Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. М. Волк, В. В. Игнатенко

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

*Рекомендовано
учебно-методическим объединением высших учебных заведений
Республики Беларусь по химико-технологическому образованию
в качестве учебно-методического пособия для студентов высших
учебных заведений, обучающихся заочно по специальностям
1-48 01 01 «Химическая технология неорганических веществ,
материалов и изделий», 1-48 01 02 «Химическая технология
органических веществ, материалов и изделий»,
1-48 02 01 «Биотехнология»*

Минск 2010

УДК 51(075.4)
ББК 22я73
В67

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой
методов оптимального управления БГУ
А. И. Калинин;
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры
высшей математики № 2 БНТУ
В. В. Карпук

Волк, А. М.
В67 Высшая математика : учеб.-метод. пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям 1-48 01 01 «Химическая технология неорганических веществ, материалов и изделий», 1-48 01 02 «Химическая технология органических веществ, материалов и изделий», 1-48 02 01 «Биотехнология» / А. М. Волк, В. В. Игнатенко. – Минск : БГТУ, 2010. – 197 с.
ISBN 978-985-530-002-2.

В учебно-методическом пособии приведена программа по высшей математике, изложены основные теоретические сведения по курсу высшей математики, представлены решения типовых задач с рекомендациями, контрольные задания, также содержится рекомендуемая литература и приложение.

Предназначено для студентов специальностей «Химическая технология неорганических веществ, материалов и изделий», «Химическая технология органических веществ, материалов и изделий» и «Биотехнология» заочной формы обучения, также может быть использовано для подготовки учащихся других специальностей.

УДК 51(075.4)
ББК 22я73

ISBN 978-985-530-002-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методическое пособие по дисциплине «Высшая математика» предназначено для выполнения контрольных работ и подготовки к экзаменам студентами химико-технологических специальностей заочной формы обучения, для которых типовыми учебными планами предусмотрено изучение курса высшей математики в объеме 524–570 часов.

Данное учебное издание также может быть использовано для подготовки учащихся других специальностей.

Издание полностью соответствует образовательному стандарту и программе дисциплины, содержит программу, изложение теоретических вопросов программы, решение типовых задач с подробными пояснениями и рекомендациями, контрольные задания по 13-ти основным разделам высшей математики, приложение и список рекомендуемой литературы.

По каждой теме в теоретическом разделе приведены основные понятия и определения, теоремы и формулы, необходимые для выполнения контрольных работ. Затем даны образцы решения задач, аналогичных задачам контрольных работ.

Структура учебно-методического пособия позволит студенту самостоятельно проработать материал и выполнить контрольные работы, не прибегая к посторонней помощи.

Содержание издания служит рационализации учебного процесса, дает возможность студентам самостоятельно усваивать учебный материал, способствует повышению качества подготовки специалистов в высших учебных заведениях.

Предлагаемый материал излагается в логической последовательности, что позволяет при изучении определенной темы использовать усвоенные знания по предыдущим разделам. Работа написана ясным математическим языком. Удачно сочетается строгость изложения и доступность материала. Многие примеры для наглядности иллюстрируются рисунками.

В процессе подготовки к выполнению контрольной работы рекомендуется изучить теоретические сведения, разобраться с решениями предложенных типовых задач, решить несколько аналогичных задач, ответы на которые известны, и только после этого переходить к выполнению контрольной работы.

ПРОГРАММА КУРСА «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Тема 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

1. Матрицы. Действия над матрицами. Ранг матрицы. Обратная матрица.

2. Определители второго и третьего порядков, их свойства и вычисление. Определители n-го порядка.

3. Обратная матрица. Ранг матрицы.

4. Системы линейных уравнений. Матричная форма записи. Совместность и несовместность систем. Теорема Кронекера – Капелли. Решение систем методами Крамера, Гаусса и обратной матрицы.

5. Векторы. Линейные операции над векторами и их свойства.

6. Проекция вектора на ось. Прямоугольная система координат в пространстве. Ортонормированная тройка векторов. Координаты вектора. Направляющие косинусы и длина вектора. Линейные операции над векторами в координатной форме.

7. Линейно независимые системы векторов. Базис. Ортонормированный базис. Разложение вектора по базису.

8. Скалярное произведение векторов и его свойства.

9. Векторное произведение двух векторов и его свойства. Вычисление площади треугольника, построенного на двух векторах.

10. Смешанное произведение векторов и его свойства. Вычисление объема пирамиды, построенной на трех векторах.

11. Взаимное расположение векторов: перпендикулярность, параллельность, компланарность, угол между векторами.

12. Декартовая и полярная системы координат на плоскости. Уравнение линий на плоскости.

13. Различные формы уравнения прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой. Взаимное расположение прямых на плоскости.

14. Кривые 2-го порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола.

15. Уравнение плоскости и прямой в пространстве. Расстояние от точки до плоскости. Взаимное расположение плоскостей, прямых, прямой и плоскости.

Тема 2. Введение в математический анализ

1. Множества и функции. Области определения и изменения функции. Способы задания. Классификация функций. Основные

элементарные функции. Сложная функция. Функции, заданные параметрически и неявно.

2. Окрестность конечной и бесконечно удаленной точки. Конечный и бесконечный пределы функции. Односторонние пределы.

3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства.

4. Основные теоремы о пределах. Раскрытие неопределенностей.

5. Определение касательной к графику функции. Число *e*. Натуральные логарифмы. Первый и второй замечательные пределы.

6. Сравнение бесконечно малых величин. Эквивалентные бесконечно малые. Использование эквивалентных бесконечно малых при вычислении пределов.

7. Непрерывность функции в точке и на отрезке. Критерий непрерывности функции в точке. Точки разрыва и их классификация. Основные теоремы о непрерывных функциях.

Тема 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1. Производная функции, ее геометрический и механический смысл. Дифференцируемость и непрерывность.

2. Основные правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций.

3. Производные основных элементарных функций. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно.

4. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Основные свойства дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

5. Производные и дифференциалы высших порядков.

6. Основные теоремы о дифференцируемых функциях (Ролля, Коши, Лагранжа). Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей.

Тема 4. Исследование функций с помощью производных

1. Возрастание и убывание функции. Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания дифференцируемой функции.

2. Понятие о локальном экстремуме функции. Необходимые условия экстремума дифференцируемой и непрерывной функций.

3. Достаточные условия экстремума по первой и второй производной. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функций на замкнутом промежутке.

4. Асимптоты графика функции. Вертикальные и наклонные асимптоты и их нахождение.

5. Выпуклые и вогнутые функции. Достаточные условия выпуклости и вогнутости функций. Точки перегиба.

6. Общая схема исследования функции и построение ее графика.

Тема 5. Неопределенный интеграл

1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица неопределенных интегралов.

2. Методы нахождения неопределенных интегралов: интегрирование по частям и заменой переменной.

3. Интегрирование рациональных функций.

4. Интегрирование простейших иррациональных функций и тригонометрических выражений.

Тема 6. Определенный интеграл, несобственные интегралы

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла (о площади криволинейной трапеции, о нахождении пути, пройденного материальной точкой). Определенный интеграл и его основные свойства.

2. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона – Лейбница.

3. Замена переменной в определенном интеграле.

4. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

5. Приложение определенных интегралов к вычислению площадей плоских фигур, длин дуг кривых, объемов тел и площадей поверхностей вращения. Физические приложения определенного интеграла.

6. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости.

Тема 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Дифференциальные уравнения. Основные понятия и определения.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка (решение, общее решение, начальные условия, частное решение). Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

3. Основные классы уравнений первого порядка, интегрируемых в квадратурах (уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли).

4. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши и частное решение. Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

5. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Свойства решений.

6. Линейные однородные дифференциальные уравнения. Структура общего решения.

7. Линейные неоднородные уравнения. Структура общего решения.

8. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

9. Линейные неоднородные уравнения второго порядка со специальной правой частью. Метод подбора частных решений.

10. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.

11. Общее понятие о системах дифференциальных уравнений, задача Коши. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Линейные системы дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями и их решение методом сведения к дифференциальному уравнению второго порядка с одной неизвестной функцией.

Тема 8. Функции нескольких переменных

1. Понятие функции нескольких переменных, область определения, значений и график. Функция нескольких переменных как функция точки.

2. Линии уровня. Поверхности второго порядка и их канонические уравнения.

3. Предел и непрерывность функции двух переменных.

4. Частные производные. Полный и частный дифференциалы функции многих переменных. Инвариантность формы полного дифференциала. Дифференцирование сложных и неявно заданных функций.

5. Градиент и производная по направлению функции нескольких переменных, их свойства.

6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

7. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях.

8. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

9. Экстремумы функций двух переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.

10. Условный экстремум. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области.

Тема 9. Ряды

1. Основные понятия. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда.
2. Необходимый признак сходимости числового ряда. Свойства сходящихся числовых рядов.
3. Знакоположительные ряды. Первый и второй признаки сравнения, признак Даламбера, интегральный признак Коши.
4. Знакопеременные ряды. Абсолютная и уловная сходимость. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница. Оценка остатка знакочередующегося ряда.
5. Функциональные ряды, область сходимости и сумма ряда. Степенные ряды. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы, интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
6. Ряд Тейлора. Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора.
7. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях и к решению дифференциальных уравнений.

Тема 10. Кратные интегралы

1. Задачи, приводящие к двойному интегралу. Двойной интеграл и его свойства. Вычисление двойного интеграла повторным интегрированием в декартовых и полярных координатах. Изменение порядка интегрирования.
2. Тройной интеграл и его свойства. Вычисление тройных интегралов повторным интегрированием в декартовых и цилиндрических координатах.
3. Геометрические и физические приложения кратных интегралов.

Тема 11. Криволинейные и поверхностные интегралы и теория поля

1. Криволинейные интегралы первого и второго рода, их основные свойства и вычисление.

2. Понятие о поверхностных интегралах, их свойства и вычисление.

3. Скалярные и векторные поля. Потенциальные и соленоидальные поля.

4. Поток векторного поля через ориентированную поверхность, его физический смысл. Дивергенция векторного поля, ее физический смысл и вычисление.

5. Формула Грина. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Нахождение функции по ее полному дифференциалу.

Тема 12. Теория вероятностей

1. Предмет теории вероятностей. Понятие случайного события. Классификация случайных событий. Пространство элементарных событий.

2. Классическое определение вероятности. Непосредственный подсчет вероятности. Статистическая вероятность.

3. Сумма и произведение событий и их свойства. Геометрическая интерпретация. Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Зависимые и независимые события. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей. Теорема сложения вероятностей совместных событий.

4. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Схема Бернулли. Формула Бернулли. Предельные теоремы: Пуассона, локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа.

5. Понятие случайной величины. Типы случайных величин. Дискретная случайная величина. Ряд распределения и его свойства. Интегральная функция распределения случайной величины и ее свойства. Числовые характеристики дискретной случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение и их свойства.

6. Непрерывная случайная величина. Интегральная и дифференциальная функции распределения и их свойства. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

7. Законы распределения случайных величин и их числовые характеристики (биномиальный, Пуассона, равномерный, показательный, нормальный). Функция Лапласа и ее свойства. Правило трех сигм и его практическое значение.

8. Двумерные случайные величины. Дискретные и непрерывные. Одномерные составляющие. Числовые характеристики двумерной случайной величины.

Тема 13. Элементы математической статистики

1. Предмет математической статистики. Генеральная совокупность, выборочный метод. Вариационный ряд. Статистическое распределение выборки. Интервальный статистический ряд. Полигон и гистограмма. Эмпирическая функция распределения.
2. Статистические оценки параметров и определение закона распределения генеральной совокупности. Точечные и интервальные оценки. Свойства точечных оценок (статистик): несмещенность, состоятельность и эффективность. Точечные оценки математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения генеральной совокупности. Исправленная выборочная дисперсия.
3. Интервальные оценки параметров генеральной совокупности. Доверительная вероятность. Доверительные интервалы для оценивания математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности.
4. Статистические гипотезы: параметрические и непараметрические. Статистические критерии проверки гипотез. Уровень значимости. Статистическая проверка непараметрических гипотез. Критерий согласия χ^2 Пирсона.
5. Элементы корреляционного и регрессионного анализа. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости. Линейная корреляционная зависимость и прямые регрессии. Выборочный коэффициент корреляции и его свойства. Проверка значимости коэффициента корреляции.
6. Эмпирические зависимости. Метод наименьших квадратов.

Тема 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1.1. Элементы линейной алгебры

Матрицей размера $m \times n$ называется таблица, состоящая из $m \cdot n$ элементов, записанных в m строк и n столбцов. Матрица обычно берется в круглые или квадратные скобки и обозначается большими буквами латинского алфавита. Матрица A размера $m \times n$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1.1)$$

где $a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; \ j = 1, 2, \dots, n$ – элементы матрицы A. Если число строк равно числу столбцов ($m = n$), то матрица называется *квадратной*. Для квадратной матрицы вводится понятие определителя.

Определитель – это числовая характеристика квадратной матрицы, вычисленная из элементов матрицы по определенным правилам. Определитель берется в прямые скобки и обозначается $\det A$.

Так для квадратной матрицы второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

определитель вычисляется следующим образом:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Говорят, что элементы a_{11}, a_{22} лежат на главной диагонали, а элементы a_{21} и a_{12} – на побочной.

Квадратной матрице третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

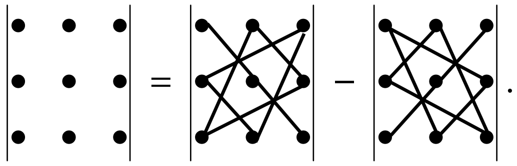
соответствует определитель третьего порядка, который вычисляется следующим образом:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.3}$$

Числа a_{11}, a_{22}, a_{33} – это элементы главной диагонали, a_{13}, a_{22}, a_{31} – элементы побочной диагонали.

Указанное правило вычисления определителя называется правилом треугольников.

Действительно, слагаемые, входящие в формулу (1.3) со знаком « + », лежат на главной диагонали определителя, а также в углах треугольников со сторонами, параллельными главной диагонали, а слагаемые, входящие в формулу (1.3) со знаком « – », лежат на побочной диагонали и в углах треугольников со сторонами, параллельными побочной диагонали:



Рассмотрим применение определителей для решения систем линейных уравнений (*метод Крамера*). Пусть дана система из трех линейных уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{1.4}$$

где $a_{ij}, b_i \ (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$ – заданные числа. Запишем систему (1.4) в матричном виде:

$$AX = b; \tag{1.5}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

где A – матрица системы; X – столбец неизвестных; b – столбец свободных членов.

Пусть определитель матрицы системы (1.5) отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.6}$$

Тогда система (1.5) имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{1.7}$$

где Δ_j – определитель, полученный из определителя системы путем замены j-го столбца столбцом свободных членов.

Задача 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель Δ данной системы по правилу треугольников:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) \cdot 1 + (-4) \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) -$$

$$-1 \cdot (-5) \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot (-4) =$$

$$= -8 \neq 0.$$

Вычисляем вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) \cdot 1 + (-4) \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) -$$

$$-1 \cdot (-5) \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \cdot (-4) = -16;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$-1 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 3 = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-5)\cdot 1 + 1\cdot(-4)\cdot(-1) +$$

$$-3\cdot(-5)\cdot 1 - 2\cdot(-1)\cdot(-1) - (-4)\cdot 1\cdot 1 = 8.$$

Значит, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-16}{-8} = 2$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{0}{-8} = 0$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{8}{-8} = -1$.

Проверка:

$$\begin{cases} 2\cdot 2 - 4\cdot 0 - 1 = \ 3, \\ 2 - 5\cdot 0 + 3\cdot(-1) = -1, \\ 2 - \ 0 - 1 = \ 1. \end{cases}$$

Верно.

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = 0$; $x_3 = -1$.

1.2. Основные сведения из векторной алгебры

Вектором называют направленный отрезок (рис. 1.1). Если точка A – начало вектора, а B – его конец, то такой вектор обозначают $\overrightarrow{AB}$.

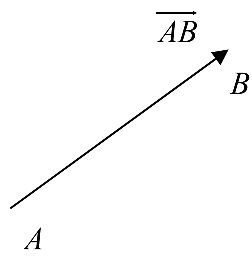


Рис. 1.1

Наряду с этим используется обозначение вектора малой латинской буквой со стрелкой, т. е. $\vec{a}$.

Векторы называют равными, если они имеют равные длины и одинаково направлены. Число, равное длине вектора, называется его модулем и обозначается символом $|\vec{a}|$. Если $|\vec{a}|$ = 1, то вектор $\vec{a}$ называется единичным.

Векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Пусть вектор $\vec{a}$ наклонен к оси l под углом φ (рис. 1.2). Тогда проекция вектора $\vec{a}$ на ось l обозначается символом $np_l\vec{a}$ и вычисляется по формуле

$$np_l\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\cos\varphi. \qquad (1.8)$$

Проекции вектора $\vec{a}$ на оси прямоугольной декартовой системы координат называются *координатами вектора*. Координаты вектора обозначаются буквами x, y, z соответственно координатным осям, а вектор в координатной форме записывается $\vec{a} = \{x; y; z\}$. Три взаимно-перпендикулярных вектора единичной длины $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ называют *орто-нормированным базисом*.

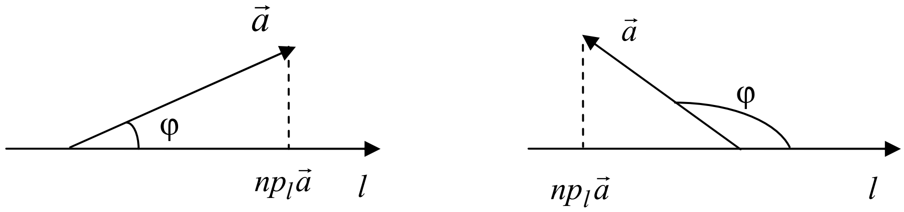


Рис. 1.2

Вектор в ортонормированном базисе имеет вид

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{1.9}$$

Если даны две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, являющиеся соответственно началом и концом вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, то

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}. \tag{1.10}$$

Длина вектора $\vec{a}$ находится по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1.11}$$

Если вектор $\vec{a}$ составляет с координатными осями углы α, β и γ, то $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* $\vec{a}$ и определяются по формулам

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|};\ \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|};\ \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}, \tag{1.12}$$

причем

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{1.13}$$

Над векторами $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$ определены операции сложения, умножения на число, а также скалярное и векторное произведения.

При этом для сложения векторов и умножения вектора на число имеют место следующие формулы:

$$\vec{a}+\vec{b}=\{x_1+x_2;\, y_1+y_2;\, z_1+z_2\}; \quad \mu\,\vec{a}=\{\mu\,x_1;\, \mu\,x_2;\, \mu\,x_3\}. \qquad (1.14)$$

Определение. *Скалярным произведением двух векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов, умноженному на косинус угла между ними.

Скалярное произведение обозначается точкой между векторами или круглыми скобками. Если угол между векторами обозначим через φ, то скалярное произведение можно выразить следующей формулой:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi\,.$$

Для векторов, записанных в координатной форме, скалярное произведение вычисляется по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1 y_1+x_2 y_2+x_3 y_3\,. \qquad (1.15)$$

Определение. *Векторным произведением двух векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый символом $\vec{a}\times\vec{b}$ и определяемый следующими тремя условиями (рис. 1.3):

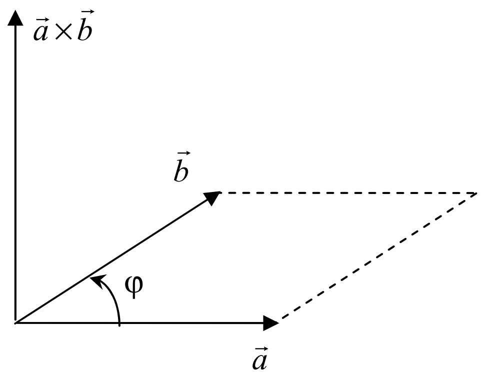


Рис. 1.3

1) модуль вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ равен $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах);

2) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярен плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) направлен в сторону, откуда кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден против часовой стрелки.

Для векторов, записанных в координатной форме, векторное произведение вычисляется по формуле

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}\,. \qquad (1.16)$$

Определение. *Смешанным произведением трех векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное векторному произведению $\vec{a}\times\vec{b}$, умноженному скалярно на вектор $\vec{c}$, и обозначается $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Для векторов, записанных в координатной форме, смешанное произведение вычисляется по формуле

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{1.17}$$

Из определения скалярного произведения $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$ и формулы (1.15) можно найти косинус угла φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{1.18}$$

Поскольку площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi, \tag{1.19}$$

то площадь S треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \tag{1.20}$$

Наконец, из определения смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вытекает, что объем треугольной пирамиды, построенной на этих векторах, определяется формулой

$$V = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \tag{1.21}$$

1.3. Основные сведения из аналитической геометрии

Общее уравнение прямой на плоскости в декартовой системе координат имеет вид

$$Ax + By + C = 0. \tag{1.22}$$

Вектор $\vec{n} = \{A; B\}$ называется *нормальным вектором прямой*. Он перпендикулярен прямой (рис. 1.4).

