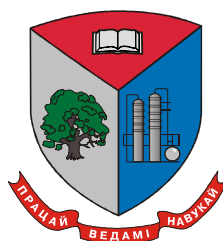


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Белорусский государственный технологический университет»



ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
Тезисы докладов 81-й научно-технической конференции
профессорско-преподавательского состава,
научных сотрудников и аспирантов
(с международным участием)

1-12 февраля 2017 г.

Минск 2017

УДК 53:51:005.745(0.034)

ББК 22я73

Ф 50

Физико-математические науки : тезисы 81-й науч.-техн. конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием), Минск, 01-12 февраля 2017 г. [Электронный ресурс] / отв. за издание И. В. Войтов; УО БГТУ. – Минск : БГТУ, 2017. – 72 с.

Сборник составлен по материалам докладов научно-технической конференции сотрудников Белорусского государственного технологического университета. Представлены результаты моделирования диффузионного процесса в решеточном флюиде на плоской квадратной решетке, результаты численного моделирования модели топливной ячейки на основе циркония стабилизированного иттрием. Описаны исследования распределения равновесных электрофизических характеристик в приэлектродных и межзеренных областях. Изучено явление делокализации функции распределения, возникающей на поверхности наночастицы, обоснована методика обнаружения слабых оптических сигналов.

Рассмотрены вопросы создания новых люминесцентных сенсоров, показано, что модификация ядра макроцикла метильной группой существенно расширяют возможности управления оптическим откликом таких систем. Изучены процессы переноса электрона в полупроводниковых материалах, квантовые эффекты, сопровождающие работу однокубитного лазера и применение метода ионного ассистирования.

Приведены обобщения некоторых результатов по теории обобщенных функций и линейных динамических сложных систем. Описаны оптимальные свойства квадратичных критериев задачи проверки гипотезы о среднем многомерного нормального распределения и обобщенного гамма-распределения.

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры теоретической механики В.С. Вихренко
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой физики Н.Н. Крук
канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры высшей математики И. К. Асмыкович

Главный редактор

ректор, профессор И.В. Войтов

© УО «Белорусский государственный технологический университет», 2017

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Грода Я.А., Вихренко В.С.</i> Равновесные и диффузионные свойства системы с SLAR – потенциалом.....	6
<i>Грода Я.А.</i> Равновесные свойства решеточного флюида на простой кубической решетке с заблокированными узлами....	7
<i>Бокун Г.С., Вихренко В.С.</i> Замыкание цепочки ББГКИ для случая кристаллического состояния с учетом кулоновского взаимодействия.....	8
<i>Бокун Г.С., Вихренко В.С.</i> Учет дальнедействующего и короткодействующего взаимодействий в конденсированной среде.....	9
<i>Ласовский Р.Н., Вихренко В.С.</i> Распределение заряда и электрического потенциала в керамических электроплитах при наличии внешнего электрического поля.....	10
<i>Крук Н.Н., Кленицкий Д.В.</i> Взаимосвязь молекулярной конформации и фотофизических характеристик корролов.....	11
<i>Крылов А.Б., Крук Н.Н.</i> Идентификация индивидуальных спектров поглощения в смеси атропоизомеров.....	12
<i>Мадьяров В.Р.</i> Бесконтактные измерения электрических параметров полупроводников в СВЧ-диапазоне.....	13
<i>Буцень А.В., Данилов П.А., Левченко А.О., Сараева И.Н., Смирнов Н.А., Старцева Е.А., Бураков В.С., Кирис В.В., Тарасенко Н.В.</i> Влияние параметров лазерных импульсов на спектральные характеристики плазмы при абляции в жидкости.....	14
<i>Карлович Т.Б., Филатов С.О.</i> Распределение температурного поля в кольцевом слое загрязнения биметаллических ребристых труб аппаратов воздушного охлаждения.....	15
<i>Кленицкий Д.В., Крук Н.Н.</i> Определение фотофизических параметров красителей при стационарном фотовозбуждении.....	16
<i>Люлькович Е.С., Крук Н.Н.</i> Формирование атропоизомеров порфиринов в растворах.....	17
<i>Поплавский В.В., Бобрович О.Г.</i> Морфология и состав поверхности электрокатализаторов, формируемых ионно-ассистируемых осаждением платины и церия на углеродный носитель.....	18
<i>Поплавский В.В., Матыс В.Г.</i> Свойства электрокатализаторов, формируемых ионно-ассистируемым осаждением платины и церия на углеродный носитель.....	20

<i>Бобрович О.Г., Барайшук С.М., Туровец А.И., Яксельчик В.В.</i> Морфология и свойства поверхности сплава АМГ2М, модифицированного осаждением МО в условиях ионного ассистирования.....	22
<i>Бокун Г.С., Наркевич И.И.</i> Компьютерное построение алмазной решетки и ее использование для расчета унарных функций распределения атомов углерода в наночастице.....	23
<i>Наркевич И.И., Фарафонтowa Е.В.</i> Перенормировка потенциа- лов средних сил в рамках двухуровневого молекулярно- статистического подхода и их использование для расчета свободной энергии однокомпонентной неоднородной системы...24	24
<i>Тульев В.В.</i> Состав и распределение компонентов по глубине в покрытиях, полученных ионно-ассистируемым осаждением титана и кремния на сталь.....	26
<i>Чаевский В.В., Višniakov N.</i> Структура и фазовый состав ZrC-Ni-УДА-покрытий фрезерного инструмента.....	27
<i>Борковская И.М.</i> Основные задачи теории управления для гибридных динамических систем.....	29
<i>Асмыкович И.К.</i> Об апериодическом управлении в линейных дескрипторных системах с чистым запаздыванием.....	30
<i>Соловьева И.Ф.</i> К вопросу решения систем дифференциальных уравнений с пограничным слоем.....	32
<i>Ловенецкая Е.И.</i> Об оптимальности квадратичных критериев в задаче проверки гипотезы о среднем многомерного нормального распределения.....	33
<i>Шагова Т.Г.</i> Асимптотические разложения рациональных мнемoфункций.....	34
<i>Яроцкая Л.Д.</i> ${}_2F_2$ – функция гипергеометрического типа.....	35
<i>Пономарева С.В., Пыжкова О.Н.</i> Достаточные условия разрешимости уравнений со степенно-логарифмическими ядрами в пространстве абсолютно непрерывных функций.....	36
<i>Волк А.М.</i> Гидродинамика жидкой пленки на проницаемой цилиндрической поверхности.....	37
<i>Терешко Е.В.</i> К вопросу о некоторых уравнениях с дельта-образными коэффициентами.....	39
<i>Якименко А.А.</i> Модальное управление одной запаздывающей системой нейтрального типа.....	40
<i>Устилко Е.В.</i> К вопросу о синтезируемом описании искусственной нейронной сети на языке VHDL.....	42

<i>Игнатенко В.В., Крахотко В.В., Размыслович Г.П.</i> К вопросу управляемости линейных систем сингулярными регуляторами...	43
<i>Джумабаева Д.Г., Бурзумбаева С.К.</i> Формирование портфеля ценных бумаг Казахстана методом теории матричных игр.....	45
<i>Карстина С.Г., Маратбаев А.А.</i> Самоорганизация в молекулярных дисперсных матрицах при обменно-резонансных взаимодействиях.....	47
<i>Непочатенко В.А., Непочатенко И.А.</i> Определение температурной зависимости параметров кристаллической решетки и спонтанной деформации в сегнетоэлектриках при фазовом переходе $m3m - 4mm$	49
<i>Закрипов С.К.</i> Решения одного модельного интегро-дифференциального уравнения первого порядка со степенной особенностью в ядре.....	51
<i>Садриддинов П.Б.</i> Один из способов определения температуры инициирования фильтрационного горения газов в инертной пористой среде.....	53
<i>Садуллоев Р.И.</i> Имитационная модель роста и развития растения.....	55
<i>Абдуллаев Х.М., Шаимов Э.Д., Кадыров Р.Т.</i> Влияние фуллерена C_{60} на электропроводность пленок полиметилметакрилата, полученных из растворов в ароматических растворителях.....	57
<i>Махсудов Б.И., Джураев Х.Ш., Каримов З.</i> Влияние толщины активного нанослоя на температурную зависимость порогового тока инжекционных лазеров на основе ассиметричных ALGAAS/INGAAS/GAAS – гетероструктур.....	59
<i>Ашуров М., Ашуров Х.М.</i> Вычислительные формулы для произведений двух многоцифровых чисел с одинаковыми цифрами.....	62
<i>Камолиддинов Ф. Дж., Махсудов Б.И., Сафаров С.С.</i> Оценка сигнала детектора заряженных частиц на высоте 4250 м.....	65
<i>Штефан Н.И.</i> Переходные процессы при взаимодействии нестационарной акустической волны от точечного источника со сферической плотностью.....	67
<i>Двинин С.А., Солихов Д.К., Нурулхаков Ш.С.</i> Инкременты неустойчивости вынужденного рассеяния в длинном плазменном слое.....	69
<i>Дадабаев А.Х.</i> О разрешимости дифференциальных операторов заданных на неограниченных многообразиях без края	71

Я. Г. Грода, зав. кафедрой, доц., канд. физ.-мат. наук
В.С. Вихренко, проф., д-р физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

РАВНОВЕСНЫЕ И ДИФФУЗИОННЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ С SALR-ПОТЕНЦИАЛОМ

Исследована решеточная модель системы наночастиц либо макромолекул, части которой притягиваются на малых расстояниях и отталкиваются на больших (SALR – Short-range Attraction Long-range Repulsion). В качестве модели рассмотрен решеточный флюид с притяжением ближайших и отталкиванием третьих соседей на плоской треугольной решетке.

Для определения свободной энергии развито обобщенное квази-химическое приближение (ОКХП), позволяющее получить в замкнутой форме выражения для равновесных характеристик модели – химического потенциала μ , термодинамического фактора χ_T и вероятности двум узлам-соседям k -го порядка быть занятыми частицами $P_k(1;1)$

$$\beta\mu = \ln \frac{c}{1-c} - \sum_k z_k \ln \frac{Y_k - c}{1-c}, \quad \chi_T = \frac{1}{1-c} \left(1 - \sum_k z_k \frac{Y_k - 1}{2Y_k - 1} \right),$$

$$P_k(1;1) = c \frac{Y_k + c - 1}{Y_k}, \quad Y_k = 0,5 \left(1 + \sqrt{1 + 4c(1-c)(W_k - 1)} \right), \quad W_k = \exp(-\beta J_k),$$

где c – концентрация частиц на решетке, $\beta = 1/k_B T$ – обратная температура, k_B – постоянная Больцмана, z – число узлов в k -ой координационной сфере, J – энергия взаимодействия двух частиц, занимающих ближайшие соседние узлы ($k = 1$) и узлы, являющиеся соседями 3-го порядка ($k = 3$).

Рассмотрен алгоритм и выполнено моделирование равновесных свойств рассматриваемой решеточной системы по методу Монте-Карло. Показано, что развитый подход позволяет получать адекватные оценки равновесных термодинамических и структурных характеристик системы вне области существования в ней упорядоченной фазы.

Предложен оптимальный с точки зрения временных затрат алгоритм моделирования диффузионного процесса в решеточной системе, в рамках которого при эквализации модели рассматриваются переходы частиц в произвольные решеточные узлы.

Выполнено моделирование диффузионного процесса и определены кинетический коэффициент диффузии и коэффициент диффузии меченых атомов.

УДК 531.19

Я. Г. Грода, зав. кафедрой, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

РАВНОВЕСНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕТОЧНОГО ФЛЮИДА НА ПРОСТОЙ КУБИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ С ЗАБЛОКИРОВАННЫМИ УЗЛАМИ

В докладе рассмотрена модель решеточного флюида с притяжением ближайших соседей на простой кубической решетке, в которой некоторая часть решеточных узлов является заблокированной, т.е. недоступной как для частиц, так и для вакансий.

С практической точки зрения построенная модель пригодна для описания свойств ансамбля примесных частиц, абсорбированных кристаллом. В этом случае реальные атомы кристаллической структуры взаимодействуя друг с другом формируют некоторый профиль потенциальной энергии, минимумы которого являются наиболее предпочтительными положениями для размещения в них примесных частиц. Данные положения рассматриваются в качестве узлов решеточной модели. В свою очередь дефекты кристалла блокируют часть предложенных решеточных узлов.

В докладе представлены результаты для системы, содержащей 10% заблокированных узлов. Рассмотрение равновесных свойств модели выполнено как в рамках предложенного ранее квазихимического приближения [1], так и путем компьютерного моделирования ее равновесных характеристик по методу Монте-Карло. Моделируемая система содержала $24^3 = 13\,824$ решеточных узла. Моделирование равновесных свойств было выполнено в большом каноническом ансамбле (алгоритмом Метрополиса) в сочетании с периодическими граничными условиями.

Проведенное сопоставление результатов двух методов исследования, выполненное при одинаковых абсолютных температурах, показало, что квазихимическое приближение позволяет получать адекватные результаты для термодинамических (химический потенциал, термодинамический фактор) и структурных (корреляционные функции ближайших соседей) характеристик рассматриваемой системы. При этом расхождение данных моделирования и аналитических расчетов оказывается даже меньшим, чем в случае плоских решеток. На основе квазихимического приближения могут быть построены приближения следующих порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аргиракис П., Гиазитзидис П., Грода Я. Г. Термодинамические и структурные свойства решеточного флюида на плоской квадратной решетке с заблокированными узлами: квазихимическое приближение // Труды БГТУ. 2015. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 48–52.

ЗАМЫКАНИЕ ЦЕПОЧКИ БГКИ ДЛЯ СЛУЧАЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ С УЧЕТОМ КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассматривая систему N частиц в объеме V , для унарной и бинарной функций распределения используем представления

$$F_1(i) = \frac{1}{NQ_i} \exp(-\beta\varphi(i)) = \frac{1}{N} \rho_1(i), \quad (1)$$

$$F_2(i, j) = \frac{\exp(-\beta(\varphi(i) + \varphi(j) + \Phi(i, j)))}{\int \int_V \exp(-\beta(\varphi(i) + \varphi(j) + \Phi(i, j))) dq_i dq_j} = \frac{\rho_2(i, j)}{N^2}. \quad (2)$$

где $\Phi(i, j)$ – межчастичный потенциал с учетом кулоновского взаимодействия, $\varphi(i)$ – потенциал средней силы, действующей на частицу в точке q_i , β – обратная температура.

Введем в рассмотрение майероподобные функции

$$f(i, j) = \exp(-\beta\Phi(i, j)) - 1. \quad (3)$$

С учетом определения (3) и периодичности функции $\varphi(i)$ перепишем знаменатель в соотношении (2) в виде

$$Q_2 = \int \int_V \exp(-\beta\varphi(i)) \exp(-\beta\varphi(j)) dq_i dq_j + \int_V \exp(-\beta\varphi(i)) L(i) dq_i, \quad (4)$$

где

$$L(i) = \frac{1}{Q_i} \int_V f(i, j) \exp(-\beta\varphi(j)) dq_j. \quad (5)$$

Периодичность функции $\varphi(j)$ порождает периодичность $L(i)$.

В итоге, используя цепочку уравнений для частичных функций распределения (1), (2), получим окончательно интегральное уравнение

$$-\beta\varphi(i) = \frac{1}{Q_j} \int_V \exp(-\beta\varphi(j)) f(i, j) dq_j. \quad (6)$$

Соотношение (6) определяет потенциалы средних сил в кристаллическом состоянии для случая кулоновских систем.

УЧЕТ ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩЕГО И КОРОТКОДЕЙСТВУЮЩЕГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В КОНДЕНСИРОВАННОЙ СРЕДЕ

Разработанные ранее подходы учета дальнего действия и короткого действия взаимодействия в конденсированной среде переносятся на описания кристаллических ионных систем и токопроводящих керамик, основные особенности которых можно описать, опираясь на решеточные теории. В связи с тем, что свойства таких систем можно передать, совмещая модель идеального кристалла с групповым разложением по маероподобным функциям, с помощью которых на свойства идеального кристалла накладываются корреляции, представляется оправданным объединить подходы, разработанные ранее для учета эффектов дальнего действия в существенно неоднородных средах, к которым и относятся токопроводящие керамики, являясь ионными системами.

Представляя энергию системы суммой парных взаимодействий $V(i, j)$ и $\Phi(i, j)$ близко- и дальнего действия потенциалов частиц в i и j положениях, представим конфигурационный интеграл в форме

$$Q_N = Q_N^0 \langle \exp \left(-\beta \sum_{i < j} V(i, j) \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N (1 + f_{ij}) \right) \rangle_0, \quad (6)$$

$$f_{ij} = \exp \left(-\beta (\Phi(i, j)) - \varphi_j(i) - \varphi_i(j) \right) - 1, \quad (7)$$

где Q_N^0 – конфигурационный интеграл идеального кристалла, выраженный через одночастичные ячеечные потенциалы средних сил $\varphi_j(i)$, f_{ij} – майероподобная функция.

Последующее разложение (1) по функциям (2) позволяет записать систему замкнутых уравнений

$$\exp(-\beta \varphi_j(i)) = \frac{1}{Q_j} \int g_{i,j} \exp(-\beta \Phi(i, j)) \cdot \exp \left(-\beta \sum_{k \neq i, j} \varphi_k(j) \right) dj. \quad (8)$$

Система (3) отличается от использованной ранее тем, что ядро этой системы, помимо точечного короткого действия потенциала, содержит бинарную функцию для кулоновского взаимодействия

$$g_{1,2} = \int_{v_3} \dots \int_{v_N} \exp \left(-\beta \sum_{e, m=1}^N V(e, m) \right) F_0(3), F_0(4) \dots F_0(N) \cdot d3 d4 \dots dN.$$

Р. Н. Ласовский, доц., канд. физ.-мат. наук;
В.С. Вихренко, проф., д-р физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДА И ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА В КЕРАМИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОЛИТАХ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Керамические электролиты представляют собой класс технологически важных материалов, которые широко используются в устройствах хранения и преобразования энергии, разного рода датчиках и т.п. В работе рассматривается квазиодномерная модель стабилизированного иттрием диоксида циркония, которая воспроизводит некоторые основные свойства твердооксидных топливных элементов [1]. Модель состоит из квазиодномерной последовательности укрупненных кристаллических ячеек, каждая из которых содержит два иона иттрия и, в среднем, одну нейтральную вакансию в кислородной подрешетке, компенсирующую потерю положительного заряда. Вакансия может обмениваться с двукратно заряженным отрицательным ионом кислорода в ближайшей ячейке. Межзеренная область в рассматриваемой системе моделируется несколькими ячейками с отличающимися энергиями активации миграции частиц [2].

