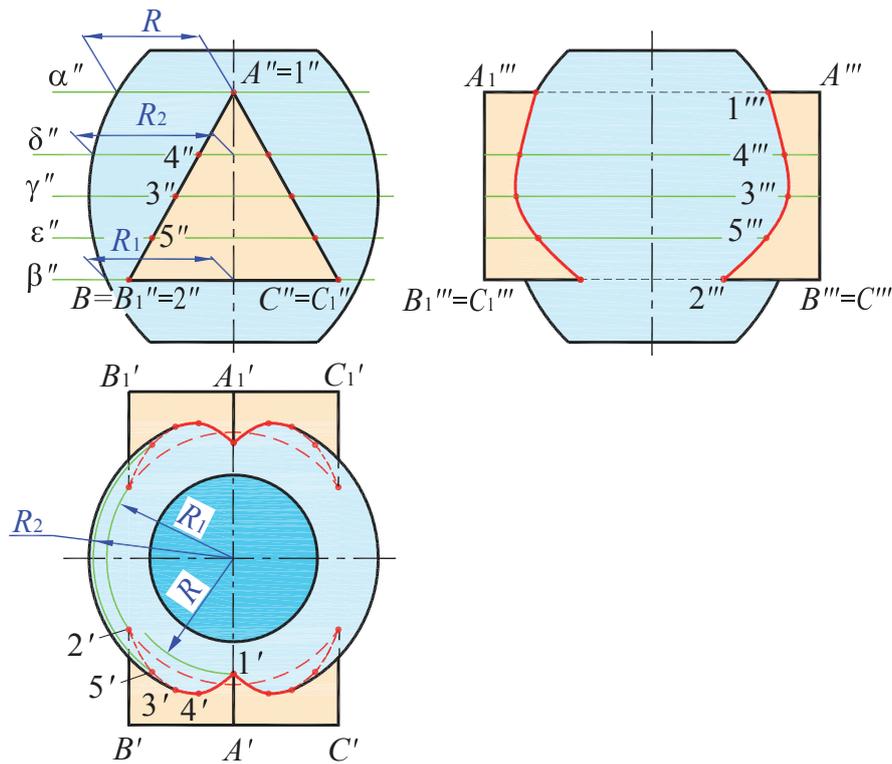


Рис. 11.4

Решение. Боковые грани призмы являются фронтально проецирующими плоскостями, и фронтальная проекция линии пересечения совпадает с проекцией боковой поверхности призмы. Из фронтальной проекции видно, что в данном случае имеет место проникание тора призмой (две замкнутые линии пересечения).

Характерными точками линии пересечения являются точки 1, 2, 3 (обозначение точек линии пересечения приведено для одной симметричной части). Для построения горизонтальных проекций точек 1 и 2, в которых ребра призмы пересекают поверхность тора, использованы горизонтальные плоскости α (α'') и β (β''). Эти плоскости проходят через ребра призмы и пересекают тор по окружностям радиусов R и R_1 .

Плоскость β (β'') позволяет определить дугу окружности, по которой горизонтальная грань BB_1C_1C пересекает поверхность тора.

С помощью горизонтальной плоскости γ , пересекающей тор по экватору, определим горизонтальную проекцию точки 3. Проекция $3'$ разделяет горизонтальную проекцию линии пересечения на видимую и невидимую части.

Для нахождения горизонтальных проекций точек 4 и 5 использованы горизонтальные плоскости δ (δ'') и ϵ (ϵ''). Эти плоскости пересекают поверхность призмы по фронтально проецирующим прямым, а тор – по окружностям одинакового радиуса R_2 .

Профильная проекция линии пересечения строится по точкам, определяемым с помощью линий связи.

Видимой частью горизонтальной проекции линии пересечения является часть кривой $1'4'3'$, расположенная на верхней части тора и видимых гранях призмы. На профильной проекции симметричные части линии пересечения совпадают и изображаются видимой линией.

Задача 2. Построить линию пересечения правильной треугольной пирамиды и цилиндра вращения (рис. 11.5).

Решение. Из горизонтальной проекции видно, что в данном примере имеет место проникание цилиндром поверхности пирамиды. Одна часть линии пересечения состоит из трех плоских кривых (частей эллипсов), по которым грани пирамиды пересекают боковую поверхность цилиндра. Вторая часть линии пересечения вырождается в точку S , так как вершина пирамиды находится на верхнем основании цилиндра. Поскольку пирамида является правильной и ее высота совпадает с осью цилиндра, то все участки линии пересечения одинаковы.

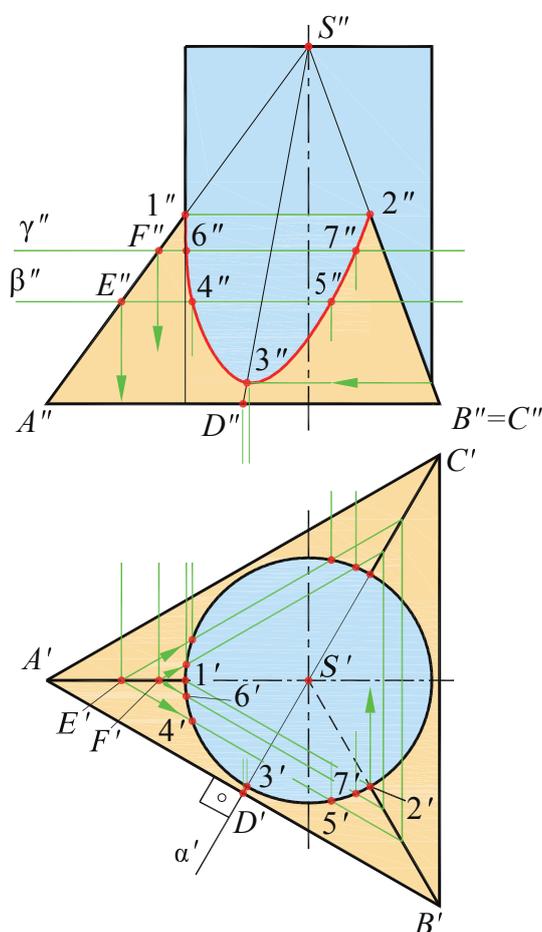


Рис. 11.5

Боковая поверхность цилиндра вращения – горизонтально проецирующая, поэтому горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с горизонтальной проекцией цилиндра.

Грани пирамиды SAB и SAC являются плоскостями общего положения с совпадающими фронтальными проекциями. Поэтому фронтальные проекции линии пересечения этих граней с цилиндром (части эллипсов) совпадают. Грань SBC является фронтально проецирующей плоскостью, и фронтальная проекция линии пересечения совпадает со следом-проекцией этой грани.

Характерными точками линии пересечения являются точки пересечения ребер пирамиды с поверхностью цилиндра. Ребро SA пересекает очерковую образующую цилиндра в точке 1, так как ребро и образующая расположены в одной фронтальной плоскости. Фронтальные проекции точек пересечения ребер SB и SC с поверхностью цилиндра совпадают ($2''$) и находятся на одной горизонтальной прямой с проекцией $1''$. Фронтальная проекция точки 2 может быть построена и с помощью линии связи, проведенной из горизонтальной проекции $2'$.

К другим характерным точкам относятся низшие точки, в которых грани пирамиды пересекают поверхность цилиндра. Эти точки находятся с помощью вспомогательных плоскостей, проходящих через ось цилиндра и пересекающих грани по линии наибольшего ската. Так, для построения фронтальной проекции точки 3 использована плоскость α (α'), пересекающая пирамиду по прямой SD , а цилиндр – по образующей. Проекция $3''$ находится на одной горизонтальной прямой с точкой пересечения фронтально проецирующей грани SBC и очерковой образующей цилиндра.

Для нахождения фронтальных проекций промежуточных точек 4, 5, 6, 7 использованы горизонтальные плоскости β (β'') и γ (γ''), пересекающие цилиндр по окружностям, а пирамиду – по треугольникам. В пересечении их горизонтальных проекций получают горизонтальные проекции $4'$, $5'$, $6'$, $7'$ этих точек. Фронтальные проекции определяются с помощью линий связи на фронтальных проекциях вспомогательных плоскостей.

Вопросы для контроля

1. Что представляет собой линия пересечения тела вращения с многогранником?
2. Какие точки являются характерными при построении линии пересечения?
3. Как определяется видимость участков линии пересечения?

Глава 12. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Линия пересечения двух поверхностей вращения в общем случае представляет пространственную кривую, которая может распадаться на две и более части. Эти части могут быть, в частности, и плоскими кривыми, и даже прямыми линиями.

Линию пересечения поверхностей обычно строят по ее отдельным точкам. Точки подразделяются на характерные (опорные) и промежуточные (случайные).

Общим способом построения этих точек является способ *вспомогательных секущих поверхностей-посредников*. При пересечении данных поверхностей вспомогательной поверхностью определяются линии пересечения ее с данными поверхностями, в пересечении этих линий получают точки, принадлежащие искомой линии пересечения.

Наиболее часто в качестве поверхностей-посредников применяются плоскости или сферы.

12.1. Способ вспомогательных секущих плоскостей

В качестве вспомогательных секущих плоскостей чаще всего используют плоскости, параллельные одной из плоскостей проекций. Положение их выбирают такое, чтобы они пересекали заданные поверхности по простейшим линиям – прямым или окружностям.

Если одна из поверхностей является цилиндрической проецирующей поверхностью, то построение линии пересечения упрощается, так как в этом случае одна проекция линии пересечения совпадает с окружностью – проекцией цилиндра на перпендикулярную плоскость проекций.

На рис. 12.1, *а* показано построение линии пересечения двух цилиндров вращения, оси которых скрещиваются. Ось горизонтального цилиндра – профильно проецирующая, а ось вертикального – горизонтально проецирующая.

Линией пересечения цилиндров является пространственная кривая, горизонтальная проекция которой совпадает с окружностью – горизонтальной проекцией вертикального цилиндра. Отметим на этой окружности точки, принадлежащие линии пересечения: опорные 1, 2, 3, 4, лежащие на крайних образующих цилиндров, и промежуточную 5. Точки обозначены только на одной симметричной части линии пересечения.

Фронтальные проекции точек 1, 3, 3₁, лежащие на ближней, верхней и нижней образующих горизонтального цилиндра, определяем с помощью линий связи.