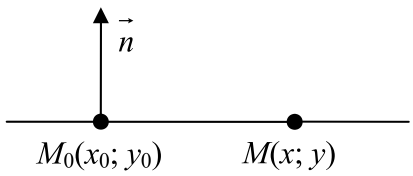


Рис. 1.4

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A; B\}$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0\,. \qquad (1.23)$$

Если две прямые заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то угол φ между ними определяется как угол между их нормальными векторами $\vec{n_1} = \{A_1; B_1\}$ и $\vec{n_2} = \{A_2; B_2\}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\,. \qquad (1.24)$$

Следовательно, условие перпендикулярности двух прямых $\cos\varphi = 0$ или

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0\,, \qquad (1.25)$$

а условие параллельности имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}\,. \qquad (1.26)$$

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой (1.22) вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,.$$

Рассмотрим другие виды уравнений прямой на плоскости.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно вектору $\vec{s} = \{m; n\}$, имеет вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}\,. \qquad (1.27)$$

Вектор $\vec{s} = \{m; n\}$ называется *направляющим вектором прямой*.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, записывается по формуле

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\,. \qquad (1.28)$$

Угловым коэффициентом прямой называется тангенс угла α наклона прямой к оси Ox (рис. 1.5). Уравнение прямой с угловым коэффициентом k имеет вид

$$y = kx + b. \tag{1.29}$$

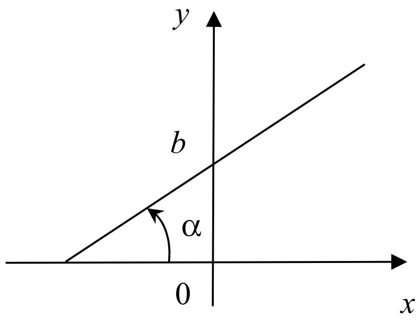


Рис. 1.5

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$, записывается по формуле

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{1.30}$$

Если две прямые заданы уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то условие перпендикулярности этих прямых имеет вид

$$k_1 \cdot k_2 = -1, \tag{1.31}$$

а условие параллельности:

$$k_1 = k_2. \tag{1.32}$$

Рассмотрим далее различные виды прямой в пространстве.

Каноническое уравнение прямой в пространстве (рис. 1.6) имеет вид

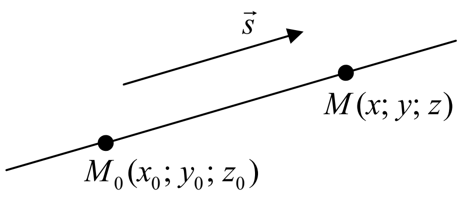


Рис. 1.6

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \tag{1.33}$$

где $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка, лежащая на прямой, а $\vec{s} = \{m; n; p\}$ – направляющий вектор прямой.

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ записывается по формуле

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{1.34}$$

Параметрическое уравнение прямой в пространстве имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \quad -\infty < t < +\infty. \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \tag{1.35}$$

Общее уравнение плоскости в декартовой системе координат имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{1.36}$$

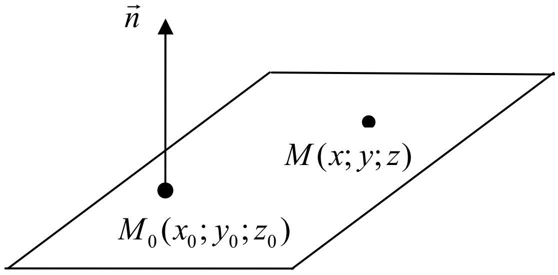


Рис. 1.7

Вектор $\vec{n} = \{A; B; C\}$ называется *нормальным вектором плоскости*. Он перпендикулярен плоскости (рис. 1.7). Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A; B; C\}$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{1.37}$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, записывается по формуле

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.38}$$

Если две плоскости заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то угол φ между ними определяется как угол между их нормальными векторами $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{1.39}$$

Следовательно, условие перпендикулярности двух прямых имеет вид $\cos\varphi = 0$ или

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0, \tag{1.40}$$

а условие параллельности:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{1.41}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до прямой (1.36) вычисляется по формуле

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (1.42)$$

Рассмотрим кривые второго порядка.

Линии, задаваемые уравнением второй степени относительно текущих координат x и y, называются *кривыми второго порядка*. Простейшей кривой второго порядка является окружность.

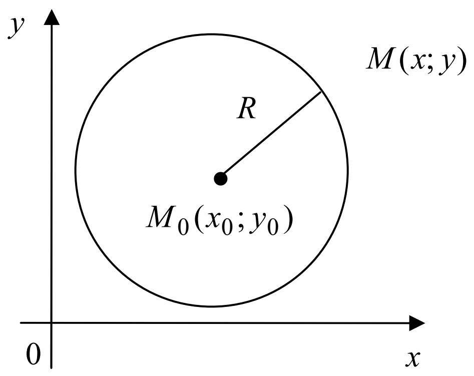


Рис. 1.8

Определение. *Окружностью* называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки этой плоскости, называемой *центром* окружности (рис. 1.8).

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $M_0(x; y_0)$ имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (1.43)$$

Уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат записывается формулой

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (1.44)$$

Параметрическое уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат имеет вид

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi. \qquad (1.45)$$

Определение. *Эллипсом* называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек этой плоскости (*фокусов эллипса* F_1 и F_2) есть величина постоянная (большая, чем расстояние между фокусами).

Если оси координат по отношению к эллипсу расположить так, как указано на рис. 1.9, то каноническое уравнение эллипса будет представлено следующим выражением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1.46)$$

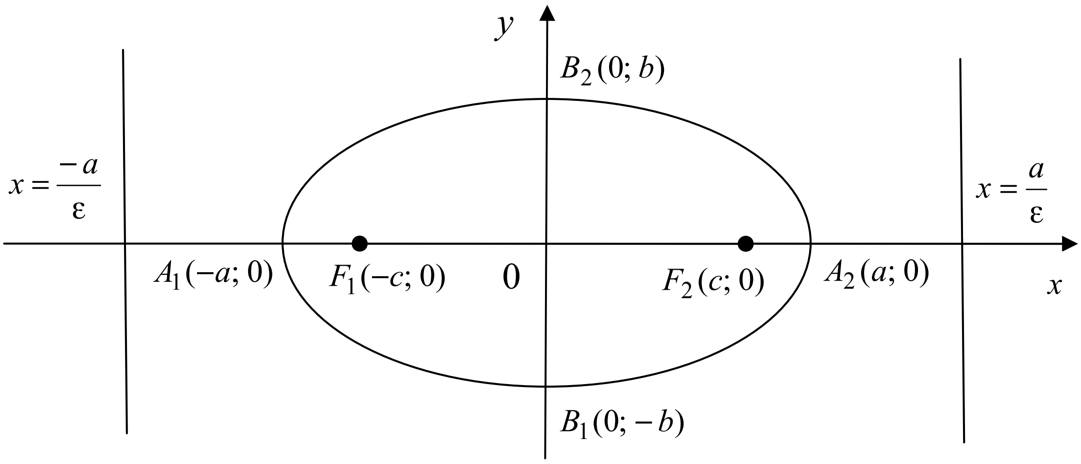


Рис. 1.9

Точки пересечения эллипса с осями координат называются вершинами эллипса. Вершины эллипса имеют координаты $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$. Числа a и b называются соответственно большей и малой полуосями эллипса. Расстояние между фокусами эллипса обозначим через $2c$, тогда полуфокусное расстояние c связано с полуосями соотношением $a^2 - b^2 = c^2$.

Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$, где a – большая полуось, называется *эксцентриситетом эллипса*. Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса вдоль большей полуоси. Чем больше эксцентриситет, тем больше вытянутый эллипс. Для эллипса $0 < \varepsilon < 1$ (для окружности $\varepsilon = 0$).

Две прямые $x = -\frac{a}{\varepsilon}$, $x = \frac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные большей полуоси, называются *директрисами эллипса*.

Параметрическое уравнение эллипса имеет вид

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi. \tag{1.47}$$

Определение. *Гиперболой* называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний от двух данных точек этой плоскости (фокусов гиперболы F_1 и F_2) есть величина постоянная (меньше расстояния между фокусами и отлична от нуля).

Если оси координат по отношению к гиперболе расположить так, как указано на рис. 1.10, то каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1.48)$$

Точки $A_1(-a;0)$ и $A_2(a;0)$ пересечения гиперболы с осью Ox называются вершинами гиперболы. Ось Ox называется действительной осью, а ось Oy – мнимой осью. Числа a и b называются соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы. Расстояние между фокусами гиперболы обозначим через $2c$, тогда полуфокусное расстояние c связано с полуосями соотношением $c^2-a^2=b^2$.

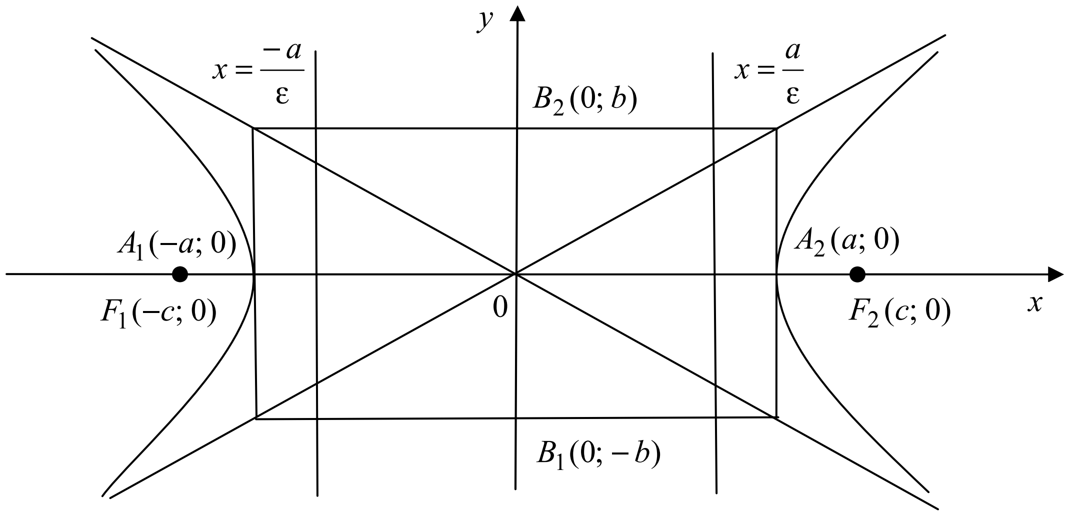


Рис. 1.10

Две прямые

$$y=-\frac{b}{a}x, \qquad y=\frac{b}{a}x \qquad (1.49)$$

называются *асимптотами* гиперболы. К ним приближаются ветви гиперболы при неограниченном удалении от начала координат.

Число $\varepsilon=\frac{c}{a}$, где a – действительная полуось, называется *эксцентриситетом гиперболы*. Очевидно, что для гиперболы $\varepsilon>1$.

Две прямые $x=-\frac{a}{\varepsilon}$, $x=\frac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные действительной полуоси, называются *директрисами эллипса*.

Определение. *Параболой* называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых расстояние до некоторой данной точки F этой плоскости, называемой *фокусом*, равно расстоянию до некоторой данной прямой, называемой *директрисой* (рис. 1.11).

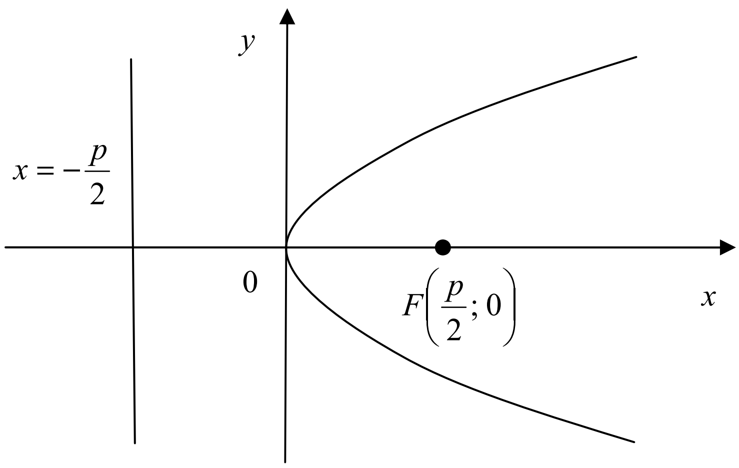


Рис. 1.11

Каноническое уравнение параболы в выбранной декартовой системе координат имеет вид

$$y^2 = 2px, \tag{1.50}$$

где p – расстояние от фокуса до директрисы. В этой же системе координат уравнение директрисы имеет вид

$$x = -\frac{p}{2}. \tag{1.51}$$

Эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$.

Замечание. Эллипс, гипербола и парабола и только эти кривые обладают общим геометрическим свойством – отношение расстояния от любой точки каждой из этих кривых до фокуса к расстоянию от этой точки до ближайшей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету ε.

1.4. Полярная система координат

Если на плоскости заданы фиксированная точка O, называемая *полюсом*, и исходящий из полюса луч с выбранной на нем единицей масштаба, называемый *полярной осью*, то говорят, что на плоскости задана *полярная система координат*. В этом случае положение любой точки M на плоскости определяется двумя числами r и φ, где r – расстояние от точки M до точки O, φ – угол, образуемый вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением полярной оси. Угол φ, отсчитываемый от полярной оси до вектора $\overrightarrow{OM}$ в направлении против часовой стрелки, считается положительным, а отсчитываемый в противоположном направлении – отрицательным (рис. 1.12).

Обычно считают, что $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le r < \infty$. Если $r = 0$, точка M совпадает с полюсом O и угол φ для нее не определен.

Пусть наряду с полярной системой координат на плоскости выбрана прямоугольная декартова система координат так, что начало координат совпадает с полюсом O, а ось Ox совпадает с полярной осью (рис. 1.13). Тогда прямоугольные координаты x и y точки M связаны с ее полярными координатами r и φ соотношениями

$$x = r \cdot \cos\varphi; \quad y = r \cdot \sin\varphi. \tag{1.52}$$

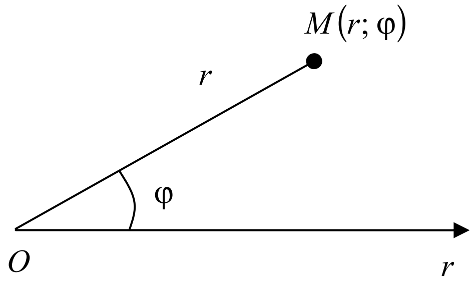


Рис. 1.12

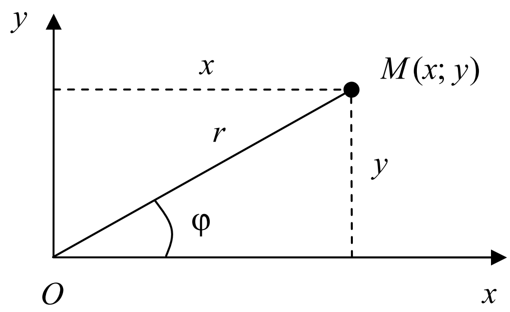


Рис. 1.13

Из (1.51), в частности, вытекает, что

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{1.53}$$

Рассмотрим далее применение вышеизложенных теоретических сведений к решению типовых задач.

Задача 2. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(3;3;9)$, $A_2(6;9;1)$, $A_3(1;7;3)$, $A_4(8;5;8)$. Найти: 1) длину ребра A_1A_2; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 4) площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) объем пирамиды; 6) уравнение прямой A_1A_2; 7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Решение. Сделаем схематический чертеж (рис. 1.14). По формуле (1.10) найдем координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{6-3; 9-3; 1-9\} = \{3;\ 6; -8\};$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = \{1-3; 7-3;\ 3-9\} = \{-2; 4; -6\};$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \{8-3; 5-3;\ 8-9\} = \{5;\ 2; -1\}.$$

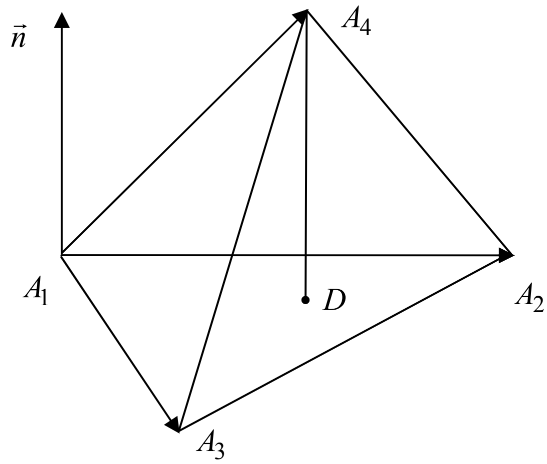


Рис. 1.14

1) Длину ребра A_1A_2 найдем по формуле (1.11):

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-8)^2} = \sqrt{109}\,.$$

2) Угол φ между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 найдем как угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ по формуле (1.18):

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \frac{3\cdot 5 + 6\cdot 2 + (-8)\cdot(-1)}{\sqrt{3^2+6^2+(-8)^2}\cdot\sqrt{5^2+2^2+(-1)^2}} =$$

$$= \frac{35}{\sqrt{109}\cdot\sqrt{30}} \approx 0{,}6121,$$

откуда $\varphi = \arccos 0{,}6121 \approx 52°15'$.

3) Для нахождения угла α между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ найдем нормальный вектор $\vec{n}$, перпендикулярный плоскости $A_1A_2A_3$,

в качестве которого можно взять векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$, вычисляемое по формуле (1.16):

$$\vec{n}=\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 6 & -8\\ -2 & 4 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & -8\\ 4 & -6\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & -8\\ -2 & -6\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & 6\\ -2 & 4\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=$$

$$=-4\cdot\vec{i}+34\cdot\vec{j}+24\cdot\vec{k}.$$

Синус искомого угла α равен косинусу угла β между векторами $\vec{n}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$, так как сумма этих углов равна $\frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\sin\alpha=\cos\beta=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}=\frac{-4\cdot5+34\cdot2+24\cdot(-1)}{\sqrt{(-4)^2+34^2+24^2}\cdot\sqrt{5^2+2^2+(-1)^2}}=$$

$$=\frac{24}{\sqrt{1748}\cdot\sqrt{30}}\approx0{,}1048,\ \text{т. е.}\ \ \alpha\approx\arcsin0{,}1048\approx6^\circ1'.$$

4) Площадь грани $A_1A_2A_3$ вычислим по формуле (1.20):

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\frac{1}{2}|\vec{n}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+34^2+24^2}=\frac{\sqrt{1748}}{2}=\sqrt{437}\approx20{,}9.$$

5) Объем V пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найдем по формулам (1.17) и (1.21):

$$V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}3 & 6 & -8\\ -2 & 4 & -6\\ 5 & 2 & -1\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\left|3\cdot\begin{vmatrix}4 & -6\\ 2 & -1\end{vmatrix}-6\cdot\begin{vmatrix}-2 & -6\\ 5 & -1\end{vmatrix}+(-8)\cdot\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 5 & 2\end{vmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot|3\cdot8-6\cdot32-8\cdot(-24)|=\frac{1}{6}\cdot|24|=4\ \text{(куб. ед.)}.$$

6) Уравнение прямой A_1A_2 найдем по формуле (1.33):

$$\frac{x-3}{6-3}=\frac{y-3}{9-3}=\frac{z-9}{1-9},\ \text{т. е.}\ \ \frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{6}=\frac{z-9}{-8}.$$

7) Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ найдем по формуле (1.38):

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-9 \\ 6-3 & 9-3 & 1-9 \\ 1-3 & 7-3 & 3-9 \end{vmatrix} = 0, \text{ т. е. } \begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-9 \\ 3 & 6 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-3)\begin{vmatrix} 6 & -8 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} + (z-9)\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-4(x-3) + 34(y-3) + 24(z-9) = 0.$$

Отсюда, $-4x + 34y + 24z - 306 = 0$, или $2x - 17y - 12z - 153 = 0$ – искомое уравнение плоскости.

8) Из полученного выше уравнения плоскости следует, что ее нормальный вектор $\vec{n} = \{2; -17; -12\}$.

Нормальный вектор $\vec{n}$ перпендикулярен плоскости $A_1A_2A_3$, поэтому его можно взять за направляющий вектор высоты, опущенной из вершины A_4 на эту плоскость. Следовательно, уравнение этой высоты можно найти по формуле (1.33):

$$\frac{x-8}{2} = \frac{y-5}{-17} = \frac{z-8}{-12}.$$

Задача 3. Найти уравнение окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(-1; 1)$, $B(2; -1)$, $C(4; 0)$.

Решение. Сначала найдем координаты центра окружности. Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении перпендикуляров, проведенных к серединам сторон треугольника.

Поэтому для решения этой задачи поступим следующим образом:

1) составим уравнения сторон AB и AC;

2) найдем координаты середин сторон AB и AC;

3) составим уравнения прямых, перпендикулярных сторонам AB и AC и проведенных через их середины;

4) найдем координаты центра окружности;

5) найдем радиус описанной окружности;

6) запишем уравнение описанной окружности.

Для наглядности решения сделаем рис. 1.15.

1) Уравнения сторон AB и AC найдем по формуле (1.28). Уравнение стороны AB будет:

$$\frac{x-(-1)}{2-(-1)}=\frac{y-1}{-1-1},\text{ или }\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2},\text{ т. е. }y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3};\; k_{AB}=-\frac{2}{3}.$$

Уравнение стороны AC:

$$\frac{x-(-1)}{4-(-1)}=\frac{y-1}{0-1},\text{ или }\frac{x+1}{5}=\frac{y-1}{-1},\text{ т. е. }y=-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5};\; k_{AC}=-\frac{1}{5}.$$

2) Найдем координаты точек M и N, являющихся серединами сторон AB и AC соответственно, по формулам

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2};\; y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{1-1}{2}=0;$$

$$x_N=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-1+4}{2}=\frac{3}{2};\; y_N=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}.$$

Итак, $M\left(\frac{1}{2};0\right)$ и $N\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ – середины сторон AB и AC.