Моделирование выявило появление двойных электрических слоев на границах межзеренных областей. В состоянии равновесия или при слабом внешнем электрическом поле двойные слои появляются на обеих сторонах межзеренной области, а при более сильном поле единственный двойной слой образуется избыточными зарядами противоположных знаков на границах межзеренной области. В свою очередь, эти двойные слои формируют достаточно сильное электрическое поле, которое проталкивает ионы через межзеренную область и в результате подавляет сопротивление межзеренных областей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Modak U., Lusk M. T. Kinetic Monte Carlo simulation of a solid-oxide fuel cell: I. Open-circuit voltage and double layer structure // *Solid State Ionics*. – 2005. – Vol. 176. – P. 2181–2191.
2. Bokun G. S., Groda Y. G., Lasovsky R. N., Vikhrenko V. S. Unusual properties of a model of an intergrain boundary in solid oxide ceramic electrolytes // *Solid State Ionics*. – 2016. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ssi.2016.11.022>

Н. Н. Крук, зав. кафедрой физики, д-р физ.-мат. наук;
Д. В. Кленицкий, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

ВЗАИМОСВЯЗЬ МОЛЕКУЛЯРНОЙ КОНФОРМАЦИИ И ФОТОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОРРОЛОВ

Выполнен сравнительный анализ структуры тетрапиррольного макроцикла свободных оснований корролов, различающихся типом периферического замещения. Установлено, что три- и тетразамещенные производные корролов обнаруживают неплоскостные искажения макроцикла волнообразного типа, а ундеказамещенное (по *мезо*-положениям и всем пиррольным кольцам) производное характеризуется седлообразно искаженным макроциклом. Величина неплоскостных искажений макроцикла корролов определена с использованием параметра $\Delta 23$, представляющего собой среднеквадратичное отклонение одного макроциклического атома от средней плоскости макроцикла 7С.

В то время как три- и тетразамещенные производные корролов с арильными заместителями в *мезо*-положениях обнаруживают близкие значения параметра $\Delta 23$ в диапазоне от 0,200 до 0,215 Å, ундеказамещение макроцикла индуцирует существенное увеличение амплитуды отклонений атомов от средней плоскости макроцикла ($\Delta 23 = 0,503$ Å). Сильное стерическое взаимодействие между периферическими заместителями приводит к тому, что плоскости пиррольных колец *A*, *B* и *C* имеют существенный наклон относительно средней плоскости макроцикла 7С.

Данные различия указывают на то, что тетрапиррольный макроцикл свободных оснований корролов в отсутствие стерических взаимодействий с периферическими заместителями имеет волнообразную конформацию, которая сохраняется при слабых стерических взаимодействиях. При введении в пиррольные кольца восьми объемных заместителей в результате усиления стерических взаимодействий происходит конформационный переход от волнообразного к седлообразному конформеру. Установлено, что величина энергетического зазора между нижними возбужденными синглетным и триплетным состояниями пропорциональна значению параметра $\Delta 23$.

А.Б. Крылов, доц., канд. биол. наук;
Н.Н. Крук, зав. кафедрой физики, д-р физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ СПЕКТРОВ ПОГЛОЩЕНИЯ В СМЕСИ АТРОПОИЗОМЕРОВ

Известно, что *мезо*-тетра-арил-порфирины могут формировать стабильные атропоизомеры, обусловленные возможностью вращения орто- либо мета-замещенных арильных фрагментов вокруг С-С связи. Статистические веса атропоизомеров относятся как 1:4:2:1. Нами было изучено изменение со временем (до 140 часов от момента приготовления раствора путем растворения необходимого количества вещества в дистиллированной воде и доведения концентрации порфирина до $1 \cdot 10^{-5} \text{М}$) спектров поглощения раствора 5,10,15,20-тетраметилпиридил-порфирина. Образец хранился в темноте и чрез определенные промежутки времени регистрировались электронные спектры поглощения на спектрофлуориметре СМ 2203. С течением времени наблюдалась эволюция спектров поглощения, обусловленная процессами взаимных превращений атропоизомеров.

Целью работы было определение индивидуальных спектров поглощения различных атропоизомеров в смеси, образующейся через 140 часов с начала исследования. Нами было показано, что к этому времени спектр поглощения смеси стабилизируется и далее является неизменным, т.е. изомеры находятся в динамическом равновесии. Соотношение весов атропоизомеров будет близким к статистическому.

Изучались электронные спектры поглощения, а для идентификации положения максимумов в спектрах поглощения анализировались первая и вторая производные спектров поглощения. В результате исследований были определены максимумы спектров поглощения четырех атропоизомеров с различными статистическими весами и сделаны предположения о форме индивидуальных спектров поглощения этих атропоизомеров.

В. Р. Мадьяров, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

БЕСКОНТАКТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПОЛУПРОВОДНИКОВ В СВЧ-ДИАПАЗОНЕ

Для исследования электронных свойств полупроводников применяются бесконтактные методы на основе зондирования излучением сверхвысоких частот. Во многих бесконтактных методах определения подвижности или эффективной массы носителей заряда в полупроводниках (например, с помощью магнитооптических эффектов) необходимо знать удельную электропроводность и диэлектрическую проницаемость образца в постоянном поле или на низких частотах. Эти параметры следует измерять, не прибегая к формированию электрических контактов в образце. В данной работе предложена методика определения удельной электропроводности и диэлектрической проницаемости кремниевых пластин с помощью интерферометрических измерений фазового сдвига и коэффициента пропускания зондирующего излучения. Измерения фазового сдвига проводилось с использованием линейно возрастающей ветви фазочастотной характеристики интерферометра. Удельная электропроводность определялась по величине коэффициента пропускания излучения с учетом многократных внутренних отражений от граней образца.

Из-за влияния проводимости зондируемой среды на коэффициент отражения вследствие индуцированных волной токов проводимости, а также присутствия свободных зарядов на границе раздела с образцом, точное аналитическое определение связи коэффициента отражения с электрическими характеристиками полупроводника затруднено. Коэффициент отражения зондирующего излучения от лицевой поверхности образца, измерялся для двух образцов слаболегированного кремния с различной толщиной. Из-за конечной проводимости измеренное значение оказывается несколько выше значения, полученного путем расчета по классической формуле для границы раздела с непроводящей диэлектрической средой. Зависимость коэффициента отражения от температуры близка к линейно возрастающей. Измеренная зависимость удельной электропроводности от температуры при температурах порядка комнатной хорошо согласуется с расчетными данными в предположении больцмановского распределения носителей заряда с учетом внутренних отражений от граней зондируемого образца.

А.В. Буцень, ассист. (БГТУ, г. Минск);
П.А. Данилов, А.О. Левченко, И.Н. Сараева,
Н.А. Смирнов, Е.А. Старцева
(Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, г. Москва);
В.С. Бураков, В.В. Кирис, Н.В. Тарасенко
(Институт физики НАН Беларуси, г. Минск)

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЛАЗЕРНЫХ ИМПУЛЬСОВ НА СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛАЗМЫ ПРИ АБЛЯЦИИ В ЖИДКОСТИ

Двухимпульсный режим воздействия, при котором абляция твердотельной мишени осуществляется двумя лазерными импульсами с временным интервалом между ними в пределах от 1 до 100 мкс, успешно применяется для повышения чувствительности в эмиссионном спектральном анализе, а также контролируемого синтеза наночастиц в жидкости. Для оптимизации указанных применений двухимпульсной лазерной абляции (ДЛА) в настоящей работе выполнены исследования влияния параметров лазерных импульсов на характеристики плазменного факела в жидкости (дистиллированная вода).

В качестве источника для абляции применялся ИАГ:Nd лазер (LOTIS ТП, модель S-2131D), работающий на частоте основной гармоники (1064 нм) с длительностью импульса 10 нс и частотой повторения импульсов до 10 Гц. В качестве мишени использовался цинковый сплав, содержащий известные концентрации легирующих компонент (Cu, Mg) и примесь железа.

Выполненные эксперименты показали, что при использовании ДЛА в жидкости наблюдается четко выраженный дискретный спектр излучения плазмы, не наблюдаемый в одноимпульсном режиме; при этом интенсивность линий определяется задержкой между импульсами. На основе спектроскопической диагностики определен компонентный состав, в том числе температура и концентрация электронов плазмы. Оказалось, что температура электронов, определенная из больцмановского построения по линиям меди (510,5 – 521,8 нм), слабо зависит от величины задержки и составляет ~ 0,7 эВ. Концентрация электронов, определенная из уширения линии магния (Mg I 518,4 нм), падает с ростом задержки между импульсами. Обсуждаются условия сохранения стехиометрии поступления материала мишени в плазму.

Т.Б. Карлович, ст.преп., канд. физ.-мат. наук;
С.О. Филатов, ассист., канд. техн. наук
(БГТУ, г. Минск)

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В КОЛЬЦЕВОМ СЛОЕ ЗАГРЯЗНЕНИЯ БИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ РЕБРИСТЫХ ТРУБ АППАРАТОВ ВОЗДУШНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ

В работе представлено теоретическое обоснование новой методики расчета коэффициента теплопередачи биметаллических ребристых труб для аппаратов воздушного охлаждения, учитывающей неравномерный слой внешнего загрязнения.

При длительной эксплуатации АВО на поверхности ребер и в межреберном пространстве накапливаются различные загрязнители (пух, пыль, сажа и др.), приводящие к уменьшению поверхности теплообмена и к снижению коэффициента теплопередачи. Причем со временем толщина слоя загрязнения возрастает у основания ребер, образуя кольцевой слой конечной толщины, в то время как остальная поверхность теплообменника покрывается тонким слоем загрязнения.

Для исследования влияния неравномерного слоя загрязнения на производительность АВО проводится расчет тепловых потоков, проходящих как через слой тонкого загрязнения, так и через кольцевой слой конечной толщины. Общий тепловой поток, отводимый АВО, определяется с использованием метода электротепловой аналогии. Он представляет собой сумму трех независимых составляющих: теплового потока через кольцевой слой внешнего загрязнения, тепловых потоков с боковой и с торцевой поверхности ребер, покрытых тонким слоем загрязнения.

Для определения термического сопротивления слоя загрязнения сформулирована и решена аналитически задача о распределении температуры в кольцевом слое с граничными условиями, соответствующими постоянной температуре на поверхности кольца, соприкасающейся с ребристой поверхностью, и заданному тепловому потоку охлаждающего воздуха на внешней поверхности кольца. Также рассчитаны минимальная и средняя по поверхности температуры загрязнителя, коэффициент теплопередачи одиночной ребристой трубы. Показано, что для проведения экспериментальных исследований необходимо учитывать изменение температуры вдоль поверхности ребер и векторный характер тепловых потоков при вычислении общего теплового потока от загрязненной поверхности.

Д. В. Кленицкий, доц., канд. физ.-мат. наук;
Н. Н. Крук, д-р физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОТОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ КРАСИТЕЛЕЙ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ ФОТОВОЗБУЖДЕНИИ

Для анализа динамики фотофизических процессов в органических молекулах необходимо определить квантовые выходы флуоресценции, фосфоресценции, а также квантовый выход интеркомбинационной конверсии в триплетное состояние. Квантовые выходы для излучательных процессов (флуоресценции либо фосфоресценции) определяется по простой методике с помощью стандартных приборов. В тоже время измерение квантового выхода безызлучательной интеркомбинационной конверсии представляет собой достаточно сложную задачу. Разработка новых доступных методов определения фотофизических характеристик сложных органических соединений является весьма актуальной научной и технической задачей.

В данной работе изучаются свойства населенностей уровней энергии, интенсивности флуоресценции и фосфоресценции при стационарном фотовозбуждении красителей прямоугольными импульсами с длительностью во много раз превышающими время жизни триплетного состояния. В этом случае за время импульса в системе успевает установиться детальное равновесие между населенностями электронных состояний. Так что число молекул поступивших на данный уровень в единицу времени будет равно числу молекул покинувших уровень. Как следствие интенсивности флуоресценции и фосфоресценции стремятся к некоторому стационарному значению, зависящему от констант скоростей процессов участвующих в установлении равновесия. Получены соотношения для стационарных значений интенсивностей флуоресценции и фосфоресценции через квантовые выходы флуоресценции, фосфоресценции и интеркомбинационной конверсии в триплетное состояние, а также времени жизни флуоресценции и триплетного состояния. Интенсивности I нелинейно зависят от плотности потока фотонов F возбуждающего излучения. Для определения квантового выхода в триплетное состояние предложено изучать зависимость обратной величины интенсивности $1/I$ от обратной величины плотности потока фотонов $1/F$. Как показано в работе такая зависимость является линейной. Угловым коэффициентом этой зависимости связан с квантовым выходом излучательных процессов, а свободное слагаемое определяется квантовым выходом в триплетное состояние.

Е. С. Люлькович, студ.;
Н. Н. Крук, зав. кафедрой физики, д-р физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

ФОРМИРОВАНИЕ АТРОПОИЗОМЕРОВ ПОРФИРИНОВ В РАСТВОРАХ

Пиридилные заместители могут располагаться по отношению к атому $C_{\text{мезо}}$ тетрапиррольного макроцикла таким образом, что атом азота находится в *орто*-, *мета*- и *пара*-положениях. Среди этих производных наиболее изучены *пара*-замещенные соединения, а физико-химические свойства и спектрально-люминесцентные характеристики *орто*- и *мета*-замещенных порфиринов к настоящему времени изучены фрагментарно. Вызывает значительный интерес детальное рассмотрение электронной структуры и фотофизических характеристик *мета*-замещенного производного - 5,10,15,20-тетра-(3-*N*-метил-пиридил)-порфирина. С точки зрения электронной коммуникации между π -электронными системами тетрапиррольного макроцикла и арильных фрагментов (т.е. резонансного взаимодействия) *мета*-положение считается неактивным, поэтому спектрально-люминесцентные характеристики этого производного должны отличаться от таковых для *орто*- и *пара*-производных, для которых наблюдается существенный резонансный эффект.

Установлено, что в растворах наблюдается гетерогенность, обусловленная наличием нескольких атропоизомеров. Атропоизомеры различаются положением метильной группы относительно средней плоскости макроцикла. Показано, что соотношение концентраций атропоизомеров в растворе отличается от равновесного статистического распределения (1:4:2:1) и существенно изменяется при варьировании температуры. Кроме этого, к перераспределению концентраций атропоизомеров также приводит изменение структуры сольватной оболочки молекул 5,10,15,20-тетра(3-*N*-метилпиридил)-порфирина путем ультразвуковой обработки. Наличие атропоизомеров проявляется в зависимостях интенсивности флуоресценции и формы спектров флуоресценции от длины волны возбуждения. Перераспределение концентраций атропоизомеров может служить мерой количественной оценки межмолекулярных взаимодействий хромофоров при сольватации в растворах, а сами соединения могут быть базовыми соединениями для разработки термооптических переключателей, оптические характеристики которых скачкообразно изменяются при перепадах температуры.

МОРФОЛОГИЯ И СОСТАВ ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЕКТРОКАТАЛИЗАТОРОВ, ФОРМИРУЕМЫХ ИОННО-АССИСТИРУЕМЫМ ОСАЖДЕНИЕМ ПЛАТИНЫ И ЦЕРИЯ НА УГЛЕРОДНЫЙ НОСИТЕЛЬ

Ионно-ассистируемое осаждение каталитического металла – платины и церия в качестве активационной добавки применено для формирования электрокатализаторов топливных элементов с полимерным мембранным электролитом, в частности топливных элементов прямого окисления метанола и этанола. Формирование активных слоев проведено путем осаждения платины, а также поочередно церия и платины на гидрофобизированный политетрафторэтиленом носитель Toray Carbon Fiber Paper TGP-H-060 T (TorayCFP), предназначенный для изготовления диффузионных слоев мембранно-электродных блоков низкотемпературных топливных элементов. Отличительной особенностью режима осаждения является использование ионов осаждаемого металла в качестве ассистирующих процессу осаждения. Осаждение металла и перемешивание осаждаемого слоя с поверхностью подложки ускоренными ($U = 5$ кВ) ионами того же металла осуществляются соответственно из нейтральной фракции пара и плазмы вакуумного ($\sim 10^{-2}$ Па) дугового разряда импульсного электродугового ионного источника.

Морфология и состав получаемых поверхностных слоев исследованы с применением сканирующей электронной микроскопии, электронно-зондового микроанализа, рентгеновского флуоресцентного анализа и спектрометрии резерфордского обратного рассеяния.

Электронно-микроскопические исследования показывают, что морфология поверхности углеродного носителя при формировании каталитических слоев не изменяется (рис. 1). В то же время на исследуемой поверхности имеются включения осаждаемых металлов с размерами порядка нескольких микрометров, что обусловлено осаждением капель металла из дугового разряда

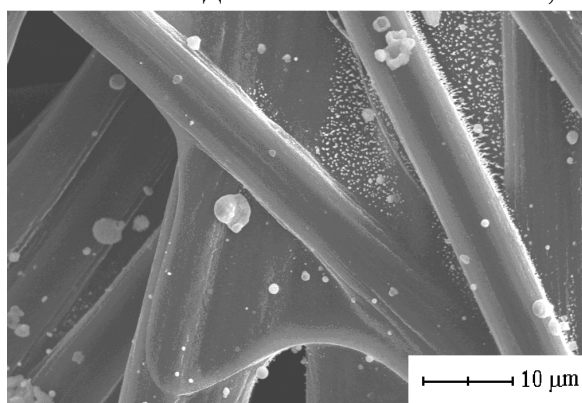


Рисунок 1 – Электронно-микроскопическое изображение слоя, полученного осаждением Се и Pt на носитель TorayCFP

ионного источника. Исследование методами электронно-зондового микроанализа и рентгеновского флуоресцентного анализа показывает, что в состав слоев входят атомы осажденных металлов (Pt, Ce) и компонентов материала носителя (C, F), а также примеси кислорода. Распределение по поверхности слоя кислорода коррелирует с распределением церия, что дает возможность предположить образование оксида редкоземельного металла.

На рис. 2 приведены спектры резерфордского обратного рассеяния ионов ^4He с энергией $E_0 = 1,5$ МэВ от поверхности образцов электрокатализаторов, сформированных ионно-ассистируемым осаждением на носитель TorayCFR платины и поочередно церия и платины.

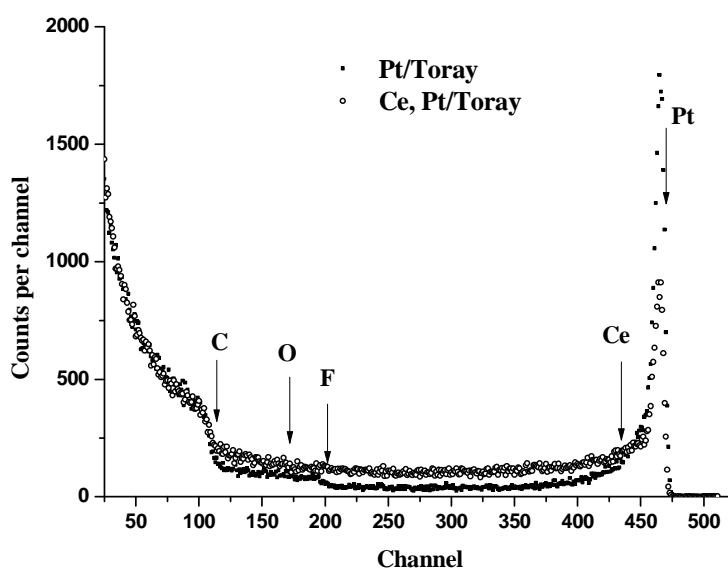


Рисунок 2 – Спектры резерфордского рассеяния ионов ^4He от поверхности электрокатализаторов, сформированных на носителе TorayCFR ионно-ассистируемым осаждением: платины; церия и платины

По данным спектрометрии резерфордского рассеяния содержание атомов платины в формируемых слоях составляет: $1,7 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ (спектр Pt/TorayCFR) и $1,5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ (спектр Ce, Pt/TorayCFR); содержание атомов церия – $1,8 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ (спектр Ce, Pt/TorayCFR). Толщина слоев составляет ~ 30 нм; содержание осажденных металлов – несколько массовых процентов.