Для построения фронтальных проекций точек 2, 2₁, 4, 4₁, 5, 5₁ использованы вспомогательные фронтальные плоскости α (α'), β (β'), γ (γ'), пересекающие оба цилиндра по образующим. Положение образующих вертикального цилиндра найдем по их горизонтальным проекциям при помощи вертикальных линий связи. Для построения образующих горизонтального цилиндра использована его профильная проекция.

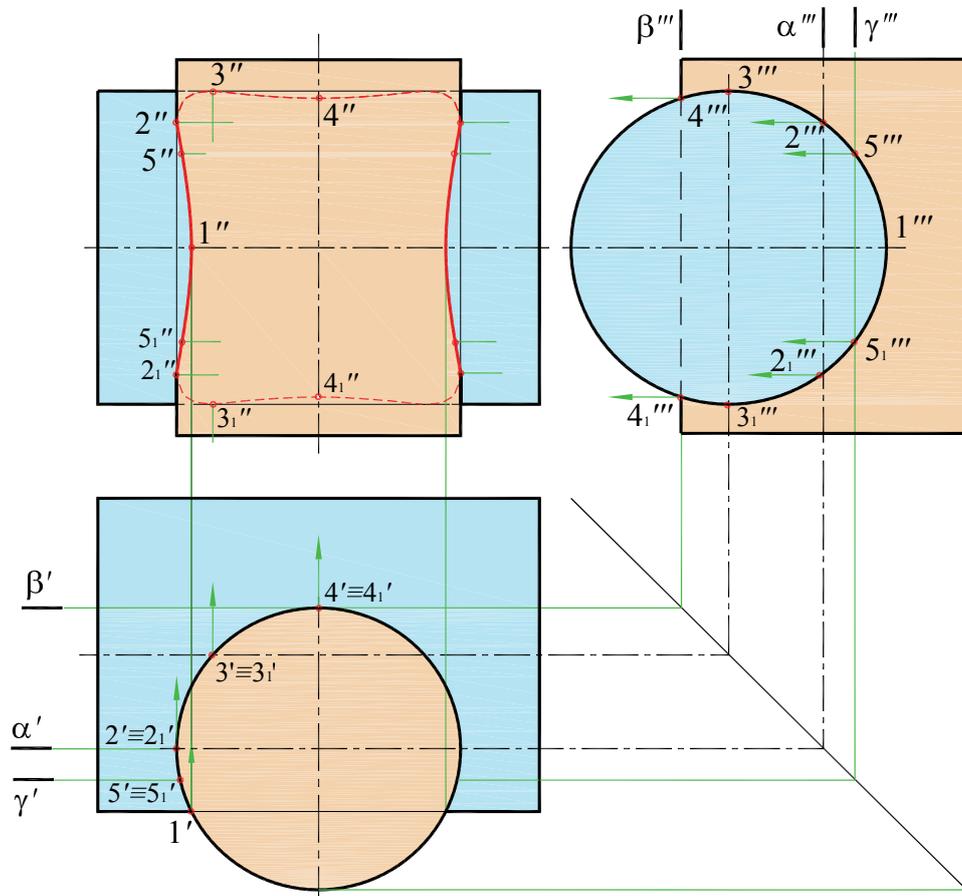
На рис. 12.1, *б* приведено наглядное изображение пересекающихся цилиндров и вспомогательная плоскость γ , используемая для построения промежуточных точек 5, 5₁.

Видимой частью фронтальной проекции линии пересечения является линия 2''5''1''5₁''2₁''', принадлежащая видимым частям обоих цилиндров.

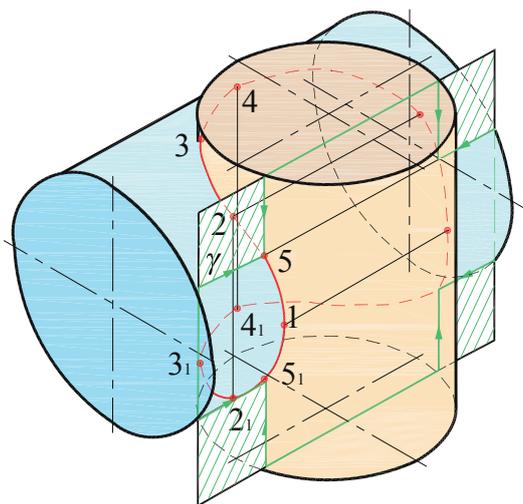
На рис. 12.2, *а* показано построение линии пересечения конуса вращения и цилиндра вращения, у которых оси скрещиваются под прямым углом.

Линией пересечения указанных тел является пространственная кривая, фронтальная проекция которой совпадает с окружностью – фронтальной проекцией цилиндра. Отметим на этой окружности точки линии пересечения: опорные (1, 2, 3, 4, 5, 6) и промежуточные (7, 8, 9). Точки обозначены только на одной симметричной части линии пересечения. Горизонтальные проекции точек 1 и 2, лежащие на правой очерковой образующей конуса, определим с помощью линий связи. Для построения горизонтальных проекций точек 3 и 4 использованы вспомогательные плоскости α и β .

Плоскость α (α'') пересекает цилиндр по крайней левой образующей, а конус – по окружности (параллели) радиуса R , пересечение которых определяет горизонтальную проекцию $3'$ точки 3.



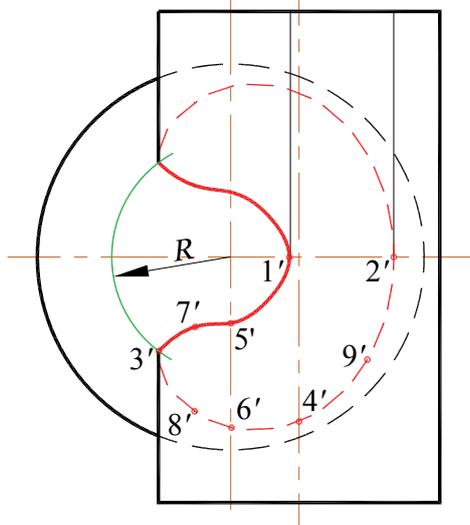
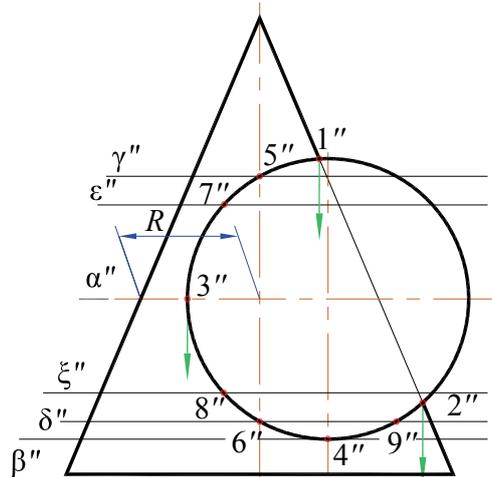
a



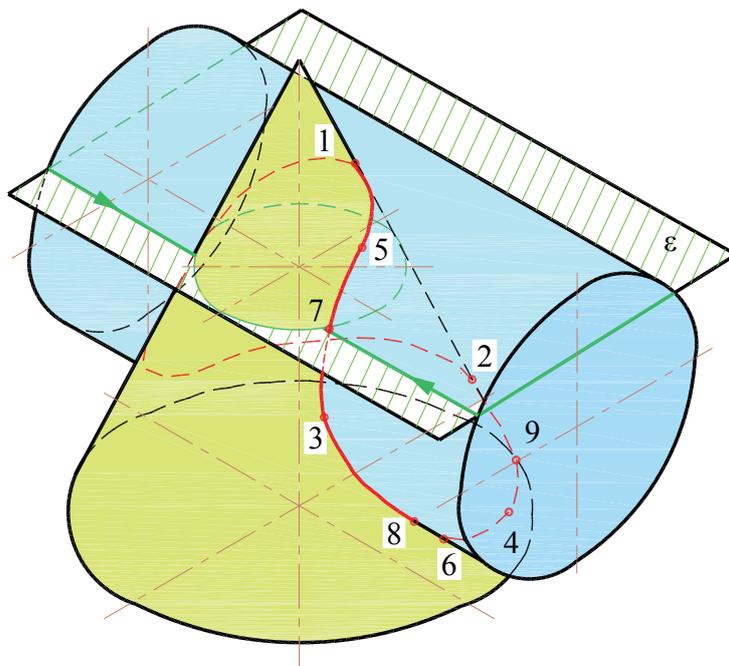
б

Рис. 12.1

Плоскость β (β''), касающаяся цилиндра по его нижней образующей и пересекающей конус по окружности соответствующего радиуса, позволяет построить горизонтальную проекцию $4'$ точки 4.