3) Для составления уравнений прямых, проходящих через точки M и N перпендикулярно сторонам треугольника, используем формулу (1.30), найдя предварительно угловые коэффициенты прямых из условия (1.31).

Так как $k_{AB}=-\frac{2}{3}$ (см. найденное уравнение прямой AB), то $k_1=-\frac{1}{k_{AB}}=\frac{3}{2}$, значит, уравнение первой прямой, проходящей через точку M, имеет вид

$$(y-y_M)=k_1(x-x_M),\text{ т. е. }y-0=\frac{3}{2}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right),\text{ или }y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}.$$

Поскольку $k_{AC}=-\frac{1}{5}$ (см. найденное уравнение прямой AC), то $k_2=-\frac{1}{k_{AC}}=5$, значит, уравнение второй прямой, проходящей через точку N, имеет вид $y-y_N=k_2(x-x_N)$, т. е. $y-\frac{1}{2}=5\left(x-\frac{3}{2}\right)$, или $y=5x-7$.

4) Решив систему из двух уравнений, найдем координаты точки O_1 – точки пересечения прямых, являющейся центром искомой окружности:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{4}, \\ y = 5x - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{4} = 5x - 7, \\ y = 5x - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{25}{14}, \\ y = 5 \cdot \dfrac{25}{14} - 7 = \dfrac{27}{14}. \end{cases}$$

Итак, точка $O_1\left(\dfrac{25}{14}; \dfrac{27}{14}\right)$ – центр искомой окружности.

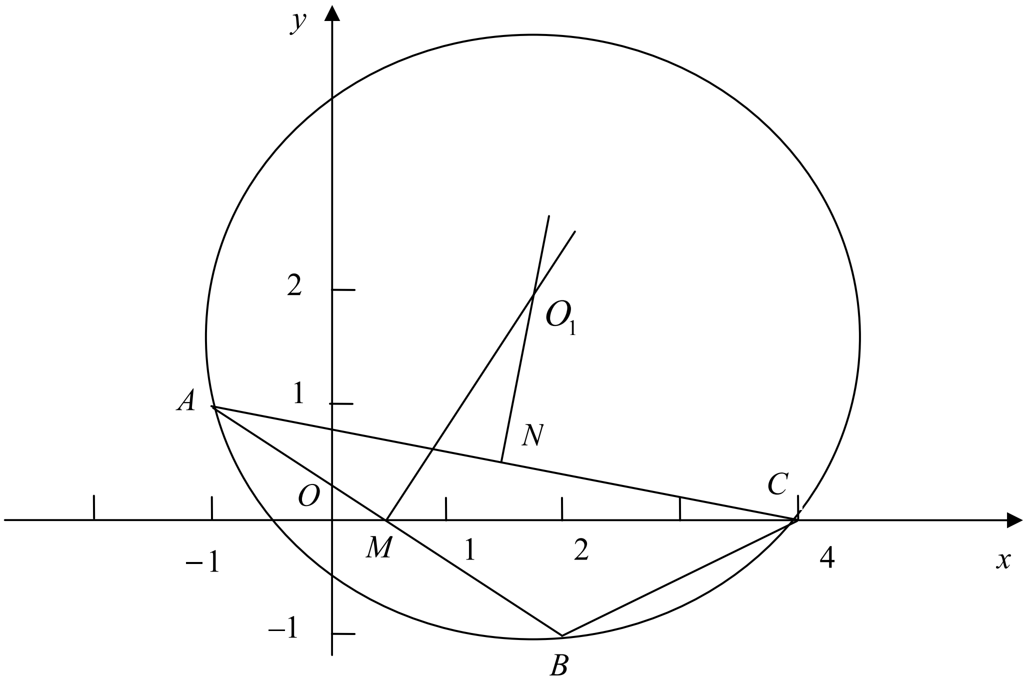


Рис. 1.15

5) Радиус R описанной окружности равен расстоянию от центра окружности до любой из вершин треугольника. Расстояние между точками O_1 и A в соответствии с формулами (1.10) и (1.11) равно

$$O_1A = \sqrt{\left(\frac{25}{14} - 2\right)^2 + \left(\frac{27}{14} - 2\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{14} = R.$$

6) По формуле (1.43) запишем уравнение искомой окружности:

$$\left(x - \frac{25}{14}\right)^2 + \left(y - \frac{27}{14}\right) = \frac{10}{196}.$$

Задача 4. Оси эллипса совпадают с осями координат. Большая полуось расположена на оси Ox. Записать уравнение эллипса и сделать чертеж с изображением директрис, если известно, что расстояние между фокусами равно $2c = 6$, а эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{3}{5}$.

Решение. Из условия задачи вытекает, что $c = 3$. Из определения эксцентриситета имеем $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{a} = \dfrac{3}{5}$, следовательно $a = 5$. По формуле, связывающей *a*, *b* и *c*, находим

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 16} = 4.$$

Следовательно, искомое уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Уравнения директрис:

$$x = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{5}{\frac{3}{5}} = \frac{25}{3}; \quad x = -\frac{a}{\varepsilon} = -\frac{5}{\frac{3}{5}} = -\frac{25}{3}.$$

Эллипс и директрисы изображены на рис. 1.16.

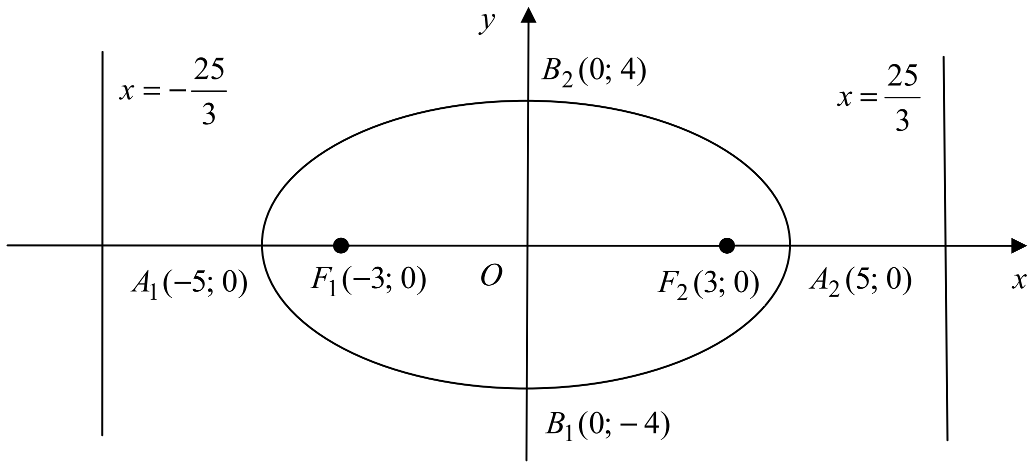


Рис. 1.16

Задача 5. Фокусы гиперболы расположены на оси *Ox* симметрично началу координат. Записать уравнение гиперболы и сделать чертеж с изображением директрис и асимптот, если известно, что расстояние между директрисами равно $12\dfrac{4}{5}$, а уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{3}{4}x$.

Решение. Так как фокусы гиперболы расположены на оси Ox, то уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Найдем a и b. Поскольку расстояние между директрисами равно $12\frac{4}{5}$, то уравнение правой директрисы определяется выражением $x=\frac{a}{\varepsilon}=\frac{32}{5}$. Учитывая то, что $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}$ и $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$, имеем

$$x=\frac{a}{\varepsilon}=\frac{a^2}{c}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2+1}}=\frac{a}{\sqrt{\frac{9}{16}+1}}=\frac{4a}{5}=\frac{32}{5}.$$

Следовательно, $a=8$, $b=6$, а уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1.$$

Искомая гипербола изображена на рис. 1.17.

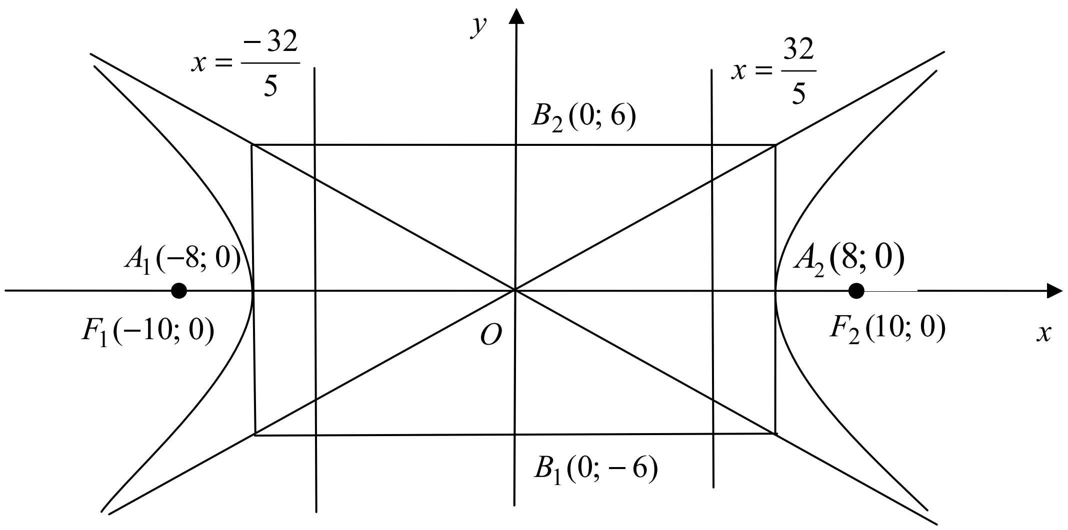


Рис. 1.17

Задача 6. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $A(2; 2)$ и от оси абсцисс. Сделать чертеж.

Решение. Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка искомой линии (рис. 1.18). Расстояние MA запишем в соответствии с формулами (1.10) и (1.11) в виде

$$MA=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}\,.$$

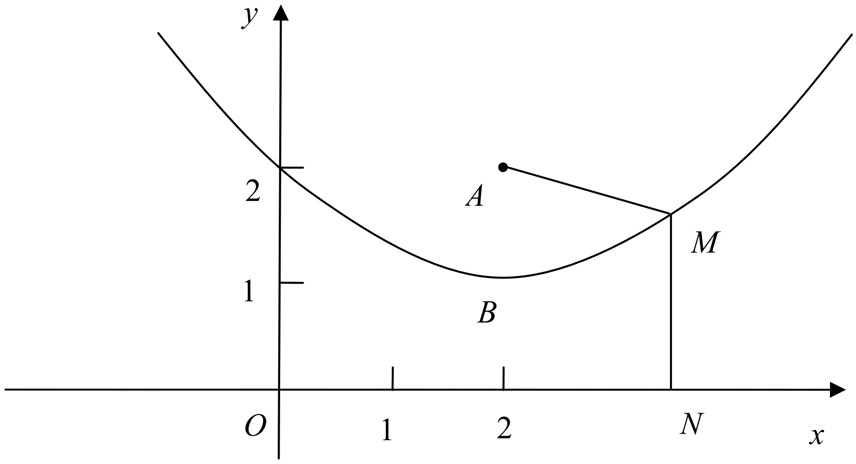


Рис. 1.18

Расстояние от точки M до оси абсцисс, т. е. до точки $N(x;0)$, такое, что $MN\perp Ox$, составит:

$$MN=\sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2}=|y|\,.$$

Так как по условию задачи $MA=MN$, то $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=|y|$, или, возведя обе части последнего уравнения в квадрат и выполнив тождественные преобразования, получим:

$$x^2-4x+4+y^2-4y+4=y^2,\ \text{т. е. }\ y=\frac{1}{4}(x-2)^2+1\,.$$

Последнее уравнение есть уравнение параболы, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке $B(2;1)$.

Тема 2. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2.1. Понятие предела функции и основные теоремы о пределах

Множество точек, удовлетворяющих условию $a < x < b$, называется *интервалом* и обозначается $(a; b)$ или $]a; b[$. Интервалы могут быть конечными и бесконечными. Если один из концов интервала включается в множество, то множество называется *полуинтервалом*. Например, $[a; b)$.

Множество точек, удовлетворяющих условию $a \le x \le b$, называется *отрезком* и обозначается $[a; b]$.

Окрестностью конечной точки x_0 называется любой интервал, содержащий эту точку. Если из окрестности удалить точку x_0, то окрестность называется проколотой.

Определение. Конечное число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая проколотая окрестность точки *a*, что для всех *x* из этой окрестности выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ и записывается $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Введем понятие бесконечного предела функции при $x \to a$.

Определение. Говорят, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, если для любого сколь угодно большого числа $M > 0$ существует такая окрестность точки *a*, что для всех *x* из этой окрестности выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

Рассмотрим односторонние пределы. Если $x \to a$ и $x < a$, то это записывается в виде $x \to a - 0$. Если же $x \to a$ и $x > a$, то это записывается в виде $x \to a + 0$. Числа

$$f(a - 0) = \lim_{x \to a - 0} f(x) \quad \text{и} \quad f(a + 0) = \lim_{x \to a + 0} f(x)$$

называют пределом слева функции $f(x)$ в точке *a* и пределом справа функции $f(x)$ в точке *a* (если эти числа существуют), соответственно.

Для существования предела $f(x)$ при $x \to a$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $f(a - 0) = f(a + 0)$.

При вычислении пределов используют следующие ***основные теоремы о пределах***.

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, то:

1) $\lim\limits_{x \to a}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$; (2.1)

2) $\lim\limits_{x \to a}\big(\ f(x) \cdot g(x)\ \big) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$; (2.2)

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ (если $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$); (2.3)

4) $\lim\limits_{x \to a}(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$. (2.4)

Для элементарных функций во всех точках из области их определения

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{2.5}$$

Иногда полезно использовать равенства

$$\lim_{x \to a}\big(\ln f(x)\big) = \ln\Big(\lim_{x \to a} f(x)\Big); \tag{2.6}$$

$$\lim_{x \to a} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a} f(x)}. \tag{2.7}$$

Наконец, следует знать *два замечательных предела:*

1-й замечательный предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \tag{2.8}$$

2-й замечательный предел:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \text{ или } \lim_{\alpha \to 0}(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \tag{2.9}$$

Число $e \approx 2{,}718282$ есть иррациональное число. Логарифм по основанию e называется натуральным логарифмом и записывается $\ln x$, а функция $y = e^x$ называется *экспонентой*.

Поскольку $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (2.5), то при вычислении пределов, прежде всего, вместо x подставляем предельное значение (обычно это записывается в квадратных скобках) и, если значение $f(x_0)$ определено, применяем основные теоремы о пределах.

Однако часто при подстановке в $f(x)$ вместо x предельного значения x_0 получаются выражения вида: $\left[\frac{0}{0}\right]$; $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; $[0\cdot\infty]$; $[1^\infty]$; $[\infty-\infty]$ и другие, которые называются *неопределенностями*. Полученные неопределенности нужно «раскрывать» специальными методами, учитывая характер стремления к пределу отдельных функций, составляющих данную функцию.

Рассмотрим *основные приемы раскрытия* некоторых видов неопределенностей.

1) При нахождении предела отношения двух многочленов при $x\to\infty$, числитель и знаменатель дроби полезно разделить на x^n, где n – наивысшая степень этих многочленов.

Задача 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-10}{3x^2-5x+1}$.

Решение. Вычислим данный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-10}{3x^2-5x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{10}{x^2}}{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+0-0}{3-0+0}=\frac{1}{3}.$$

При решении задачи применили деление числителя и знаменателя дроби на x^2 и использовали соотношения (2.1)–(2.3).

Иногда аналогичный прием можно применить и для дробей, содержащих иррациональности.

2) При нахождении предела $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ (a – конечное число) отношения двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, где $P(a)=Q(a)=0$, следует сократить дробь один или несколько раз на бином $x-a$.

Задача 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+10}$.

Решение. Используя формулу разложения квадратного трехчлена на множители $ax^2+bx^2+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена, получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+10}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-5)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x-5}=\frac{2-1}{2-5}=-\frac{1}{3}.$$

3) При вычислении пределов от выражений, содержащих иррациональность, переводим иррациональность из числителя в знаменатель, или наоборот, используя умножение числителя и знаменателя дроби на сопряженное выражение.

Задача 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{1+1}=1.$$

В данном случае умножили числитель и знаменатель дроби на величину, сопряженную числителю, далее сократили числитель и знаменатель на x и применили формулы (2.1) и (2.3).

4) При вычислении пределов от тригонометрических функций иногда приходится использовать 1-й замечательный предел (2.8), а при раскрытии неопределенностей вида $\left[1^{\infty}\right]$ – 2-й замечательный предел (2.9).

Задача 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2\cdot 1^2=2.$$

При решении задачи использовали тригонометрическую формулу $1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, а также (2.4) и (2.8).

Задача 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)^{2x}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5}{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{5}{x}}{1+\frac{3}{x}}=1$, то в данном случае имеем неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$, для раскрытия которой используем второй замечательный предел (2.9) следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+5}{x+3}-1\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2}}\right)^{\frac{2}{x+3}\cdot 2x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{1+\frac{3}{x}}}=e^{4}.$$

При решении задачи использовали (2.9) так:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2}}=\left|\text{замена}\,\alpha=\frac{2}{x+3}\right|=\lim_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=e,$$

была применена также и формула (2.7).

Задача 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(x+2)-\ln x)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(x+2)-\ln x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\dfrac{x+2}{x}=(\infty\cdot 0)=$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\ln\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{2}=\ln e^{2}=2\cdot\ln e=2.$$

При решении задачи использованы формулы (2.9) и (2.6), а также свойства логарифмов.

2.2. Непрерывность функции

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в точке x_0 и некоторой ее окрестности.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если:

1) $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то второе условие можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0).$$

Это означает, что для непрерывной функции знаки предела и функции можно переставлять.

Определение. Если функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$ (аналогично $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) =$ $= f(x_0 + 0) = f(x_0)$), то функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 слева (соответственно справа).

Обычно при исследовании функции на непрерывность используют следующий критерий.

Критерий. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если выполняются следующие три условия:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0;

2) существуют односторонние пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$;

3) эти пределы равны между собой и равны значению функции в точке x_0, т. е. выполняется условие

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0). \tag{2.10}$$

При вычислении пределов функций часто используется теорема: «*Элементарные функции непрерывны в каждой точке области определения*».

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a; b]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка, в точке a непрерывна справа, а в точке b слева.

Определение. Точка x_0 называется точкой разрыва, если в этой точке нарушается хотя бы одно из условий непрерывности.

Точки разрыва функции классифицируются следующим образом.

Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва, если в этой точке существуют односторонние пределы, они равны между собой, но не равны значению функции в точке x_0, или функция в точке x_0 не определена.

Если в точке устранимого разрыва функцию доопределить или сделать равной односторонним пределам, то функция в этой точке станет непрерывной.

Точка x_0 называется точкой конечного разрыва, если в этой точке существуют односторонние пределы, но они не равны между собой.

Точка x_0 называется точкой бесконечного разрыва, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности.

Точки устранимого и конечного разрывов называются точками разрыва I (первого) рода.

Если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0)$ или $f(x_0+0)$ равен бесконечности или не существует, то точки разрыва называют точками разрыва II (второго) рода.

Задача 7. Рассмотрим функцию $f(x)=2^{\frac{1}{x-5}}$. Заданы два значения аргумента $x_1=3$ и $x_2=5$. Требуется:

1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента;

2) в случае разрыва функции найти ее пределы в точках разрыва слева и справа;

3) сделать схематический чертеж графика.

Решение. 1) Так как $f(x)$ является элементарной функцией, то она непрерывна во всех точках $(-\infty;5)\cup(5;+\infty)$, в которых она определена. Следовательно, в точке $x_1=3$ функция непрерывна. В точке $x_2=5$ функция не определена (деление на ноль не определено). Не выполняется первое условие критерия непрерывности. Значит, $x_2=5$ – точка разрыва функции.

2) Вычислим односторонние пределы в точке $x_2=5$:

$$f(5-0)=\lim_{x\to 5-0}2^{\frac{1}{x-5}}=2^{\frac{1}{5-0-5}}=2^{\frac{1}{-0}}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0;$$

$$f(5+0)=\lim_{x\to 5+0}2^{\frac{1}{x-5}}=2^{\frac{1}{5+0-5}}=2^{\frac{1}{+0}}=2^{+\infty}=+\infty.$$

Один из пределов оказался бесконечным, поэтому $x_2=5$ – точка бесконечного разрыва.

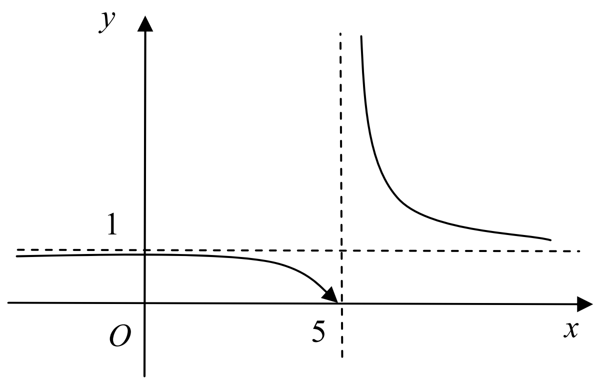


Рис. 2.1

3) Учитывая, что $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x-5}} = 2^{\frac{1}{\infty}} = 2^0 = 1$, строим эскиз графика функции (рис. 2.1).

Задача 8. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{если } x \le 1, \\ 2x, & \text{если } 1 < x \le 3, \\ x+2, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

найти точки разрыва, если они существуют, и сделать схематический чертеж графика.