Формирование активной поверхности электрокатализаторов осуществляется в вакуумных условиях в один – два приема, что выгодно отличается от традиционных многостадийных методов приготовления нанесенных катализаторов, основанных на пропитке носителя растворами соединений каждого из металлов, их восстановлении до металлического состояния, сушке и т. д.

УДК 621.793:539.234:539.534.9

В.В. Поплавский, доц., канд. физ.-мат. наук;

В.Г. Матыс, доц., канд. хим. наук (БГТУ, г. Минск)

СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОКАТАЛИЗАТОРОВ, ФОРМИРУЕМЫХ ИОННО-АССИСТИРУЕМЫМ ОСАЖДЕНИЕМ ПЛАТИНЫ И ЦЕРИЯ НА УГЛЕРОДНЫЙ НОСИТЕЛЬ

Электрокатализаторы являются обязательным компонентом таких устройств альтернативной энергетики как топливные элементы, преобразующие химическую энергию, выделяемую при окислении топлива, непосредственно в электрическую энергию. Целью работы явилось исследование активности электрокатализаторов, формируемых вакуумным ионно-ассистируемым осаждением металлов на носитель Toray Carbon Fiber Paper TGP-H-060 T (TorayCFP), предназначенный для изготовления диффузионных слоев мембранно-электродных блоков, в процессах окисления метанола и этанола, лежащих в основе принципа действия низкотемпературных топливных элементов. В качестве основного каталитического металла электрокатализаторов используется платина. Активные слои электрокатализаторов получены путем осаждения платины, а также поочередно церия и платины. Введение в состав формируемых каталитических слоев в качестве активационной добавки к осаждаемой платине редкоземельного металла – церия, обусловлено его ролью в многостадийном процессе электрохимического окисления молекул спирта как промотора активации адсорбированных молекул воды.

Исследования активности электрокатализаторов проведены методом циклической вольтамперометрии при 20°C в растворах 1 М $\text{CH}_3\text{OH} + 0,5\text{M H}_2\text{SO}_4$ и 1 М $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH} + 0,5\text{M H}_2\text{SO}_4$. Вольтамперограммы, полученные при исследовании электрокатализатора, сформированного осаждением церия и платины, приведены на рис. 1. Электрохимическое окисление каждого из спиртов в сернокислом растворе проявляется на циклических вольтамперограммах в виде специфических пиков тока при изменении потенциала электрода как в анодном, так и в катодном направлениях. При анодной развертке потенциала имеется пик тока, обусловленный многостадийным процессом окисления метанола или этанола, включающем электрохимическую адсорбцию, разложение молекул спирта и образование адсорбированных молекул оксида углерода CO_{ads} и их последующего удаления при взаимодействии с хемосорбированными молекулами воды либо с группами OH_{ads} с образованием ионов водорода и CO_2 . При последующей развертке потенциала в катодном направлении на вольтамперограмме появляется пик тока с максимумом при значении потенциала около 400 мВ, который обусловлен возобновлением процесса окисления метанола или этанола.

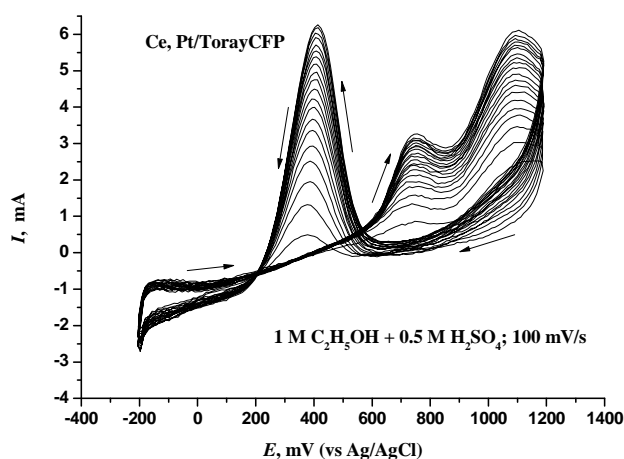
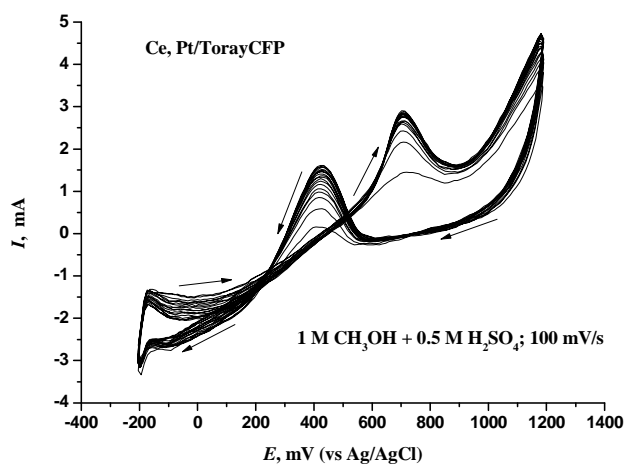


Рисунок 1 – Циклические вольтамперограммы электрокатализатора с поверхностным слоем, сформированным ионно-ассистируемым осаждением на носитель Toray Carbon Fiber Paper TGP-H-060 Т церия и платины, полученные в растворах: 1M CH₃OH + 0.5M H₂SO₄ и 1M C₂H₅OH + 0.5M H₂SO₄

Вольтамперометрическими исследованиями установлено, что полученные электрокатализаторы проявляют активность в процессах окисления метанола и этанола. Интенсивность пиков тока на вольтамперограммах возрастает по мере циклирования потенциала электрода, что свидетельствует об электрохимической активации поверхности. Активность электрокатализаторов, определяемая значениями силы тока в пиках, в процессе окисления более сложных молекул этанола, где требуется разрыв связи С–С, по сравнению с метанолом оказывается выше. Введение в каталитический слой церия в качестве активирующей добавки к осаждаемой платине способствует существенному увеличению активности электрокатализатора.

УДК 539.1.06:539.23.234

О.Г. Бобрович, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск);

С.М. Барайшук, зав. кафедрой практической подготовки студентов, доц., канд. физ.-мат. наук (БГАТУ, г. Минск);

А.И. Туровец, асп. (БГПУ им. М. Танка, г. Минск)

В.В. Яскельчик, асп. (БГТУ, г. Минск)

МОРФОЛОГИЯ И СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТИ СПЛАВА АМГ2М, МОДИФИЦИРОВАННОГО ОСАЖДЕНИЕМ Мо В УСЛОВИЯХ ИОННОГО АССИСТИРОВАНИЯ

В данной работе изучали закономерности смачивания и микротвердость поверхности алюминиевого сплава АМГ2М после модифицирования осаждением молибдена в условиях ионного ассистирования. Покрyтия Мо наносились на сплав АМГ2М с использованием резонансного ионного источника вакуумной электродуговой плазмы. Данный источник создает плазму вакуумного электродугового разряда, в которой одновременно генерируются положительные ионы и нейтральная фракция из материала электродов источника ионов. Осаждение молибденового покрытия проводили при ускоряющем напряжении 3, 6, 9, 12 и 15 кВ для ассистирующих ионов Mo^+ и интегральных потоках ионов $1,1 \cdot 10^{17} - 2,1 \cdot 10^{17} Mo^+/cm^2$. Морфология поверхности исходных и модифицированных образцов изучалась, используя атомно-силовую микроскопию в контактном режиме (атомно-силовой микроскоп NT-206, зонды CSC21), а микротвердость с помощью прибора MVDМ8. Смачивание исходных и модифицированных образцов сплава АМГ2М дистиллированной водой определяли по равновесному краевому углу Θ смачивания (РКУС).

Средняя шероховатость исходного образца сплава АМГ2М составляла 34,3 нм и снижалась при увеличении ускоряющего напряжения для ассистирующих ионов Mo^+ до 7,8 нм при $U=12$ кВ и 9,9 нм при $U=15$ кВ. При внедрении сравнимых доз ионов молибдена в образцы сплава с увеличением ускоряющего напряжения значения РКУС также увеличиваются. Исходная поверхность сплава была гидрофильной ($\Theta = 64,8^\circ$) и оставалась гидрофильной после модифицирования при $U = 3$ и 6 кВ. После модифицирования сплава при $U = 9, 12, 15$ кВ для ассистирующих ионов поверхность стала гидрофобной и значение РКУС увеличилось до $\Theta = 98,1^\circ$ при 15 кВ. Относительное изменение микротвердости модифицированных образцов увеличивается на 15 % при $U=9$ кВ и уменьшаются на 6 % при $U=12$ кВ.

КОМПЬЮТЕРНОЕ ПОСТРОЕНИЕ АЛМАЗНОЙ РЕШЕТКИ И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТА УНАРНЫХ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АТОМОВ УГЛЕРОДА В НАНОЧАСТИЦЕ

Ранее выполненная алгоритмизация [1] двухуровневого молекулярно-статистического подхода [2] использована для разработки компьютерной программы по расчету унарных функций распределения молекул в наночастицах с гранецентрированной решеткой [3] и атомов углерода в алмазоподобных сферических наночастицах. С помощью этих функций рассчитаны среднеквадратичные отклонения σ_l атомов углерода от узлов алмазной решетки (табл.) и обнаружена ее пространственная релаксация вблизи границы сферической наночастицы.

Таблица – Зависимость радиусов $b_l = \sqrt{5/3}\sigma_l$ температуры $\theta = kT/\varepsilon$ и номеров l координационных сфер для наночастицы при общем числе сфер $L = 15$ (ε – энергетический параметр потенциала Леннард – Джонса)

θ	l							
	0	2	4	6	8	10	12	ε
0,05	0,041	0,041	0,041	0,076	0,126	0,221	0,789	$1,377 \cdot 10^{-4}$
0,06	0,046	0,046	0,046	0,047	0,192	0,225	0,835	$1,319 \cdot 10^{-4}$
0,08	0,663	0,667	0,669	0,676	0,687	0,695	0,706	$4,697 \cdot 10^{-4}$

Одновременно при релаксации решетки наблюдается делокализация приповерхностных атомов, которая приводит к плавлению наночастиц разных размеров при различных температурах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бокун Г. С. Алгоритмизация двухуровневого молекулярно-статистического подхода для расчета параметров кристаллических наночастиц со структурой алмазной решетки // Труды БГТУ: №6(188). 2016. С. 71-75.
2. Наркевич И. И. Молекулярно-статистическая теория неоднородных конденсированных сред: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.04.14. СПб. 1993. 242 л.
3. Наркевич И. И., Квасов Н. Т., Козич Е. Ю. Двухуровневое молекулярно-статистическое изучение структуры и термодинамических характеристик однородных макроскопических систем и сферических наночастиц // Труды БГТУ: №6(188). 2016. С. 61-65.

**ПЕРЕНОРМИРОВКА ПОТЕНЦИАЛОВ СРЕДНИХ СИЛ
В РАМКАХ ДВУХУРОВНЕВОГО МОЛЕКУЛЯРНО-
СТАТИСТИЧЕСКОГО ПОДХОДА И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ
ДЛЯ РАСЧЕТА СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ
ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ**

В работе используются общие статистические уравнения и формулы, отписывающие структуру и равновесные характеристики макроскопических неоднородных конденсированных многокомпонентных молекулярных систем [1]. Они получены в рамках двухуровневого молекулярно-статистического подхода [2, 3], который базируется на одновременном применении метода коррелятивных функций Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГКИ) и метода условных распределений Л. А. Ротта [4], а также метода термодинамических функционалов плотности [5]. В этом статистическом подходе однокомпонентная система рассматривается как гипотетическая двухкомпонентная система, состоящая из частиц двух сортов $\mu = a, v$. Частицы сорта a – это реальные молекулы рассматриваемой здесь чистой системы, а фиктивные частицы сорта v используются в статистическом подходе для учета вкладов от тепловых вакансий в кристаллическом состоянии вещества. После выполнения перенормировки потенциалов средних сил получена замкнутая система интегральных уравнений для новых потенциалов средних сил $\Phi_{ij}^*(\mathbf{q}_i)$ метода условных распределений для реальных молекул неоднородной системы:

$$\exp\left\{-\frac{1}{\theta}\Phi_{ij}^*(\mathbf{q}_i)\right\} = \frac{n_{ij}^{aa}}{n_i^a} \left\langle \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\Phi(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|)\right\} \right\rangle_j^* + \frac{n_{ij}^{av}}{n_i^a} \left\langle \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\Phi_{ij}^*(\mathbf{q}_i)\right\} \right\rangle_i^*. \quad (1)$$

Здесь $\theta = kT$; k – постоянная Больцмана; T – температура; n_i^a – числа заполнения ячеек объемом ω_i , на которые разделен весь объем V системы, т. е. вероятность того, что молекула находится в ячейке ω_i ($i = 1, 2, \dots, M$); $n_{ij}^{\mu\nu}$ – вероятность того, что частица сорта μ находится в ячейке ω_i , а частица сорта ν – в ячейке ω_j ($\mu, \nu = a, v$); $\Phi(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|)$ – потенциал взаимодействия двух молекул с радиус-векторами \mathbf{q}_i и \mathbf{q}_j ; $\langle \dots \rangle_j^*$ – усреднение по \mathbf{q}_j в ячейке ω_j , выполненное с помощью функции

$$\mathcal{F}_{11}^{\epsilon}(\mathbf{q}_j) = \exp\left\{-\frac{1}{\theta} \sum_{k \neq i, j}^M \Phi_{jk}^*(\mathbf{q}_j)\right\} / \int_{\omega_i} \exp\left\{-\frac{1}{\theta} \sum_{k \neq i, j}^M \Phi_{jk}^*(\mathbf{q}_j)\right\} d\mathbf{q}_j. \quad (2)$$

Решение этой системы определяет унарную и бинарную функции распределения молекул системы, а также ее конфигурационный интеграл Q_N и свободную энергию $F\{n_l\} = -\theta \ln Q_N$:

$$Q_N = \prod_{i=1}^M \omega_i^{-n_i^v} \prod_{\mu} \prod_{i=1}^M (Q_i^{\mu} / n_i^{\mu})^{n_i^{\mu}} \prod_{\mu, \nu} \prod_{i, j, j \neq i}^M (Q_{ij}^{\mu\nu} n_i^{\mu} n_j^{\nu} / (Q_i^{\mu} Q_j^{\nu} n_{ij}^{\mu\nu}))^{n_{ij}^{\mu\nu}/2}, \quad \mu, \nu = a, v. \quad (3)$$

Здесь Q_i^{μ} и $Q_{ij}^{\mu\nu}$ – множители, нормирующие унарные и бинарные функции распределения на единицу.

$$F\{n_l\} = -\theta \left\{ \sum_{i=1}^M \left[n_i \ln Q_i^a - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^M (n_i + n_j - n_{ij}^{aa}) \ln \left\langle \exp \left\{ -\frac{1}{\theta} \Phi_{ij}(\mathbf{q}_i) \right\} \right\rangle_i^* \right] - \sum_{i=1}^M \left[\sum_{\mu=a, v} n_i^{\mu} \ln n_i^{\mu} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \sum_{\mu, \nu=a, v} n_{ij}^{\mu\nu} \ln (n_{ij}^{\mu\nu} / (n_i^{\mu} n_j^{\nu})) \right] \right\}, \quad n_i = n_i^a, \quad n_l = n_l^a. \quad (4)$$

Для конфигурационного интеграла Q_N как функционала от дискретных полей одноячеечных n_i^{μ} и двухячеечных $n_{ij}^{\mu\nu}$ чисел заполнения решена вариационная задача [1] и установлена связь между $n_{ij}^{\mu\nu}$ и n_i^{μ} , которая для однокомпонентной системы при $\mu, \nu = a, v$ имеет следующий вид:

$$n_{ij}^{av} = \frac{1}{2A_{ij}} \left\{ \left[A_{ij} (n_j^v - n_i^v) - 1 \right] + \sqrt{\left[A_{ij} (n_j^v - n_i^v) - 1 \right]^2 + 4n_i^a n_j^v A_{ij}} \right\}, \quad (4)$$

$$\text{где } n_{ij}^{aa} = n_i^a - n_{ij}^{av}, \quad n_{ij}^{vv} = n_j^v - n_{ij}^{av}, \quad n_{ij}^{va} = n_i^v - n_j^v + n_{ij}^{av}, \quad A_{ij} = Q_{ij}^{aa} Q_{ij}^{vv} / (Q_{ij}^{av} Q_{ij}^{va}) - 1. \quad (5)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Наркевич И. И. Метод множителей Лагранжа в проблеме нормировки коррелятивных функций многокомпонентного кристалла с вакансиями // Высокочистые вещества. 1990 г. №1. С. 67-75.
2. Наркевич И. И. Молекулярно-статистическая теория неоднородных конденсированных сред: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.04.14. СПб. 1993. 242 л.
3. Narkevich I. I. Statistical theory of nonuniform systems and reduced description in the density fluctuation theory // Physica. 1982. Vol. 112A. P. 167-192.
4. Ротт Л. А. Статистическая теория молекулярных систем // М.: Наука, 1979. 280 с.
5. Evans R. The nature of the liquid-vapour interface and other topics in the statistical mechanics of nonuniform, classical fluids // Advances in Physics. 1979. Vol. 28, no. 2. P. 143-200.

СОСТАВ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПОНЕНТОВ ПО ГЛУБИНЕ В ПОКРЫТИЯХ, ПОЛУЧЕННЫХ ИОННО-АССИСТИРУЕМЫМ ОСАЖДЕНИЕМ ТИТАНА И КРЕМНИЯ НА СТАЛЬ

В работе для модифицирования поверхности стали применялся метод ионно-ассистируемого осаждения металлов. Этот метод позволяет в процессе осаждения покрытия облучать поверхность формируемой структуры ускоренными ионами материала покрытия. На подготовленные подложки из сталей марок Ст3, 40Х, 45 наносились тонкие пленки на основе титана или титана с кремнием. Ионно-ассистируемое осаждение осуществлялось при ускоряющих напряжениях $U = 15$ кВ. Плотность ионного тока составляла $\sim 3-5$ мкА/см², а интегральный поток ассистирующих ионов – $(1-6) \cdot 10^{16}$ ион/см². В рабочей камере в процессе осаждения поддерживался вакуум при давлении $\sim 10^{-2}$ Па.

Элементный состав и распределение элементов по изучались методом резерфордовского обратного рассеяния (РОР) ионов гелия в сочетании с компьютерным моделированием. Энергия ионов гелия составляла 1,5 МэВ, угол влета 40° , угол вылета 80° , угол рассеяния 145° . Экспериментальные спектры РОР показали, что на поверхности образцов формируется пленка толщиной $\sim 10-15$ нм. Моделирование спектров РОР показало, что в состав пленки входят атомы осаждаемого материала (Ti, Si), атомы Fe, C и O.