a



б

Рис. 12.2

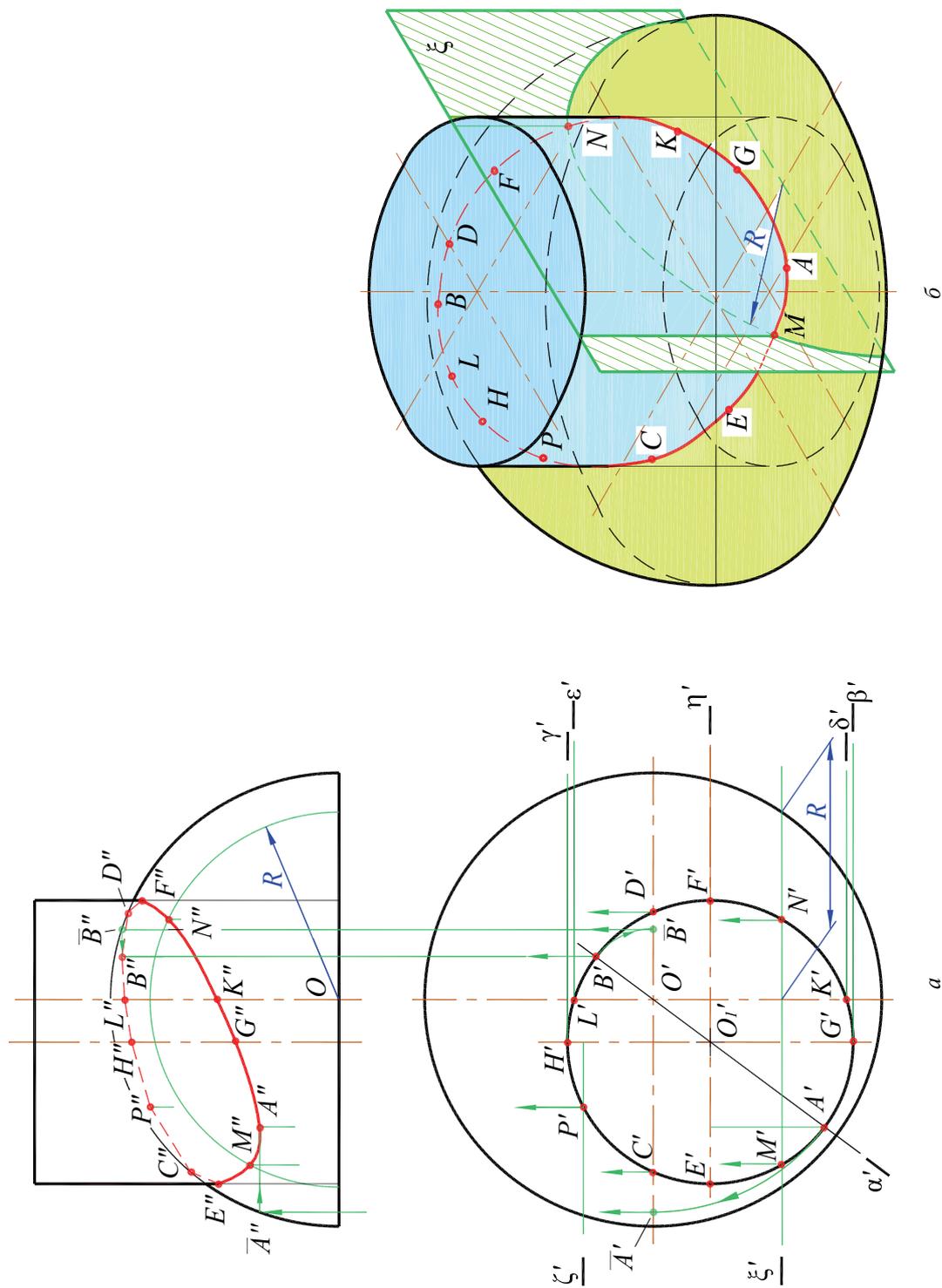


Рис. 12.3

Подобным образом с помощью горизонтальных плоскостей γ , δ , ε и ξ находятся горизонтальные проекции точек 5 и 6, расположенных на ближней и дальней образующих конуса, а также горизонтальные проекции промежуточных точек 7, 8, 9.

Видимой частью горизонтальной проекции линии пересечения является линия $1'5'7'3'$, принадлежащая видимой (верхней) части цилиндра.

На рис. 12.2, б приведено наглядное изображение взаимно пересекающихся цилиндра и конуса и вспомогательная плоскость ε , используемая для построения промежуточной точки 7.

На рис. 12.3, а показано построение линии пересечения полусферы с цилиндром вращения. Поскольку ось цилиндра перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций, то горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с окружностью – горизонтальной проекцией цилиндра. Отметим на этой окружности опорные точки линии пересечения $A, B, C, D, E, F, G, H, K, L$ и промежуточные M, N, P .

Точки A и B (низшая и высшая точки) расположены в горизонтально проецирующей плоскости α , горизонтальный след-проекция α' которой пройдет через горизонтальные проекции O' и O_1' осей тел вращения. Чтобы определить фронтальные проекции A'' и B'' этих точек, повернем плоскость α с лежащими на ней линиями сечения сферы и цилиндра вокруг оси сферы до фронтального положения. Новое положение образующих цилиндра и контура сферы на плоскости проекций Π_2 дает точки A'' и B'' , по которым определяем проекции A'' и B'' .

Фронтальные проекции точек C и D , расположенных на фронтальном меридиане сферы, определим с помощью линий связи.

Для построения фронтальных проекций опорных точек E, F, G, H , размещенных на крайних образующих цилиндра, и точек K, L , находящихся на профильном меридиане сферы, использованы вспомогательные фронтальные плоскости β (β'), γ (γ'), δ (δ'), ε (ε'), η (η'). Фронтальные проекции промежуточных точек M, N, P построим с помощью фронтальных плоскостей ζ (ζ') и ξ (ξ'). Каждая из вспомогательных плоскостей пересекает (касается) цилиндр по образующим, а полусферу – по полуокружности. Так, вспомогательная плоскость ξ (ξ') пересекает цилиндр по соответствующим образующим, а полусферу – по дуге радиуса R . Пересечение фронтальных проекций указанных линий сечения и дает точки M'' и N'' .

Найденные фронтальные проекции опорных и промежуточных точек соединяем лемкальной кривой, обводя точки в порядке их расположения на поверхности цилиндра.

Видимой частью фронтальных проекции является линия $E''M''A''G''K''N''F''$, принадлежащая видимой (передней) части цилиндра.

На рис. 12.3, б представлено наглядное изображение вспомогательной плоскости ξ , используемой для построения промежуточных точек M и N линии пересечения цилиндра и полусферы.

12.2. Особые случаи пересечения

При пересечении между собой кривых поверхностей линиями пересечения в общем случае являются пространственные кривые, которые в ряде случаев могут распасться на более простые линии. Рассмотрим некоторые из этих случаев.

1. Два цилиндра с параллельными осями и два конуса с общей вершиной пересекаются по образующим.

На рис. 12.4, а изображены пересекающиеся между собой цилиндры вращения с параллельными осями. Линиями пересечения являются общие образующие l_1 и l_2 .

На рис. 12.4, б изображены пересекающиеся между собой наклонные конусы с круговыми основаниями и общей вершиной S . Линиями пересечения являются общие образующие $S1$ и $S2$.

2. Если две поверхности второго порядка описаны около третьей или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка. Плоскости этих кривых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания.

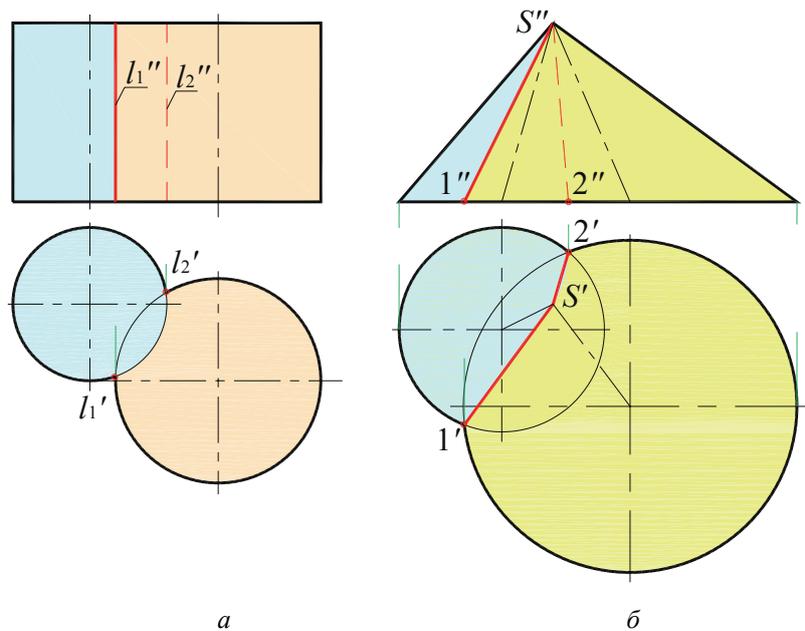


Рис. 12.4

На рис. 12.5 изображены пересекающиеся между собой цилиндр и конус, касающиеся сферы радиуса R . Линии касания – окружности, плоскости которых параллельны фронтальной и профильной плоскостям проекций.

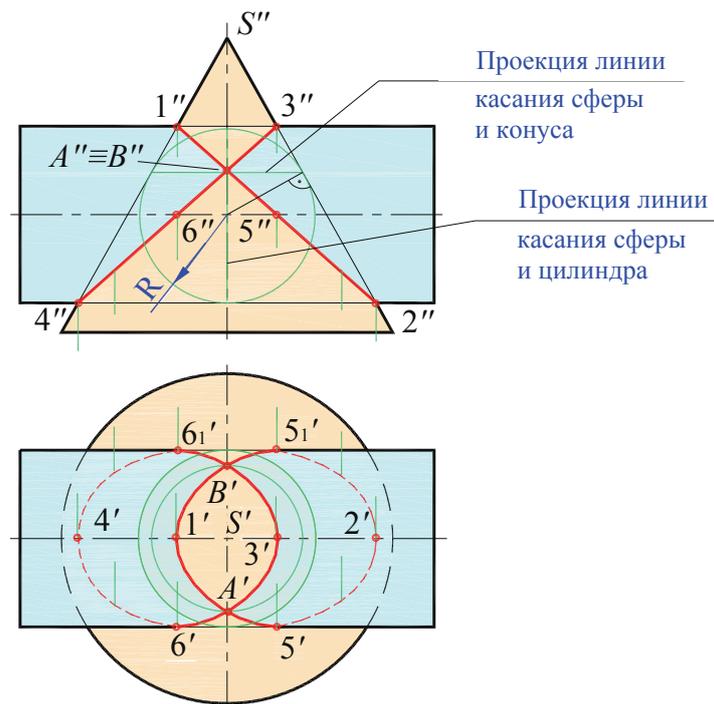


Рис. 12.5

Плоскости касания пересекаются между собой по фронтально проецирующей прямой AB . Фронтальная проекция линии пересечения – два эллипса, плоскости которых проходят через прямую AB и являются фронтально проецирующими плоскостями. Большие оси эллипсов – отрезки 1–2 и 3–4, а малые равны диаметру цилиндра. Горизонтальная проекция линии пересечения находится из условия принадлежности ее точек поверхности конуса.

3. Соосные поверхности вращения (т. е. поверхности с общей осью) пересекаются по окружностям.

Если ось вращения соосных поверхностей перпендикулярна к какой-либо плоскости проекций, то линия их пересечения проецируется на эту плоскость в виде окружности, а на другую плоскость проекций – в прямую линию.

На рис. 12.6 даны примеры пересечения соосных поверхностей вращения (ось вращения перпендикулярна плоскости π_1). На рис. 12.6, *а* приведены цилиндр и конус, *б* – конус и сфера, *в* – две сферы, *г* – сфера и тор.

За ось сферы можно принять любой ее диаметр. Поэтому сфера, центр которой находится на оси поверхности вращения, пересекается с этой поверхностью по окружности.