Решение. Поскольку $f(x)$ задана тремя непрерывными элементарными функциями, то она непрерывна на каждом из интервалов $(-\infty; 1)$, $(1; 3)$ и $(3; +\infty)$. Точками разрыва данной функции могут быть лишь точки $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$, в которых функция меняет свое аналитическое задание. Проверим в этих точках выполнение условий критерия.

Рассмотрим сначала точку $x_1 = 1$.

1) Функция определена в точке $x_1 = 1$ и ее окрестности, и значение $f(1) = 1^2 + 1 = 2$;

2) $f(1-0) = \lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} (x^2+1) = 1+1 = 2$,

$f(1+0) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} (2x) = 2\cdot 1 = 2$;

3) $f(1-0) = f(1+0) = f(1)$.

Следовательно, в точке $x_1 = 1$ функция $f(x)$ непрерывна.

Теперь рассмотрим точку $x_2 = 3$.

1) Функция определена в точке $x_2 = 3$ и ее окрестности, и значение $f(3) = 6$;

2) $f(3-0) = \lim\limits_{x \to 3-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 3-0} 2x = 2 \cdot 3 = 6$,

$f(3+0) = \lim\limits_{x \to 3+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 3+0} (x+2) = 3 + 2 = 5$;

3) $f(3-0) \neq f(3+0)$.

Не выполняется третье условие критерия непрерывности. Итак, точка $x_2 = 3$ – это точка разрыва функции $f(x)$. Поскольку односторонние пределы в этой точке конечны, то это точка конечного разрыва.

Чертеж графика функции представлен на рис. 2.2.

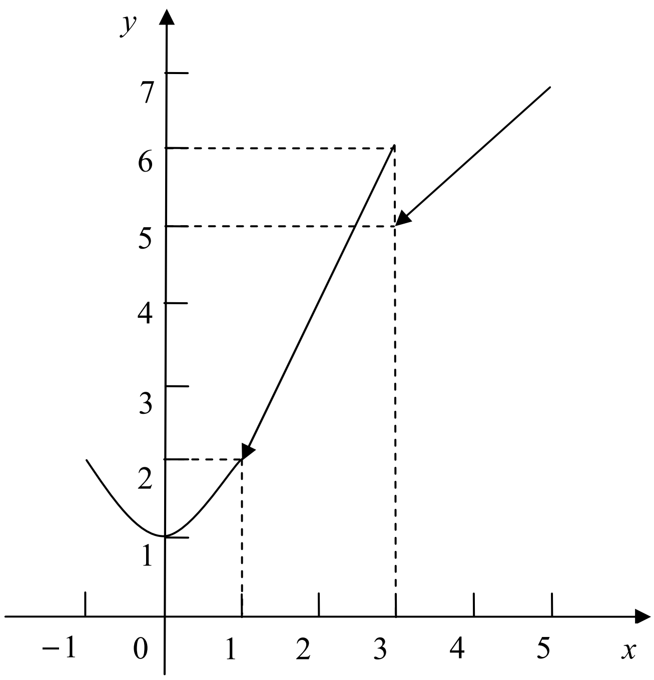


Рис. 2.2

Тема 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Производная. Правила вычисления производных. Таблица производных

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a; b)$. Аргументу $x \in (a; b)$ дадим приращение Δx. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ (рис. 3.1).

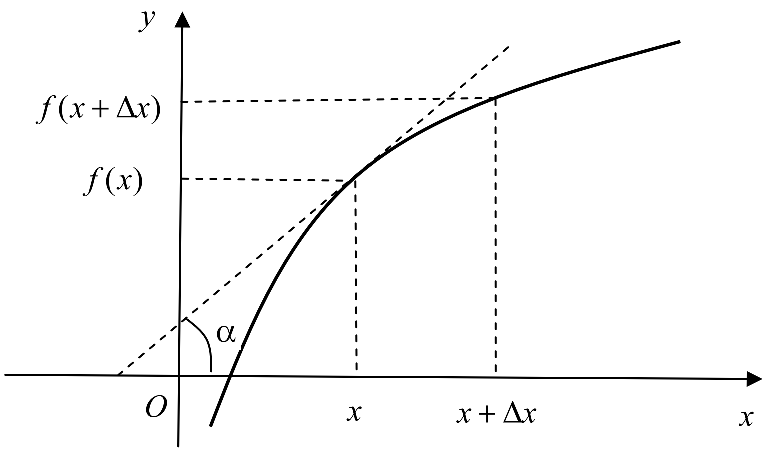


Рис. 3.1

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$, обозначаемый одним из символов $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (3.1)$$

С физической точки зрения производная определяет мгновенную скорость изменения любого физического параметра, описываемого функцией $f(x)$ в точке x.

С геометрической точки зрения производная $f'(x)$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x; f(x))$, т. е. $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$.

Если производная $f'(x)$ существует для всех $x \in (a; b)$, то функция $f(x)$ называется *дифференцируемой на интервале* $(a; b)$.

Операция вычисления производной называется *дифференцированием*.

Главная линейная часть приращения функции $f(x)$ в точке x называется дифференциалом функции. Дифференциал функции $f(x)$ обозначается символом $df(x)$ и вычисляется по формуле

$$df(x) = f'(x)dx. \qquad (3.2)$$

При вычислении производных используют правила вычисления производных, таблицу производных, правило вычисления производной сложной функции.

Основные правила нахождения производной: если $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – функции, имеющие производные, $c = const$, то:

1) $c' = 0$;

2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

3) $(uv)' = u'v + v'u$;

4) $(cu)' = cu'$;

5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ $\quad (v \neq 0)$.

Правило вычисления производной сложной функции состоит в следующем.

Если $y = y(u)$ и $u = u(x)$, где функции y и u имеют производные, то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x, \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \qquad (3.3)$$

Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций.

В табл. 3.1 представлены производные основных элементарных функций. Производные остальных функций могут быть найдены с использованием правил дифференцирования и вычисления производной сложной функции.

Таблица 3.1

Таблица производных

1. $(x)' = 1$	9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (\lvert x\rvert < 1)$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$	10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (\lvert x\rvert < 1)$
3. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
4. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
5. $(\sin x)' = \cos x$	13. $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$
6. $(\cos x)' = -\sin x$	14. $(e^x)' = e^x$
7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	15. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	16. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} \quad (x > 0, a > 0,\ a \neq 1)$

Задача 1. Найти производные функций:

а) $y = x^5 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + x \cdot \operatorname{arctg} x$; $\qquad$ *б*) $y = \dfrac{e^x}{\sin x}$;

в) $y = \left(\sin 2x + x^3\right)^5$; $\qquad$ *г*) $y = \ln^3 \operatorname{tg} 5x$.

Решение. Применяя правила вычисления производных и таблицу производных, найдем:

$$а)\ y' = \left(x^5\right)' + \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' + \left(x\operatorname{arctg} x\right)' =$$

$$= 5x^4 - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} + x'\operatorname{arctg} x + x \cdot \left(\operatorname{arctg} x\right)' = 5x^4 - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} + \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}.$$

$$б)\ y' = \frac{\left(e^x\right)' \sin x - e^x \left(\sin x\right)'}{\sin^2 x} = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{e^x \left(\sin x - \cos x\right)}{\sin^2 x}.$$

Применив правило вычисления производной сложной функции, найдем:

в) полагая $y = u^5$, где $u(x) = \sin 2x + x^3$, получим:

$$y' = \left(\left(\sin 2x + x^3\right)^5\right)' = 5\left(\sin 2x + x^3\right)^4\left(\sin 2x + x^3\right)' =$$

$$= 5\left(\sin 2x + x^3\right)^4\left(2\cos 2x + 3x^2\right).$$

г) Так как y является степенной функцией от натурального логарифма, который, в свою очередь, является функцией от $\operatorname{tg} 5x$, то дифференцируя как сложную функцию, получим:

$$y' = 3\left(\ln^2 \operatorname{tg} 5x\right)\cdot\left(\ln \operatorname{tg} 5x\right)' = 3\left(\ln^2 \operatorname{tg} 5x\right)\frac{(5x)'}{\operatorname{tg} 5x \cdot \cos^2 5x} =$$

$$= \frac{15\ln^2 5x}{\cos 5x \cdot \sin 5x} = \frac{30\ln^2 \operatorname{tg} 5x}{\sin 10x}.$$

3.2. Логарифмическое дифференцирование

В некоторых случаях вычисление производной значительно упрощается, если функцию предварительно прологарифмировать.

Здесь надо учитывать, что x – независимая переменная и $x' = 1$, а $y = y(x)$ – зависимая переменная и $(y(x))' = y'$.

Первый случай. При вычислении производной показательно-степенной функции вида $y = u(x)^{v(x)}$ (основание и степень – заданные дифференцируемые функции) сначала прологарифмируем обе части этого равенства и затем их продифференцируем:

$$\ln y = \ln u^v; \quad \ln y = v\ln u; \quad (\ln y)' = (v\ln u)';$$

$$\frac{1}{y}y' = v'\ln u + v\frac{u'}{u}; \quad y' = y\left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v\left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right).$$

Задача 2. Найти производную функции $y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$.

Решение. Логарифмируя и вычисляя производные от обеих частей равенства, получим:

$$\ln y = \ln(\operatorname{tg} x)^{\sin x} = \sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x; \quad (\ln y)' = (\sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x)';$$

$$\frac{y'}{y} = (\cos x)\ln \operatorname{tg} x + (\sin x)\frac{1}{\operatorname{tg} x \cos^2 x}; \; y' = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}\left(\cos x \ln \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right).$$

Второй случай. Рекомендуется предварительно логарифмировать обе части равенства при вычислении производных от функции, представляющей собой произведение многих сомножителей. В этом случае вычисление производной от произведения сводится к вычислению производной от суммы логарифмов.

Задача 3. Вычислить производную функции

$$y = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot \sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[5]{x+3}}.$$

Решение. Логарифмируя и вычисляя производные от обеих частей равенства, последовательно получим:

$$(\ln y)' = \left(2\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{3}\ln(2x+1) - \frac{1}{5}\ln(x+3)\right)';$$

$$\frac{y'}{y} = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{2}{3(2x+1)} - \frac{1}{5(x+3)}\right),$$

т. е. $y' = \dfrac{x^2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot \sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[5]{x+3}}\left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{2}{3(2x+1)} - \dfrac{1}{5(x+3)}\right).$

3.3. Производные функций, заданных неявно и параметрически

Пусть функция $y = y(x)$ задана неявно, т. е. соотношением вида $F(x; y) = 0$, не разрешенным относительно y. В этом случае для нахождения y'_x следует продифференцировать обе части последнего равенства по переменной x, пользуясь, когда необходимо, теоремой о вычислении производной сложной функции и учитывая, что x – независимая переменная и $x' = 1$, а $y = y(x)$ – зависимая переменная и $\left(y(x)\right)' = y'$. Из получившегося в результате дифференцирования равенства находят y'_x.

Задача 4. Найти производную неявно заданной функции

$$y^2 x + e^{xy} = 0.$$

Решение. Дифференцируя обе части равенства по переменной x и считая, что $y = y(x)$, получим:

$$2y \cdot y' \cdot x + y^2 \cdot 1 + e^{xy}\left(1 \cdot y + xy'\right) = 0;$$

$$2y \cdot y' \cdot x + xy' \cdot e^{xy} = -\left(y^2 + ye^{xy}\right),$$

т. е. $y' = \dfrac{-y\left(y + e^{xy}\right)}{2yx + xe^{xy}}$ – искомая производная.

Пусть $y = y(x)$ – параметрически заданная функция

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta.$$

Тогда ее производная первого порядка вычисляется, если она существует, по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{3.4}$$

Задача 5. Найти y'_x, если $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

Решение. Так как $y'_t = \sin t, \quad x'_t = 1 - \cos t,$ то

$$y'_x = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

3.4. Производные высших порядков

Пусть функция $y = y(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда ее производная $y'(x)$ также является некоторой функцией переменной x. Если она к тому же имеет производную в некоторой точке этого интервала, то указанная производная называется производной второго порядка функции $y(x)$ и обозначается $y''(x)$.

Итак, $y''(x) = (y')'$.

Аналогично производная от производной порядка $n-1$ называется производной n-го порядка: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

Задача 6. *а*) Найти производную второго порядка от функции $y = x^3 e^{2x}$. *б*) Найти производную третьего порядка от функции $y = \cos^2 x$.

Решение

а) $y' = \left(x^3\right)' e^{2x} + x^3\left(e^{2x}\right)' = 3x^2 e^{2x} + 2x^3 e^{2x} = \left(3x^2 + 2x^3\right) e^{2x}$;

$$y'' = \left(\left(3x^2 + 2x^3\right)e^{2x}\right)' = \left(6x + 6x^2\right)e^{2x} + \left(3x^2 + 2x^3\right)2e^{2x} =$$

$$= 2x\left(3 + 6x + 2x^2\right)e^{2x}.$$

б) $y' = 2\cos x(-\sin x) = -\sin 2x$, $\quad y'' = (-\sin 2x)' = -2\cos 2x$;

$y''' = 4\sin 2x$.

Пусть $y = y(x)$ – параметрически заданная функция

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta.$$

Тогда ее производная второго порядка вычисляется, если она существует, по формуле

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \tag{3.5}$$

Задача 7. Найти y''_{xx}, если

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$$

Решение. Находим по формуле (3.4) производную первого порядка (задача 5):

$$y'_x = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Далее находим:

$$\left(y'_x\right)'_t = \left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'_t = -\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\left(\frac{t}{2}\right)' = -\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}},$$

и по формуле (3.5) получаем:

$$y''_{xx} = -\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{1-\cos t} = -\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4\sin^4\frac{t}{2}}.$$

Тема 4. ПРИЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЮ ГРАФИКОВ

4.1. Возрастание и убывание функции

Определение. Функция $y = f(x)$, определенная на отрезке $[a; b]$, называется *возрастающей* на этом отрезке, если из неравенства $x_1 < x_2$, где x_1 и x_2 – любые две точки, принадлежащие данному отрезку, следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (рис. 4.1, *а*).

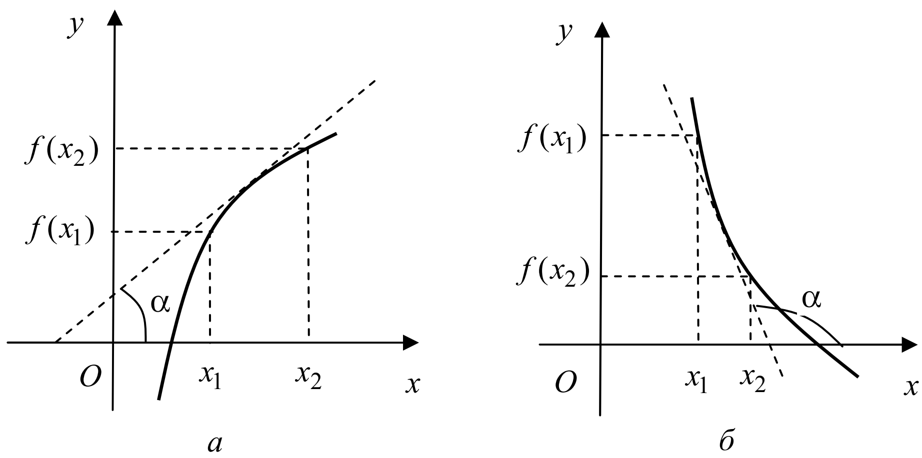


Рис. 4.1

Определение. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a; b]$, называется *убывающей* на этом отрезке, если из неравенства $x_1 < x_2$, где x_1 и x_2 – любые две точки, принадлежащие данному отрезку, следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ (рис. 4.1, *б*).

Сформулируем достаточные условия возрастания и убывания функции.

Теорема. Если непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $y = f(x)$ в каждой внутренней точке этого отрезка имеет положительную (отрицательную) производную, то эта функция возрастает (убывает) на отрезке $[a; b]$.

Задача 1. Найти участки возрастания и убывания функции $y = \frac{1}{3}x^3 - x$.

Решение. Эта функция определена и дифференцируема на всей числовой оси.

1) Находим производную: $f'(x) = x^2 - 1$.

2) Приравниваем производную к нулю и находим ее корни:

$$x^2 - 1 = 0; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = -1.$$

Эти числа разбивают всю область определения данной функции на три интервала:

$$-\infty < x < -1; \quad -1 < x < 1; \quad 1 < x < +\infty.$$

В каждом из этих интервалов производная сохраняет свой знак. Поэтому при исследовании знака производной в каждом интервале достаточно взять любую точку этого интервала.

В интервале $-\infty < x < -1$ берем, например, точку $x = -2$. В этой точке $f'(x) = (-2)^2 - 1 = 3 > 0$ производная положительна, следовательно, на этом отрезке функция возрастает.

Аналогично находим, что в интервале $-1 < x < 1$, производная отрицательна (функция убывает), а в интервале $1 < x < +\infty$ производная положительна (функция возрастает).

4.2. Экстремумы функции

Определение. Функция $y = f(x)$ имеет локальный *максимум* в точке $x = x_0$, если существует такая окрестность точки $x = x_0$, что для всех точек $x \neq x_0$, принадлежащих данной окрестности, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Определение. Функция $y = f(x)$ имеет локальный *минимум* в точке $x = x_0$, если существует такая окрестность точки $x = x_0$, что для всех точек $x \neq x_0$, принадлежащих данной окрестности, выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Значение функции в точке максимума (минимума) называется максимумом (минимумом) функции.

Максимум и минимум функции объединяются общим названием *экстремум* функции.

Следует отметить, что понятие экстремума функции связано с внутренней точкой ее области определения.

Сформулируем необходимое условие экстремума функции.

Теорема. Если непрерывная функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то производная функции $f'(x)$ в этой точке обращается в нуль или не существует.

Следует отметить, что условие $f'(x_0) = 0$ (или $f'(x_0)$ не существует), будучи необходимым для существования экстремума, не является достаточным.

Точки, в которых производная обращается в нуль или не существует, называются *критическими* точками.

Таким образом, экстремум функции, если он существует, может иметь место только в критической точке. Однако не во всякой критической точке функция имеет экстремум. Сформулируем достаточные условия экстремума функции.

Теорема *(первый достаточный признак существования экстремума).* Если функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ во всех точках некоторого интервала, содержащего критическую точку $x = x_0$ (за исключением, может быть, самой этой точки), и если производная $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через критическую точку $x = x_0$ меняет знак с плюса на минус, то функция в этой точке имеет максимум, а при перемене знака с минуса на плюс – минимум.

Замечание. Если производная $f'(x)$ не меняет знака при переходе через критическую точку, то функция в этой точке не имеет ни максимума, ни минимума.

Так в предыдущем примере (задача 1) мы имеем две критические точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Мы видим, что слева от точки $x_1 = -1$ производная больше нуля, а справа меньше, следовательно, в точке $x_1 = -1$ функция $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ имеет максимум. В точке $x_2 = 1$, наоборот, слева производная отрицательна, а справа положительна, следовательно, в точке $x_2 = 1$ функция $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ имеет минимум.

Теорема *(второй достаточный признак существования экстремума).* Если в точке $x = x_0$ первая производная функция $y = f(x)$ равна нулю, а вторая производная существует и отлична от нуля, то при $f''(x_0) > 0$ в данной точке функция имеет минимум, а при $f''(x_0) < 0$ – максимум.

4.3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Известно, что непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $y = f(x)$ достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значения. Эти значения могут достигаться либо во внутренних точках, либо на концах отрезка. Если наибольшее (или наименьшее) значение функции достигается во внутренней точке, то это значение является максимумом (минимумом) функции.

Таким образом, получаем следующее правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

1) находим все критические точки функции в интервале $(a;b)$ и вычисляем в них значения функции;

2) вычисляем значения функции на концах отрезка – в точках $x = a$ и $x = b$;

3) из всех этих значений выбираем наибольшее и наименьшее.

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ на отрезке $[-2;2]$.

Решение. Найдем критические точки этой функции, лежащие на [–2; 2]. Так как $y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$, то $x = 1$ – единственная критическая точка. Вычислим значение функции в точке $x = 1$ и на концах отрезка $[-2;2]$: $y(1) = 3$, $y(-2) = -24$, $y(2) = 4$.

Сравнивая полученные значения функции, находим $y_{\text{наим}}$ = –24, $y_{\text{наиб}}$ = 4.

4.4. Асимптоты графика функции

При исследовании функции важно установить форму ее графика при неограниченном удалении точки графика от начала координат или, как говорят, при удалении его переменной точки в бесконечность.

Особый интерес представляет случай, когда график функции при удалении его переменной точки в бесконечность неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая линия, обладающая тем свойством, что расстояние от переменной точки на графике до прямой стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат.

Замечание. С понятием асимптоты мы встречались на примере гиперболы (рис. 1.10).

Асимптоты делятся на два класса: вертикальные и наклонные. Вертикальные асимптоты параллельны оси *Oy* и записываются уравнением $x=a$. Прямая $x=a$ является асимптотой, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ равен бесконечности. Вертикальных асимптот может быть столько, сколько точек бесконечного разрыва.

Наклонная асимптота записывается уравнением

$$y = kx + b, \tag{4.1}$$

где

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - k\cdot x\right). \tag{4.2}$$

Наклонных асимптот может быть не более двух. Максимум две: одна при $x\to-\infty$, вторая при $x\to+\infty$. Если хотя бы один из пределов (4.2) не существует, то функция $y=f(x)$ наклонных асимптот не имеет.

При $k=0$ как частный случай получаем горизонтальную асимптоту $y=b$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Задача 3. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$.