Так как на спектрах РОР пики более легких элементов C и O невозможно выделить, то были проведены эксперименты по определению их содержания в пленки. Для установления наличия кислорода был использован метод резонансного упругого рассеяния ионов He на ядрах ^{16}O . Этот метод показал, что в состав пленки входит кислород со слоевой концентрацией $(3,5-4,0) \cdot 10^{16}$ ат/см², а толщина оксидной пленки составляет ~ 5 нм. Наличие углерода в пленки был определялось с помощью резонансной ядерной реакции $^{12}\text{C}(p,\gamma)^{13}\text{N}$. Этот метод показал, что в состав сформированного покрытия входит 15 ат.% углерода, а профиль распределения углерода по глубине покрытия качественно согласовывается с результатами моделирования спектров РОР.

Таким образом, независимыми методами было установлено, что в состав пленок входят атомов осаждаемого материала (10-30 ат.%), атомы Fe из подложки (20-30 ат.%), атомы технологических примесей кислорода (10-30 ат.%) и углерода (5-10 ат.%).

УДК 674.055:621.934(043.3)

В. В. Чаевский, канд. физ-мат. наук, доц. (БГТУ, г. Минск)

N. Višniakov, канд. техн. наук, зав. лаб.

(Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, г. Вильнюс)

СТРУКТУРА И ФАЗОВЫЙ СОСТАВ ZrC-Ni-УДА-ПОКРЫТИЙ ФРЕЗЕРНОГО ИНСТРУМЕНТА

Создание композиционных электрохимических покрытий (КЭП) является одним из актуальных направлений функциональной гальванотехники. Принцип получения КЭП основан на том, что вместе с металлами из электролитов-суспензий сосаждаются дисперсные частицы различных размеров и видов. В последнее время все более активно исследуются композиционные покрытия, модифицированные наноалмазами детанационного синтеза (ультрадисперсными алмазами, УДА) [1]. Включаясь в покрытия, УДА существенно улучшают их эксплуатационные свойства (твердость, износостойкость, коррозионную устойчивость) и придают им новые качества (антифрикционные, каталитические и др.). КЭП никель-алмаз обладают повышенной износостойкостью, коррозионной стойкостью, микротвердостью, которая в 1,5 раза превышает микротвердость никелевых покрытий [2]. Благодаря этому КЭП находят широкое применение в различных отраслях промышленности, в т. ч. в станкостроении. Однако основной недостаток алмазно-гальванического инструмента состоит в том, что никелевая матрица не обладает высокими прочностными характеристиками и износостойкостью. Одним из наиболее эффективных способов обработки поверхности режущих кромок фрезерного инструмента с целью повышения его износостойкости является метод конденсации вещества из плазменной фазы в вакууме с ионной бомбардировкой поверхности (КИБ), существенно увеличивающий эксплуатационные свойства резцов при осаждении на их поверхность покрытий нитридов тугоплавких металлов Ti, Mo, Zr и др.

Поэтому целью данной работы было формирование комбинированных ZrC-Ni-УДА-покрытий на лезвиях ножей из твердого сплава на основе карбида вольфрама WC дереворежущего фрезерного инструмента и исследование их структуры, фазового и элементного состава.

Покрытия Ni-УДА формировались в процессе электроосаждения КЭП из сульфаминовокислых электролитов никелирования на подготовленную поверхность лезвий ножей на экспериментальной установке с применением источника постоянного тока марки DC POWER SUPPLY HY3005-3 при плотностях тока 1,0–24,0 А/дм² в гальваностатическом и импульсном режимах электролиза. Процесс электроосаждения КЭП проводили при повышенной температуре 40–50°C и постоян-

ном перемешивании электролита-суспензии для поддержания частиц УДА во взвешенном состоянии. При формировании комбинированных ZrC-Ni-УДА-покрытий предварительно на поверхность твердосплавных ножей осаждались Ni-УДА-КЭП с последующим напылением ZrC-покрытия по стандартной методике: с предварительной обработкой ионами циркония подложки в вакууме 10^{-3} Па при потенциале подложки -1 кВ и последующим нанесением покрытий при токах горения дуги катода 80–100 А и опорном напряжении -100 В в атмосфере углеводорода CH_4 при давлении 10^{-1} Па. Температура при осаждении соответствовала 400–450°C. Толщина ZrC-покрытий не превышала 1,5 мкм.

Ni-УДА-КЭП имеют характерную структуру, формируемую кластерами наноалмазов, имеющими развитую поверхность. Кластеры наноалмазов в этом случае являются центрами осаждения ионов никеля [3]. Анализ морфологии поверхности Ni-УДА-КЭП посредством энергодисперсионного микроанализатора, показал относительно равномерное распределение углерода. Наличие ZrC-покрытий изменяет морфологию поверхности комбинированного ZrC-Ni-УДА-покрытия.

Показано, что ZrC-Ni-УДА-покрытия обладают рентгеноаморфной мелкокристаллической структурой и содержат отдельные фазы никеля, Ni-УДА, графитоподобные фазы УДА, а также фазу ZrC.

Исследования распределения концентрации элементов поверхности изношенного твердосплавного лезвия ножа с ZrC-Ni-УДА-покрытием подтверждают наличие отдельных фаз на основе углерода, фазы никеля, которые не взаимодействуют с ZrC-покрытием.

В результате формирования комбинированных ZrC-Ni-УДА-покрытий ресурс работы модифицированного фрезерного инструмента при обработке древесно-стружечных материалов увеличивается в 1,5–1,6 раза по сравнению с необработанным инструментом.

ЛИТЕРАТУРА

1 Долматов, В.Ю. Ультрадисперсные алмазы детанационного синтеза: свойства и применение / В.Ю. Долматов // Успехи химии, 2001. – Т. 70, № 7. – С. 687–708.

2 Маслов, А.Л. Разработка композиционных связок импортозамещающего алмазно-гальванического инструмента, упрочненных нанодисперсными порошками алмаза и оксида алюминия: дис. ... канд. техн. наук: 05.16.06 / А.Л. Маслов; НИТУ «МИСиС». – М., 2015. – 145 с.

3 Дисперсное упрочнение наночастицами композиционного электрохимического покрытия / Н.И. Полушин [и др.] // Известия высших учебных заведений. Порошковая металлургия и функциональные покрытия, 2011. – № 4. – С. 49–53.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ГИБРИДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Гибридные системы – это математические модели реальных систем управления, в которых непрерывная динамика находится в комбинации с дискретной, либо наряду с динамическими связями имеют место и алгебраические зависимости, то есть природа описываемого процесса носит неоднородный характер. Гибридные системы широко используются в автомобилестроении, авиастроении, робототехнике и других областях. Классическим примером гибридной системы является система нагрева и охлаждения жилого дома. Печь и кондиционер, наряду с характеристиками теплового потока, формируют систему, которая должна управляться. Термостат управляет этой системой дискретно. Примером гибридной системы может также служить система коммутации, поведение которой описывается конечным числом динамических моделей вместе со сводом правил для переключения среди этих моделей. К важнейшим задачам теории управления для гибридных систем относятся вопросы представления решений, относительной управляемости, задачи устойчивости, стабилизации, модального управления и другие. Виды гибридных систем многообразны. Среди них выделяют ГДР системы (дифференциально-разностные системы), которые описывают процессы, где наряду с динамическими встречаются и алгебраические зависимости, и ГДН системы (дискретно-непрерывные системы), содержащие как непрерывные, так и дискретные переменные:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(kh) + B_1u(t), \quad t \in [kh, (k+1)h), \\ x_2(kh+h) &= A_{21}x_1(kh) + A_{22}x_2(kh) + B_2u(kh), \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Актуальным является рассмотрение гибридных дискретно-непрерывных систем с многомерным (2-D-мерным) временем, состоящих из непрерывной и дискретной составляющих:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t, k) &= A_{11}x_1(t, k) + A_{12}x_2(t, k) + B_1u(t, k), \quad t \in [0, +\infty), \\ x_2(t, k+1) &= A_{21}x_1(t, k) + A_{22}x_2(t, k) + B_2u(t, k), \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

В докладе ставятся задачи исследования свойств гибридных систем с помощью метода пространства состояний. Рассматривается задача стабилизации таких систем.

ОБ АПЕРИОДИЧЕСКОМ УПРАВЛЕНИИ В ЛИНЕЙНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМАХ С ЧИСТЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Несколько десятилетий в качественной теории управления динамическими системами большой популярностью пользуются линейные дескрипторные системы, то есть системы неразрешенные относительно производной, которые часто называют дифференциально-алгебраическими. Список работ, известных автору составляет более 1800 публикаций. В 2013 году издательство Springer провело в Берлине форум посвященный изучению такого класса систем, по результатам которого было опубликовано 6 томов, в том числе три тома обзоров [1].

В дискретном случае такие системы имеют вид

$$Sx(t+1) = Ax(t) + Bu(t), Sx(0) = Sx_0, \det S = 0, \quad (1)$$

с условием регулярности $\det[\lambda S - A] \neq 0$ и выходом

$$y(t) = Cx(t) \quad (2)$$

Условие регулярности обеспечивает существование и единственность решения системы (1)

Говорят, что дискретная система имеет апериодическую реакцию состояния если ее решение зануляется с некоторого момента времени. Если система (1) обыкновенная, т.е. $\det S \neq 0$, то это будет при условии нильпотентности матрицы системы [2]. Если матрица таким свойством не обладает, то возникает задача апериодического управления [3,4], которая является частным случаем задачи модального управления для дискретных систем и состоит в обеспечении нулевых собственных чисел для системы (1), замкнутой линейным регулятором по состоянию либо по состоянию и производной [4].

Если в системе регулирования учитываются эффекты запаздывания [4,5], то в дискретном варианте она записывается в виде

$$Sx(t+1) = Ax(t-h) + Bu(t), \quad \det S = 0, \quad (3)$$

Рассмотрим для данной системы задачу апериодического управления [3,4]. Пусть система является скалярной, т.е. $B = b$, $C = c$. Используя приведение регулярного пучка $\lambda S - A$ к канонической форме Вейерштрасса [1], можно привести систему (3) с выходом (2) к виду

$$x_v(t+1) = Lx_v(t) + b_1u(t) \quad (4)$$

$$Nx_w(t+1) = x_w(t) + b_2u(t) \quad (5)$$

$$y(t) = c_1x_v(t) + c_2x_w(t). \quad (6)$$

При этом задача о финитной наблюдаемости дискретной системы для подсистемы (3) сводится к построению наблюдателя, который при выполнении условий полной наблюдаемости, может обеспечить финитное восстановление начального состояния, так как ошибка восстановления удовлетворяет аperiodическому уравнению [1]. Возможность восстановления второй компоненты начального условия определяется свойствами подсистемы (4) и ее выхода. Аналогично можно рассматривать другие задачи наблюдаемости [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Pichmann A, T. Reis Surveys in Differential-Algebraic Equations I-III Differential-Algebraic Equations Forum. Berlin, Heidelberg, Springer, 2013 - 2015.
2. Гайшун И.В. Синтез нильпотентных линейных дискретных систем над коммутативным кольцом // Вестник Фонда фундаментальных исследований, №1, 2004, С.77 – 79.
3. Asmykovich I.K. Deat-beat control for discrete descriptor systems with delay // Abstracts / The Third Russian-Korean International Symposium on Science and Technology “KORUS^99” / Novosibirsk, 1999.- vol 1.-P 218
4. Асмыкович, И.К. Аperiodическое управление динамическими системами с запаздыванием // Вестник Тамбовского Университета / Сер. Естественные и технические науки, т.8, вып. 3, 2003, С.342.
5. Grispas E., G. Kalogeropoulos, I.G. Stratis On Generalized Linear Singular Delay Systems // Journal of Mathematical Analysis and Applications V. 245, Issue 2, 2000, P. 430–446
6. Asmykovich Ivan K. On Finding Zero Dynamics for Descriptor Systems // 2016 13TH International scientific technical conference on actual problems of electronic instrument engineering (APEIE) – Proceedings APEIE – 2016 In 12 Vol. V. 1 Part 3 Novosibirsk 2016 3-6 октября 2016 г. P.116 – 119.

К ВОПРОСУ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Граничные задачи с пограничным слоем для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (о.д.у.) второго порядка, содержащих малый параметр при старшей производной, представляют собой математические модели с очень сложным характером поведения решений и градиентов решений.

Рассмотрим систему линейных о.д.у. второго порядка с малым параметром, стоящим при старшей производной:

$$Ly(x) = -\varepsilon \ddot{y}(x) + A(x)\dot{y}(x) + B(x)y(x) = f(x), \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

с пограничным слоем и граничными условиями:

$$\begin{aligned} A_1 \dot{y}(\alpha) + A_2 y(\alpha) &= a, \\ B_1 \dot{y}(\beta) + B_2 y(\beta) &= b \end{aligned}$$

в предположении, что $A(x)$, $B(x)$ – произвольные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$, элементы которых кусочно-непрерывные функции от x ; $f: [\alpha, \beta] \rightarrow C^n$; A_1, A_2, B_1, B_2 – известные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$ такие, что прямоугольные матрицы (A_1, A_2) и (B_1, B_2) имеют $\text{rang} [A_1, A_2] = n$, $\text{rang} [B_1, B_2] = n$; $\varepsilon > 0$ – фиксированный малый параметр при старшей производной.

В данной работе для решения такого рода граничных задач предлагается построение одной из модификаций методов унитарной прогонки. Этот метод позволяет заменить исходную граничную задачу решением нескольких задач Коши. К решению задач Коши можно применить богатый набор уже существующих и хорошо развитых методов, в том числе, обладающих, например, D-устойчивостью. При таком подходе удастся обойти процедуру решения систем линейных алгебраических уравнений высокого порядка, что позволяет избежать многих трудностей, связанных с организацией итерационных процессов, и обеспечением их сходимости. В целях упрощения вычислений, регулировки роста решений и градиентов решений в областях пограничных слоев вводятся регулирующие множители. Их можно выбирать, например, в виде диагональных матриц.

Е. И. Ловенецкая, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)
**ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ КВАДРАТИЧНЫХ КРИТЕРИЕВ
 В ЗАДАЧЕ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ О СРЕДНЕМ
 МНОГОМЕРНОГО НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ**

Наблюдение $\mathbf{X} = (X_1; X_2; \dots; X_n) \sim N(\boldsymbol{\mu}; I)$ имеет n -мерное нормальное распределение со средним $\boldsymbol{\mu}$ и единичной матрицей ковариаций I . Рассматривается задача проверки гипотезы $H_0: \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ против альтернативы $H_1: \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$. При байесовском подходе предположение о том, что параметр $\boldsymbol{\mu}$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и независимыми компонентами, приводит к квадратичному критерию со статистикой вида $T_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k X_k^2$, где с большим весом берутся те компоненты наблюдения, математические ожидания которых имеют больше шансов отклоняться от нуля. Отметим, что байесовский критерий максимизирует среднюю мощность, т. е. является наилучшим против сложной альтернативы.

Можно показать также, что квадратичные критерии в данной задаче не только являются наиболее мощными в среднем для сложных альтернатив, но и дают максимум мощности на индивидуальных альтернативах, удовлетворяющих определенному условию асимптотической малости. Так, в [1] доказано, что при проверке гипотезы H_0 против альтернатив вида $H_n: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_n$, где $\boldsymbol{\mu}_n \neq \mathbf{0}$ и удовлетворяют некоторому условию равномерной асимптотической малости, среди критериев со статистикой вида $T_n = \sum_{k=1}^n \lambda_{nk} f(X_k)$, где коэффициенты λ_{nk} удовлетворяют заданному условию равномерной пренебрегаемости, а на функцию f накладываются определенные ограничения четности, гладкости и роста, асимптотически (при $n \rightarrow \infty$) наиболее мощным является критерий с квадратичной функцией $f(x) = x^2 - 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ловенецкая Е. И. Квадратичные критерии для проверки гипотез о среднем многомерного нормального распределения // Труды БГТУ. 2015. №6. Физ.-мат. науки и информатика. – С. 19–23.

Т. Г. Шагова, ассист., магистр физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)
**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ
РАЦИОНАЛЬНЫХ МНЕМОФУНКЦИЙ**

Рассматриваются мнемофункции, порожденные рациональными функциями, т. е. рациональные мнемофункции.

В монографии П. Антосика, Я. Микусинского и Р. Сикорского «Теория обобщенных функций: секвенциальный подход» для квадратов функций δ и $P(1/x)$ приведено следующее равенство:

$$\delta^2 - \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{x} \right)^2 = -\frac{1}{\pi^2} \frac{1}{x^2}.$$

Поскольку выражения δ^2 и $(1/x)^2$ как обобщенные функции не определены, левая часть формулы, очевидно, не имеет смысла, в то время как правая часть равенства определена в пространстве обобщенных функций. Рассмотрим это равенство с позиции мнемофункций. В качестве аппроксимаций δ и $P(1/x)$ возьмем рациональные функции $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ и $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ соответственно.

Подставив асимптотические разложения квадратов мнемофункций $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ и $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ в равенство, видим, что главный член разности следующий:

$$(f_\varepsilon)^2 - \frac{1}{\pi^2} (g_\varepsilon)^2 \approx -\frac{1}{\pi^2} P\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Однако если в качестве аппроксимации δ -функции взять функцию $f_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi(1+x^4)}$, получаем:

$$(f_{1\varepsilon})^2 - \frac{1}{\pi^2} (g_\varepsilon)^2 \approx \frac{3\sqrt{2}-2}{2} \cdot \frac{\delta}{2\pi\varepsilon} - \frac{1}{\pi^2} P\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

т. е. δ -функция с бесконечно большим коэффициентом. Следовательно, с точки зрения теории мнемофункций выполнимость данного равенства зависит от способа аппроксимации обобщенных функций. Для того чтобы это равенство выполнялось, необходимо аппроксимировать δ и $P(1/x)$ рациональными функциями, удовлетворяющими равенству:

$$\int f^2(x) dx = \frac{1}{\pi^2} \int g^2(x) dx.$$

${}_2F_2$ -ФУНКЦИЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрим ${}_2F_2$ -функцию гипергеометрического типа, определенную для комплексных значений $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ степенным рядом

$${}_2F_2(a, b; c, d; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k z^k}{(c)_k (d)_k k!}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

где $(a)_k$ – символ Похгаммера, определяемый равенствами

$$(a)_k = a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (a)_0 = 1.$$

В частности, ядро преобразования по индексу, рассмотренного в работе [1], представляет собой линейную комбинацию функции ${}_2F_2(1/2, 1; 1-i\tau, 1+i\tau; 2x)$ и функций Бесселя $I_{\pm i\tau}(x)$, определяемых на основе вырожденного гипергеометрического ряда ${}_0F_1(1 \pm i\tau; x)$.

В настоящей работе даны условия существования, исследовано аналитическое продолжение и получены асимптотические оценки в нуле и на бесконечности функции (1). Метод исследования основан на представлении функций гипергеометрического типа через контурные интегралы Меллина – Барнса и применении для них соответствующих известных результатов [2], [3].

Функция (1) эквивалентно определяется интегралом Меллина – Барнса

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)\Gamma(d-s)} z^{-s} ds = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} {}_2F_2(a, b; c, d; -z)$$

для всех z , таких что $|z| < \infty$ и $|\arg z| < \pi$, где L – специально выбранный замкнутый контур, проходящий через бесконечно удаленную точку и разделяющий полюсы гамма-функций $\Gamma(s)$ и $\Gamma(a-s)$, $\Gamma(b-s)$. При этом предполагается, что параметры $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ выбраны так, что гамма-функции подынтегрального выражения имеют простые полюсы. В противном случае, нужны дополнительные исследования для раскрытия неопределенностей в логарифмических случаях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yakubovich S.B., Gusarevich (Yarotskaya) L.D. On the non-convolution transformation with the Macdonald type kernel function // *Fract. Calc. and Appl. Analysis.* – 1998. – Vol. 1, № 3. – P. 297 – 309.