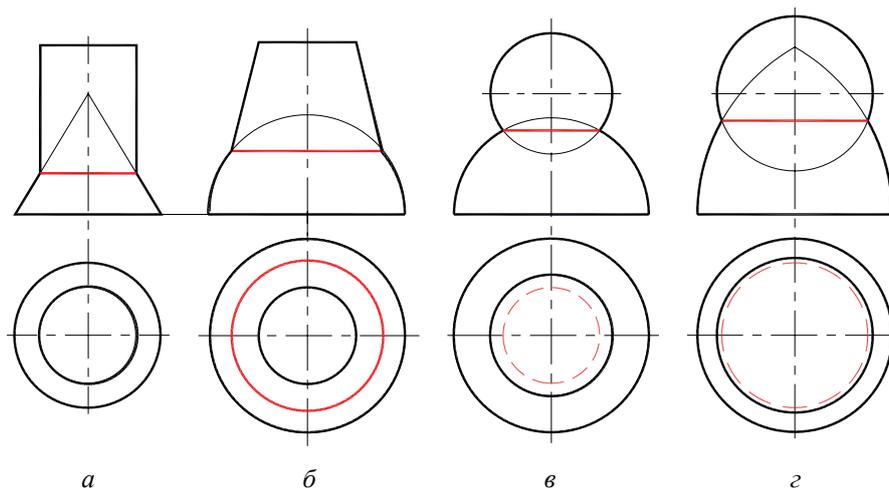


Рис. 12.6

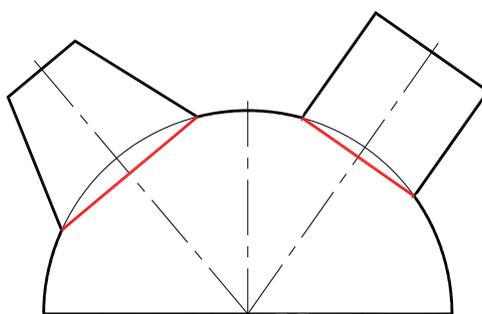


Рис. 12.7

На рис. 12.7 показана сфера, пересекающаяся с цилиндром и конусом, оси которых параллельны фронтальной плоскости проекций.

Плоскости окружностей, по которым пересекаются поверхности вращения, перпендикулярны осям поверхностей вращения, вследствие чего окружности на фронтальную плоскость проекций проецируются в виде отрезков прямых линий.

12.3. Способ вспомогательных сфер

При построении линии пересечения поверхностей вращения не всегда удастся подобрать секущие плоскости так, чтобы они пересекали поверхности по линиям, проекции которых были бы прямыми или окружностями. В некоторых таких случаях в качестве секущих поверхностей (посредников) целесообразно применять сферы. Этот способ основан

на свойстве сферы пересекаться с любой поверхностью вращения, ось которой проходит через центр сферы, по окружности.

Чтобы сфера одновременно пересекала две поверхности по окружностям, проецирующимся в прямые линии, необходимо выполнить следующие условия:

- оси поверхностей вращения должны пересекаться (точку пересечения принимают за центр вспомогательных концентрических сфер).
- оси поверхностей вращения должны располагаться параллельно какой-либо плоскости проекций.

На рис.12.8 показано построение линии пересечения двух конусов с пересекающимися осями, параллельными плоскости π_2 .

Анализ графического условия показывает, что для решения задачи нельзя выбрать секущие плоскости, пересекающие поверхности по простым линиям (прямым или окружностям). Так, горизонтальные или профильные плоскости пересекают один конус по окружностям, а другой в общем случае пересекают по гиперболам. Вместе с тем в задаче выполняются все условия, позволяющие применить способ сфер.

Линия пересечения – пространственная кривая – симметрична относительно плоскости, образованной пересекающимися осями конусов. Фронтальные проекции симметричных половин совпадают и образуют кривую 2-го порядка. Точки 1 и 2, находящиеся в пересечении очерков конусов, очевидны. Остальные точки определены с помощью вспомогательных сфер с центром в точке O'' – точке пересечения осей конусов.

С помощью сферы 1 (наименьшей из всех возможных) построена крайняя левая точка фронтальной проекции линии пересечения. Эта сфера касается поверхности конуса с вертикальной осью по окружности радиуса R и пересекает другой конус по окружности радиуса R_1 . В пересечении этих окружностей получается фронтальная проекция 3''.

Для определения фронтальной проекции точки 4, расположенной на ближайшей образующей конуса с горизонтальной осью, использована сфера 2. Радиус этой сферы подобран так, чтобы окружность пересечения ее с поверхностью конуса с вертикальной осью лежала в плоскости α (α'').

С помощью сферы 3 определена фронтальная проекция 5'' точки 5. Радиус вспомогательных сфер не должен превышать отрезка $O''1''$, так как тогда получаются точки вне проекций конусов.

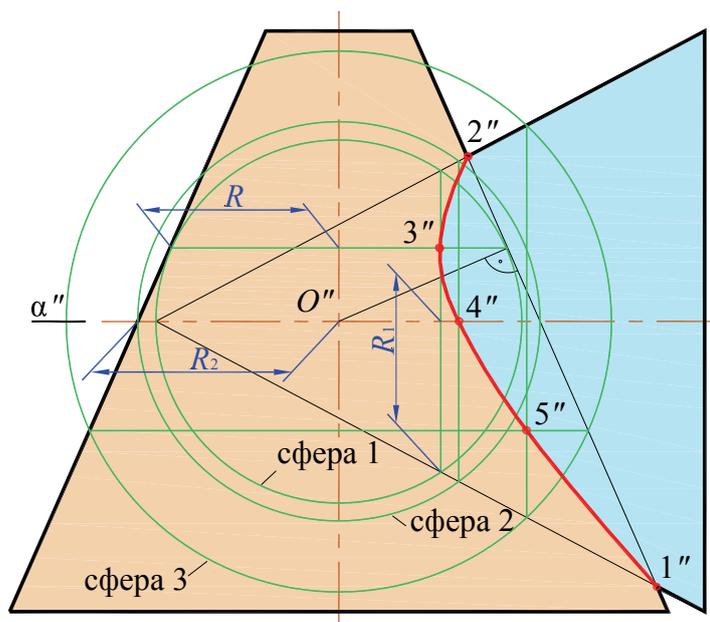


Рис. 12.8

Применение способа сфер позволяет построить линию пересечения поверхностей вращения, пользуясь только одной проекцией.

12.4. Примеры решения задач

Задача 1. Построить линию пересечения поверхности конуса вращения и сферы (рис. 12.9).

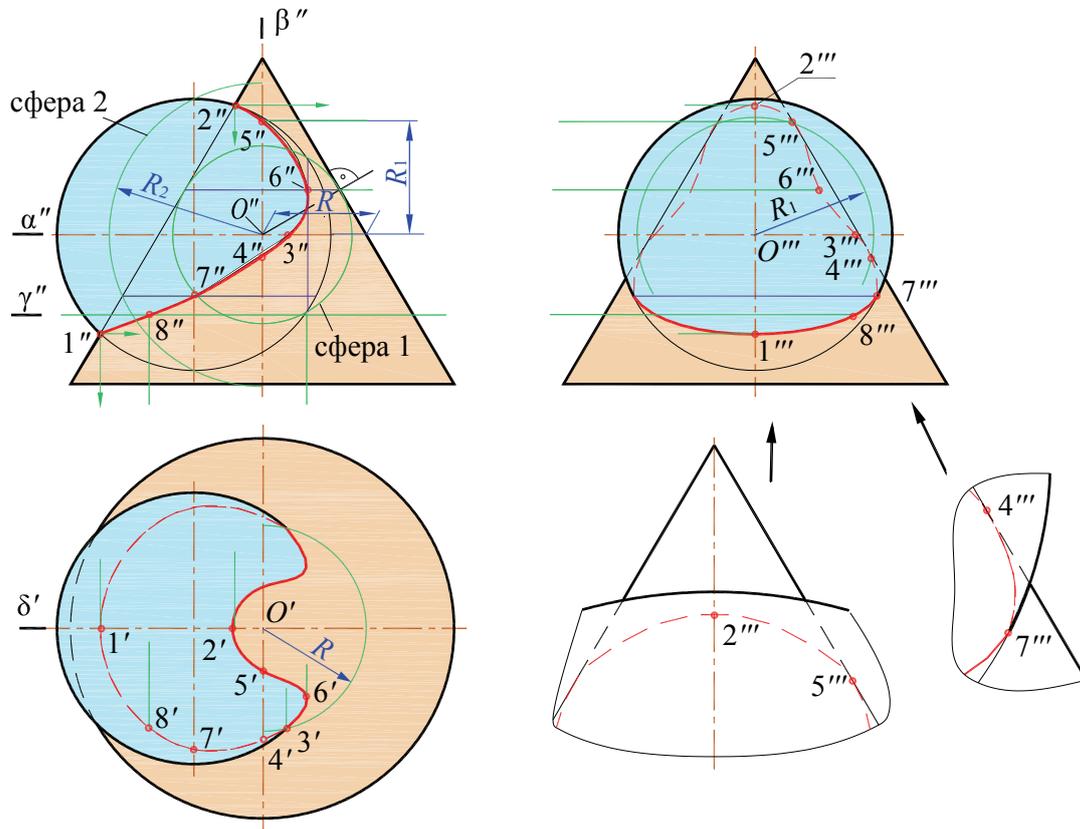


Рис. 12.9

Решение. Линия пересечения заданных поверхностей представляет собой пространственную кривую линию, имеющую фронтальную плоскость симметрии δ (δ'), образованную пересекающимися осями конуса и сферы.

Ее горизонтальная проекция симметрична относительно δ' , а фронтальные проекции симметричных половин совпадают (обозначение точек приведено лишь на одной симметричной половине кривой пересечения).

Точки 1 и 2, расположенные на очерках фронтальных проекций конуса и сферы, очевидны и определяются без дополнительных построений.

Точка 3 на экваторе сферы построена с помощью горизонтальной плоскости α (α''), пересекающей конус по окружности радиуса R . В пересечении горизонтальных проекций этой окружности и экватора сферы находится горизонтальная проекция $3'$ точки 3. Фронтальную $3''$ и профильную $3'''$ проекции точки 3 определим с помощью линии связи. Точка 3 на горизонтальной проекции разделяет кривую на видимую и невидимую части.

Точки 4 и 5, расположенные на очерковых образующих профильной проекции конуса, определим с помощью профильной плоскости β (β''), пересекающей сферу по окружности радиуса R_1 . В пересечении профильных проекций этой окружности и очерковых образующих конуса находятся профильные проекции $4'''$ и $5'''$ точек 4 и 5.