Решение. Эта функция определена и дифференцируема на всей числовой оси, за исключением точки $x=2$. Так как $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x^2-2x+1}{x-2} = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^2-2x+1}{x-2} = +\infty$, то функция в точке $x=2$ имеет бесконечный разрыв, следовательно, прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонные асимптоты. Так как

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+1}{x(x-2)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - k\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+1}{x-2} - x = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-2} = 0,$$

то наклонной асимптотой будет прямая $y = x$.

4.5. Выпуклость и вогнутость графика функции

Определение. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется выпуклым в интервале $(a; b)$, если он расположен ниже любой своей касательной на этом интервале (рис. 4.2, *а*).

Определение. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется вогнутым в интервале $(a; b)$, если он расположен выше любой своей касательной на этом интервале (рис. 4.2, *б*).

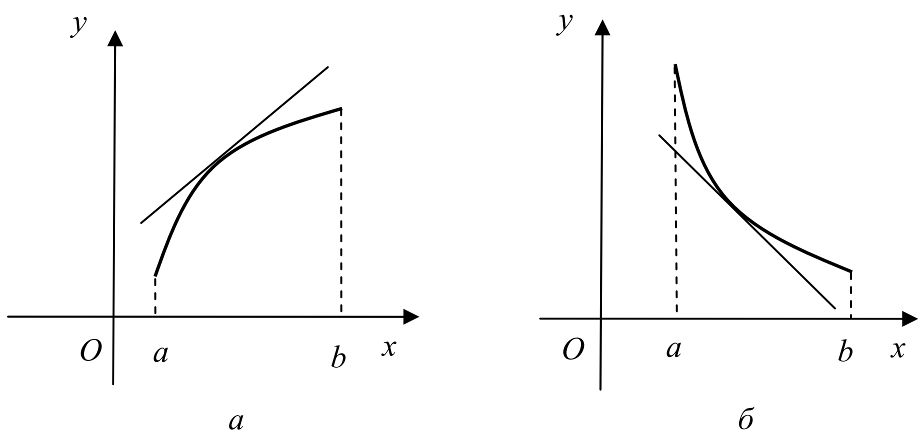


Рис. 4.2

График функции в одних интервалах может быть выпуклым, в других – вогнутым. Например, график функции $y = \sin x$, рассматриваемый в интервале от 0 до 2π, выпуклый в интервале $(0; \pi)$ и вогнутый в интервале $(\pi; 2\pi)$.

Рассмотрим теперь достаточный признак, позволяющий установить, является ли график функции в данном интервале выпуклым или вогнутым.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ во всех точках интервала $(a; b)$. Если во всех точках этого интервала $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый, если же $f''(x) > 0$ – вогнутый.

Точка графика непрерывной функции, отделяющая его выпуклую часть от вогнутой, называется точкой *перегиба*. В этих точках изменяется направление вогнутости графика функции.

В точке перегиба $M_0(x_0;y_0)$ вторая производная $f''(x_0)$ равна нулю или не существует.

Задача 4. Исследовать на выпуклость и вогнутость функцию $f(x)=x^3-3x$.

Решение. Находим вторую производную: $f'(x)=3x^2-3$, $f''(x)=6x$. Приравниваем $f''(x)$ к нулю: $6x=0$, откуда $x=0$. Видим, что если $x<0$, то $f''(x)=6x<0$, а если $x>0$, то $f''(x)=6x>0$, заключаем, что в интервале $(-\infty;0)$ график выпуклый, а в интервале $(0;+\infty)$ – вогнутый. При $x=0$ функция имеет точку перегиба (рис. 4.3).

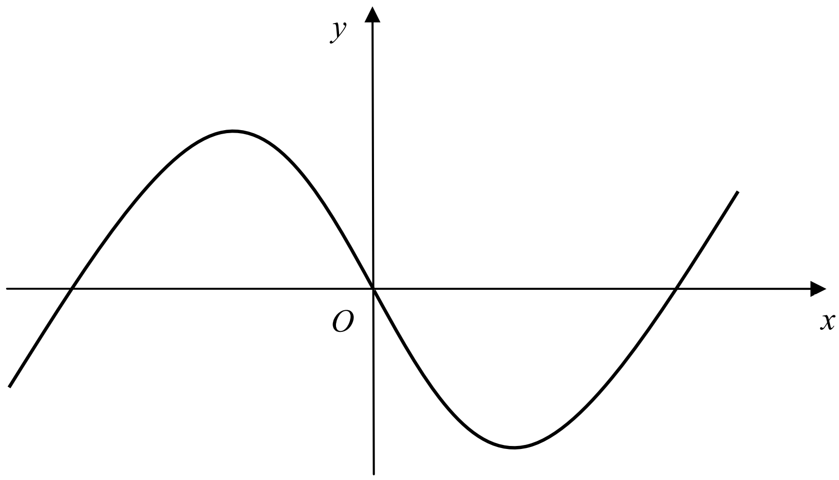


Рис. 4.3

4.6. Общая схема исследования функции и построения графика

При исследовании функций и построении их графиков полезно придерживаться следующей схемы:

1) найти область определения функции и интервалы непрерывности;

2) если есть точки разрыва, найти односторонние пределы функции в этих точках и изобразить на чертеже поведение функции в каждой точке разрыва;

3) исследовать функцию на четность и нечетность, периодичность;

4) найти вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты, если они есть;

5) найти интервалы монотонности функции и точки экстремума;

6) найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба;

7) найти точки пересечения графика функции с координатными осями (если это возможно) и построить график с учетом полученных результатов.

Задача 5. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ и построить ее график.

Решение

1) Функция не определена при $x_1=-1$ и $x_2=1$, поэтому область определения функции $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2) Так как в точках $x_1=1$ и $x_2=-1$ функция не определена, то это точки разрыва функции. Исследуем поведение функции в окрестности этих точек. Для этого вычислим односторонние пределы:

$$y(1+0)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{2(1+0-1)}=\frac{1}{2(+0)}=+\infty .$$

Вычисленный односторонний предел оказался бесконечным, поэтому прямая $x=1$ будет вертикальной асимптотой графика функции.

$$y(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{2(1-0-1)}=\frac{1}{2(-0)}=-\infty.$$

Вычислим односторонние пределы функции в точке $x_2=-1$:

$$y(-1+0)=\lim_{x\to -1+0}\frac{x^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{-2(-1+0+1)}=\frac{1}{-2(+0)}=-\infty ;$$

$$y(-1-0)=\lim_{x\to -1-0}\frac{x^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{-2(-1-0+1)}=\frac{1}{-2(-0)}=+\infty .$$

Односторонние пределы и в точке $x=-1$ оказались бесконечными, поэтому прямая $x=-1$ будет вертикальной асимптотой графика функции.

3) Поскольку $y(-x)=\dfrac{(-x)^2}{(-x)^2-1}=\dfrac{x^2}{x^2-1}=y(x)$, то функция четная.

4) Так как односторонние пределы функции в точках $x_1=-1$ и $x_2=1$ равны бесконечности, то прямые $x_1=-1$ и $x_2=1$ будут вертикальными асимптотами графика функции.

Для нахождения наклонной асимптоты (4.1) $y=k\,x+b$ графика функции вычислим два предела (4.3): $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ и $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-k\,x)$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x\left(x^2-1\right)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{\infty}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{1-0}=1.$$

Значит, прямая $y=0\cdot x+1$, т. е. $y=1$ – это горизонтальная асимптота графика функции и при $x\to+\infty$, и при $x\to-\infty$.

5) Вычислим производную, найдем критические точки, интервалы монотонности и точки экстремума:

$$y'=\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)'=\frac{2x\left(x^2-1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2};$$

$$y'=\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}=0\ \Rightarrow\ x=0.$$

В точках $x_1=-1$ и $x_2=1$ производная не существует.

Составим таблицу изменений знака производной y' (табл. 4.1).

Таблица 4.1

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	+	Не сущ.	+	0	–	Не сущ.	–
y	Возр.	Экстр. нет	Возр.	Макс. $y_{max}=0$	Убыв.	Экстр. нет	Убыв.

Так как $y'>0$ при $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)$, то на этих интервалах функция возрастает.

При $x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$ производная $y' < 0$, следовательно, на этих интервалах функция убывает.

Поскольку $y'(0) = 0$, то $x = 0$ – единственная критическая точка функции, а так как y' меняет знак в точке 0 с « + » на « – », то $x = 0$ – точка максимума функции, причем $y(0) = 0$.

6) Интервалы выпуклости и вогнутости найдем по знаку производной второго порядка y''. Найдем вторую производную и возможные точки перегиба:

$$y'' = \left(\frac{-2x}{(x^2-1)^2} \right)' = -2\frac{1 \cdot (x^2-1)^2 - x \cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{2(1+3x^2)}{(x^2-1)^3}.$$

В точках $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ вторая производная не существует.

Составим таблицу изменений знака y'' (табл. 4.2).

Таблица 4.2

x	(–∞; –1)	–1	(–1; 1)	1	(1; +∞)
y''	+	Не сущ.	–	Не сущ.	+
y	∪ (вогн.)	Не сущ.	∩ (выпукл.)	не сущ.	∪ (вогн.)

Итак, на интервалах (–∞; –1) и (1; +∞) график функции вогнутый, а на интервале (–1; 1) – выпуклый. Точек перегиба нет.

7) Учитывая, что $y(0) = 0$, строим график (рис. 4.4).

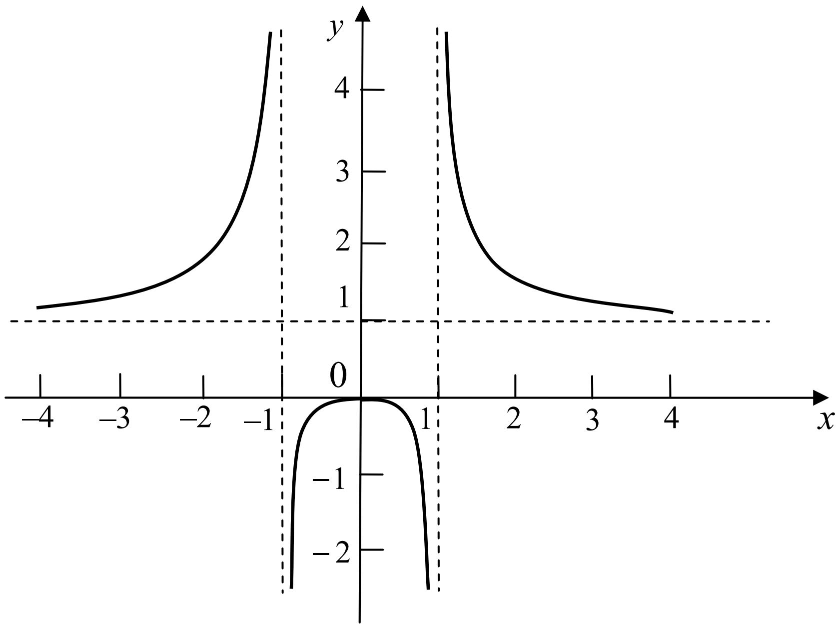


Рис. 4.4

Задача 6. Исследовать функцию $y = xe^{-x}$ и построить ее график.

Решение

1) Область определения функции – вся числовая прямая, т. е. $D(y) = R$.

2) Данная функция является элементарной функцией, определенной на всей числовой оси, значит, точек разрыва, а следовательно и вертикальных асимптот нет.

3) Поскольку $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, то $y(x)$ – ни четная, ни нечетная функция.

4) Исследуем наличие наклонной асимптоты при $x \to +\infty$. Так как

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0,$$

то прямая $y = 0$ – горизонтальная асимптота графика функции при $x \to +\infty$ (являющаяся частным случаем наклонной асимптоты при $x \to +\infty$).

Исследуем наличие наклонной асимптоты при $x \to -\infty$. Так как

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = e^{+\infty} = +\infty,$$

то при $x \to -\infty$ наклонной асимптоты нет.

5) Вычислим производную, найдем критические точки, интервалы монотонности и точки экстремума:

$$y' = \left(xe^{-x}\right)' = 1 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x} = (1 - x)e^{-x};$$

$$y' = (1 - x)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Составим таблицу изменений знака производной y' (табл. 4.3).

Таблица 4.3

x	$(-\infty; -1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	+	0	–
y	Возр.	Макс. $y_{\max} = e^{-1}$	Убыв.

Так как $y' > 0$ при $x < 1$ и $y' < 0$ при $x > 1$, то функция при $x < 1$ возрастает, а при $x > 1$ убывает. Так как $y'(1) = 0$, то $x = 1$ – единственная критическая точка функции. Поскольку в критической точке функция меняет знак с « + » на « – », то $x = 1$ – точка максимума функции и $y(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

6) Интервалы выпуклости и вогнутости найдем по знаку производной второго порядка y''. Найдем вторую производную и возможные точки перегиба:

$$y'' = \left((1-x)e^{-x}\right)' = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x};$$
$$y'' = (x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

Составим таблицу изменений знака y'' (табл. 4.4).

Таблица 4.4

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y''	–	0	+
y	$\cap$ (выпукл.)	$2 \cdot e^{-2}$	$\cup$ (вогн.)

Так как $y'' > 0$ при $x > 2$ и $y'' < 0$ при $x < 2$, то при $x > 2$ график функции вогнутый, а при $x < 0$ – выпуклый. Так как в точке $x = 2$ y'' меняет знак, то точка $M(2; 2a^{-2})$ – точка перегиба графика функции.

7) Учитывая, что $y(0) = 0$, строим график функции (рис. 4.5).

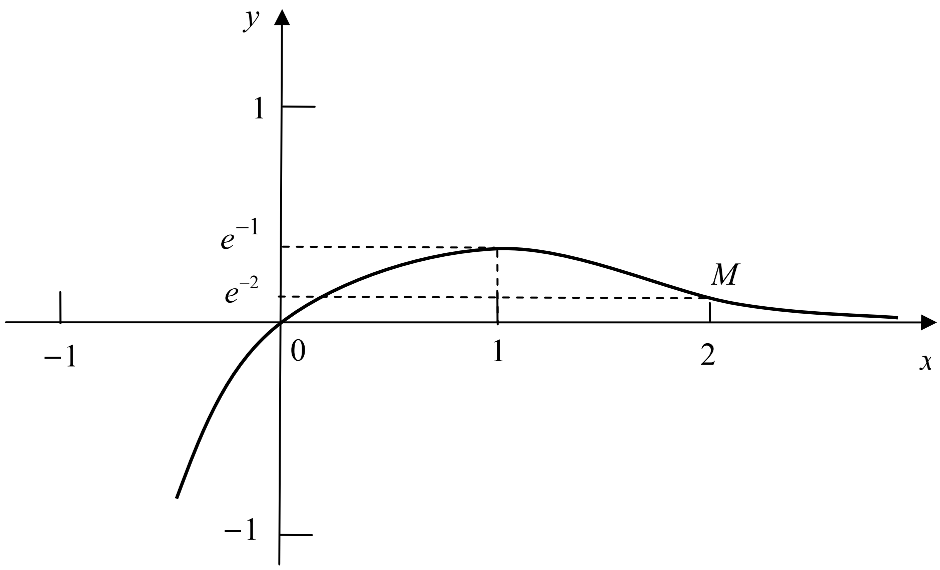


Рис. 4.5

Тема 5. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

5.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной для заданной функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$.

Определение. Множество всех первообразных для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

Итак, если $F'(x)=f(x)$, то

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C. \tag{5.1}$$

При вычислении неопределенных интегралов используют свойства интегралов, таблицу неопределенных интегралов, различные методы интегрирования, а также тождественные преобразования подынтегральной функции.

Свойства неопределенных интегралов

1. $\int dF(x)=F(x)+C.$
2. $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.$
3. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$, где $k=const$.
4. $\int f(ax+b)dx=\dfrac{1}{a}F(ax+b)+C$.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (n\neq-1).$
2. $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C.$
3. $\int e^{x}dx=e^{x}+C.$
4. $\int a^{x}dx=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C.$
5. $\int\sin xdx=-\cos x+C.$
6. $\int\cos xdx=\sin x+C.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

10 $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C.$

11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Задача 1. Вычислить $\int\left(4x^3 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{9+x^2} - \frac{1}{\sqrt{25+x^2}}\right)dx$.

Решение. Используя свойства и таблицу неопределенных интегралов, получим:

$$\int\left(4x^3 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{9+x^2} - \frac{1}{\sqrt{25+x^2}}\right)dx =$$

$$= 4\int x^3 dx - \int x^{-2} dx + 2\int \frac{dx}{3^2 + x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{5^2 + x^2}} =$$

$$= 4 \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} - \frac{-2+1}{x^{-2+1}} + \frac{2}{3}\mathrm{arctg}\frac{x}{3} - \ln\left|x + \sqrt{25+x^2}\right| + C =$$

$$= x^4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{3}\mathrm{arc\,tg}\frac{x}{3} - \ln\left|x + \sqrt{25+x^2}\right| + C.$$

5.2. Вычисление неопределенного интеграла методом замены переменной

Во многих случаях удается введением вместо переменной интегрирования x новой переменной t свести данный интеграл $\int f(x)dx$ к новому интегралу, который или содержится в таблице основных интегралов, или легко вычисляется другим способом. Этот метод интегрирования получил название метода *замены переменной*, или *интегрирование подстановкой.*

Введем вместо x новую переменную t, связанную с x соотношением $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – непрерывная монотонная функция, имеющая непрерывную производную $\varphi'(t)$. Тогда имеет место формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \tag{5.2}$$

которая называется *формулой замены переменной (интегрирование подстановкой)*.

Задача 2. Вычислить $\int \sqrt{1-x^2}dx$.

Решение. Сделав замену переменной $x = \sin t$ и учитывая, что $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$, $dx = d(\sin t) = \cos t dt$, получим:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t (d2t)\right) =$$

$$= \frac{2t + \sin 2t}{4} + C = \frac{2\arcsin x + \sin(2\arcsin x)}{4} + C =$$

$$= \frac{2\arcsin x + 2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x)}{4} + C = \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.$$

Задача 3. Вычислить $\int e^{x^2+1}xdx$.

Решение. Полагая $t = x^2 + 1$ и учитывая, что $dt = 2xdx$ и $xdx = \dfrac{dt}{2}$, получим:

$$\int e^{x^2+1}xdx = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{e^t}{2} + C = \frac{1}{2}e^{x^2+1} + C.$$

5.3. Вычисление неопределенного интеграла методом интегрирования по частям

Вычисление интеграла по формуле

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{5.3}$$

называется *интегрированием по частям*.

Этой формулой пользуются в том случае, когда интеграл $\int v du$ более простой, чем $\int u dv$. Укажем некоторые часто встречающиеся интегралы, которые вычисляются методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида

$$\int P_n(x)\, e^{\alpha x} dx;$$

$$\int P_n(x) \sin \alpha x dx;$$

$$\int P_n(x) \cos \alpha x dx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени, а α некоторое число. Интегралы этих типов берутся по частям, если принять $u = P_n(x)$, а оставшуюся часть за dv.

Задача 4. Вычислить $\int \left(x^2 + 1\right) e^{3x} dx$.

Решение. Положим $u = x^2 + 1$ и $dv = e^{3x} dx$.

Тогда $du = \left(x^2 + 1\right)' dx = 2x\,dx$, $v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x}$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int \left(x^2 + 1\right) e^{3x} dx = \frac{1}{3}\left(x^2 + 1\right) e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx + C.$$

Снова полагая $u = x$ и $dv = e^{3x} dx$, т. е. $du = dx$, $v = \frac{1}{3} e^{3x}$, получим:

$$\int x e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C.$$

Итак, окончательно имеем:

$$\int \left(x^2 + 1\right) e^{3x} dx = \frac{1}{3}\left(x^2 + 1\right) e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}\right) + C =$$

$$= \frac{e^{3x}}{3}\left(x^2 + 1 - \frac{2x}{3} + \frac{2}{9}\right) + C.$$

2. Интегралы вида

$$\int P_n(x) \arcsin x dx;$$

$$\int P_n(x)\arccos x dx;$$

$$\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\, x dx;$$

$$\int P_n(x)\,\mathrm{arcctg}\, x dx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени.

Во всех этих случаях за u принимают функцию, являющуюся множителем при $P_n(x)$, и $dv = P_n(x)dx$.

Задача 5. Вычислить $\int \mathrm{arctg}\, x dx$.

Решение. Положим $u = \mathrm{arctg}\, x$ и $dv = dx$.

Тогда $du = d(\mathrm{arctg}\, x) = \dfrac{1}{1+x^2}dx$, $v = \int dx = x$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int \mathrm{arctg}\, x dx = x\,\mathrm{arctg}\, x - \int x\frac{1}{1+x^2}dx = x\,\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= x\,\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Замечание. При нахождении v по dv после вычисления интеграла, произвольную постоянную C полагаем равной нулю.

5.4. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью $R(x)$ называется отношение двух многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, соответственно n-й и m-й степеней, записывается в виде $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, в противном случае рациональная дробь *неправильная.*

Известно, что всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Поскольку интегрирование многочлена не представляет труда, то остается рассмотреть интегрирование правильных рациональных дробей.

Доказано, что всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы конечного числа так называемых простейших дробей следующих четырех типов:

1. $\dfrac{A}{(x-a)}$; 2. $\dfrac{A}{(x-a)^n}$;

3. $\dfrac{Bx+C}{x^2+px+q}$; 4. $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$ $(n=2,3,\ldots)$,

где A, a, p, q, M и N – действительные числа, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, то есть его дискриминант отрицательный.

Интегрирование простейших дробей первого и второго типов не представляет труда. При интегрировании дробей третьего и четвертого типов в знаменателе дроби выделяют полный квадрат:

$$x^2+px+q=x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right),$$

и делают замену $x+\dfrac{p}{2}=t$.