2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М., «Наука», 1973. – 295 с.

3. Маричев О.И. Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). – Мн., «Наука и техника», 1978. – 312 с.

УДК 517.948

С. В. Пономарева, доц., канд. физ.-мат. наук (БГУ, г. Минск);
О. Н. Пыжкова, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Будем рассматривать уравнения

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x c(x-t)(x-t)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t} \phi(t) dt = f(x), \quad (a < x < b < \infty) \quad (1)$$

со степенно-логарифмическими ядрами с действительными степенями логарифмов на отрезке $[a, b]$ действительной оси $-\infty < a < b < \infty$, $\gamma > b - a$ в пространстве абсолютно непрерывных на отрезке функций $AC[a, b]$. Для упрощения рассуждений ограничимся в данной работе случаем абсолютной непрерывности функции $c(x)$ и $0 < \alpha < 1$, $\beta > -1$.

Для того чтобы представить решение уравнения (1) в терминах правой части, введем обозначение интегрального оператора типа свертки по аналогии с целочисленным случаем степени логарифма (см.[1, с.483]):

$$(J_{\gamma, \alpha, \beta}^{a+} f)(x) = \frac{1}{\gamma} \int_a^x \mu_{1-\alpha, -\beta}(x-t) f(t) dt \quad (2)$$

Оператор (2) сохраняет класс абсолютно непрерывных на отрезке функций и выполняется следующая

Теорема. Пусть $f(x) \in AC_0[a, b]$, $c(x) \in AC[a, b]$. Тогда уравнение (1) разрешимо в $L_p(a, b)$, $1 \leq p \leq \infty$ и его единственное решение дается формулой

$$\varphi(x) = (c_0 E + T_\psi)^{-1} (J_{\gamma, \alpha, \beta}^{a+} f')(x)$$

Данная формула представляет собой расширение результата, полученного в [2] на нецелый случай степени логарифма.

Описание и свойства специальных функций: $\Gamma(z)$, $\mu_{\alpha,\beta}(x)$, и оператора T_ψ можно найти, например, в [1] и [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Пономарева, С.В. К вопросу о построении решений интегральных уравнений первого рода в некоторых пространствах / Физико-математические науки : тезисы 80-й науч.-техн. конференции, Минск, 1-12 февраля 2016 г. / УО БГТУ. – Минск: БГТУ, 2016. – с. 29-30.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – М.: Наука, 1965-1967. – Т. 3: Эллиптические и автоморфные функции. – 1967. – 299 с.

УДК 532.517

А.М. Волк, доц., канд. техн. наук (БГТУ, г. Минск)

ГИДРОДИНАМИКА ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ НА ПРОНИЦАЕМОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Результаты исследований пленочного течения имеют важное техническое значение. Данное движение жидкости реализуется в сепарационных, фильтровальных, тепло- и массообменных, газожидкостных аппаратах и реакторах. Гидродинамика пленочных течений используется при изучении ряда физико-химических процессов, для расчета оптимальных режимов работы технических устройств. Анализ взаимодействия газожидкостных сред показывает, что перспективным является способ использования закрученного потока газа, который позволяет значительно повысить эффективность процессов разделения фаз в тепломассообменных установках.

Гидродинамика пленочного течения на проницаемых поверхностях важна для исследования процессов фильтрации суспензий, отвода жидкой фазы в процессе сепарации газожидкостных потоков, при массообмене. В большинстве случаев проницаемые поверхности имеют цилиндрическую форму.

Отсос используется также для управления пограничным слоем и повышает устойчивость ламинарного режима движения.

Математическое моделирование процессов взаимодействия фаз в поле массовых сил закрученных потоков, при пленочном движении жидкости на проницаемых цилиндрических поверхностях в процессах разделения фаз и тепломассообмене позволяет, сочетая теоретические и экспериментальные исследования, определить оптимальные режимы движения, соотношение между геометрическими параметрами и нагрузками по фазам.

Рассмотрена задача о стационарном течении тонкой жидкой пленки по внутренней поверхности проницаемого цилиндра под воздействием закрученного газового потока. Жидкость считается линейно-вязкой и несжимаемой, течение ламинарным и осесимметричным. Основными расчетными характеристиками являются: скорость оттока жидкой фазы, толщина пленки, давление на проницаемой поверхности.

Теоретически исследовано пленочное движение жидкой фазы под воздействием массовых сил поля тяжести и закрученного газового потока на поверхности проницаемого цилиндра. Получены дифференциальные уравнения движения пленки, найдены точные решения для составляющих скорости при условии прилипания пленки на поверхности проницаемого цилиндра и равенстве касательных напряжений на границе раздела фаз. Найдены толщина пленки и ее составляющие скорости, исследовано влияние скорости оттока жидкой фазы на гидродинамические характеристики пленочного движения. Полученная математическая модель позволяет определить режим движения пленки и учитывать ее гидродинамику при исследовании процессов фильтрации и тепломассообмена.

УДК 517.982.4

Е. В. Терешко, ассист., магистр физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)
**К ВОПРОСУ О НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЯХ
 С ДЕЛЬТА-ОБРАЗНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Рассмотрим уравнение $u' - \delta u = 0$. Рассмотрим последовательность $\delta_n(t) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n t^2}$, которая сходится к $\delta(t)$ в пространстве $D'(\mathbf{R})$.

В пространстве новых обобщенных функций Егорова решением данного уравнения является $u = (u_1, u_2, u_3, \dots)$, где $u_n \in C^\infty(\mathbf{R})$, которые удовлетворяют уравнению $u_n' - \delta_n u_n = 0$.

Будем искать решение этого уравнения.

$$\frac{du_n}{u_n} = \delta_n ds, \ln|u_n| = - \int_t^{+\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n s^2} ds + \ln c, c > 0$$

$$u_n(t) = c e^{-\int_t^{+\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n s^2} ds}, c \in \mathbf{R}$$

Решением данного уравнения в пространстве обобщенных функций Егорова является последовательность:

$$u = c \left(e^{-\int_t^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{\pi}} e^{-s^2} ds}, e^{-\int_t^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2s^2} ds}, e^{-\int_t^{+\infty} \sqrt{\frac{3}{\pi}} e^{-3s^2} ds}, \dots \right); \langle u_n, \varphi \rangle =$$

$$c e^{-1} \int_{-\infty}^0 \varphi(t) dt + c \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt;$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1}, x < 0; \\ 1, x \geq 0 \end{cases}; u_n \rightarrow cf \text{ в } D'(\mathbf{R}).$$

Заметим, что решение уравнения зависит от выбора последовательности δ_n . Рассмотрим то же уравнение $u_n' - \delta_n u_n = 0$, только в качестве последовательности δ_n возьмем $\delta_n(t) = \frac{n}{\pi(n^2 t^2 + 1)}$.

$$u_n(t) = c e^{-\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arctg} nt}{\pi}}, c \in \mathbf{R}$$

Решением данного уравнения в пространстве обобщенных функций Егорова является функция:

$$u = c \left(e^{-\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arctg} t}{\pi}}, e^{-\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2t}{\pi}}, e^{-\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 3t}{\pi}}, e^{-\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 4t}{\pi}}, \dots \right)$$

$$\langle u_n, \varphi \rangle = c e^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\operatorname{arctg} nt}{\pi}} \varphi(t) dt \rightarrow c e^{-1} \int_{-\infty}^0 \varphi(t) dt + \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1}, x < 0; \\ 1, x \geq 0 \end{cases}; u_n \rightarrow cf \text{ в } D'(\mathbf{R})$$

Получили, что при данных аппроксимациях функции δ решение сходится к одной и той же функции cf .

ЛИТЕРАТУРА

1. Антоневи́ч А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения, Мн., БГУ, 2006 – 430 с.

**МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ
СИСТЕМОЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА**

Рассмотрим линейную систему нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 \dot{x}(t-h) + bu(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

где $A_i, i=0,1,2$ - постоянные (2×2) -матрицы, b - ненулевой 2-вектор, $h > 0$ - постоянное запаздывание. Не ограничивая общности, считаем $b' = [0, 1]$.

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = q'_{00} x(t) + \sum_{i=0}^L \sum_{j=1}^M q'_{ij} x^{(i)}(t-jh) + \int_{-h}^0 g'(s) x(t+s) ds, \quad (2)$$

где q_{00}, q_{ij} ($i=0, \dots, L, j=0, \dots, M$) - 2-векторы; $g(s), s \in [-h, 0]$ - непрерывная 2-вектор-функция, $x^{(i)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^i}{dt^i} x(t), x^{(0)}(t) \equiv x(t)$.

Характеристическое уравнение системы (1) имеет следующий вид:

$$\det [A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_2] \equiv \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \tilde{\alpha}_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} = 0, \quad (3)$$

где числа $\tilde{\alpha}_{ij}$ вычисляются как функции матриц $A_i, i=0, 1, 2$, в частности $\tilde{\alpha}_{00} = \det A_0, \tilde{\alpha}_{20} = 1, \tilde{\alpha}_{22} = \det A_2$.

Определение. Система (1) модально управляема регулятором вида (2), если для любых наперёд заданных чисел $\alpha_{ij}, i=0, 1, 2, j=0, 1, 2, \alpha_{20} = 1$, найдется регулятор (2) такой, что характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (2) имеет вид (ср. с (3)):

$$\det [A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_2 + bU(\lambda)] \equiv \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \alpha_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} = 0,$$

где $U(\lambda)$ - регулятор (2) в частотной области.

Введем (2×2) -матрицы:

$$A(\lambda) = A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h},$$

$$W(\lambda) = [A(\lambda)b, b], \lambda \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим слабо циклический случай:

$$\det W(\lambda) = c(\gamma_0 + e^{-\lambda h}), (c \neq 0).$$

Матрица $A(\lambda)$ в этом случае имеет следующий вид:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} + \beta_2 \lambda e^{-\lambda h} & c(\gamma_0 + e^{-\lambda h}) \\ a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

где $\beta_i, i = 0, 1, 2, \gamma_0$ – некоторые действительные числа; $a_j(\lambda), j = 1, 2$ – квазиполиномы:

$$a_i(\lambda) = a_{i0} + a_{i1} e^{-\lambda h} + a_{i2} \lambda e^{-\lambda h},$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}; i = 1, 2, j = 0, 1, 2$.

Возможны два случая:

- i) $\beta_2 \gamma_0 + 1 = 0$,
- ii) $\beta_2 \gamma_0 + 1 \neq 0$.

Теорема 1. В случае i) система (1) модально управляема регулятором вида (2) тогда и только тогда, когда $\beta_0 - \beta_1 \gamma_0 \neq 0$.

Рассмотрим случай ii). Введем обозначения:

$$\xi = \frac{\beta_0 - \beta_1 \gamma_0}{1 + \beta_2 \gamma_0},$$
$$\delta_1 = \gamma_0 + e^{-\xi h}.$$

Теорема 2. Для того, чтобы система (1) в случае ii) была модально управляема регулятором вида (2), необходимо и достаточно выполнения условия $\delta_1 \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Якименко А. А. Модальное управление одной запаздывающей системой // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–7.

Е. В. Устилко, ассист., магистр физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

К ВОПРОСУ О СИНТЕЗИРУЕМОМ ОПИСАНИИ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ НА ЯЗЫКЕ VHDL

Рассматриваются проблемы, возникающие при составлении описания искусственной нейронной сети на языке VHDL с целью последующего синтеза.

Важнейшей особенностью искусственных нейронных сетей является тот факт, что нейроны функционируют параллельно, тем самым обеспечивая большую производительность систем, использующих нейронные сети для решения своих задач. В аппаратных моделях сохраняется возможность параллельных вычислений. Поэтому для описания таких сетей целесообразно использовать язык VHDL, предоставляющий не только средства моделирования, но и средства синтеза.

Для подготовки VHDL модели нейронной сети был использован структурный стиль описания, при котором весь процесс обработки предстает в виде совокупности параллельно работающих компонентов. Компоненты можно вкладывать друг в друга, образуя иерархически организованную сеть. Минимальной структурной единицы обработки информации в VHDL модели является нейронный элемент. Он включает блок суммирования и блок нелинейного преобразования, определяемый функцией активации.

Реализация этой функции при проектировании аппаратной модели в общем случае представляет собой сложную проблему. Необходимо сохранить баланс между точностью полученной модели, количеством затраченных ресурсов, а также полученной производительностью системы. На практике чаще всего используют комбинацию следующих методов: аппроксимация полиномами низкого порядка и небольшие таблицы поиска (look-up table).

Следующая проблема возникает, если модель искусственной нейронной сети использует данные типа real. Как известно, операции над этим типом не поддерживаются при синтезе. Поэтому для того, чтобы в дальнейшем получить синтезируемое описание нейронной сети, необходимо перейти к модели с целочисленными параметрами. Для этого требуется определить количество знаков после запятой так, чтобы сохранилась необходимая точность вычислений, но при этом полученная производительность системы не снизилась.

УДК 517.966

В.В. Игнатенко, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск);

В.В. Крахотко, доц., канд. физ.-мат. наук;

Г.П. Размыслович, канд. физ.-мат. наук (БГУ, г. Минск)

К ВОПРОСУ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫМИ РЕГУЛЯТОРАМИ

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x - n$ – вектор состояния, $A - n \times n$ – матрица, b, x_0 – заданные n -векторы, u – скалярное управление.

Определение 1. (Калмана). Система (1) называется управляемой, если для любого начального состояния x_0 найдутся момент времени $t_1, 0 < t_1 < +\infty$ и кусочно-непрерывное управление $u(t), 0 \leq t \leq t_1$ такие, что состояние системы (1), соответствующее этому управлению, удовлетворяет условию $x(t_1) = 0$.

В классическом определении управляемости (по Калману) входной сигнал выбирается из класса кусочно-непрерывных функций на всем интервале управления. Представляет интерес возможность управления системой с помощью функций из более узкого класса, который легко технически реализуем.

Мы в качестве управления $u(t)$ будем рассматривать выход

$$u(t) = c^T y(t) \quad (2)$$

линейной сингулярной системы

$$D_0 \dot{y}(t) = D y(t), \quad y(t_0) = y_0 \quad (3)$$

(здесь: $c, y, y_0 \in R^n, D, D_0 - n \times n$ – матрицы, $\det D_0 = 0$), которую назовем сингулярным динамическим регулятором или просто динамическим регулятором [1]. При управлении, с помощью динамического регулятора, достаточно задать только начальное состояние регулятора, а не строить управление на всем интервале.

Определение. Система (1) называется управляемой динамическим регулятором (4), если найдется момент времени $t_1, 0 < t_1 < +\infty$ такой, что для любого начального состояния x_0 найдется начальное состояние y_0 регулятора (3), при котором решение системы (1), соответствующее управлению (3), удовлетворяет условию $x(t_1) = 0$.

Считаем в дальнейшем, что система (3) является регулярной, т. е. найдется число $\lambda_0 \in C$ такое, что $\det(\lambda_0 D_0 - D) \neq 0$ и кроме этого матрицы D_0 и D удовлетворяют условию $D_0 D = D D_0$. Последнее условие

не является ограничением для регулярной системы (3), ибо это условие выполняется [2] после умножения системы (3) на матрицу $(\lambda_0 D_0 - D)^{-1}$.

Доказан неявный критерий управляемости системы (1) сингулярным динамическим регулятором (3).

Теорема 1. Система (1) управляема сингулярным динамическим регулятором (3) тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\text{rank} \left(\int_0^{t_1} e^{-A\tau} b c^T e^{(D_0^d D)\tau} D_0 D_0^d d\tau \right) = n.$$

Из теоремы 1 получен параметрический критерий управляемости.

Теорема 2. Для управляемости системы (1) сингулярным динамическим регулятором (3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\text{rank} [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] = n, \quad (4)$$

$$\text{rank} [c^T D_0^d D_0, c^T D_0^d K D_0, \dots, c^T D_0^d K^{n-1} D_0] = n, \quad (5)$$

где $K = D D_0^d$.

Условие (4) означает, что система (1) управляема по Калману. Условие (5) означает, что сингулярный динамический регулятор (3) наблюдаем по выходу (2) [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Игнатенко В.В. Управляемость динамических систем с помощью регулятора. / Игнатенко В.В. // Вестник БГУ. Сер.1 «2. 1976. С.56 – 58.
2. Campbell S.L. Applications of the Drazin inverse to Linear systems of Differential equations with Singular constant Coefficients. / Campbell S.L., Meyer C.D., Rose N.J. // SIAM J. Appl. Math., V.31. № 3. 1976. P. 411 – 425.
3. Игнатенко В.В. К проблеме наблюдаемости непрерывных дифференциально-разностных систем. / В.В.Игнатенко, В.В. Крахотко, Г.П. Размыслович // Материалы Международной научно-технической конференции «Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов». - Мн: БГТУ, 2012. - с. 262-263.

Джумабаева Д.Г., канд. физ.-мат. наук, доц.;
Бургумбаева С.К., PhD, доц. (ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, г.Астана, Казахстан)

ФОРМИРОВАНИЕ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ КАЗАХСТАНА МЕТОДОМ ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ ИГР

В последние десятилетия мировые экономико-хозяйственные и валютно-финансовые связи стали приобретать глобальный масштаб. В соответствии с этим возникает проблема разработки таких экономико-математических инструментов, которые бы учитывали не только особенности рынка ценных бумаг стран с переходной экономикой, но и могли бы быть совместимыми с уже имеющимися на финансовом рынке моделями оценки финансовых активов. Одним из эффективных методов решения таких проблем является метод теории матричных игр, где одним из игроков является инвестор, а другим – непосредственно сам рынок ценных бумаг [1,2].

На сайте казахстанской фондовой биржи KASE (Kazakhstan Stock Exchange) листингуется относительно большое количество компании. Среди которых можно выделить наиболее популярные акционерные общества. Для примера возьмем акции 7 компаний: АО «Разведка Добыча «КазМунайГаз» (RDGS), АО «Казкоммерцбанк» (KKGB), АО «Казактелеком» (KZTK), KAZ Minerals PLC (Казакхмыс) (GB_KZMS), АО «Цеснабанк» (TSBN), АО «Банк ЦентрКредит» (CCBN), АО «Народный сберегательный банк Казахстана» (HSBK).

Представим модель конфликта, покупку того или иного вида имеющихся акций, в виде матричной игры. На каждый месяц отдельно составляется платежная матрица состояния рынка. Составим таблицу следующим образом: результаты рынка запишем в столбцы, стратегии инвестора в строки. Для определения стоимости акции, к процентным изменениям предыдущего периода актива, к основной сумме добавляется 1. Таким образом, акции больше 1 для инвестора означают выигрыш, акции меньше 1 для инвестора означают потерю.