С помощью линий связи определим фронтальные и горизонтальные проекции этих точек.

Так как пересекающиеся оси конуса и сферы образуют плоскость, параллельную плоскости π_2 , то наряду с секущими плоскостями можно применять и секущие сферы с центром в точке O . Так, для построения крайней правой точки кривой использована вспомогательная сфера 1, вписанная в конус (т. е. имеющая наименьший радиус). В пересечении фронтальной проекции окружности касания и фронтальной проекции окружности пересечения со сферой находится фронтальная проекция 6'' точки 6.

Подобным образом определена точка 7, расположенная на профильном меридиане сферы. Радиус R_2 этой сферы взят таким, чтобы она пересекала сферу по профильному меридиану. Точка 7 на профильной проекции разделяет кривую на видимую и невидимую части.

Все построенные выше точки являются опорными.

Промежуточная точка 8 получена с помощью горизонтальной плоскости γ (γ'').

На рис. 12.9 также изображены в масштабе увеличения фрагменты профильной проекции.

Задача 2. Построить линию пересечения поверхности тора с цилиндром вращения (рис. 12.10).

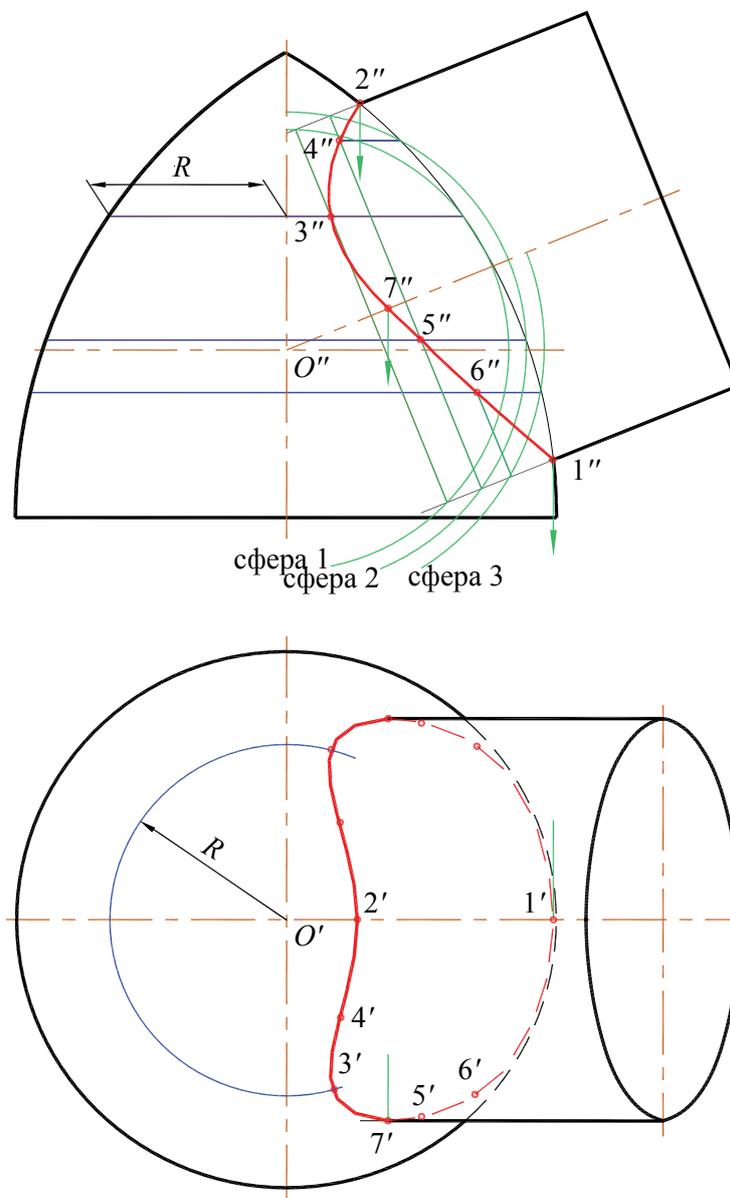


Рис. 12.10

Решение. Анализ графического условия задачи показывает, что применение способа вспомогательных секущих плоскостей в данном примере нерационально, потому что нельзя в общем случае подобрать секущие плоскости так, чтобы они пересекали заданные поверхности по простым линиям (прямым или окружностям).

Так как оси тора и цилиндра пересекаются и параллельны фронтальной плоскости проекций, то для решения задачи применим способ вспомогательных концентрических сфер с центром в точке O'' . Кривая линия пересечения симметрична относительно плоскости, образованной пересекающимися осями заданных поверхностей, а фронтальные проекции симметричных половин совпадают.

Точки 1 и 2, расположенные на пересечении очерков фронтальных проекций тора и цилиндра, очевидны.

С помощью сферы 1, вписанной в тор (т. е. имеющий наименьший радиус), построена фронтальная проекция точки 3 – крайней левой точки кривой пересечения. Вспомогательная сфера 1 касается поверхности тора по окружности радиуса R и пересекает поверхность цилиндра по окружности, определяемой точками пересечения образующих цилиндра сферой. В пересечении этих окружностей получается фронтальная проекция точки 3 (обозначение точек приведено лишь на симметричной половине кривой). С помощью вспомогательных сфер 2 и 3 построены фронтальные проекции точек 4, 5, 6.

Полученные фронтальные проекции точек соединяем плавной кривой и отмечаем точку $7''$ пересечения ее с осью цилиндра.

Горизонтальные проекции точек кривой пересечения построены из условия принадлежности их соответствующим параллелям (окружностям) тора. Так, точка 3 находится на окружности радиуса R .

Горизонтальная проекция $7'$, расположенная на очерковой образующей цилиндра, разделяет проекцию кривой на видимую и невидимую части.

Эллипс – горизонтальная проекция основания цилиндра – построен по двум осям (рис. 12.10).

Вопросы для контроля

1. В чем заключается общий способ построения линии пересечения одной поверхности другою?
2. Как подбирают положение вспомогательных секущих плоскостей при пересечении поверхностей вращения?
3. Какие точки пересечения называются опорными (характерными)?
4. По каким линиям пересекаются между собой: а) цилиндры с параллельными осями; б) конусы с общей вершиной?
5. Какие линии получаются при взаимном пересечении двух поверхностей вращения, описанных вокруг общей для них сферы; вписанных в сферу?
6. По каким линиям пересекаются между собой соосные поверхности вращения?
7. Какие условия должны быть выполнены для применения способа вспомогательных концентрических сфер?

Глава 13. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

13.1. Общие сведения

АксонOMETРИЧЕСКАЯ проекция, или аксонOMETрия, дает наглядное изображение предмета на одной плоскости. Слово аксонOMETрия означает осеизмерение.

Способ аксонOMETрического проецирования состоит в том, что данную фигуру вместе с осями прямоугольных координат, к которым она отнесена в пространстве, параллельно проецируют на некоторую плоскость, принятую за плоскость аксонOMETрических проекций (ее называют также картинной плоскостью). При различном взаимном расположении осей координат в пространстве и плоскости аксонOMETрической проекции, а также при разном направлении проецирования можно получить множество аксонOMETрических проекций, отличающихся одна от другой направлением аксонOMETрических осей и масштабами по ним.

В конструкторской документации аксонOMETрические проекции стандартизованы по ГОСТ 2.317-69. Он предусматривает три частных вида аксонOMETрических проекций:

- прямоугольная изометрия;
- прямоугольная диметрия;
- фронтальная (косоугольная) диметрия.

Рассмотрим, как будут направлены аксонOMETрические оси, а также как будет осуществляться масштабирование по ним в случае направления проецирования, перпендикулярного аксонOMETрической плоскости проекций, т. е. для прямоугольной аксонOMETрической проекции.

На рис. 13.1 изображена пространственная система прямоугольных координат Ox, Oy, Oz , а также единичные отрезки e на осях координат и их проекции в направлении S на некоторую (картинную) плоскость ε , являющуюся аксонOMETрической плоскостью проекций.

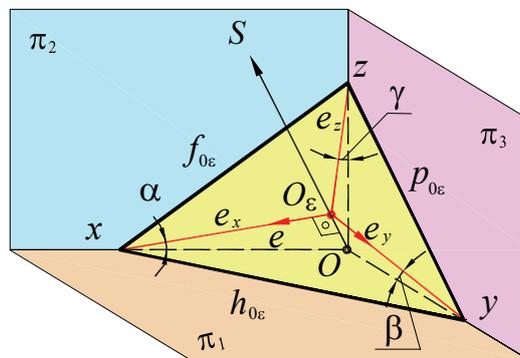


Рис. 13.1

Проекции e_x, e_y, e_z отрезка e на соответствующих аксонOMETрических осях $O_\varepsilon x, O_\varepsilon y, O_\varepsilon z$ в общем случае не равны отрезку e и не равны между собой. Эти проекции являются единицами измерения по аксонOMETрическим осям – аксонOMETрическими масштабами.

Отношения: $e_x / e = k; e_y / e = m; e_z / e = n$ называют коэффициентами искажения по аксонOMETрическим осям.

В частном случае положение картинной плоскости можно выбрать таким, что аксонOMETрические единицы – отрезки e_x, e_y, e_z – будут равны между собой или будет равна между собой пара этих отрезков.

При $e_x = e_y = e_z$ ($k = m = n$) аксонOMETрическую проекцию называют изометрической, искажения по всем осям в ней одинаковы.

При равенстве аксонOMETрических единиц по двум осям, обычно при $e_x = e_y \neq e_z$ ($k = m \neq n$), имеем диметрическую проекцию.

Если $e_x \neq e_y \neq e_z$ ($k \neq m \neq n$), то проекцию называют триметрической.

Отрезки $O_\varepsilon x$, $O_\varepsilon y$, $O_\varepsilon z$ являются аксонометрическими проекциями отрезков Ox , Oy , Oz . Обозначим углы между осями координат и их проекциями на плоскости ε через α , β , γ .

Тогда $O_\varepsilon x / Ox = \cos\alpha$; $O_\varepsilon y / Oy = \cos\beta$; $O_\varepsilon z / Oz = \cos\gamma$. Эти отношения являются коэффициентами искажения, т. е. $k = \cos\alpha$; $m = \cos\beta$; $n = \cos\gamma$. Поскольку треугольники $O_\varepsilon xO$, $O_\varepsilon yO$ и $O_\varepsilon zO$ прямоугольные, то сумма квадратов направляющих косинусов равна единице: $\cos^2(\pi/2 - \alpha) + \cos^2(\pi/2 - \beta) + \cos^2(\pi/2 - \gamma) = 1$. Отсюда $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$, или $1 - \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\beta + 1 - \cos^2\gamma = 1$, следовательно, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$.