При интегрировании правильной рациональной дроби первоначально знаменатель разлагают на множители $x-a$, $(x-a)^s$, x^2+px+q, $\left(x^2+p_1x+q_1\right)^m$, где квадратные трехчлены не имеют действительных корней. После этого дробь записывают в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами. При этом сомножителю первого типа соответствует простейшая дробь первого типа; сомножителю второго типа соответствует сумма простейших дробей второго типа, где n изменяется от 1 до s; сомножителю третьего типа соответствует простейшая дробь третьего типа; сомножителю четвертого типа соответствует сумма простейших дробей четвертого типа, где n изменяется от 1 до m.

Замечание. В случае неправильной рациональной функции (т. е. при $n \geq m$) предварительно следует выделить целую часть и представить дробь в виде многочлена и правильной рациональной дроби.

Для нахождения неопределенных коэффициентов приводим простейшие дроби к общему знаменателю и приравниваем многочлен, получившийся в числителе, к многочлену в числителе исходной дроби. Затем приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях и получаем систему для нахождения коэффициентов.

Замечание. Алгебраическую систему для нахождения неопределенных коэффициентов можно получить, если дать переменной x несколько частных значений по числу коэффициентов (удобно давать значения корней знаменателя). Можно комбинировать оба способа.

Задача 6. Вычислить $\int \frac{3x^2+8x+17}{(x+3)(x^2+4x+13)}dx$.

Решение. Так как квадратный трехчлен $x^2+4x+13$ не имеет действительных корней, то представим подынтегральную функцию в виде:

$$\frac{3x^2+8x+17}{(x+3)(x^2+4x+13)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+13}.$$

Преобразуем равенство:

$$\frac{A(x^2+4x+13)+(Bx+C)(x+3)}{(x+3)(x^2+4x+13)} = \frac{3x^2+8x+17}{(x+3)(x^2+4x+13)}.$$

Отсюда следует, что:

$$A(x^2+4x+13)+(Bx+C)(x+3) = 3x^2+8x+17;$$

$$Ax^2+4Ax+13A+Bx^2+3Bx+Cx+3C = 3x^2+8x+17;$$

$$(A+B)x^2+(4A+3B+C)x+13A+3C = 3x^2+8x+17.$$

Приравнивая далее коэффициенты при одинаковых степенях x в последнем выражении, получим систему

$$\begin{cases} A+B=3, \\ 4A+3B+C=8, \\ 13A+3C=17. \end{cases}$$

Решая систему методом последовательного исключения неизвестных или по формулам Крамера, получим: $A=2$; $B=1$; $C=-3$.

Итак, $\int \frac{3x^2+8x+17}{(x+3)(x^2+4x+13)}dx = 2\int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{x-3}{x^2+4x+13}dx$.

Вычислим эти интегралы:

$$\int \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3| + C,$$

далее

$$\int \frac{x-3}{x^2+4x+13}dx = \int \frac{(x+2)-5}{(x+2)^2+9}dx = \left| \begin{array}{c} t = x+2 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{t-5}{t^2+9}dt =$$

$$= \int \frac{t\,dt}{t^2+9} - 5\int \frac{dt}{t^2+3^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+9)}{t^2+9} - \frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(t^2+9\right) - \frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+13\right| - \frac{5}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{3} + C.$$

Окончательно имеем:

$$\int \frac{3x^2+8x+17}{(x+3)(x^2+4x+13)}dx =$$

$$= 2\ln|x+3| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+13\right| - \frac{5}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{3} + C.$$

5.5. Интегрирование простейших иррациональностей

Интегрирование простейших иррациональностей основано на использовании замены переменной, позволяющей избавиться от иррациональности у подынтегральной функции.

Задача 7. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$.

Решение

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} = \left| \begin{array}{c} x = t^6,\ dx = 6t^5dt, \\ \sqrt{x} = t^3,\ \sqrt[3]{x} = t^2 \end{array} \right| = \int \frac{6t^5dt}{t^3\left(1+t^2\right)} =$$

$$= 6\int \frac{t^2dt}{t^2+1} = 6\int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = 6(t - \operatorname{arctg} t) = 6\left(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right) + C.$$

5.6. Интегрирование некоторых тригонометрических функций

При вычислении интегралов от тригонометрических функций вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

полезно пользоваться следующими правилами:

1) если подынтегральная функция нечетна относительно $\sin x$, т. е.

$$R(\sin x;\ \cos x) = -R(-\sin x;\ \cos x),$$

то следует делать замену $t = \cos x$;

2) если подынтегральная функция нечетна относительно $\cos x$, т. е.

$$R(\sin x;\ \cos x) = -R(\sin x;\ -\cos x),$$

то следует делать замену $t = \sin x$;

3) если подынтегральная функция не изменяет знак при изменении знака у $\sin x$ и $\cos x$, то следует делать замену $t = \operatorname{tg} x$.

Задача 8. Вычислить $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$.

Решение

$$\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx = \left| \begin{matrix} \textit{замена}\ \ t = \cos x, \\ dt = -\sin x\,dx \end{matrix} \right| = -\int \left(1 - t^2\right) t^2\,dt =$$

$$= \int \left(t^4 - t^2\right) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Задача 9. Вычислить $\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx$.

Решение

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx = \left| \begin{matrix} \textit{замена}\ \ t = \sin x, \\ dt = \cos x\,dx \end{matrix} \right| = \int t^2 \left(1 - t^2\right) dt =$$

$$\int \left(t^2 - t^4\right) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Если подынтегральная функция содержит четные степени синуса или косинуса, то полезно понизить степени этих функций, используя следующие формулы:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{или} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Задача 10. Вычислить $\int \sin^4 x dx$.

Решение

$$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2\, dx = \frac{1}{4}\int \left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx = \frac{1}{8}\int (3-4\cos 2x+\cos 4x)\, dx =$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Тема 6. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

6.1. Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона – Лейбница

Определенный интеграл определяется как конечный предел интегральной суммы от функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$ [2].

Основные свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.
2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.
3. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.
4. $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)dx + \beta\int\limits_a^b g(x)dx$.
5. $\int\limits_a^b dx = b - a$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, а функция $F(x)$ – некоторая ее первообразная, то имеет место формула Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (6.1)$$

Задача 1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^\pi \sin x dx$.

Решение. Так как функция $F(x) = -\cos x$ является первообразной для функции $f(x) = \sin x$, то по формуле (6.1) получим:

$$\int\limits_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2.$$

6.2. Вычисление определенного интеграла методом интегрирования по частям и методом замены переменной

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a; b]$, то

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{6.2}$$

Вычисление определенного интеграла по формуле (6.2) называется интегрированием по частям.

Задача 2. Вычислить $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$.

Решение. Полагая $u = x$, $dv = \cos x\,dx$, получим $du = dx$, $v = \int \cos x\,dx = \sin x$. Тогда по формуле (6.2)

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\,dx =$$

$$= \pi\sin\pi - 0\sin 0 + \cos x\Big|_0^{\pi} = 0 - 0 + \cos\pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2.$$

Если функция $x = \varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной на отрезке $[\alpha; \beta]$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, а $f(\varphi(t))$ также непрерывна на отрезке$[\alpha; \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{6.3}$$

Вычисление определенного интеграла по формуле (6.3) называется *интегрированием методом замены переменной.*

Задача 3. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение. Сделаем замену $x = \sin t$. Тогда $dx = (\sin t)'\,dt = \cos t\,dt$. Если $x = 0$, то $0 = \sin 0$, и следовательно $t = 0$. Если $x = 1$, то $1 = \sin\frac{\pi}{2}$, и следовательно $t = \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi \right) - \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\sin 0 \right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

6.3. Применение определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур

Площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x) \geq 0$, отрезком $[a; b]$ оси Ox, прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 6.1), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (6.4)$$

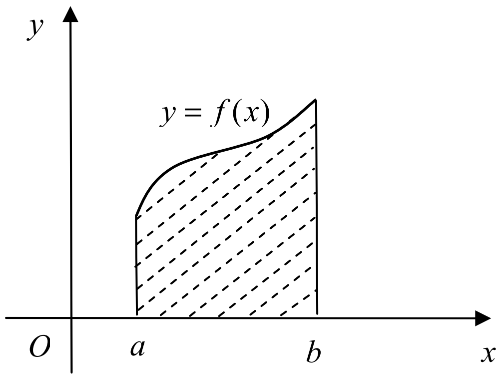


Рис. 6.1

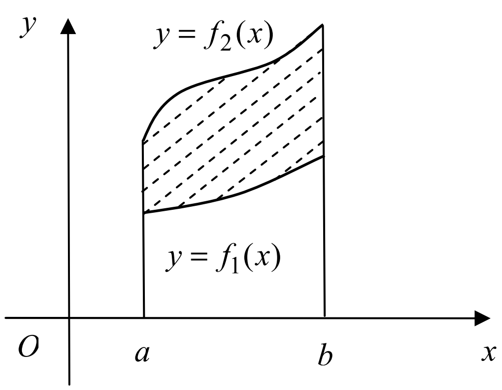


Рис. 6.2

Площадь фигуры, заключенной между графиками функций $f_2(x)$ и $f_1(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, если $f_2(x) \geq f_1(x)$ для $a \leq x \leq b$, (рис. 6.2) вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \qquad (6.5)$$

Площадь криволинейной трапеции, верхняя граница которой задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, а нижней границей является ось Ox, вычисляется по формуле

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt. \tag{6.6}$$

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$ и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β (рис. 6.3), вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\varphi)d\varphi. \tag{6.7}$$

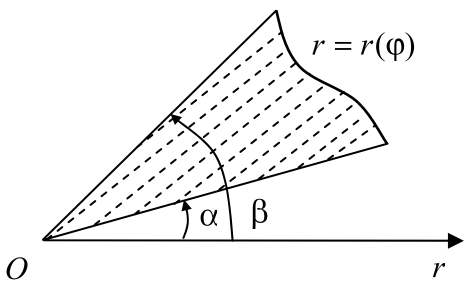


Рис. 6.3

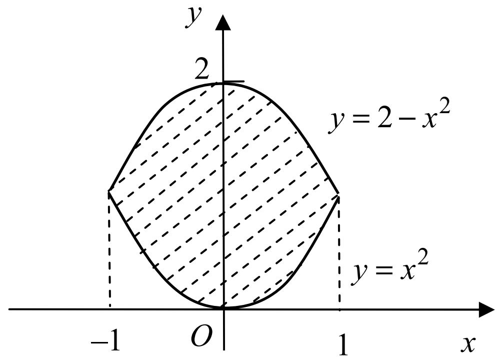


Рис. 6.4

Задача 4. Найти площадь фигуры, ограниченной параболами

$$y=x^2 \text{ и } y=2-x^2.$$

Решение. Найдем координаты точек пересечения этих парабол, решив систему

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y=2-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2, \\ x^2=2-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2, \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1=1, & y_1=1, \\ x_2=-1, & y_2=1. \end{matrix}$$

Изобразим для наглядности эту фигуру на рис. 6.4.

По формуле (6.5) вычислим площадь фигуры:

$$S=\int_{-1}^{1}\left(2-x^2-x^2\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(2-2x^2\right)dx=\left.\left(2x-\frac{2x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{1}=$$

$$=2\left(1-\frac{1}{3}\right)-2\left(-1+\frac{1}{3}\right)=2\frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

Задача 5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Решение. Так как

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2\sin^2 t}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

то данные параметрические уравнения описывают эллипс. Вычислим площадь S_1 части эллипса, расположенной в первой четверти (рис. 6.5), по формуле (6.6):

$$S_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t \cdot (a\cos t)' \, dt = -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t dt = \frac{ab}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi - 0 + \frac{1}{2}\sin 0 \right) = \frac{\pi ab}{4}.$$

Отсюда площадь всего эллипса $S = 4S_1 = \pi ab$ (кв. ед.).

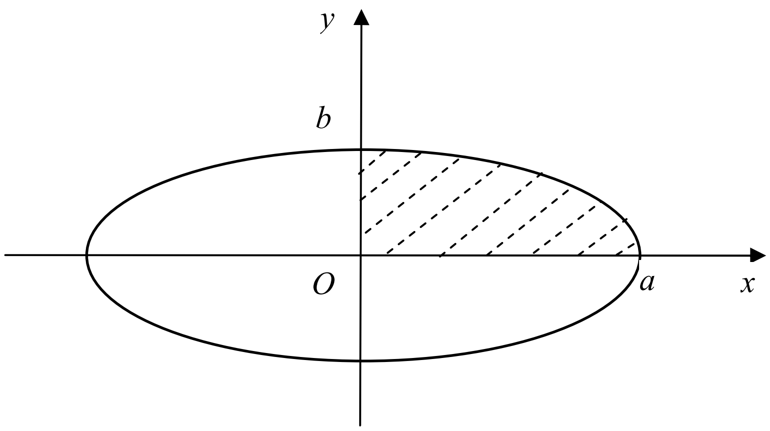


Рис. 6.5

Задача 6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r = 1 - \cos\varphi$.

Решение. Данная линия является кардиоидой (рис. 6.6), функция $r(\varphi)$ определена при всех значениях аргумента, имеет период 2π.

Искомую площадь вычислим по формуле (6.7):

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi-2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{3\cdot 2\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}\text{ (кв. ед.),}$$

так как $\sin 2\pi n=0$, $n\in Z$.

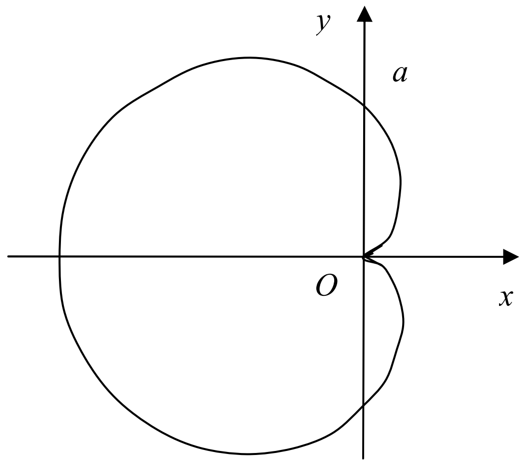


Рис. 6.6

6.4. Применение определенного интеграла для вычисления длин дуг плоских кривых

Длина L кривой, являющейся графиком функции $y=f(x)$, $a\le x\le b$, вычисляется по формуле

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \tag{6.8}$$

Длина L кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, вычисляется по формуле

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt. \tag{6.9}$$

Длина L кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, вычисляется по формуле

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi . \qquad (6.10)$$

Задача 7. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln\left(1 - x^2\right)$, если $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$.

Решение. Используем формулу (6.8), преобразовав предварительно подынтегральную функцию:

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + \left(\ln'\left(1 - x^2\right)\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{1 - x^2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2}{\left(1 - x^2\right)^2}} = \sqrt{\left(\frac{1 + x^2}{1 - x^2}\right)^2} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2} .$$

Поэтому

$$L = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 + x^2}{1 - x^2} dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 1 + 2}{x^2 - 1} dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2}{x^2 - 1}\right) dx =$$

$$= -\left(x + \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = -\left(\frac{1}{2} + \ln\left|\frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + 1}\right|\right) = \ln 3 - \frac{1}{2} .$$

Задача 8. Вычислить длину дуги кривой $x = t^2$, $y = \dfrac{t}{3}\left(t^2 - 3\right)$.

Решение. Так как кривая задана параметрическими уравнениями, то используем формулу (6.9), преобразовав предварительно подынтегральную функцию:

$$\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} = \sqrt{\left(\left(t^2\right)'\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{3}t^3 - t\right)'\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(2t)^2 + \left(t^2 - 1\right)^2} = \sqrt{4t^2 + t^4 - 2t^2 + 1} = \sqrt{\left(t^2 + 1\right)^2} = t^2 + 1 .$$

Находим пределы интегрирования из условия $y = 0$ и получаем:

$$L = \int_0^{\sqrt{3}} \left(t^2 + 1\right) dt = \left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} .$$

6.5. Применение определенного интеграла для вычисления объемов тел вращения

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 6.7), вычисляется по формуле

$$V_x = \pi\int_a^b y^2(x)dx. \tag{6.11}$$

Аналогично объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = g(y)$, осью Oy и двумя прямыми $y = c$ и $y = d$ (рис. 6.8), вычисляется по формуле

$$V_y = \pi\int_c^d x^2(y)dy. \tag{6.12}$$

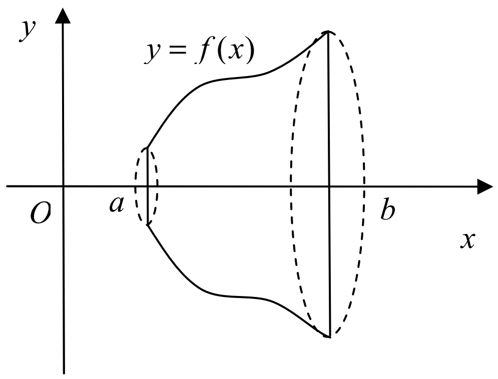


Рис. 6.7

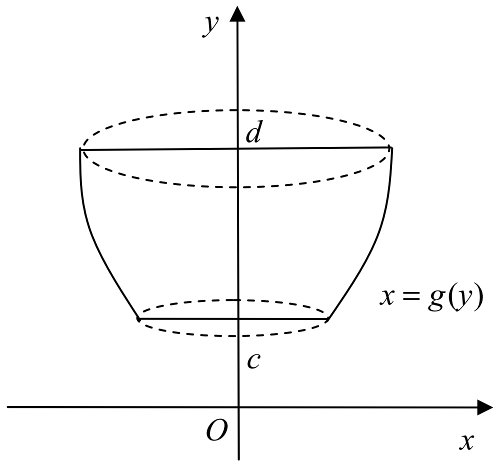


Рис. 6.8

Задача 9. Вывести формулу для вычисления объема шара радиуса R.

Решение. Поскольку объем шара радиуса R равен объему тела вращения окружности $x^2 + y^2 = R^2$ вокруг оси Ox, то по формуле (6.11) получим:

$$V = \int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ (куб. ед.).}$$

6.6. Несобственные интегралы

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;\,+\infty)$, тогда она интегрируема на любом отрезке $[a;\,b]$, где $a<b<+\infty$.

Определение. Несобственным интегралом функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a;\,+\infty)$ называется предел, определяемый равенством

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (6.13)$$

Если этот предел существует и является конечным, то несобственный интеграл (6.13) называется *сходящимся*, если же предел не существует или равен бесконечности – *расходящимися*.

Аналогично определяются несобственные интегралы по бесконечным промежуткам $(-\infty;\,a]$ и $(-\infty;+\infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx, \qquad (6.14)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx+\lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx. \qquad (6.15)$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;\,b]$ и не ограничена при $x=b$, тогда несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x)$ на отрезке $[a;\,b]$ определяется равенством

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (6.16)$$

Если этот предел существует и является конечным, то несобственный интеграл (6.16) называется сходящимся, если же предел не существует или равен бесконечности – расходящимся.

Аналогично определяются несобственные интегралы от функций с бесконечными разрывами в точках a и c, если $a<c<b$.

Задача 10. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}$ (или доказать его расходимость).

Решение. Используем формулу (6.13):

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} x \Big|_0^b \right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0 \right) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Итак, несобственный интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{2}$.

Задача 11. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$ (или доказать его расходимость).

Решение. Так как подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ не ограничена при $x \to 1-0$, то используем формулу (6.15):

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\frac{-1}{x-1} \Bigg|_0^{1-\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\frac{-1}{1-\varepsilon-1} - 1 \right) = \frac{-1}{-0} - 1 = +\infty.$$

Итак, несобственный интеграл расходится.

Тема 7. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

7.1. Общие понятия. Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, однородных и линейных

Определение. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимую переменную x с искомой функцией $y(x)$ и ее производными, записывается в виде

$$F\left(x; y; y'; y''; \ldots; y^{(n)}\right) = 0. \tag{7.1}$$

Определение. Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, существенно входящей в уравнение.

Уравнение (7.1) – дифференциальное уравнение n-го порядка.

Определение. Решением или интегралом дифференциального уравнения называется всякая функция, которая будучи подставленной в уравнение обращает его в тождество.

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае записывается в виде

$$F\left(x; y; y'\right) = 0. \tag{7.2}$$

Если дифференциальное уравнение (7.2) можно разрешить относительно y', то оно называется обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка, разрешенным относительно производной и записывается

$$y' = f(x; y). \tag{7.3}$$

Задача, в которой требуется найти решение дифференциального уравнения (7.3), удовлетворяющее начальному условию

$$y\,\Big|_{x=x_0} = y_0, \tag{7.4}$$

называется *задачей Коши*.

Определение. *Общим решением* дифференциального уравнения 1-го порядка называется функция $y = \varphi(x; c)$, зависящая от аргумента x и произвольной постоянной c и удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) при любом значении произвольной постоянной c она обращает уравнение в тождество;

2) для любых начальных условий (7.4) существует единственное значение произвольной постоянной $c = c_0$ такое, что решение $y = \varphi(x;\, c_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Определение. Решение, полученное из общего решения при конкретном значении $c = c_0$, называется *частным решением* дифференциального уравнения.

Рассмотрим решение некоторых типов дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \tag{7.5}$$

называется уравнением с *разделяющимися переменными.* Если $f_2(y) \neq 0$, то, разделив переменные в (7.5) и проинтегрировав обе части равенства, получим общее решение:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\,dx,\ \int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,dx + c.$$

Задача 1. Решить уравнение $y' = \frac{y}{x}$.

Решение. Разделив переменные в уравнении $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, получим $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Поэтому $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + \ln|c|$, т. е. $\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$, $\ln|y| = \ln|cx|$.