Таблица 1 - Платежная матрица января месяца

Акции	Состояние рынка				
	2011	2012	2013	2014	2015
HSBK	1,006135	0,972222	1,052381	0,805556	0,977778
KZTK	0,961111	0,920213	0,838095	0,964286	1,256198
GB_KZMS	0,923077	0,898876	0,517391	0,856410	0,952381
CCBN	1,036096	0,966667	1,160000	0,964467	1,065089
KKGB	1,040625	1,050000	1,066667	1,020000	0,964286
RDGS	0,964444	0,971429	1,035714	1,006250	0,978571
TSBN	1,063830	1,017341	1,034884	0,482385	1,032086

Аналогично были созданы 12 платежных матриц на каждый месяц. Исследуем относительную норму доходности по портфелю акций. Исключая последний год периода 2011-2015, расчеты минимального уровня риска и максимального дохода от акций 2011-2014 годов: на каждый месяц методом теории игр получены стратегии оптимальных векторов

Таблица 2 - Вектор стратегии

2011-2014	HSBK	KZTK	GB_KZMS	CCBN	KKGB	RDGS	TSBN
Январь	0	0	0	0,28	0,41	0,31	0
Февраль	0,22	0	0,23	0	0	0	0,55
Март	0	0	0,40	0,42	0,18	0	0
Апрель	0	0,15	0,41	0,36	0,08	0	0
Май	0	0	1	0	0	0	0
Июнь	0,05	0,12	0,38	0,34	0,08	0,03	0
Июль	0,28	0,07	0,28	0,29	0,06	0,02	0
Август	0,18	0,10	0	0,28	0,44	0	0
Сентябрь	0	0,19	0,05	0,29	0,44	0,03	0
Октябрь	0,59	0	0	0,03	0	0	0,38
Ноябрь	0	0,10	0,10	0,15	0,24	0,01	0,40
Декабрь	0	0	0,69	0	0	0	0,31

Интерпретируем произошедшие изменения стратегий. Инвестор для наиболее приемлемого поведения воспользуется следующей стратегией: в феврале покупка акции HSBK увеличит доход на 22% от всей суммы; в течение трех лет доход от акции TSBN остается относительно неизменной, акции GB_KZMS выросли до 23%; в марте акции трех компаний АО «Kaz Minerals PLC», АО «Банк ЦентрКредит», АО «Казкоммерцбанк» остаются наиболее выгодными покупками и так далее по каждому месяцу.

Использование проделанных расчетов и полученных результатов при осуществлении профессиональной деятельности на рынке ценных бумаг найдут применение в практической работе по определению оптимального решения в конфликтных ситуациях, в частности: для выбора эффективных стратегий в биржевой игре и оптимального поведения инвесторов, для рационального управления финансами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баринов Э.А., Хмыз О.В. Рынки: валютные и ценных бумаг. - М., 2001.
2. Берзон Н.И. Фондовый рынок. - М.: Вига-Пресс, 1998.

УДК 538.9.

С.Г. Карстина, проф., д-р физ.-мат.наук;
А.А. Маратбаев, магистрант
(КарГУ им. академика Е.А. Букетова, г.Караганда)

САМООРГАНИЗАЦИЯ В МОЛЕКУЛЯРНЫХ ДИСПЕРСНЫХ МАТРИЦАХ ПРИ ОБМЕННО-РЕЗОНАНСНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ

В дисперсных матрицах при изменении геометрических, термодинамических, статистических и кинетических параметров возможны самоорганизация и согласованное поведение системы в целом. Изучение этих процессов представляет собой одну из актуальных задач современного материаловедения. В связи с этим в настоящей работе в широком диапазоне температур ($T=157\text{K}\div 293\text{K}$) исследовано влияние процессов переноса энергии электронного возбуждения и аннигиляции на самоорганизацию неоднородной молекулярной матрицы, представляющей собой адсорбированные на фрактальной поверхности широкопористого кремнезема молекулы красителя эритрозина (Эр) и ароматического углеводорода антрацена (Ан). Все спектрально-кинетические измерения выполнены на установке лазерного фотолиза. Начальная поверхностная концентрация молекул красителя в исследуемых образцах выбиралась равной $7,4\cdot 10^{-4}$ $1/\text{нм}^2$, что соответствовало монослойному покрытию поверхности. Поверхностная концентрация молекул антрацена изменялась от $3,9\cdot 10^{-1}$ $1/\text{нм}^2$ до $3,9\cdot 10^{-2}$ $1/\text{нм}^2$. При выбранных поверхностных концентрациях соотношение степеней покрытия поверхности сорбента молекулами составляло Эр и Ан составляло 1:1, 1:4, 1:40. Проведенные эксперименты показали, что наиболее резкое изменение скоростного коэффициента аннигиляции K в структурно-неоднородной молекулярной матрице (параметр локальной неоднородности $h \neq 0$), рассчитываемого на разных временных участках экспериментальных кинетических зависимостей наблюдается на начальных временах. При этом скорость K увеличивается с увеличением параметра h , на значение которого оказывает влияние температура матрицы и эффективность протекающих на поверхности процессов. С понижением температуры матрицы параметр h стремится к некоторому постоянному значению, что указывает на образование устойчивых локальных структур, фрактальные свойства которых не изменяются в результате переноса энергии электронного возбуждения. Достижение предельного значения $h=1$ на больших временах свидетельствует об образовании на поверхности микрокластеров.

Результаты эксперимента сопоставлялись с данными компьютерного моделирования, проводимого с помощью вероятностного клеточного автомата и решеточной модели. При моделировании расстояние между узлами решетки принималось равным радиусу взаимодействия для процессов обменно-резонансного переноса энергии. Влияние топологии поверхности и окружения на процессы межмолекулярного взаимодействия учитывались заданием начального распределения реагентов (хаотическое и мультифрактальное) по поверхности и вероятностью взаимодействия. Анализ кинетики парных взаимодействий в модели межмолекулярных взаимодействий проводился через дискретные промежутки времени, задаваемые числом итераций N . Каждая итерация, в среднем, соответствует времени между актами взаимодействия. Изменение характера распределения взаимодействующих частиц по поверхности в результате межмолекулярных взаимодействий анализировалось по изменению функции распределения частиц по ячейкам заданного размера методом мультифрактального анализа (МФА).

Компьютерное моделирование и расчет фрактальных размерностей методом мультифрактального анализа (МФА) позволили провести анализ изменения фрактальности молекулярных кластеров при переносе энергии электронного возбуждения и аннигиляции взаимодействующих молекул. В качестве критерия самоорганизации структуры и степени нарушения симметрии использован параметр упорядоченности Δ . Значение $\Delta < 0$ характеризует отсутствие упорядоченности в моделируемой матрице. Полученные временные зависимости Δ позволяют сделать вывод, что перенос энергии между взаимодействующими молекулами и аннигиляция приводят к увеличению параметра упорядоченности. При этом на больших временах параметр Δ достигает некоторого постоянного значения и далее не изменяется. Данная тенденция наиболее ярко проявляется в менее упорядоченных матрицах при увеличении концентрации одного из сортов взаимодействующих молекул. Увеличение температуры исследуемых образцов не приводит к существенным изменениям численных значений параметра упорядоченности, но сокращает время насыщения. Наблюдаемые временные зависимости Δ хорошо согласуются с результатами расчета на основе экспериментальных данных параметра неоднородности h .

Таким образом, на основе полученных результатов установлено, что процессы переноса энергии в структурно-неоднородной молекулярной матрице приводят к образованию на поверхности устойчивых фрактальных структур и самоорганизации всей системы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПАРАМЕТРОВ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ И СПОНТАННОЙ ДЕФОРМАЦИИ В СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКАХ ПРИ ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ $m3m - 4mm$

Из условия сохранения макросимметрии параэлектрической фазы в полидоменном кристалле предложен метод определения температурных зависимостей параметров кристаллической решетки сегнетоэлектриков при структурном фазовом переходе из кубической в тетрагональную фазы. На основе известных параметров решетки при двух произвольных температурах в каждой фазе, получено кубическое уравнение, которое имеет три аналитических решения для фазовых переходов второго рода или гипотетических фазовых переходов второго рода. Анализ полученных решений сделан на примере BaTiO_3 [1]

Получено, что температурная зависимость параметров тетрагональной решетки соответствует одному из полученных решений и зависит от температуры гипотетического фазового перехода второго рода ($t_0 = 136,4^\circ \text{C}$) (рис.1).

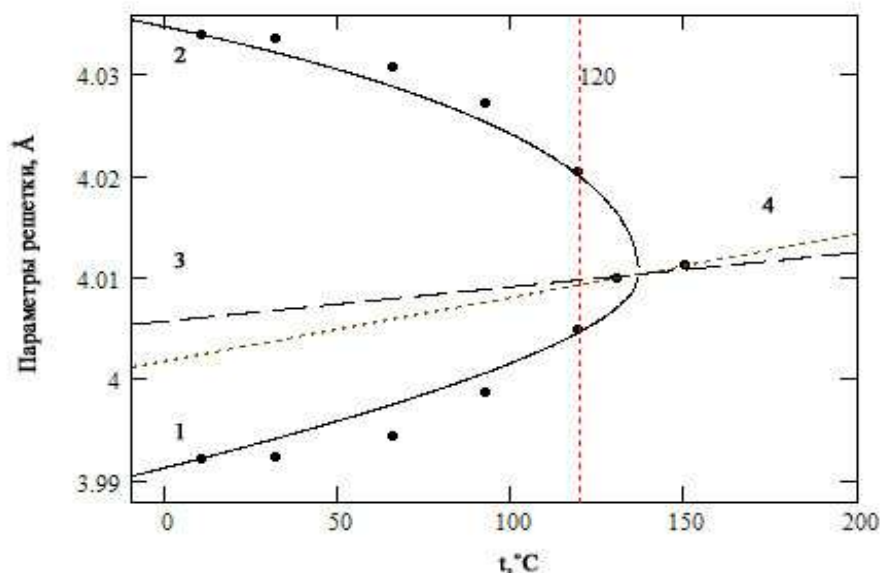


Рисунок 1 - Температурная зависимость параметров решетки $a_t(1)$, $c_t(2)$, $a_u(3)$, $a_c(4)$ в BaTiO_3 .

Из этих зависимостей определены компоненты тензора спонтанной деформации [2] (рис. 2)

$$E_s(t) = \begin{pmatrix} e_{11}^s(t) & 0 & 0 \\ & e_{11}^s(t) & 0 \\ & & e_{33}^s(t) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $e_{11}^s(t) = \frac{e_{11}(t) - e_{33}(t)}{3}$; $e_{33}^s(t) = \frac{2}{3}(e_{33}(t) - e_{11}(t))$; $e_{11}(t) = \frac{a_t(t)}{a_c} - 1$;
 $e_{33}(t) = (c_t(t)/a_c(t) - 1)$.

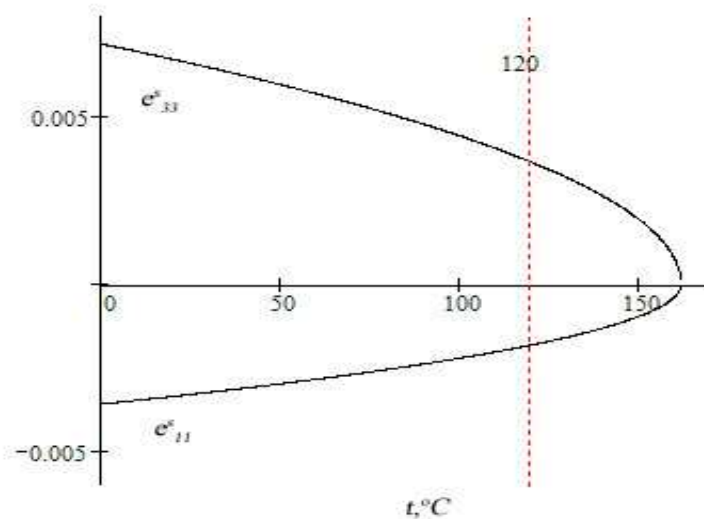


Рисунок 2 - Температурная зависимость спонтанной деформации

Сделан вывод, что гипотетический фазовый переход второго рода определяет величину параметров решетки тетрагональной фазы и ее зародышей. Структурный фазовый переход первого рода реализуется в кристалле, когда удельная плотность новой и индуцированной фаз в зародыше равна удельной плотности исходной фазы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kay H.F, Vousden P. Symmetry Changes in Barium Titanate at Low Temperatures and their Relation to its Ferroelectric Properties // Philos. Mag. ser.7. V.40. P. 1019–1039 (1949).

2. K. Aizu. Determination of state parameters and formulation of spontaneous strain for ferroelastics. *Phys. Soc. Japan.* **28**, 706–716 (1970).

**РЕШЕНИЯ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО СТЕПЕННОЙ
ОСОБЕННОСТЬЮ В ЯДРЕ**

Пусть $\Gamma = \{x: a < x < b\}$ – множество точек на вещественной оси. На Γ рассмотрим модельное интегро-дифференциальное уравнение

$$y' + \int_a^x \left[P_0 + P_1 \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \frac{y(t)}{(t-a)^2} dt = f(x), \quad (1)$$

где P_0, P_1 – заданные постоянные числа, $f(x)$ – заданная функция на Γ , $y(x)$ – искомая функция.

Проблеме исследования интегро-дифференциальных уравнений вольтеровских типов с сингулярным и сверхсингулярным ядром и проблеме выяснения граничных задач для таких уравнений посвящены работы [1-5]

Прежде всего через $C'_x(\overline{\Gamma})$ обозначим класс таких функций, которые имеют непрерывное производное первого порядка и в точке $x = a$ обращаются в нуль с асимптотическим поведением

$$y(x) = o\left[(x-a)^{\gamma_1}\right], \quad \gamma_1 > 2,$$

и решение интегро-дифференциального уравнения (1) будем искать в этом классе.

Легко можно видеть, что однородное уравнение (1) соответствует характеристическое уравнение

$$\lambda + \frac{P_0}{\lambda-1} + \frac{P_1}{\lambda-2} = 0, \quad (2)$$

В зависимости от корней характеристического уравнения (2) решение уравнения (1) получено в явном виде.

Например, имеет место следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (1) коэффициенты такие, что корни характеристического уравнения (4) являются вещественными и разными и $2 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Пусть, кроме того, функция $f(x)$ при $x \rightarrow a$ обращается в нуль с асимптотическим поведением

$$f(x) = o\left[(x-a)^{\gamma_2}\right], \quad \gamma_2 > \lambda_3 - 1.$$

Тогда однородное уравнение (1) имеет три линейно независимых решения, а неоднородное уравнение (1) в классе функций $y(x) \in C'_x(\overline{\Gamma})$ разрешимо и его общее решение содержит три произвольных постоянных, которое даётся по формуле

$$y(x) = (x-a)^{\lambda_1} c_1 + (x-a)^{\lambda_2} c_2 + (x-a)^{\lambda_3} c_3 + \frac{1}{\Delta_0 P_1} \int_a^x \sum_{i=1}^3 \Delta_i (\lambda_i - 2)(\lambda_i - 1) \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\lambda_i} f(t) dt,$$

где c_1, c_2, c_3 - произвольные постоянные числа.

Замечание 1. Найдено случаи, когда общее решение неоднородного уравнения (1) содержит две произвольные постоянные; одну произвольную постоянную или имеет только единственное решение.

Замечание. Подобные утверждения получены и в случае, когда корни характеристического уравнения (2) являются вещественно равными или комплексно сопряженными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Раджабов Н. Интегральные уравнения типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения. – Душанбе: Деваштич, 2007, 221с.
2. Раджабов Н., Раджабова Л.Н., Репин О.А. – Дифференциальные уравнения, 2011, т. 47, №3, с. 1-10.
3. Зарипов С.К. – Вестник Таджикского национального университета, 2015, №1/3(164), с. 27-32.
4. Зарипов С.К. – Вестник Таджикского национального университета, 2015, №1/4(168), с. 54-57.
5. Зарипов С.К. – Вестник Таджикского национального университета, 2015, №1/6(191), с. 33-36.

ОДИН ИЗ СПОСОБОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ИНИЦИИРОВАНИЯ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ГОРЕНИЯ ГАЗОВ В ИНЕРТНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Температура воспламенения смеси газов в инертной пористой среде – это температура пористой среды T_{2in} , при которой газ в порах воспламеняется. Эта температура зависит от параметров системы, например от коэффициентов теплоотвода, теплопроводности, межфазного теплообмена, равновесной температуры и кинетических параметров смеси. Определение многопараметрической зависимости температуры воспламенения в пористых средах является одним из важных задач практики.

Для нахождения таких зависимости, рассматривается следующая математическая модель процесс распространения фронта фильтрационного горения газов (ФГГ) без учета диффузионных явлений [1].

$$\begin{aligned} -\rho_2 c_2 u \frac{dT_2}{dx} &= \alpha_2 \lambda_2 \frac{d^2 T_2}{dx^2} + \alpha_c S_c (T_1 - T_2), \\ \rho_{10} c_p (v_{10} - u) \frac{dT_1}{dx} &= -\alpha_c S_c (T_1 - T_2) + \rho_{10} Q \eta_0 J, \\ \rho_{10} (v_{10} - u) \frac{dn}{dx} &= -\rho_{10} J, \quad J = nk_0 \exp(-E/RT_1). \end{aligned} \quad (1)$$

Анализ системы уравнений (1) проводится на всей действительной оси x со следующим граничными условиями

$$\begin{aligned} x = -\infty: T_1 = T_0, T_2 = T_0, n = 1, \\ x = +\infty: \frac{dT_1}{dx} = 0, \frac{dT_2}{dx} = 0, n = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Для нахождения зависимости температуры инициирования газа при различных содержания водорода в смеси пористой среды в [2] получена формула

$$T_{2in} = T_0 + \frac{k_1}{k_1 - k_2} (T_e - T_0), \quad (3)$$

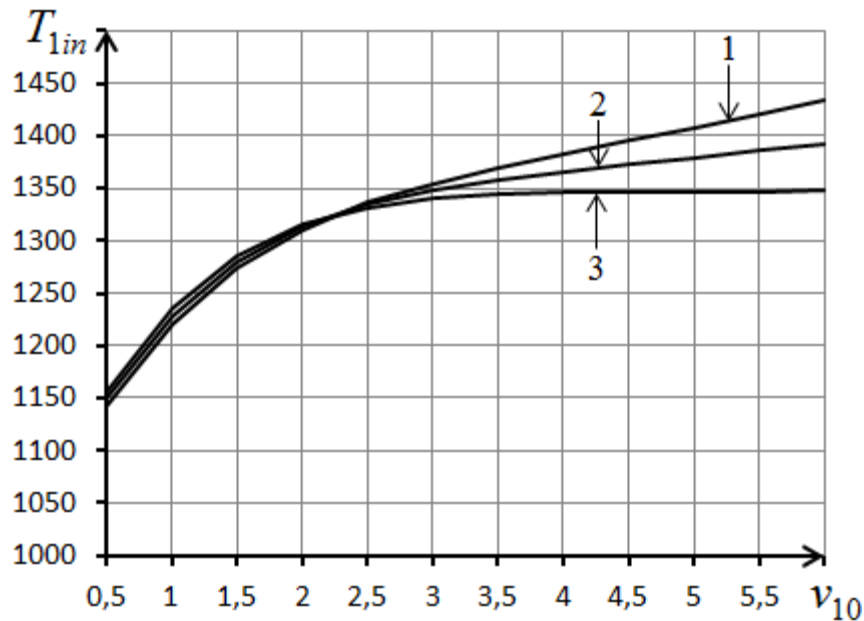
где k_1, k_2 – определяются из характеристического уравнения системы (1):

$$k^2 + \left(\frac{\alpha_c S_c}{c_p \rho_{10} (v_{10} - u)} + \frac{\rho_2 c_2}{\alpha_2 \lambda_2} \right) k + \frac{\alpha_c S_c}{\alpha_2 \lambda_2} \left(\frac{\rho_2 c_2 u}{c_p \rho_{10} (v_{10} - u)} - 1 \right) = 0$$

и T_e – равновесная температура определяются следующим:

$$T_e = T_0 + \frac{Q\eta_0}{c_p} \left(1 - \frac{\rho_2 c_2}{\rho_{10} c_p} \frac{u}{v_{10} - u} \right)^{-1}.$$

На рисунке приводятся кривые зависимости температура инициирования T_{2in} от скорости вдува v_{10} при первом порядке скорости химической реакции по недостающему компоненту газовой смеси в случае 7.5, 8.5 и 9.5% метана в смеси.