Таким образом: $k^2 + m^2 + n^2 = 2$, т. е. сумма квадратов коэффициентов искажения равна 2.

13.2. Прямоугольная изометрическая проекция

Прямоугольная (ортогональная) изометрическая проекция образуется при прямоугольном проецировании предмета и связанных с ним координатных осей на плоскость аксонометрических проекций, одинаково наклоненную к каждой координатной оси.

При таком проецировании все три коэффициента искажений будут равны между собой: $k = m = n$; $k^2 + m^2 + n^2 = 2$, тогда $3k^2 = 2$, откуда $k = \sqrt{2/3} \approx 0,82$. Углы между аксонометрическими осями будут равны 120° .

При построении изометрической проекции размеры предмета, откладываемые по аксонометрическим осям, необходимо умножать на 0,82. Поскольку такой перерасчет размеров неудобен, изометрическую проекцию для упрощения выполняют без уменьшения размеров (искажения) по осям x , y , z , т. е. принимают приведенный коэффициент искажения равным единице. При этом увеличение изображения предмета составляет 22% ($1 / 0,82 = 1,22$). Каждый отрезок, направленный по осям x , y , z или параллельно им, сохраняет свою величину.

Расположение осей изометрической проекции показано на рис. 13.2, а. Аксонометрические оси изометрической проекции, а также отрезки прямых, параллельные этим осям, удобно строить с помощью угольника с углами 30 и 60° .

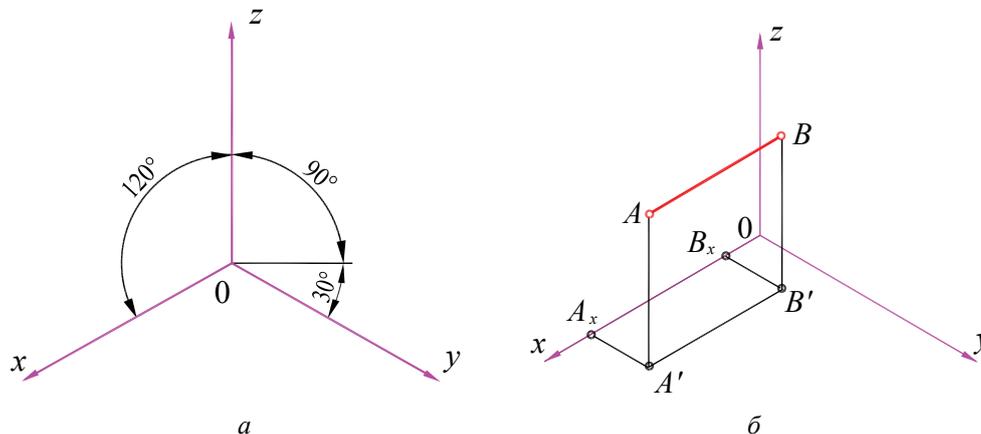


Рис. 13.2

Все отрезки прямых, которые были параллельны осям x , y и z на комплексном чертеже, останутся параллельными соответствующим осям в изометрической проекции. На рис. 13.2, б приведена изометрическая проекция отрезка AB , расположенного перпендикулярно профильной плоскости проекций.

На рис. 13.3 показано построение эллипсов, в которые проецируются окружности, лежащие в плоскостях проекций или в плоскостях, параллельных им. Размер большой оси эллипса равен $1,22d$, малой – $0,71d$, где d – диаметр окружности. В учебных чертежах

рекомендуется вместо эллипсов применять овалы, очерченные дугами окружностей. На этом же рисунке показано расположение осей овалов и один из способов построения овалов в прямоугольной изометрической проекции.

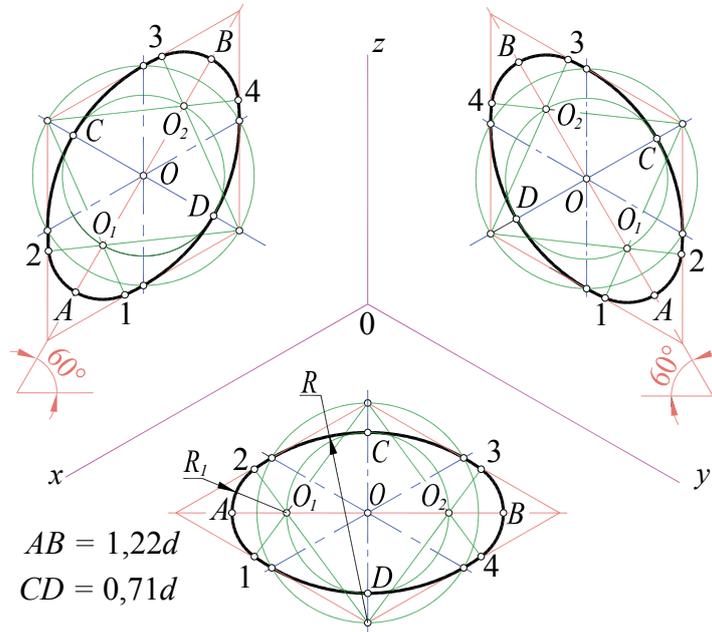


Рис. 13.3

На рис. 13.4 приведен пример изометрической проекции цилиндрической детали, усеченной несколькими плоскостями, и показано построение точки A , принадлежащей одной из кривых.

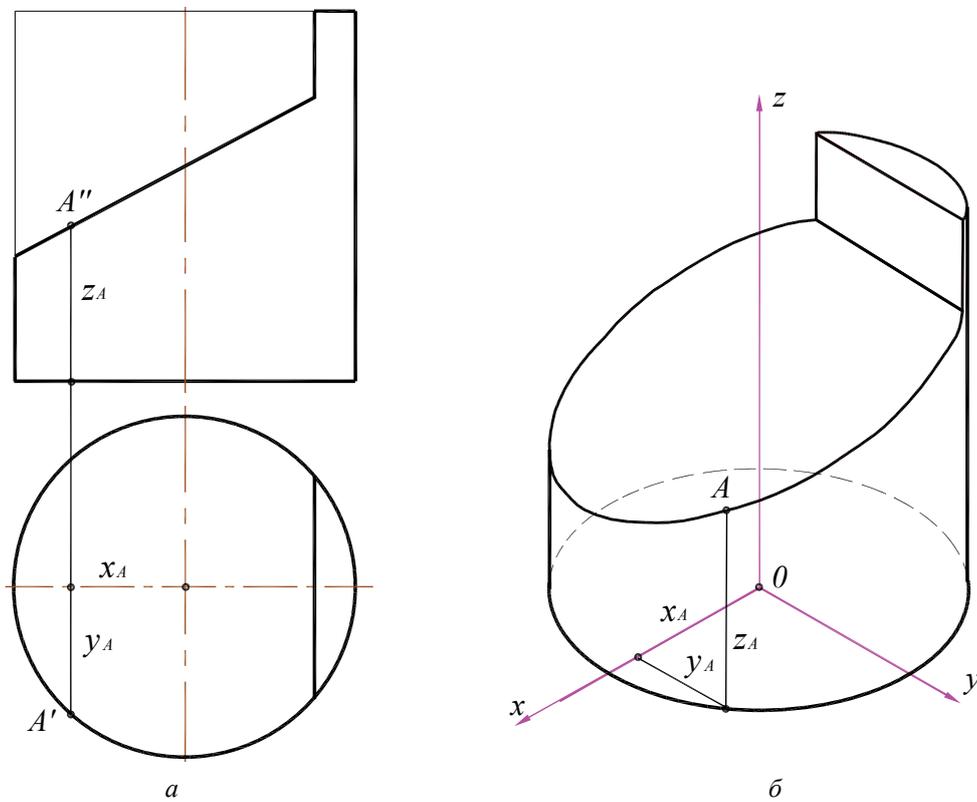


Рис. 13.4

13.3. Прямоугольная диметрическая проекция

Прямоугольная (ортогональная) диметрическая проекция образуется при прямоугольном проецировании предмета и связанных с ним координатных осей на плоскость аксонометрических проекций, одинаково наклоненную к двум координатным осям.

Коэффициенты искажений в диметрической проекции имеют следующие значения: $k = n$; $m = 1/2k$. Тогда $2k^2 + 1/4k^2 = 2$; $k = \sqrt{8/9} \approx 0,94$; $m \approx 0,47$.

В целях упрощения построений в соответствии с ГОСТ 2.317-69, как и в изометрических проекциях, приведенные коэффициенты искажений по осям x и z принимают равным единице, а по оси y коэффициент искажения равен 0,5. Следовательно, по осям x и z или параллельно им все размеры откладывают в натуральную величину, а по оси y размеры уменьшают вдвое. Увеличение в этом случае составляет 6% (выражается числом $1,06 = 1 / 0,94$).

Расположение осей x и y в диметрической проекции, полученное расчетным путем, показано на рис. 13.5. Ось x наклонена по отношению к горизонтальной линии под углом $7^\circ 10'$, а ось y – под углом $41^\circ 25'$. С достаточной для практических целей точностью в прямоугольной диметрии оси x и y можно строить по тангенсам углов:

$$\operatorname{tg} 7^\circ 10' \approx 1/8; \operatorname{tg} 41^\circ 25' \approx 7/8.$$

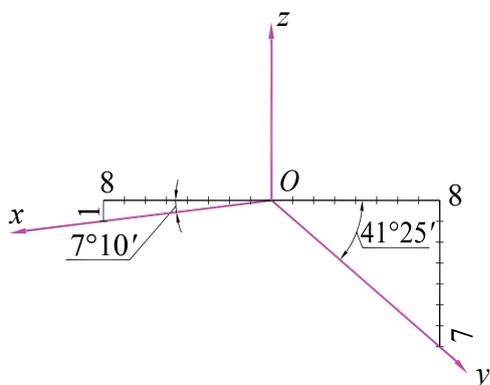


Рис. 13.5

Продолжение оси y за центр O (рис. 13.5) является биссектрисой угла xOz , что также может быть использовано для построения оси y .

В диметрической проекции изображения геометрических тел строят так же, как в изометрической, с учетом коэффициента искажений по оси y , вдоль которой размеры уменьшаются вдвое. Все отрезки прямых, которые были параллельны осям x , y и z на комплексном чертеже, останутся параллельными

соответствующим осям в диметрической проекции. На рис. 13.6 приведены окружности в диметрической проекции с указанием соответствующих значений величин осей эллипсов.