Итак, $y = cx$ – искомое общее решение. Решение $y = 0$ получается из формулы общего решения при $c = 0$.

Если правая часть уравнения (7.3) представима в виде $f(x;\, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, то уравнение

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7.6}$$

называется *однородным уравнением 1-го порядка.* Для решения этого уравнения вводят новую функцию $u(x) = \frac{y(x)}{x}$.

Тогда $y = u \cdot x$, $y' = u'x + u$, и уравнение (7.6) принимает вид $u'x + u = f(u)$. Разделяя переменные в этом уравнении, последовательно получим:

$$x\frac{dy}{dx} = f(u) - u\,;\;\; \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + c\,.$$

Перейдя после интегрирования к функции $y(x)$, получим общее решение исходного уравнения.

Задача 2. Решить уравнение $xy' = y\ln\frac{y}{x}$.

Решение. Разделив обе части исходного уравнения на *x*, получим, $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$. Так как это однородное уравнение, то введем функцию $u = \frac{y}{x}$. Тогда $y' = u'x + u$, и исходное уравнение примет вид $u'x + u = u\ln u$, откуда $x\frac{du}{dx} = u(\ln u - 1)$, $\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$.

Проинтегрировав обе части последнего соотношения, получим:

$$\int \frac{dx}{x} + \ln|c| = \int \frac{du}{u(\ln u - 1)};\quad \ln|x| + \ln|c| = \int \frac{d(\ln u)}{\ln u - 1};$$

$$\ln|cx| = \int \frac{d(\ln u - 1)}{\ln u - 1} = \ln|\ln u - 1|.$$

Итак, $cx = \ln u - 1$, $\ln u = cx + 1$, $u = e^{cx+1}$, $\frac{y}{x} = e^{cx+1}$.

Отсюда получаем $y = x \cdot e^{cx+1}$ – общее решение уравнения.

Дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{7.7}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – непрерывные функции от переменной *x*, называется *линейным уравнением 1-го порядка.*

Решение этого уравнения ищут в виде $y(x) = u(x) \cdot v(x)$. Тогда $y' = u'v + uv'$ и (7.7) преобразуется в $u'v + uv' + p(x) \cdot uv = q(x)$, или $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$. Функцию $v(x)$ находят из условия

$$v' + p(x)v = 0. \tag{7.8}$$

После чего, решая уравнение

$$u'v = q(x), \tag{7.9}$$

находят функцию $u(x)$.

Таким образом, решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка (7.7) сводится к решению двух уравнений (7.8) и (7.9) с разделяющимися переменными.

Замечание. При решении уравнения (7.8) произвольную постоянную c полагают равной нулю, находят частное решение.

Задача 3. Найти частное решение уравнения $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, удовлетворяющее начальному решению $y(0) = 1$.

Решение. Решение данного линейного дифференциального уравнения будем искать в виде $y(x) = u(x)\cdot v(x)$. Так как $y' = u'v + uv'$, то получим $u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2}$.

Найдем $v(x)$ из условия $v' + 2xv = 0$ (уравнение (7.8)). Имеем $\frac{dv}{dx} = -2xv$, $\int \frac{dv}{v} = -\int 2xdx$, $\ln|v| = -x^2, v(x) = e^{-x^2}$.

Далее найдем $u(x)$ из условия $u' \cdot e^{-x^2} = x \cdot e^{-x^2}$ (уравнение (7.9)). Получим $u' = x$, $du = xdx$, $u = \int xdx + c$, т. е. $u(x) = \frac{x^2}{2} + c$.

Следовательно, $y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – общее решение исходного уравнения. Подставляя в общее решение $x = 0$ и $y(0) = 1$, получим: $1 = (0 + c)\cdot 1$, т. е. $c = 1$. Следовательно, $y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – искомое частное решение уравнения.

7.2. Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка, допускающих понижение порядка

Дифференциальное уравнение называется уравнением, допускающим понижение порядка, если путем введения новой переменной, его можно свести к уравнению более низкого порядка.

Дифференциальное уравнение 2-го порядка в общем случае записывается в виде

$$F(x;\, y;\, y';\, y'') = 0. \tag{7.10}$$

Следует отметить, что общее решение $y = \varphi(x; c_1; c_2)$ дифференциального уравнения второго порядка зависит от двух произвольных постоянных c_1 и c_2, а начальные условия задачи Коши имеют вид:

$$y\,\Big|_{x=x_0} = y_0; \qquad y'\,\Big|_{x=x_0} = y'_0.$$

Рассмотрим три основные вида дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка.

1. Уравнения вида

$$y'' = f(x). \tag{7.11}$$

Делаем замену $y' = z(x)$, тогда $y'' = z'(x)$, и уравнение (7.11) сводим к уравнению первого порядка $z' = f(x)$. Решая это уравнение, получаем $z(x) = y'(x) = \int f(x)dx + c_1$.

Интегрируя последнее, имеем $y(x) = \int\left(\int f(x)dx + c_1\right)dx + c_2$.

2. Уравнения вида

$$y'' = f(x;\, y'), \tag{7.12}$$

т. е. уравнения, явно не содержащие искомую функцию y. Данные уравнения решаются с помощью замены $y' = z(x)$. Тогда $y'' = z'(x)$, и уравнение (7.12) принимает вид $z' = f(x; z(x))$.

3. Уравнения вида

$$y'' = f(y;\, y'), \tag{7.13}$$

т. е. уравнения, не содержащие в явном виде независимую переменную x, решают путем замены $y' = p(y)$. Тогда $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, и уравнение (7.13) принимает вид $p\dfrac{dp}{dy} = f(y;\, p)$.

Задача 4. Найти общее решение уравнения $y'' = \cos x$.

Решение. Так как уравнение имеет вид (7.11), то, проинтегрировав обе его части, получим $y' = \int \cos x dx + c_1 = \sin x + c_1$. Проинтегрировав последнее уравнение, найдем искомое общее решение:

$$y = \int\left(\sin x + c_1\right)dx + c_2, \text{ т. е. } y(x) = -\cos x + c_1 x + c_2.$$

Задача 5. Найти общее решение уравнения $2xy'' = y'$.

Решение. Так как уравнение имеет вид (7.12), то, сделав замену $y' = z(x)$, получим $y'' = z'(x)$ и $2xz'(x) = z(x)$, или $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{2x}$. Проинтегрировав обе части последнего уравнения, получим $\ln|z| + \ln|c_1| = \ln\left|\sqrt{x}\right|$, т. е. $c_1 z = \sqrt{x}$, или $c_1 \frac{dy}{dx} = \sqrt{x}$.

Интегрируя последнее выражение: $\int c_1 dy = \int \sqrt{x} dx + c_2$, получим: $y(x) = \frac{2}{3\,c_1} x^{\frac{3}{2}} + \frac{c_2}{c_1}$. Обозначив $c_1^* = \frac{2}{3c_1}$, $c_2^* = \frac{c_2}{c_1}$, окончательно имеем: $y(x) = c_1^* x^{\frac{3}{2}} + c_2^*$.

Задача 6. Найти частное решение уравнения $y \cdot y'' = (y')^2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Решение. Уравнение имеет вид (7.13), поэтому, выполнив замену $y' = p(y)$, получим: $y'' = p\frac{dp}{dy}$, $y \cdot p\frac{dp}{dy} = p^2$, $p\left(y\frac{dp}{dy} - p\right) = 0$. Отсюда следует, либо $p = 0$, т. е. $y' = 0$, что не удовлетворяет начальным данным, либо $y\frac{dp}{dy} - p = 0$.

Разделив переменные в последнем уравнении и проинтегрировав, последовательно получим: $y\frac{dp}{dy} = p$, $\int\frac{dp}{p} = \int\frac{dy}{y} + \ln|c_1|$, $\ln|p| = \ln|y| + \ln|c_1|$, $\ln|p| = \ln|c_1 y|$, $p = c_1 y$, или $y'(x) = c_1 y(x)$.

При $x = 0$ последнее равенство с учетом начальных данных принимает вид $3 = c_1 \cdot 1$, т. е. $c_1 = 3$. Поэтому $y'(x) = 3 \cdot y(x)$, $\frac{dy}{dx} = 3y$, или $\int\frac{dy}{y} = 3\int dx + c_2$, $\ln|y| = 3x + c_2$.

Получаем решение $y(x) = e^{3x + c_2}$. Подставим в это решение начальные условия $x = 0$ и $y = 1$, получим: $y(0) = e^{0 + c_2}$, $1 = e^{c_2}$. Отсюда находим $c_2 = 0$. Итак, $y(x) = e^{3x}$ – искомое частное решение.

7.3. Решение линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Уравнение вида

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x), \tag{7.14}$$

где p и q – постоянные; $f(x)$ – определенная на некотором интервале функция, называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами*. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (7.14) называется *линейным однородным дифференциальным уравнением.*

Общее решение уравнения (7.14) есть сумма общего решения $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения и какого-нибудь частного решения y^* исходного неоднородного уравнения, т. е.

$$y = \bar{y} + y^*. \tag{7.15}$$

Однородное уравнение

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{7.16}$$

является частным случаем неоднородного, и для его решения составляется характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{7.17}$$

Решаем характеристическое уравнение. Вид общего решения $y(x)$ определяется корнями характеристического уравнения λ_1 и λ_2.

1. Если λ_1 и λ_2 действительные и разные, т. е. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{7.18}$$

2. Если λ_1 и λ_2 действительные и одинаковые, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2$, то

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)\, e^{\lambda_1 x}. \tag{7.19}$$

3. Если λ_1 и λ_2 комплексно-сопряженные числа, т. е. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, где $i = \sqrt{-1}$, то

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x). \tag{7.20}$$

Здесь c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Задача 7. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ и решим его: $\lambda_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 6}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$, т. е. $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$. По формуле (7.18) записываем искомое общее решение:

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}.$$

Задача 8. Найти общее решение уравнения $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ и решим его: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 9}}{2} = \dfrac{-6 \pm 0}{2}$, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$.

По формуле (7.19) записываем искомое решение:

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-3x}.$$

Задача 9. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y' + 29y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 29 = 0$ и решим его:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 29}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-100}}{2} = \frac{-4 \pm 10\cdot\sqrt{-1}}{2} = -2 \pm 5\cdot i.$$

По формуле (7.19) записываем искомое решение:

$$y(x) = e^{-2x}(c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x).$$

Метод отыскания частного решения $y^*(x)$ уравнения (7.14) рассмотрим для двух специальных видов $f(x)$.

1. Пусть $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, т. е. пусть уравнение (7.14) имеет вид

$$y'' + py' + qy = P_n(x)e^{ax}. \qquad (7.21)$$

Тогда, если число a совпадает с k корнями $(k = 1, 2)$ характеристического уравнения (7.17), то частное решение y^* уравнения (7.21) следует искать в виде

$$y^* = x^k \cdot Q_n(x)e^{ax}, \qquad (7.22)$$

где $Q_n(x)$ – полный многочлен той же степени, что и $P_n(x)$.

Подставляя y^* в уравнение (7.21) и сокращая обе части уравнения на $e^{\alpha x}$, получаем тождество, из которого приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях получаем систему для определения значений коэффициентов. Этот метод нахождения y^* называется методом неопределенных коэффициентов.

Замечание 1. Если $f(x)=P_n(x)$, то следует проверять, совпадает ли число $a=0$ с корнями характеристического уравнения.

Замечание 2. Если $f(x)=e^{ax}$, $P_n(x)=P_0(x)=1$, то в этом случае $Q_n(x)=Q_0(x)=A$, где $A=\text{const}$.

2. Пусть $f(x)=e^{ax}(m\cos bx+n\sin bx)$, т. е. пусть уравнение (7.14) имеет вид

$$y''+py'+qy=e^{ax}(m\cos bx+n\sin bx). \tag{7.23}$$

Тогда если комплексное число $a\pm ib$ совпадает с корнями характеристического уравнения (7.17), то частное решение y^* уравнения (7.23) следует искать в виде

$$y^*=xe^{ax}(M\cos bx+N\sin bx). \tag{7.24}$$

Если же комплексное число $a\pm ib$ не совпадает с корнями характеристического уравнения (7.17), то частное решение y^* уравнения (7.23) следует искать в виде

$$y^*=e^{ax}(M\cos bx+N\sin bx). \tag{7.25}$$

При этом неопределенные коэффициенты M и N отыскиваются путем подстановки y^* в уравнение (7.23) с последующим приравниванием коэффициентов при $\cos bx$ и $\sin bx$ и решением получившейся системы.

Замечание 1. В частном случае, когда $f(x)=m\cos bx+n\sin bx$ и корни характеристического уравнения (7.17) $\lambda_{1,2}=\pm ib$, то частное решение y^* уравнения (7.23) следует искать в виде

$$y^*=x(M\cos bx+N\sin bx), \tag{7.26}$$

если же $\lambda_{1,2}\neq\pm ib$, то

$$y^*=(M\cos bx+N\sin bx). \tag{7.27}$$

Замечание 2. Если $f(x) = m\cos bx$ или $f(x) = n\sin bx$, y^* все равно следует искать в общем виде (7.26) или (7.27), т. е. и с $\cos bx$, и с $\sin bx$.

Задача 10. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 7y' + 6y = (x-2)\cdot e^{3x}.$$

Решение. Найдем сначала общее решение $\bar{y}(x)$ однородного уравнения $y'' - 7y' + 6y = 0$.

Для этого составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ и решим его:

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot 6}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}, \text{ т. е. } \lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 1.$$

В соответствии с формулой (7.18) $\bar{y}(x) = c_1 e^{6x} + c_2 e^{x}$.

Найдем далее y^* – частное решение исходного уравнения. Поскольку число $a = 3$ не совпадает с корнями характеристического уравнения, то в соответствии с формулой (7.22) y^* будем искать в виде $y^* = (Ax + B)e^{3x}$.

Тогда

$$(y^*)' = Ae^{x} + 3(Ax + B)e^{3x} = (3Ax + A + 3B)e^{3x};$$

$$(y^*)'' = 3Ae^{3x} + 3(3Ax + A + 3B)e^{3x} = (9Ax + 6A + 9B)e^{3x}.$$

Подставляя y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ в исходное уравнение и сокращая обе части уравнения на e^{3x}, получим:

$$9Ax + 6A + 9B - 7(3Ax + A + 3B) + 6(Ax + B) = x - 2;$$

$$-6Ax - A - 6B = x - 2.$$

Приравняв коэффициенты в обеих частях последнего равенства при одинаковых степенях *x*, получим систему уравнений

$$\begin{cases} -6A = 1, \\ -A - 6B = -2. \end{cases}$$

Решив ее, найдем *A* и *B*: $A = -\dfrac{1}{6}$, $B = \dfrac{13}{36}$.

Итак, $y^* = \left(-\dfrac{x}{6} + \dfrac{13}{36}\right) \cdot e^{3x}$.

Значит $y = \overline{y} + y^* = c_1 e^{6x} + c_2 e^x + \dfrac{1}{6} \cdot \left(\dfrac{13}{6} - x\right) \cdot e^{3x}$ – общее решение исходного уравнения.

Задача 11. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$.

Решение. Найдем сначала общее решение $\overline{y}(x)$ однородного уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$. Для этого составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ и решим его:

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1^2 - 5} = -1 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = -1 \pm 2i.$$

В соответствии с формулой (7.20)

$$\overline{y}(x) = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

Найдем далее y^* – какое-нибудь частное решение исходного уравнения. Поскольку число i не является корнем характеристического уравнения, то в соответствии с формулой (7.27) будем искать y^* в виде $y^* = M\cos x + N\sin x$:

$$(y^*)' = -M\sin x + N\cos x; \quad (y^*)'' = -M\cos x - N\sin x.$$

Подставляя y^*, $(y^*)'$ и $(y^*)''$ в исходное уравнение, получим:

$$-M\cos x - N\sin x + 2(-M\sin x + N\cos x) + 5(M\cos x + N\sin x) = 2\cos x;$$

$$(4M + 2N)\cos x + (-2M + 4N)\sin x = 2\cos x.$$

Приравняв коэффициенты в обеих частях последнего равенства при $\cos x$ и $\sin x$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 4M + 2N = 2, \\ -2M + 4N = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2M + N = 1, \\ M = 2N. \end{cases}$$

Решив ее, найдем M и N: $M = \dfrac{2}{5}$, $N = \dfrac{1}{5}$.

Итак, $y^* = \dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\sin x$.

Значит $y = \bar{y} + y^* = e^{-x}\left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right) + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$ – общее решение исходного уравнения.

7.4. Решение систем линейных дифференциальных уравнений

Совокупность дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{7.28}$$

где $x(t)$, $y(t)$ – функции независимой переменной t; a_{ij} $(i = 1, 2;\ j = 1, 2)$ – числа, называется нормальной системой двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Общим решением системы (7.28) называется совокупность двух функций

$$x = x(t; c_1; c_2); \quad y = y(t; c_1; c_2), \tag{7.29}$$

содержащих две произвольные постоянные c_1 и c_2 и обращающих оба уравнения системы в тождества при любых значениях c_1 и c_2.

Решение, получаемое из общего при подстановке конкретных числовых значений произвольных постоянных, называется *частным решением*.

Задача нахождения решения системы (7.28), удовлетворяющего условиям

$$x(t_0) = x_0; \ y(t_0) = y_0, \tag{7.30}$$

где t_0, x_0, y_0 – заданные числа, называется задачей Коши для системы (7.28).

Один из способов решения системы (7.28) состоит в сведении ее к обыкновенному дифференциальному уравнению 2-го порядка путем исключения одной из искомых функций. Покажем это на примере.

Задача 12. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} x' = -3x - y, \\ y' = x - y. \end{cases}$$

Из 2-го уравнения системы найдем $x = y' + y$ и подставим в 1-е уравнение, получим:

$$(y' + y)' = -3(y' + y) - y; \quad y'' + y' = -3y' - 3y - y,$$

т. е. $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Для решения последнего уравнения составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ и решим его: $(\lambda + 2)^2 = 0$, $\lambda_{1,2} = -2$.

В соответствии с формулой (7.19) $y(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{-2t}$. Подставив найденную функцию $y(t)$ в выражение $x(t) = y'(t) + y(t)$, найдем $x(t)$:

$$x(t) = \left((c_1 + c_2 t) e^{-2t}\right)' + (c_1 + c_2 t) e^{-2t} = c_2 e^{-2t} - 2(c_1 + c_2 t) e^{-2t} + (c_1 + c_2 t) e^{-2t} =$$
$$= (c_2 - 2c_1 - 2c_2 t + c_1 + c_2 t) e^{-2t} = (c_2 - c_1 - c_2 t) e^{-2t}.$$

Итак, $\begin{cases} x(t) = (c_2 - c_1 - c_2 t)\, e^{-2t}, \\ y(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{-2t} \end{cases}$ – общее решение исходной системы.

Тема 8. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

8.1. Частные производные функции двух переменных

Определение. Переменная величина z называется функцией двух переменных величин x и y, если каждой упорядоченной паре $(x; y)$ допустимых значений x и y соответствует единственное значение z.

Функция двух переменных обозначается одним из выражений: $z = f(x; y)$, $z = z(x; y)$ и т. п.

Аналогично определяются функции большего числа переменных.

Пусть в некоторой окрестности точки $M(x; y)$ задана функция $z = z(x; y)$. Фиксируя переменную y так, что $y = const$, получим функцию от одной переменной x. Производная этой функции в точке x называется частной производной функции $z(x; y)$ в точке $(x; y)$ и обозначается $\dfrac{\partial z(x; y)}{\partial x}$, или z'_x. Итак,

$$\frac{\partial z(x; y)}{\partial x} = \left.\frac{dz(x; y)}{dx}\right|_{y = \text{const.}} \tag{8.1}$$

Аналогично

$$\frac{\partial z(x; y)}{\partial y} = \left.\frac{dz(x; y)}{dy}\right|_{x = \text{const.}} \tag{8.2}$$

Поскольку частные производные z'_x и z'_y в свою очередь являются функциями двух переменных, то и от них можно брать частные производные:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}; \tag{8.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}. \tag{8.4}$$

Частные производные (8.3) и (8.4) называются частными производными второго порядка. Взяв от них частные производные, получим частные производные третьего порядка и т. д.

Задача 1. Дана функция $z = e^{xy}$. Показать, что она удовлетворяет уравнению $x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Решение. Вычислим, пользуясь определением, частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} \cdot (xy)'_x = ye^{xy}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ye^{xy}\right) = ye^{xy} \cdot (xy)'_y = y^2 e^{xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy} \cdot (xy)'_y = xe^{xy}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{xy}\right) = xe^{xy} \cdot (xy)'_y = x^2 e^{xy}.$$

Следовательно, $x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 y^2 e^{xy} - y^2 x^2 e^{xy} = 0$, что и требовалось доказать.

8.2. Экстремум функции двух переменных

Определение. Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется точкой локального максимума (минимума) функции $z = z(x; y)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек из этой окрестности выполняется неравенство $z\left(x_0; y_0\right) > z\left(x; y\right)$ $\left(z\left(x_0; y_0\right) < z\left(x; y\right)\right)$.

Точки минимума и максимума называются точками *экстремума*. Экстремум функции нескольких переменных может достигаться лишь в точках, лежащих внутри области ее определения, в которых все частные производные первого порядка обращаются в нуль или не существуют.