Рисунке – Кривые зависимости температура воспламенение $T_{in}(K)$ от скорости вдува $v_{10}(m/c)$ при разных процентного содержание метана в смеси 1-(7,5% CH_4 +воздухз), 2-(8,5% CH_4 +воздухз), 3-(9,5% CH_4 +воздухз),

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаевский Ю.М., Бабкин В.С. Фильтрационное горения газов. Распространения тепловых волн в гетрогенных средах. Под.ред. Ю.Ш.Матроса. – Новосибирск, 1988, с.108-145.
2. Садриддинов П.Б. Приближенное определение скорости фронта фильтрационного горения газов в инертной пористой среде. // Доклады АН Республики Таджикистан. 2010. Т.53. №1. С.28-33.

Р.И. Садуллоев, доц., канд. физ.-мат. наук
(ТНУ, г. Душанбе, Таджикистан)

ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ РОСТА И РАЗВИТИЯ РАСТЕНИЯ

Разработана имитационная модель роста и развития растения как результат взаимодействия четырех основных ростовых процессов: роста листовой массы, стебля, корней и репродуктивных органов. Система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = e_1(t) \cdot \phi(N_i, \lambda_k) - \omega_1(N_1), \\ \frac{dN_2}{dt} = e_2(t) \cdot \phi(N_i, \lambda_k) - \omega_2(N_2), \\ \frac{dN_3}{dt} = e_3(t) \cdot \phi(N_i, \lambda_k) - \omega_3(N_3), \\ \frac{dN_4}{dt} = e_4(t) \cdot \phi(N_i, \lambda_k) - \omega_4(N_4), \end{cases} \quad (1)$$

где $N_i(t)$, $i=1, 2, 3, 4$ - соответственно биомассы листьев, стебля, корней и репродуктивных органов в момент времени t , $\phi(N_i, \lambda_k)$ - скорость образования биомассы в момент t (первичная продуктивность), представляющая собой разность между валовой продуктивностью (за счёт фотосинтеза) и расходом биомассы при дыхании, и зависящая от всех фазовых переменных N_i ($i=1, 2, 3, 4$) и параметров внешней среды λ_k ($k=1, 2, 3, 4, 5$). Параметры внешней среды: $\lambda_1(t)$ - интенсивность фотосинтетически активной радиации, $\lambda_2(t)$ - параметр, характеризующий водный режим растения, $\lambda_3(t)$ - концентрация CO_2 в воздухе, $\lambda_4(t)$ - температура окружающего воздуха, $\lambda_5(t)$ - количество азота в усвояемой для растения форме в почве, $\omega_i(N_i)$ - интенсивность отмирания i - того органа, $e_i(t)$ - доли новой биомассы, которые идут в листья, стебель корни и репродуктивные органы соответственно:

$$\sum_{i=1}^4 e_i(t) = 1, \quad e_i(t) \geq 0 \text{ при всех } t.$$

В модели вегетационный сезон растения разделяется на две части: до и после появления репродуктивных органов.

Для первой части вегетационного сезона рост растения задаётся первыми три уравнениями системы (1) с условиями $e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 1$, $e_i(t) \geq 0$, $i=1, 2, 3$ при всех t .

Для определения функций $e_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ на каждом шаге по времени решается вариационная задача, основанная на следующей гипотезе: новая биомасса распределяется по листьям, стеблю и корням растения таким образом, чтобы обеспечить максимальную скорость прироста общей биомассы растения в следующий момент времени при условии, что состояние среды не меняется.

Момент перехода с первой части во вторую часть вегетационного сезона определяется суммой эффективных температур.

Во второй части вегетационного сезона рост растения задаётся всеми четырьмя уравнениями системы (1) с условиями

$$\sum_{i=1}^4 e_i(t) = 1, \quad e_i(t) \geq 0 \text{ при всех } t.$$

Здесь для определения значения функций $e_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, используется другая гипотеза: новая биомасса распределяется по листьям, стеблю, корням и репродуктивному органу таким образом, чтобы обеспечить максимальную биомассу репродуктивных органов в следующий момент времени при условии, что состояние среды не меняется и что относительный прирост репродуктивных органов не превосходит некоторой предельной величины. В противном случае прирост репродуктивного органа достигает указанной предельной величины, а оставшаяся часть ассимилятов распределяется по листьям, стеблю и корням в соответствии с предыдущей гипотезой.

Модель идентифицирована и верифицирована на примере хлопчатника. Полученные результаты незначительно отличались от экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарко А.М., Садуллоев Р.И. Математическая модель роста и развития хлопчатника с учётом азотного питания. // ВЦ АН СССР. Сообщения по прикладной математике. Москва. 1984. 40стр.
2. Садуллоев Р.И. Модель и схема расчёта движения почвенной влаги. // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2004 г. № 1, - с. 109-112.
3. Садуллоев Р.И. Анализ устойчивости системы «корни-микроорганизмы». // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2005 г. № 2, - с. 131-137.

ВЛИЯНИЕ ФУЛЛЕРЕНА C₆₀ НА ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ПЛЕНОК ПОЛИМЕТИЛМЕТАКРИЛАТА, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ РАСТВОРОВ В АРОМАТИЧЕСКИХ РАСТВОРИТЕЛЯХ

Изучена электропроводность плёнок полиметилметакрилата (ПММА), содержащих фуллерен C₆₀ (0-10 масс.%), полученных в толуоле, бромбензоле и орто-ксилоле. Исследования проводились в интервале температур 293-473К, охватывающем стеклообразное и высокоэластическое состояния полимера. В координатах $\lg\sigma_v(1/T)$ кривые температурной зависимости электропроводности состоят из двух линейных участков, претерпевающих излом при температуре стеклования (T_c).

На указанных зависимостях можно отметить следующие особенности:

1) величины электропроводности увеличиваются на 0,5-1,5 десятичных порядка во всей области температур при переходе от плёнок, полученных в толуоле к бромбензолу и орто-ксилолу;

2) в низкотемпературной области зависимостей $\lg\sigma_v(1/T)$ плёнок из толуола и бромбензола с увеличением концентрации C₆₀ от 1 до 3%, величины удельной объемной проводимости (σ_v) композитов уменьшаются на 0,6-1 десятичных порядка (табл.) по сравнению с исходным ПММА; при этом энергия активации электропроводности (U) композитов возрастает от 71 до 98 кДж/моль и от 63 до 84 кДж/моль, соответственно. При больших концентрациях фуллерена (5, 10%) σ_v композитов возрастает, а U уменьшается, что является косвенным подтверждением ионного характера электропроводности фуллеренсодержащих композитов ПММА, который осуществляется, в основном, за счет имеющихся в полимерной матрице носителей заряда;

3) в низкотемпературной области зависимостей $\lg\sigma_v(1/T)$ образцов, полученных в орто-ксилоле, наблюдается обратная картина; величина U фуллеренсодержащих плёнок уменьшается от 55 до 36 кДж/моль, а электропроводность увеличивается более чем на один порядок с ростом содержания C₆₀ в полимере.

4) в высокотемпературной области зависимостей $\lg\sigma_v(1/T)$, где процессы переноса зарядов обусловлены движением сегментов цепей полимера, энергия активации электропроводности плёнок, полученных в разных растворителях, составляет 242-263 кДж/моль. При этом,

для заданного растворителя величины U практически одинаковы как для исходного ПММА, так и для композитов, содержащих C_{60} .

Таблица - Величины электропроводности и энергии активации электропроводности пленок ПММА, полученных в разных растворителях

ПММА _{толуол} + C_{60} %	$\lg\sigma_{323K}$ [Ом·м] ⁻¹	$\lg\sigma_{383K}$ [Ом·м] ⁻¹	$U < U_{Tc}$ (кДж/моль)	$U > U_{Tc}$ (кДж/моль)
0	-14.7	-11.0	71	263
1	-14.9	-11.5	88	263
3	-15.3	-12.25	98	263
5	-14.8	-11.3	68	263
10	-14.8	-11.3	68	263
ПММА _{бромбензол} + C_{60} %				
0	-14.1	-10.5	63	260
1	-14.5	-11.0	75	260
3	-15.1	-11.75	84	260
5	-13.8	-10.05	50	260
10	-13.8	-10.0	50	260
ПММА _{орто-ксилол} + C_{60} %				
0	-13.4	-9.3	55	242
1	-12.65	-8.3	42	242
3	-12.5	-7.9	42	242
5	-12.3	-7.5	36	242

Из сравнения величин электропроводности исходных и фуллеренсодержащих плёнок ПММА, полученных из растворов в разных растворителях, следует, что в композитах ПММА- C_{60} , вклад молекул C_{60} в процесс электропроводности незначителен независимо от состава композита и им можно пренебречь; молекулы фуллерена влияют на электропроводность посредством воздействия на структуру полимера, проявляющегося в изменении межмолекулярного взаимодействия, средней длины свободного пробега ионов, количества центров рассеяния и, возможно, характера надмолекулярных образований.

Б.И. Махсудов, проф., д-р физ.-мат. наук;
Х.Ш. Джураев, доц., канд. физ.-мат. наук; З. Каримов
(ТНУ, г. Душанбе, Таджикистан)

ВЛИЯНИЕ ТОЛЩИНЫ АКТИВНОГО НАНОСЛОЯ НА ТЕМПЕРАТУРНУЮ ЗАВИСИМОСТЬ ПОРОГОВОГО ТОКА ИНЖЕКЦИОННЫХ ЛАЗЕРОВ НА ОСНОВЕ АССИМЕТРИЧНЫХ ALGAAS/INGAAS/GAAS - ГЕТЕРОСТРУКТУР

При протекании рабочего тока в активной области лазерной гетероструктуры пороговая концентрация носителей заряда достигает $\sim 10^{18} \text{ см}^{-3}$, что согласно модели антиволноводного эффекта, может вносить свой вклад в температурную зависимость порогового тока лазерной наноструктуры. Внутренние оптические потери активной области лазерной наноструктуры зависит от концентрации носителей заряда и фактора оптического ограничения, поэтому при оптимизации лазерных гетероструктур толщину активной области уменьшают. Согласно экспериментальным результатам [1], изменение толщины слоя активной области в гетероструктурах, излучающих на длине волны 1060-1150 нм, на основе системы твердых растворов Al-GaAs/GaAs/InGaAs значительно влияет на параметры лазерной структуры. В частности, величина внутреннего квантового выхода имеет резко выраженный максимум и снижается как при увеличении, так и при уменьшении толщины активной области.

В данной работе проведена расчет с целью определения влияния толщины активного слоя на температурную зависимость порогового тока иннекционных лазеров на основе ассиметричных гетероструктур раздельного ограничения с расширенным волноводом, излучающих в диапазоне длин волны 1000-1150 нм. Метод расчёта и методы контроля волноводных параметров на основе сравнения расчётных данных по пороговому току использованные в настоящей работе, для оптимизации параметров лазера, были изложены в [2, 3, 4]. Толщина активной области варьировалась от 3 до 9 нм. Экспериментально известно, что минимальное значение толщины активной области 3 нм было ограничено в связи с снижением квантового выхода в слое активной области и технологическими сложностями дальнейшего уменьшения толщины слоя. Максимальная толщина активной области 9 нм была выбрана из-за отсутствия генерации в данном типе лазеров во всем диапазоне токов накалки [1]. Это связано с большим количеством дефектов в результате релаксации упругих напряжений в на-

ноструктуре и обусловлено существенным превышением толщины активной области расчетного значения критической толщины. В таблице 1 представлен состав слоёв и их назначение для базовой наногетероструктуры.

Таблица 1- Параметры исследуемых типов лазерных гетероструктур

№ слоя	Состав слоя	Толщина	ϵ	$\alpha, \text{см}^{-1}$
7 – волновод с <i>p</i> -стороны	$\text{Al}_{0,1}\text{Ga}_{0,9}\text{As}$	0,66 мкм	11,373	5
6 – барьерный слой	GaAs	19,45 нм	12,446	5
5 – квантовая яма	$\text{In}_{0,28}\text{Ga}_{0,72}\text{As}$	<i>d</i>	12,816	100
4 - барьерный слой	GaAs	7,7 нм	12,446	5
3 - волновод с <i>n</i> -стороны	$\text{Al}_{0,1}\text{Ga}_{0,9}\text{As}$	1,06 мкм	11.373	5
2 – <i>N</i> – эмиттер	$\text{Al}_{0,25}\text{Ga}_{0,75}\text{As}$	2,0 мкм	11.303	5
1 – буферный слой	GaAs		12.446	10

Результаты расчета температурной зависимости порогового тока от толщины активной области ассиметричных гетеролазеров с одной квантовой ямой приведены на рис. 1.

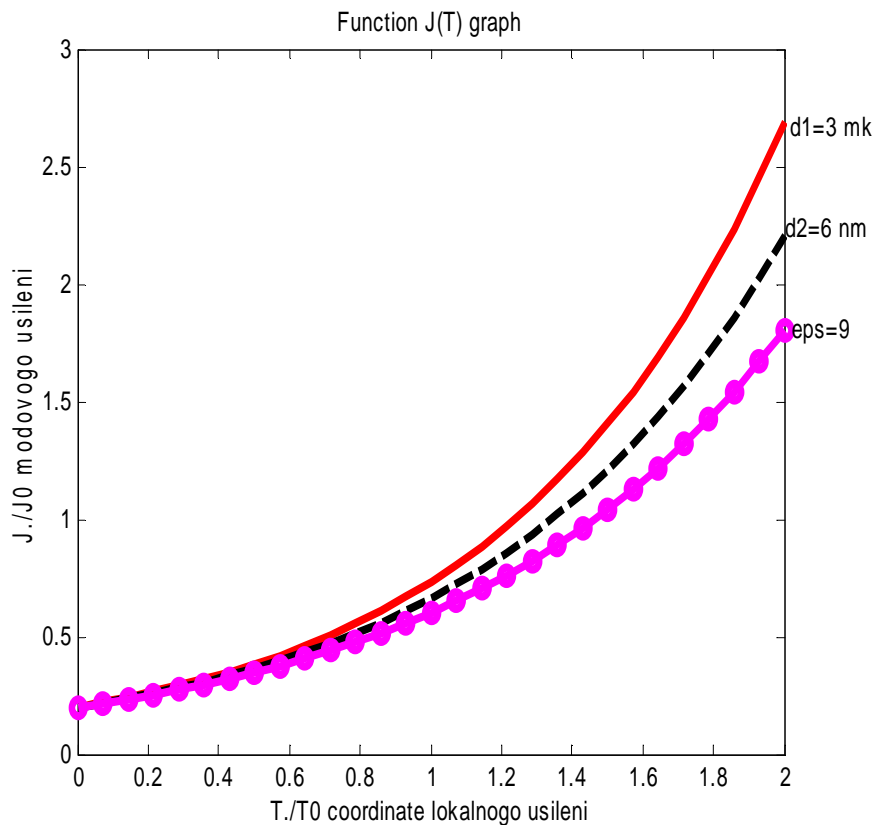


Рисунок 1 - Температурной зависимости порогового тока от толщины активной области ассиметричных гетеролазеров с одной квантовой ямой. Параметрами кривых является толщина активного слоя

Измененные толщины активной области оказывает существенное влияние на пороговую плотность тока в ассиметричных лазерных гетероструктурах разделенного ограничения. Это связано с тем, что распределение основной моды излучения в расширенном волноводе наноструктуры полностью определяется материальными и геометрическими параметрами эмиттерных и волноводных слоев. Это обстоятельство открывает широкие возможности по оптимизации спектральных, температурных, пороговых и мощностных характеристик лазерных гетероструктур в зависимости от толщины активной области.

Таким образом, результаты расчета показывают, что в ассиметричной лазерной наноструктуре разделенного ограничения с расширенным волноводом с увеличением толщины активной области температурная зависимость излучательных характеристик лазеров улучшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Винокуров Д.А. Влияние толщины активной области на характеристики полупроводниковых лазеров на основе ассиметричных гетероструктур AlGaAs/GaAs/InGaAs с расширенным волноводом / Д.А. Винокуров, В.В. Васильева и др. // ФТП. – 2010. – Т. 44. Вып. 2. – С. 246 – 250.

2. Махсудов Б.И. Моделирование температурной зависимости излучательных характеристик нанослойных инжекционных лазеров на основе симметричных гетероструктур с двумя квантовыми ямами / Б.И. Махсудов, Х.Ш. Джураев, З.Д. Каримов, Н. Нарзуллоев // Вестник Таджикского национального университета. – 2016г. – №1/3(200). – С.132-137.

3. Джураев Х.Ш. Обратные задачи при изучение волноводных свойств многослойных квантоворазмерных гетероструктур / Х.Ш. Джураев, Б.И. Махсудов, З.Д. Каримов Научно–технический вестник Поволжья. №5. 2015г. – Казан: – С.25-27.

4. Махсудов Б.И. Матричный метод расчёта влияния параметров структуры на излучательные характеристики гетеролазеров / Б.И. Махсудов // Доклады АН РТ. – 2012. – Т.55. №8. – С.631 – 637.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДВУХ МНОГОЦИФРОВЫХ ЧИСЕЛ С ОДИНАКОВЫМИ ЦИФРАМИ

Иногда на практике часто приходится иметь дело с вычислениями произведений двух многоцифровых чисел, состоящих из разных множеств одинаковых подчисел.

Нами была выведена в [1] вычислительная формула для умножения таких чисел в виде.

$$S = A \cdot B = \underbrace{\overline{a_1 a_2 \dots a_p}}_{\underbrace{99 \dots 9^2}_e} \cdot \overline{b_1 b_2 \dots b_p} \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{p(n-1)} \underbrace{99 \dots 9}_{p(m-n)} \underbrace{00 \dots 0}_{p(n-1)} \quad (1)$$

где A и B соответственно из m и n одинаковых подчисел, имеющих p разных цифр, т.е.

$$A = \overline{\overline{a_1 a_2 \dots a_p} \overline{a_1 a_2 \dots a_p} \dots \overline{a_1 a_2 \dots a_p}}^m$$

и

$$B = \overline{\overline{b_1 b_2 \dots b_p} \overline{b_1 b_2 \dots b_p} \dots \overline{b_1 b_2 \dots b_p}}^n$$

где p указывает количества разных цифр каждого подчисла, а m и n соответственно выражают количества подчисел A и B .

Рассмотрим применение этой формулы для случая, когда числа A и B заданы с периодической дробью.