Большая ось AB эллипсов во всех случаях равно $1,06d$, где d – диаметр окружности. Малая ось CD эллипсов, расположенных на плоскостях, параллельных плоскостям проекций π_1 и π_3 , равна $0,35d$, а на плоскости, параллельной фронтальной плоскости π_2 , – $0,95d$.

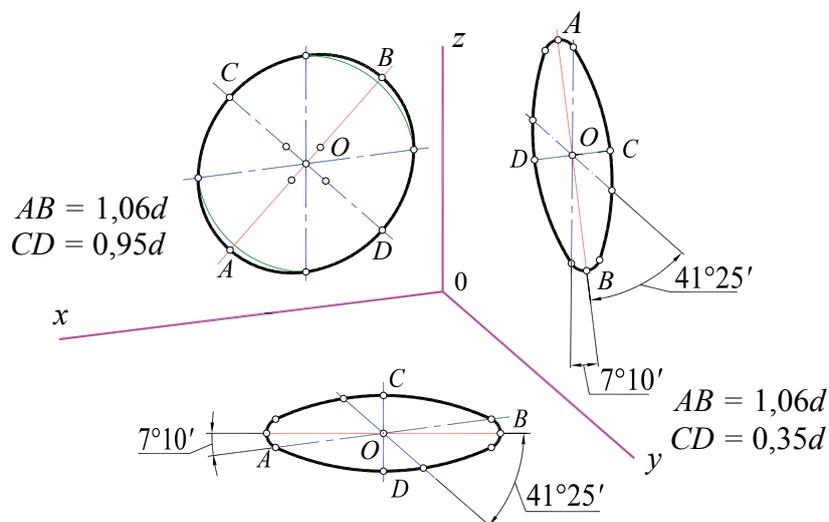


Рис. 13.6

13.4. Косоугольная фронтальная диметрия

На практике часто бывает полезным построение такой аксонометрической проекции, в которой хотя бы одна из координатных плоскостей не искажалась. Очевидно, что для выполнения этого условия плоскость проекций должна быть параллельна одной из координатных плоскостей. При этом нельзя пользоваться ортогональным проектированием, так как координатная ось, перпендикулярная указанной координатной плоскости, изобразится точкой и изображение будет лишено наглядности. Поэтому пользуются косоугольным проектированием, при котором направление оси y выбирают так, чтобы углы между ней и осями x и z равнялись бы 135° (рис. 13.7), а показатель искажения – 0,5.

Такую косоугольную аксонометрию называют *фронтальной диметрией*. Коэффициенты искажений по осям x и z равны 1, а по оси y коэффициент искажений равен 0,5.

На рис. 13.8 показаны проекции окружностей, расположенных в плоскостях, параллельных координатным.

Окружность, расположенная в плоскости xOz , проектируется на плоскость проекций без искажения, а окружности, расположенные в плоскостях, параллельных координатным плоскостям xOy и xOz , спроецируются в виде эллипсов. Эти эллипсы обычно строят по сопряженным диаметрам. Большая ось эллипсов равна $1,07d$, а малая ось – $0,33d$ (d – диаметр окружности).

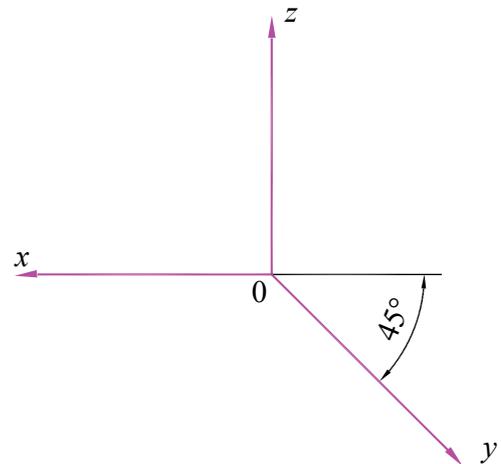


Рис. 13.7

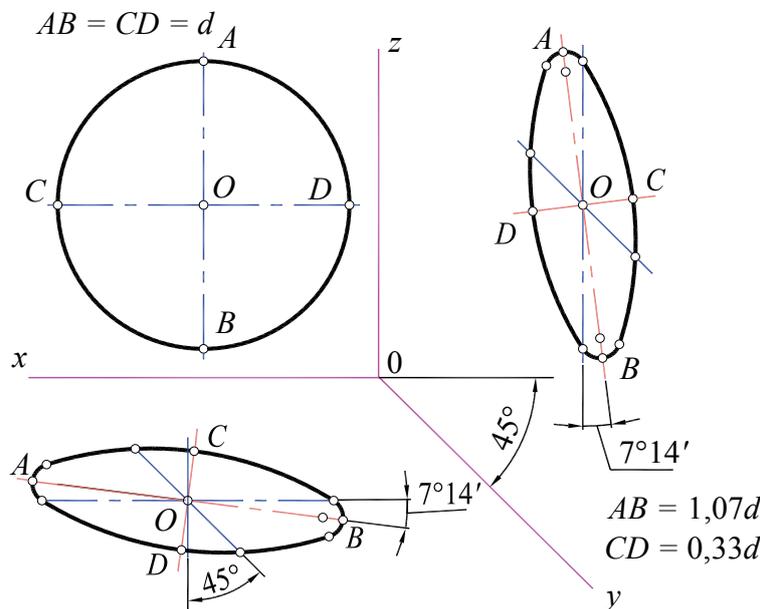


Рис. 13.8

13.5. Примеры решения задач

Задача 1. Построить изометрическую проекцию точки A , представленной проекциями A' и A'' (рис. 13.9, а).

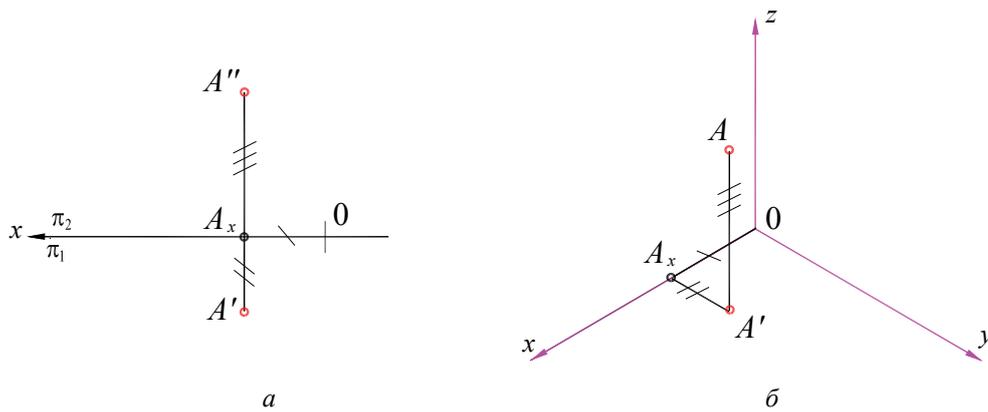


Рис. 13.9

Решение. Если даны прямоугольные проекции точки, то это значит, что известны все три координаты x , y и z , позволяющие построить изометрическую проекцию. Построение начинаем с изометрических осей, которые проводим под углом 120° друг к другу (рис. 13.9, б). Далее от начала координат O по оси x откладываем отрезок OA_x . Из полученной точки A_x проводим прямую, параллельную оси y , и на ней откладываем отрезок A_xA' . Из точки A' проводим прямую, параллельную оси z , на которой откладываем отрезок, равный координате z точки $A - A_xA''$. Полученная точка A – искомая изометрическая проекция точки A .

Задача 2. Построить изометрическую проекцию куба.

Решение. Центр нижнего основания куба размещается в точке O пересечения изометрических осей (рис. 13.10). В направлении осей x , y откладываем расстояния, равные половине длины стороны куба $a/2$. Из полученных точек проводим стороны основания куба, равные полной длине a . Линии проводим параллельно осям. Затем из точки O вдоль оси z вверх откладываем расстояние a и строим верхнее основание куба. Вершины нижнего и верхнего оснований соединяем вертикальными линиями.

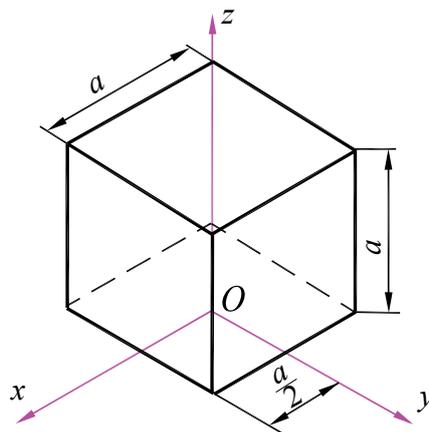


Рис. 13.10

Задача 3. Построить изометрическую проекцию правильного шестиугольника (рис. 13.11).

Решение. На рисунке 13.11, а за оси координат приняты оси симметрии шестиугольника – x и y . Для построения изометрической проекции точек A и D от начала аксонометрических осей O по оси x отложены отрезки ΔX . Коэффициенты искажений по всем осям приняты равными единице. Замечая, что оставшиеся вершины симметричны относительно осей координат, для построения точек D , C , E , F откладываем вдоль оси y отрезки ΔY

(получаем точки 1 и 2). Затем через эти точки проводим отрезки, параллельные оси x . Длина каждого отрезка равна удвоенной величине X_b , которая замеряется по исходному шестиугольнику. Полученные точки A, B, C, D, E, F соединяем отрезками прямых линий.

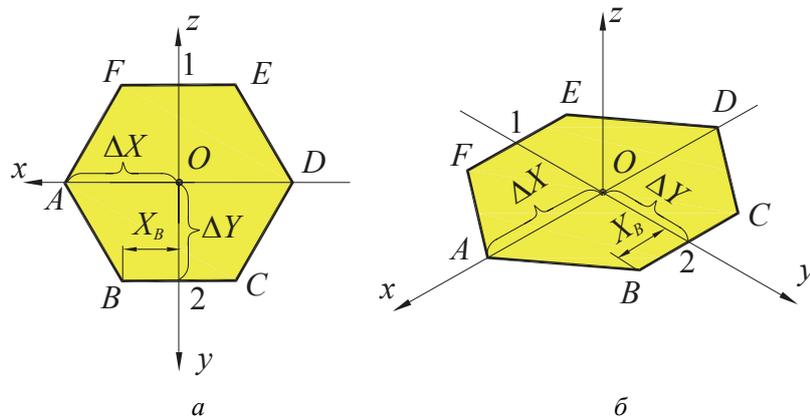


Рис. 13.11

Задача 4. По заданным прямоугольным проекциям построить изометрическую проекцию цилиндра и точки M , лежащей на его боковой поверхности. Начало координат находится в центре нижнего основания (рис. 13.12).

Решение. Проводим изометрические оси x, y и строим эллипс нижнего основания (расчет длин осей и порядок построения эллипсов приведены на рис. 13.3). Затем определяем центр верхнего основания цилиндра и строим второй эллипс. Оба эллипса соединяем вертикальными образующими. Для построения точки M отмечаем точку M' на нижнем основании цилиндра (откладывая координаты x_M и y_M точки M). Затем на вертикальной образующей, проходящей из точки M' , на высоте z_M отмечаем точку M .

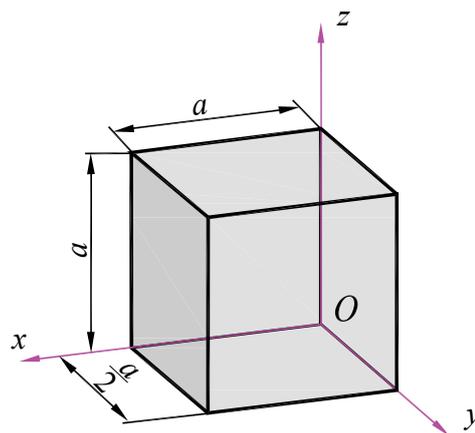
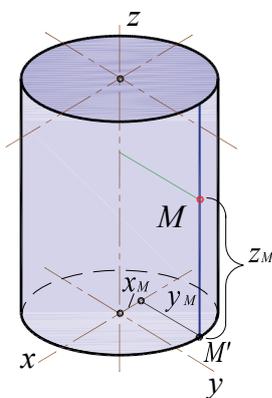
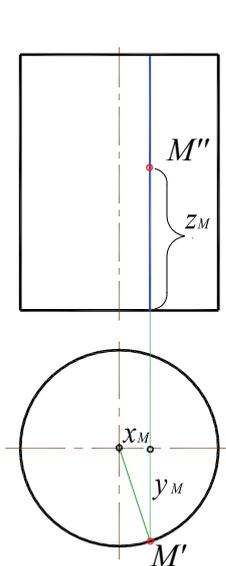


Рис. 13.12

Рис. 13.13

Задача 5. Построить прямоугольную диметрическую проекцию куба со стороной, равной a .

Решение. Расположение осей прямоугольной диметрической проекции приведено на рис. 13.4. Начало координат разместим на пересечении граней куба. Нижнее основание куба размещается в плоскости xOy (рис. 13.13). В направлении оси x откладываем расстояние,

равное полной длине куба a . В направлении оси y откладываем расстояние, равное половине длины стороны куба $a/2$. Из полученных точек проводим стороны основания куба параллельно осям x и y .

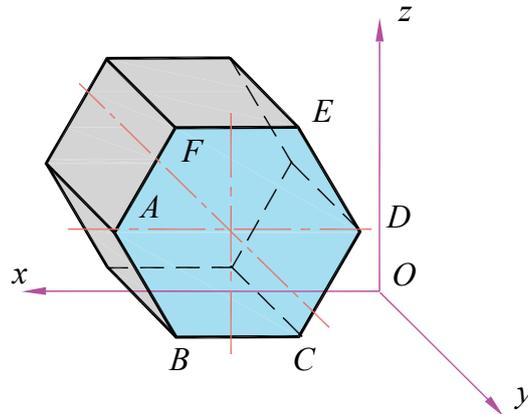


Рис. 13.14

Затем из точки O вдоль оси z вверх откладываем расстояние a и строим верхнее основание куба аналогично нижнему. Вершины нижнего и верхнего оснований соединяем вертикальными линиями.

Задача 6. Построить фронтальную косоугольную диметрическую проекцию шестигранника.

Решение. Расположение осей косоугольной диметрической проекции приведено на рис. 13.7. Разместим основание шестиугольной призмы $ABCDEF$ параллельно плоскости xOz (рис. 13.14). В этом случае шестиугольник проецируется на аксонометрическую плоскость проекций без искажений. Затем из вершин шестиугольника A, B, C, D, E, F проводим прямые, параллельные оси y . На этих прямых откладываем отрезки, равные половине длины боковых ребер призмы. Соединив полученные точки, получаем второе основание призмы. В заключение определяем видимые и невидимые линии призмы. Невидимые линии изображаются штриховыми линиями.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое аксонометрическая проекция?
2. Как получается аксонометрический чертеж?
3. Что такое показатель (коэффициент) искажения?
4. Какие виды аксонометрии вы знаете?
5. Как располагаются оси прямоугольной изометрии?
6. Чему равны натуральные и приведенные показатели искажения в прямоугольной изометрии?
7. Каков масштаб изображения в стандартной прямоугольной изометрии?
8. Постройте в прямоугольной диметрии шестигранную призму.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛЫ	3
Глава 1. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ. ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ	5
1.1. Метод проекций.....	5
1.2. Центральное и параллельное проецирование.....	5
1.3. Свойства прямоугольного проецирования	6
1.4. Обратимость чертежа.....	7
1.5. Точка в системе двух и трех плоскостей проекций	7
1.6. Примеры решения задач	11
Глава 2. ПРЯМАЯ	13
2.1. Проекция отрезка прямой линии	13
2.2. Прямые общего и частного положения.....	13
2.3. Следы прямой	15
2.4. Определение натуральной величины отрезка прямой и углов наклона прямой к плоскостям проекций	16
2.5. Относительное положение точки. Деление отрезка прямой в данном отношении	17
2.6. Относительное положение двух прямых в пространстве	17
2.7. Примеры решения задач	20
Глава 3. ПЛОСКОСТЬ	22
3.1. Задание плоскости на чертеже. Следы плоскости	22
3.2. Плоскости общего и частного положения	23
3.3. Прямая и точка в плоскости	26
3.4. Прямые особого положения в плоскости.....	27
3.5. Примеры решения задач	29
Глава 4. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ, ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ	31
4.1. Параллельность прямой и плоскости	31
4.2. Параллельность двух плоскостей	32
4.3. Пересечение прямой линии с плоскостью частного положения	33
4.4. Пересечение двух плоскостей	33
4.5. Пересечение прямой с плоскостью общего положения	38
4.6. Перпендикулярность прямой и плоскости	40
4.7. Перпендикулярность двух прямых.....	42
4.8. Перпендикулярность двух плоскостей.....	43
4.9. Примеры решения задач	44
Глава 5. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА	48
5.1. Способ замены плоскостей проекций	48
5.1.1. Преобразование прямой общего положения в положение прямой уровня	49
5.1.2. Преобразование прямой общего положения в проецирующую	49
5.1.3. Преобразование плоскости общего положения в проецирующее положение	50
5.1.4. Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня	50
5.2. Способ вращения.....	51
5.2.1. Вращение точки вокруг проецирующих прямых.....	51
5.2.2. Плоскопараллельное перемещение отрезка	53
5.2.3. Способ вращения вокруг прямой уровня.....	55
5.3. Примеры решения задач	57

Глава 6. МНОГОГРАННИКИ.....	62
6.1. Общие сведения о многогранниках.....	62
6.2. Точка и прямая линия на поверхности многогранника.....	63
6.3. Пересечение многогранников плоскостью. Развертка поверхности многогранника.....	64
6.3.1. Общие сведения.....	64
6.3.2. Пересечение многогранника проецирующей плоскостью.....	65
6.3.3. Пересечение многогранника плоскостью общего положения.....	68
6.4. Примеры решения задач.....	70
Глава 7. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О КРИВЫХ ЛИНИЯХ И КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ	73
7.1. Кривые линии и их проекции.....	73
7.2. Некоторые кривые, часто встречающиеся в практике.....	73
7.3. Образование и классификация кривых поверхностей.....	79
7.4. Линейчатые поверхности.....	80
7.5. Поверхности вращения.....	85
7.6. Циклические и каркасные поверхности.....	88
7.7. Построение точек, лежащих на геометрических телах и поверхностях.....	89
7.8. Примеры решения задач.....	93
Глава 8. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ПЛОСКОСТЬЮ. РАЗВЕРТЫВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ.....	96
8.1. Общие положения.....	96
8.2. Пересечение цилиндра плоскостью. Построение развертки.....	97
8.3. Пересечение конуса плоскостью. Построение развертки.....	100
8.4. Пересечение сферы и тора плоскостью.....	103
8.5. Построение условной развертки сферы.....	105
8.6. Примеры решения задач.....	106
Глава 9. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С МНОГОГРАННИКАМИ И КРИВЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ.....	110
9.1. Частные случаи определения точек пересечения.....	110
9.2. Общий способ определения точек пересечения.....	112
9.3. Примеры решения задач.....	117
Глава 10. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ.....	119
10.1. Способы построения линий пересечения.....	119
10.2. Примеры решения задач.....	121
Глава 11. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ С МНОГОГРАННИКАМИ	123
11.1. Способы построения линии пересечения поверхностей.....	123
11.2. Примеры решения задач.....	127
Глава 12. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ.....	130
12.1. Способ вспомогательных секущих плоскостей.....	130
12.2. Особые случаи пересечения.....	134
12.3. Способ вспомогательных сфер.....	137
12.4. Примеры решения задач.....	138
Глава 13. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ.....	141
13.1. Общие сведения.....	141
13.2. Прямоугольная изометрическая проекция.....	142
13.3. Прямоугольная диметрическая проекция.....	144
13.4. Косоугольная фронтальная диметрия.....	145
13.5. Примеры решения задач.....	145

Учебное издание

Жарков Николай Иванович
Калтыгин Александр Львович
Мануков Юрий Николаевич

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Редактор *О. П. Соломевич*
Компьютерная верстка *Д. С. Семижен*

Подписано в печать 27.01.2010. Формат 60×84¹/₈.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 17,7. Уч.-изд. л. 15,6.
Тираж 500 экз. Заказ .

Отпечатано в Центре издательско-полиграфических
и информационных технологий учреждения образования
«Белорусский государственный технологический университет».
220006. Минск, Свердлова, 13а.
ЛИ № 02330/0549423 от 08.04.2009.
ЛП № 02330/0150477 от 16.01.2009.