Пусть целая и дробная часть числа A состоит из m целых и n дробных одинаковых цифр a и число B из k целых и e дробных одинаковых цифр b , т.е.

$$A = \underbrace{\overline{aa \dots a}}_m, \underbrace{\overline{aa \dots a}}_n; \quad B = \underbrace{\overline{bb \dots b}}_k, \underbrace{\overline{bb \dots b}}_e;$$

где

$$a = a_1 = a_2 = \dots = a_p \text{ и } b = b_1 = b_2 = \dots = b_p$$

Напишем эти числа в преобразованном виде:

$$A = \underbrace{\overline{aa \dots a}}_{m+n} \cdot 10^{-n}, \quad B = \underbrace{\overline{bb \dots b}}_{k+e} \cdot 10^{-e} \quad (2)$$

Как видно из (2) числа A и B состоят из подчисел, состоящих соответственно из одной цифры a и b , т.е. указатель количества цифр подчисел $p=1$.

Подставляя значение A и B в (1) будем иметь:

$$S = A \cdot B = \underbrace{\overline{aa \dots a}}_{m+n} \cdot 10^{-n} \cdot \underbrace{\overline{bb \dots b}}_{k+e} \cdot 10^{-e} =$$

$$= \frac{a \cdot b}{9^2} \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{k+e-1} \underbrace{8}_{m+n-(k+e)} \underbrace{99 \dots 9}_{k+e-1} \underbrace{00 \dots 0}_{k+e-1} 1 \cdot 10^{-(n+e)} \quad (3)$$

или сокращая на 9 получим:

$$S = \frac{a \cdot b}{9} \cdot \underbrace{11 \dots 10}_{k+e-1} \underbrace{99 \dots 9}_{m+n-(k+e)} \underbrace{88 \dots 8}_{k+e-1} 9 \cdot 10^{-(n+e)} \quad (4)$$

где в этих формулах $m+n > k+e$ и $k+e > 1$.

В случае, когда сумма указателей количества одинаковых цифр в обоих числе одинаковы, т.е. при $m+n = k+e$ эта формула более упрощается и примет вид:

$$S = \frac{a \cdot b}{9} \cdot \underbrace{11 \dots 10}_{k+e-1} \underbrace{88 \dots 8}_{k+e-1} 9 \cdot 10^{-(n+e)} \quad (5)$$

т. е. эта формула применяется в том случае, когда количества одинаковых цифр в обоих числе А и В равны.

Полученные формулы (3), (4) и (5) дают возможность вычислить произведение двух чисел А и В, каждое из которых соответственно в целой части имеет m и k , а в дробной части n и e одинаковых цифр. Используя значение указателей количества одинаковых цифр мы можем ускорить процесс умножения двух многоцифровых разных чисел. В некоторых случаях используя действия умножения, в зависимости от указателей количество цифр чисел, сразу можно написать ответ результата.

Рассмотрим примеры:

1. Пусть $A=33,333$ и $B=5,55$

Как мы видим указатели количества цифр целой части числа А и В соответственно равны $m=2$; $k=1$, а дробной части $n=3$ и $e=2$.

При этих значениях указателей цифр числа формула (4) примет вид:

$$\begin{aligned} S &= 33,333 \cdot 5,55 \cdot 10^{-5} = \frac{3 \cdot 5}{9} \cdot 11099889 \cdot 10^{-5} \\ &= \frac{5}{3} \cdot 11099889 \cdot 10^{-5} = \\ &= 18499815 \cdot 10^{-5} = 184,99815 \end{aligned}$$

2. Предположим, что $A=9999,999$ и $B=99,9999$.

Как видно указатели количества цифр в целой части А и В соответственно равны $m=4$ и $k=2$, а дробной части $n=3$ и $e=4$. Подставляя значение этих указателей количества одинаковых цифр в формуле (3) имеем:

$$S = 9999,999 \cdot 99,999 = 9999999 \cdot 10^{-3} \cdot 999999 \cdot 10^{-4} =$$

$$= \frac{9 \cdot 9}{9^2} \cdot 9999989000001 \cdot 10^{-7} = 999998,9000001$$

В случае когда числа A и B состоят из одних цифр девяток, или троек, то при этом соответственно, используя (3) или (4) на основании значений указателей количеств цифр чисел, можно не произведя действия умножения сразу написать результат произведения.

Аналогично можно проверить произведение других двух чисел, состоящих из одинаковых цифр, имеющих дробную часть.

На основании формулы (4) нами составлена таблица умножений многоцифровых чисел с дробной частью $A = (a = \overline{1,9})$ и $B(b = \overline{1,9})$ состоящих соответственно из $m+n$ цифр a и $k+e$ цифр b .

Отметим, что результаты умножения в девятом столбце и в девятой строке этой таблицы можно заполнять сразу по формуле (4), минуя вычисления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ашуров М., Ашуров Х.М. Вычислительные формулы для произведений многоцифровых чисел. Материалы IX Международной конференции «Компьютерный анализ проблем науки и технологий», посвященной 65 – летию ТНУ. г. Душанбе, 28-30 декабря 2013г. стр 33-35.
2. Ашуров Мирумар “Занимательные задачи математики”, часть 1, г. Душанбе, 2004г. 144стр. (на таджикском языке).
3. Ашуров Мирумар “Занимательные задачи математики”, часть 2, г. Душанбе 2009г. 230стр. (на таджикском языке).

ОЦЕНКА СИГНАЛА ДЕТЕКТОРА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ШАЛ НА ВЫСОТЕ 4250М

Одной из основных задач при изучении космических лучей является определение энергии первичной частицы. Частицы с энергией меньше 1ПэВ хорошо изучены, а результаты экспериментов по частицам, энергия которых больше 1ПэВ, относительно малы. Это объясняется тем, что интенсивность первичного космического излучения высоких энергий мала и их трудно регистрировать непосредственно. При прохождении первичного излучения через атмосферу они индуцируют ядерно – электромагнитный каскад, называемый широким атмосферным ливнем(ШАЛ).Изучая характеристики ШАЛ,можно определить параметры первичного космического излучения. Известно, что энергия первичных частиц связана с числом заряженных частиц ШАЛ и заряженные частицы ШАЛ в основном состоят из электронов и мюонов. В работе [1] оценено восстановление электронов и мюонов ШАЛ из числа частиц, которые падают на детекторы. Для более точной оценки надо знать какова точность восстановления числа падающих на детектор частиц. Поэтому надо знать, с какими проблемами можно столкнуться при детектировании этих частиц. Для этого надо сначала смоделировать ШАЛ, далее смоделировать сеть детекторов, которые будут регистрировать частицы, и посмотреть, что происходит при прохождении этих частиц через детекторы.В данной работе ШАЛ моделирован программой CORSIKA[2], а детектор программой GEANT[3]. В качестве модели взаимодействий при высоких энергиях выбрана модель QGSJET-01[4]. Сеть детекторов расположена на высоте 4250м. Детекторы состоят из алюминия(10см), сцинтилятора и свинца(10см). Схема детектора приведена на рисунке 1.

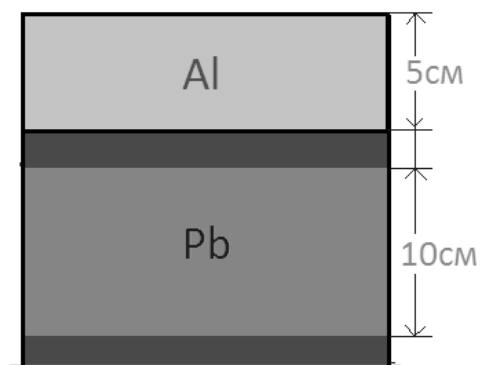


Рисунок 1 - Схема смоделированного детектора заряженных частиц

В результате в данной работе установлены зависимости энерговыведения на каждом сцинтиляторе от числа электронов и мюонов ШАЛ индуцированным протоном с энергией 1ПэВ. Также установлено, что зависимость между числом электронов и энерговыведением частиц в первом сцинтиляторе линейная, и для восстановления числа электронов особых затруднений не должно возникать. Зависимость между числом мюонов и энерговыведением в сцинтиляторе 2 не является линейной и восстановление числа мюонов при данных параметров детектора может потребовать особого подхода. В работе также предложено возможное решение данной проблемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Камолиддинов Ф.Дж. Оценка восстановления полного числа заряженных частиц шал индуцированным протоном./ Камолиддинов Ф.Дж., Махсудов Б.И. Вестник ТНУ 1/3(200)2016, с95-98

2. D. Heck. CORSIKA: A Monte Carlo Code to Simulate Extensive Air Showers/D. Heck, J. Knapp, J.N. Capdevielle, G. Schatz, T. Thouw//FZKA 6019-Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe (Germany)-Feb 1998- 90p

3. J. Allison et al., Recent Developments in Geant4 / Nuclear Instruments and Methods A 835 (2016) 186-225.

4. N.N. Kalmykov. Quark-gluon-string model and EAS simulation problems at ultra-high energies//] N.N. Kalmykov, S.S. Ostapchenko, A.I. Pavlov//Nuclear physics B proceeding Supplements 52(3) -1997-17-28p

**ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ
ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ
ВОЛНЫ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА
СО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ**

Рассмотрены переходные процессы при взаимодействии нестационарной акустической волны от точечного источника со сферической полостью. При этом учитывалось, что падающая волна генерируется источником, расположенным в произвольном месте в середине. Построена математическая модель, в которой при использовании интегрального превращения Лапласа по времени получаем уравнения, описывающие динамику акустической среды.

Решение (в области изображений) представляем в виде ряда. Приведем основные математические соотношения и проанализируем численные результаты для определения физических характеристик исследуемого переходного процесса [1]. Запишем выражения для гидродинамической нагрузки в случае действия экспоненциальной убывающей волны и треугольного импульса в виде, широко представленном в работах [2 - 5]:

$$p_2(t) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^j [f_j(t-2j) - g_j(t-2j)] H(t-2j),$$

$$g_j(t) = \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t f_j(x) e^{\alpha x} dx;$$

$$p_3(t) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^j [f_j(t-2j) - tg\beta h_j(t-2j) + tg\beta h_j(t-2j - ctg\beta) \times \\ \times H(t-2j - ctg\beta)] H(t-2j),$$

$$h_j(t) = tg\beta \int_0^t f_j(x) dx.$$

В результате проведенных расчетов были проанализированы все полученные результаты, после чего построены графики, отражающие динамическое взаимодействие нестационарной акустической волны со сферической полостью при указанных выше условиях.

Представляют интерес графики гидродинамического давления в случае действия ступенчатой волны и прямоугольного импульса. При этом все вычисления были проведены для интервала времени $0 < t < 8\text{с}$ в случае четырех отражений акустической волны. Получены зависимости изменения гидродинамической нагрузки во времени при действии на сферическую полость экспоненциальной убывающей волны и треугольного импульса.

Можно сделать выводы, что в рассматриваемом интервале времени значение гидродинамического давления возрастает. Тут существенное влияние оказывает тот факт, что отсутствует излучение энергии.

Говоря о реальных конструкциях, которые обладают способностью демпфирования, заметим, что полученные результаты справедливы в случае, если период колебаний системы значительно превышает рассматриваемый интервал времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаєв О. А. , Штефан Н. І. , Гнатейко Н. В. Дослідження перехідних процесів при взаємодії зі сферичною порожниною нестационарною акустичною хвилею від точкового джерела / О. А. Бабаєв, Н. І. Штефан, Н. В. Гнатейко // Молодий вчений. — 2015. — № 10 (25), с.5-9.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи // – М., Издательство Наука, 1966.
3. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению / В.А. Диткин, А.П. Прудников // – М., Издательство Высшая школа, 1965.
4. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников // – М., Издательство Высшая школа, 1966.
5. Пьезокерамические преобразователи / Под ред. С.И. Пугачева. – Л.: Судостроение, 1984. – 256 с.

С.А. Двинин, проф., д-р физ-мат. наук

(МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва);

Д.К. Солихов, проф., д-р физ.-мат. наук (ТНУ, г. Душанбе);

Ш.С. Нурулхаков (ТНУ, г. Душанбе)

ИНКРЕМЕНТЫ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВЫНУЖДЕННОГО РАССЕЯНИЯ В ДЛИННОМ ПЛАЗМЕННОМ СЛОЕ

Кроме чисто научного интереса, вынужденное комбинационное рассеяние изучается в связи с задачами ускорения электронов лазерным пучком [1], лазерного термоядерного синтеза [2], компрессии и усиления лазерных импульсов [3], диагностики плазмы [4] и других. Данная работа посвящена расчету инкрементов абсолютной неустойчивости в области рассеяния ограниченной вдоль направления распространения волны накачки и бесконечной в поперечном направлении. В бесстолкновительной плазме эта неустойчивость возникает тогда, когда проекции групповых скоростей взаимодействующих волн в направлении перпендикулярном к границе слоя, имеют противоположные знаки, а произведение инкремента неустойчивости в бесконечной среде на время конвективного выхода энергии из области взаимодействия, определяемое средним геометрическим временем прохождения волн через область взаимодействия больше $\pi/2$ [5 – 7]. При этом, поскольку при отклонении направления рассеяния волны от противоположного направлению распространения волны накачки время выхода излучения из области взаимодействия растет, что приводит к увеличению инкремента неустойчивости, который в итоге определяется интенсивностью волны накачки и столкновительными потерями рассеянных волн.

В данной статье мы проанализируем совместное влияние столкновительных потерь и конвективных потерь, связанных с ограниченностью системы вдоль направления распространения волны накачки на начальной линейной стадии неустойчивости при произвольном угле рассеяния волны. Размер в поперечном направлении будем считать бесконечным, что может служить первым приближением для расчета экспериментальных ситуаций, когда поперечный размер много больше продольного. В эксперименте такие ситуации могут возникать в задачах диагностики, либо в задачах нагрева с замкнутой по азимутальному углу областью взаимодействия.

Рассмотрена задача о рассеянии Мандельштама – Бриллюэна в области ограниченной вдоль распространения волны накачки и бесконечной в поперечном направлении. Такие ситуации могут возникать,

например, в задачах нагрева плазмы, либо в задачах диагностики. Поскольку время выхода рассеянного излучения в рассматриваемой геометрии при рассеянии под углом существенно увеличивается, этот эффект компенсирует уменьшение коэффициента нелинейной обратной связи при косом рассеянии и приводит к развитию неустойчивости. Так как конвективные потери при углах рассеяния близких к $\pi/2$ малы, в этом случае существенную роль играет столкновительное поглощение волн. В работе выполнен расчет инкрементов неустойчивости при учете, как конвективных потерь, так и столкновительного затухания волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Esarey E. Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators/ E. Esarey, C. B. Schroeder, W. P. Leemans// Rev. Modern Phys. 2009. **81**. 1229.
2. Tabak M. Ignition and high gain with ultra-powerful lasers/ M. Tabak, J. Hammer, M. E. et al. Glinsky// Physics of Plasmas. 1994. **1**. 1626.
3. Овчинников К.Н. О пороге вынужденного рассеяния в поле двумерного локализованной волны накачки при произвольных углах рассеяния/ К.Н. Овчинников, Д.К. Солихов// Краткие сообщения по физике ФИАН. 2010. №10. С. 3.
4. Солихов Д.К. Коэффициент усиления вынужденного рассеяния двумерно локализованной волны накачки при произвольных углах рассеяния/ Д.К. Солихов, К.Н. Овчинников, С.А. Двинин// Вестн. Моск. Ун-та, Физ. Астрон. 2012. №1. С. 69
5. Солихов Д.К. Вынужденное комбинационное рассеяние света в поле двумерно локализованной волны накачки / Д.К. Солихов, С.А. Двинин// Физика плазмы, 2016. **42**. №6. С. 590.

О РАЗРЕШИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ЗАДАНЫХ НА НЕОГРАНИЧЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ БЕЗ КРАЯ

В этой работе рассматривается параболическое уравнение заданное на многомерном неограниченном C^∞ -многообразии без края. Пусть M - n - мерное C^∞ -многообразие без края. В качестве многообразия M можно, например, положить $M = \partial\Omega$, где $\Omega = R^{n+1}$ неограниченная область с C^∞ границей. При этом рассматривается случай общих самосопряженных эллиптических дифференциальных операторов произвольного порядка.

1. Покроем M системой открытых ограниченных множеств $M_j \subset M$, $j=1,2,\dots$, конечной кратности так, что $M = \bigcup_{j=1}^{+\infty} M_j$, и при этом найдутся функции $\psi_j(\mu)$, $\zeta_j(\mu)$, $j=1,2,\dots$, обладающие следующими свойствами:

I. Функции $\psi_j(\mu)$, $j=1,2,\dots$, образуют разбиение единицы многообразия M , т.е.

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \psi_j(\mu) = 1, \quad (\mu \in M)$$

II. $0 \leq \psi_j(\mu) \leq 1$, $0 \leq \zeta_j(\mu) \leq 1$, $\mu \in M$, $j=1,2,\dots$,

III. $\zeta_j(\mu) = 1$ для $\mu \in \text{supp} \psi_j$, $j = 1,2,\dots$

Далее на M вводится положительная C^∞ -плотность $d\mu$ и предполагается, что при любом $j=1,2,\dots$ существует C^∞ -гомеоморфизм ϕ_j множества M_j на открытое ограниченное множество $V_j \subset R^n$ и для всех открытых множеств $\omega \subset M_j$ выполняется неравенство

$$C_1 \text{mes} g_j(\omega) \leq \int d\mu \leq C_2 \text{mes} g_j(\omega), \quad \text{с константами } C_1, C_2 > 0 \text{ не зависящими от } j.$$

Для дифференциального оператора \mathcal{A} с областью определения $C_0^\infty(M)$ можно построить операторы \mathcal{A}_j , $j=1,2,\dots$ такие, что для $u \in C_0^\infty(M_j)$ выполняется равенство

$$\mathcal{A}u = \pi_j^{-1} \mathcal{A}_j \pi_j u,$$

где отображение

$$\pi_j: C_0^\infty(M_j) \rightarrow C_0^\infty(V_j)$$

задается по формуле $(\pi_j u)(x) = u(\varphi_j^{-1}(x)), x \in V_j$.

При этом дифференциальный оператор \mathcal{A}_j имеет вид

$$(\mathcal{A}_j v)(x) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_{\alpha,j}(x) D_x^\alpha v(x) + Q_j(x)v(x), \quad v \in C_0^\infty(V_j)$$

Предполагается, что коэффициенты операторов бесконечно дифференцируемы и обладают производными равномерно ограниченными по $j = 1, 2, \dots$ вплоть до порядка $2m$, функции $Q_j(x) \in C^1(V_j)$, $j = 1, 2, \dots$ удовлетворяют неравенствам

$$Q_j(x) \geq 1, \quad |\nabla_x Q_j(x)| \leq M \cdot Q_j^{1 + \frac{1}{2m} - \varepsilon}(x), \quad (x \in V_j)$$

где число $\varepsilon, M > 0$ от j не зависят.

Теорема. Существует число $\lambda_0 > 0$ такое, что уравнение

$$\mathcal{A}u + \lambda u = f,$$

где $f \in L_2(\mathcal{M}; d\mu)$, имеет единственное решение

$$u \in L_2(\mathcal{M}; d\mu) \cap W_{2,loc}^{2m}(\mathcal{M}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойматов К. Х. Спектральная асимптотика дифференциальных операторов. Труды семинара им. И.Г. Петровского, вып. 7, 1981, с.56-100.