Такие точки называются *критическими*. Для функции двух переменных $z = z(x; y)$ критические точки находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} z'_x\left(x; y\right) = 0, \\ z'_y\left(x; y\right) = 0. \end{cases} \tag{8.5}$$

Условия (8.5) являются *необходимыми*, но не достаточными условиями существования экстремума. *Достаточные условия* экстремума для функции $z = z(x; y)$ в критической точке $M_0(x_0; y_0)$ выражаются с помощью определителя

$$\Delta\left(x_0;\, y_0\right)=\begin{vmatrix} z''_{xx}\left(x_0;\, y_0\right) & z''_{xy}\left(x_0;\, y_0\right) \\ z''_{xy}\left(x_0;\, y_0\right) & z''_{yy}\left(x_0;\, y_0\right) \end{vmatrix}=$$

$$=z''_{xx}\left(x_0;y_0\right)z''_{yy}\left(x_0;y_0\right)-\left(z''_{xy}\left(x_0;y_0\right)\right)^2. \qquad (8.6)$$

1. Если $\Delta(x_0;\, y_0)>0$, то $M_0(x_0;\, y_0)$ – это точка экстремума: при $z''_{xx}\left(x_0;y_0\right)<0$ – точка максимума, при $z''_{xx}\left(x_0;y_0\right)>0$ – точка минимума.

2. Если $\Delta\left(x_0;y_0\right)<0$, то в точке $M_0(x_0;y_0)$ нет экстремума.

Задача 2. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+y^3+9xy$.

Решение. Вычислим частные производные первого и второго порядка: $z'_x\left(x;y\right)=3x^2+9y$; $z'_y\left(x;y\right)=3y^2+9x$; $z''_{xx}\left(x;y\right)=6x$; $z''_{yy}\left(x;y\right)=6y$; $z''_{yx}\left(x;y\right)=9$.

Приравнивая к нулю первые производные, получим систему уравнений для определения критических точек

$$\begin{cases} 3x^2+9y=0, \\ 3y^2+9x=0. \end{cases}$$

Решаем данную систему и находим две критические точки $M_1(0;0)$ и $M_2(-3;-3)$. Вычисляем значения частных производных второго порядка и определитель в этих точках.

В точке $M_1(0;0)$ получаем: $z''_{xx}(0;0)=0$; $z''_{yy}(0;0)=0$; $z''_{yx}(0;0)=9$;

$$\Delta\left(0;0\right)=\begin{vmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{vmatrix}=0\cdot 0-(-9)^2=-81.$$

Так как в точке $M_1(0;0)$ определитель $\Delta(0;0)=-81<0$, то в силу достаточных условий заключаем, что в этой точке экстремума нет.

В точке $M_2(-3;-3)$ получаем: $z''_{xx}(-3;-3)=-18$; $z''_{yy}(-3;-3)=-18$;

$$z''_{yx}(-3;-3)=9;\ \Delta\left(-3;-3\right)=\begin{vmatrix} -18 & 9 \\ 9 & -18 \end{vmatrix}=(-18)(-18)-9^2=243.$$

Так как $\Delta=243>0$ и $z''_{xx}(-3;-3)=-18$, то в силу достаточных условий заключаем, что функция в точке $M_2(-3;-3)$ имеет максимум, причем $\max z(x;\, y)=z(-3;-3)=27$.

Тема 9. РЯДЫ

9.1. Числовые ряды

Пусть задана бесконечная последовательность чисел u_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (9.1)$$

называется *числовым рядом*. Числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называют членами ряда, причем u_n – его общим членом.

Конечная сумма

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n, \qquad (9.2)$$

слагаемыми которой являются первые n членов ряда (9.1), называется n-й частичной суммой данного ряда.

Определение. Ряд (9.1) называется сходящимся, если существует конечный предел его частичной суммы

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \qquad (9.3)$$

который и называется суммой ряда. В этом случае принимают

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ . \qquad (9.4)$$

В противном случае ряд называется расходящимся.

Задача 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots \ .$$

Решение. Составим n-ю частичную сумму для заданного ряда: $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}$. Члены S_n являются членами геометрической прогрессии с $b_1 = 1$ и $q = \frac{1}{3}$. Вычислим их сумму по формуле $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ и найдем ее предел.

Таким образом,

$$S_n = \frac{1(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^n}) \text{ и } \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^n}) = \frac{3}{2}(1-\frac{1}{\infty}) = \frac{3}{2}.$$

Данный ряд сходится, причем $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}$.

Полезно иметь ввиду, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ $(a \neq 0)$ сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

При изучении сходимости рядов используют необходимый и достаточные признаки сходимости.

Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Обратное утверждение неверно.

Замечание. Из необходимого признака сходимости ряда вытекает достаточное условие расходимости ряда: если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ или не существует, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Задача 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$.

Решение. Проверим выполнение необходимого признака сходимости ряда. Так как $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1+0} = 1 \neq 0$, то необходимый признак сходимости не выполнен. Следовательно, данный ряд расходится.

Задача 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Решение. Так как $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$, то необходимый признак сходимости выполнен. О сходимости ряда на основании этого признака ничего нельзя сказать. Для изучения его сходимости нужно использовать достаточные признаки сходимости.

Ряд, все члены которого положительны, называется *знакоположительным* рядом. Рассмотрим далее достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

Признак Даламбера

Пусть дан знакоположительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \,,\ u_n > 0\,,\ n = 1, 2, 3,\ \ldots, \qquad (9.5)$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Тогда, если $l < 1$, то ряд (9.5) сходится, если $l > 1$, то ряд (9.5) расходится.

Замечание. Признак Даламбера удобно применять, если в u_n входят выражения a^n и $n!$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ не существует или же $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, то признак Даламбера не позволяет установить сходимость ряда (9.5).

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$.

Решение. Применяем признак Даламбера. Находим предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} : \frac{n^2}{3^n} = \frac{3^n}{3^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Данный предел меньше 1, значит ряд сходится.

Радикальный признак Коши

Пусть дан ряд с положительные членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \,,\ \ n = 1, 2, 3,\ \ldots, \qquad (9.6)$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. Тогда, если $l < 1$, то ряд (9.6) сходится, если $l > 1$, то ряд (9.6) расходится.

Замечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ не существует или же $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, то радикальный признак Коши не позволяет установить, сходится ли исследуемый ряд (9.6).

Задача 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^n$.

Решение. Этот ряд сходится по радикальному признаку Коши, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{4}}{2+\frac{3}{4}}+\dfrac{1+0}{2+0}=\dfrac{1}{2}<1$.

Интегральный признак Коши

Если положительная, невозрастающая и непрерывная при $x\ge a\ge 1$ функция $f(x)$ такова, что $f(n)=u_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Задача 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$.

Решение. Этот ряд по интегральному признаку Коши расходится, так как расходится несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln x}$.

Действительно,

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_2^{b}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_2^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\ln(\ln x)\Big|_2^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\Big(\ln(\ln b)-\ln(\ln 2)\Big)=+\infty.$$

Замечание. С помощью интегрального признака Коши можно доказать, что *обобщенный гармонический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$. Отсюда следует, что гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится (задача 3).

Первый признак сравнения

Рассмотрим два знакоположительных ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \tag{9.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n \tag{9.8}$$

Пусть выполняется условие $u_n \le v_n$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$. Тогда, если сходится ряд (9.8), то сходится и ряд (9.7), если же ряд (9.7) расходится, то расходится и ряд (9.8).

Второй признак сравнения

Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = A\,(0 < A < +\infty)$, то ряды (9.7) и (9.8) сходятся или расходятся одновременно.

Замечание. При использовании признаков сравнения во многих случаях ряды удобно сравнивать с обобщенным гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$, который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Задача 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2 + n + \sqrt{n}}$.

Решение. Возьмем для сравнения сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ (этот ряд сходится, так как это обобщенный гармонический ряд с $\alpha = 2$). Так как $\dfrac{1}{n^2 + n + \sqrt{n}} < \dfrac{1}{n^2}$, то по первому признаку сравнения сходится и наш ряд.

Задача 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. Возьмем для сравнения расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (этот ряд расходится, так как это обобщенный гармонический ряд с $\alpha = \dfrac{1}{2}$).

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = 1$ (так как $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ – это 1-й замечательный предел), следовательно, по второму признаку сравнения ряд расходится.

Рассмотрим знакопеременные и знакочередующиеся ряды.

Ряд называется *знакопеременным*, если среди его членов есть как положительные, так и отрицательные.

Ряд называется *знакочередующимся*, если он имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots, \tag{9.9}$$

где $u_n > 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Признак сходимости знакочередующегося ряда (признак Лейбница)

Если члены u_n ряда монотонно убывают $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ сходится, а его сумма положительна и не превосходит первого члена.

Задача 9. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Решение. Данный ряд является знакочередующимся, поэтому проверим выполнение условий признака Лейбница. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$, а $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > 0$, то оба условия признака Лейбница выполнены. Следовательно, данный знакочередующийся ряд сходится.

Введем понятие абсолютной и условной сходимости.

Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$, составленный из абсолютных величин его членов, сходится.

Сходящийся знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, не являющийся абсолютно сходящимся, называется *условно сходящимся*.

Примером условно сходящегося ряда является ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. Действительно, как показано в задаче 9, этот знакочередующийся ряд по признаку Лейбница сходится. Но ряд, составленный из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, является расходящимся гармоническим рядом. Следовательно, исходный ряд сходится, но не абсолютно, а значит, он является условно сходящимся рядом.

9.2. Степенные ряды

Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (9.10)$$

где a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ – постоянные числа, называется *степенным* рядом.

Множество значений аргумента x, для которых степенной ряд (9.10) сходится, называется *областью сходимости* этого ряда.

При нахождении области сходимости степенного ряда используется понятие радиуса сходимости и интервала сходимости степенного ряда.

Величина $R \geq 0$ (где R – число или символ $+\infty$) такая, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| < R$, ряд (9.10) сходится, и при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > R$, ряд (9.10) расходится, называется *радиусом сходимости* степенного ряда (9.10).

Известно, что у всякого степенного ряда существует радиус сходимости.

Множество точек x, для которых $|x| < R$, называется *интервалом сходимости* ряда (9.10).

Очевидно, что интервал сходимости есть открытый интервал $(-R;\ R)$ с центром в точке $x = 0$.

На концах интервала сходимости, т. е. при $x = \pm R$, ряд (9.10) может либо сходиться, либо расходиться.

Отметим, что у некоторых степенных рядов интервал сходимости вырождается в точку (если $R = 0$), а у других – охватывает всю ось Ox (если $R = +\infty$).

Радиус сходимости степенного ряда можно вычислить либо по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{9.11}$$

либо по формуле

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}, \tag{9.12}$$

если стоящие в правых частях этих равенств пределы существуют. Если же $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 0$, то $R = +\infty$.

Задача 10. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}\frac{x^n}{n2^n}$.

Решение. Вычислим радиус сходимости степенного ряда по формуле (9.11).

Так как $a_n = \dfrac{1}{n \cdot 2^n}$, то $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$, и $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{(n+1)2^{n+1}}{n \cdot 2^n} \right| =$
$= 2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n} \right) = 2 \cdot 1 = 2$.

Следовательно, интервал сходимости данного ряда будет $(-2; 2)$. Это означает, что при $|x| < 2$ ряд сходится, а при $|x| > 2$ – расходится. Исследуем сходимость степенного ряда на концах интервала сходимости, т. е. в точках $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$.

Подставив в исходный степенной ряд $x_1 = 2$, получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Это гармонический ряд. Так как он расходится, то и степенной ряд в точке $x_1 = 2$ расходится.

Подставив в исходный степенной ряд $x_2 = -2$, получим знакочередующийся числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

По признаку Лейбница этот ряд сходится (см. задачу 9), следовательно, и степенной ряд в точке $x_2 = -2$ сходится. Итак, областью сходимости нашего степенного ряда является числовой промежуток $[-2; 2)$.

Замечание. Отметим, что степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad (9.13)$$

по степеням двучлена $x - x_0$ (при $x_0 = 0$ ряд (8.13) принимает вид (8.10)) сходится при $|x - x_0| < R$, и его интервал сходимости имеет вид

$$x_0 - R < x < x_0 + R. \qquad (9.14)$$

Радиус сходимости ряда (9.13) также вычисляется по формулам (9.11) и (9.12).

Сходящиеся степенные ряды обладают некоторыми замечательными свойствами. В частности, внутри интервала сходимости их можно почленно интегрировать и дифференцировать, при этом полученные степенные ряды будут иметь тот же радиус сходимости, что и исходный степенной ряд.

9.3. Ряды Тейлора и Маклорена

Теорема. Если функция $f(x)$ и ее производные всех порядков определены, непрерывны и ограничены на $(a;b)$, а точки x_0 и x принадлежат этому интервалу, то на $(a;b)$ функция $f(x)$ представима степенным рядом

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad (9.15)$$

который называется рядом Тейлора для функции $f(x)$.

При $x_0=0$ ряд Тейлора (8.15) называется рядом Маклорена и формула (9.15) принимает вид

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \qquad (9.16)$$

или в развернутой формуле записи

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots. \qquad (9.17)$$

Поскольку основные элементарные функции e^x, $\sin x$, $\cos x$ удовлетворяют условиям сформулированной выше теоремы на всей числовой прямой, то при любом $x\in R$ имеют место следующие разложения:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots; \qquad (9.18)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots; \qquad (9.19)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots. \qquad (9.20)$$

Для $-1<x\le 1$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots, \qquad (9.21)$$

а для $-1<x<1$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n + \ldots \,. \tag{9.22}$$

Приведенные разложения используются для приближенного вычисления определенных интегралов, для приближенного вычисления значений функций, для решения дифференциальных уравнений и т. д.

Задача 11. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{0,5} \ln(1+x^2)dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Так как разложение функции $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена имеет вид (9.21), то подставляя в это разложение вместо x переменную x^2, получим:

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \ldots \,.$$

Используя это разложение и почленно интегрируя, получим:

$$\int\limits_0^{0,5} \ln(1+x^2)dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \ldots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{2\cdot 5} + \frac{x^7}{3\cdot 7} - \frac{x^9}{4\cdot 9} + \ldots \right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^3\cdot 3} - \frac{1}{2^5\cdot 10} + \frac{1}{2^7\cdot 21} - \frac{1}{2^9\cdot 36} + \ldots \approx$$

$$\approx \frac{1}{24} - \frac{1}{320} + \frac{1}{3968} - \frac{1}{18432} + \ldots \approx \frac{1}{24} - \frac{1}{320} \approx 0,039\,.$$

Так как при вычислении интеграла мы получили знакочередующийся числовой ряд, то отбросив при вычислении его сумм все члены, начиная с третьего члена $\frac{1}{3968}$, мы допустили ошибку, не превышающую первого отброшенного члена (согласно признаку сходимости Лейбница). Поскольку же $\frac{1}{3968} < 0,001$, то наш интеграл вычислен с точностью до 0,001.

Задача 12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1$.

Решение. Запишем искомое решение $y(x)$ дифференциального уравнения в виде степенного ряда Маклорена

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots \,. \tag{9.23}$$

Найдем последовательно $y(0), y'(0)$ и $y''(0)$. Из начального условия следует, что $y(0) = 1$. Непосредственно из дифференциального уравнения находим, что $y'(0) = 0^2 + y^2(0) = 1$.

Продифференцировав обе части уравнения, получим: $y'' = 2x + 2y \cdot y'$. Отсюда, $y''(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot y(0) \cdot y'(0) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$. Подставляя найденные значения производных в (9.23), получим искомое разложение

$$y(x) = 1 + x + \frac{2}{2!}x^2 + \ldots = 1 + x + x^2 + \ldots \,.$$

Тема 10. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

10.1. Двойные интегралы, их вычисление в декартовой и полярной системах координат

Двойной интеграл определяется как конечный предел интегральной суммы от функции двух переменных $z = f(x; y)$ по двумерной области D и обозначается $\iint\limits_D f(x; y)dxdy$ [2].

Если область D ограничена прямыми $x = a, x = b$ (проектируется на ось Ox в отрезок $[a; b]$) и графиками функций $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, причем $\varphi_2(x) \geq \varphi_1(x)$ при $x \in [a; b]$, и любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу области не более чем в двух точках (рис. 10.1), то двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x; y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y)dy\,. \tag{10.1}$$

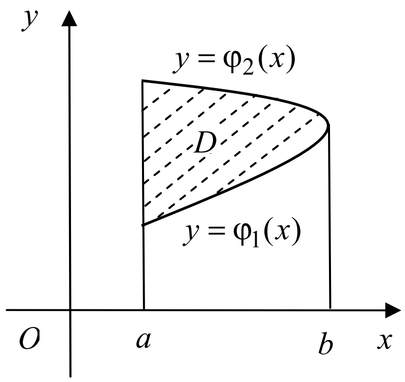


Рис. 10.1

Стоящий в правой части (10.1) интеграл называется повторным интегралом и вычисляется следующим образом. Сначала вычисляют интеграл по переменной y от функции $f(x; y)$, считая при этом, что $x = const$. Получившуюся в результате новую функцию $f_1(x)$ интегрируют по переменной x и в итоге получают число, которое равно искомому двойному интегралу.

Если область D ограничена прямыми $y = c, y = d$ (проектируется на ось Oy в отрезок $[c; d]$) и графиками функций $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$, причем $\psi_2(y) \geq \psi_1(y)$ при $y \in [c; d]$, и любая прямая, параллельная оси Ox пересекает границу области не более чем в двух точках (рис. 10.2), то двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x; y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x; y)dx. \tag{10.2}$$

При этом сначала вычисляют интеграл по переменной x от функции $f(x;y)$, считая, что $y = const$, затем получившуюся функцию $f_2(y)$ интегрируют по переменной y и в результате получают число, которое равно искомому двойному интегралу.

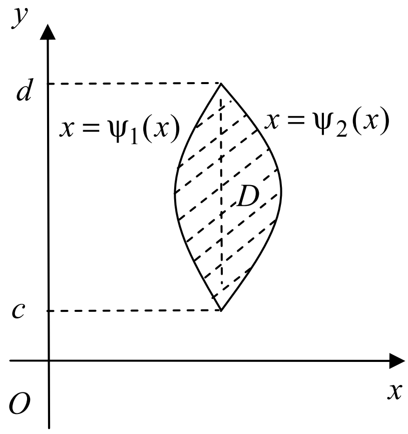


Рис. 10.2

Задача 1. Вычислить двойной интеграл от функции $f(x;\, y) = x + y$ по области D, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = x$ и $y = 1$.

Решение. Изобразим область D (рис. 10.3, *а*).

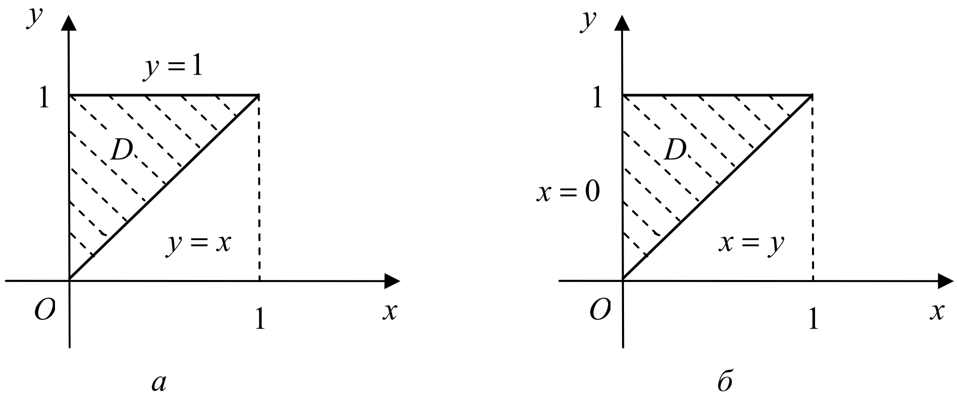


Рис. 10.3

Область D проектируется на ось Ox в отрезок $[0;1]$.

В соответствии с формулой (9.1) получим:

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 (x+y)dy = \int\limits_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_x^1 dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x\cdot 1 + \frac{1^2}{2} - x\cdot x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} + x - \frac{3x^2}{2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Данный двойной интеграл можно вычислить и по формуле (10.2), Спроектировав область D на ось Oy в отрезок $[0;1]$, как показано на рис. 10.3, *б*. Тогда

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 dy \int_0^y (x+y)dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + yx \right)\Bigg|_0^y dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + y^2 \right) dy = \int_0^1 \frac{3y^2}{2} dy = \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Замечание 1. Переход при вычислении двойного интеграла от расстановки пределов интегрирования по формуле (10.1) к расстановке пределов по формуле (10.2) называется *изменением порядка интегрирования.*

Замечание 2. Если область D не удовлетворяет вышеуказанным условиям, то ее разбивают на несколько областей, каждая из которых удовлетворяет указанным условиям.

В некоторых случаях вычисление двойного интеграла значительно упрощается, если перейти к полярной системе координат. При переходе от декартовых координат x и y к полярным r и φ по формулам $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$ двойной интеграл преобразуется по формуле

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \iint_D f(r\cos\varphi; r\sin\varphi) r dr d\varphi, \tag{10.3}$$

причем стоящий в правой части (10.3) интеграл также вычисляется сведением к повторному. Возможны следующие три случая.

1. Полюс находится вне области интегрирования. Область интегрирования D ограничена лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, граничными кривыми $r = \phi_1(\varphi)$ и $r = \phi_2(\varphi)$, причем любой луч, выходящий из полюса и проходящий через область D, пересекает границу не более чем в двух точках (рис. 10.4). Тогда

$$\iint_D f(r\cos\varphi; r\sin\varphi) r dr d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\phi_1(\varphi)}^{\phi_2(\varphi)} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi) r dr. \tag{10.4}$$

2. Полюс находится на границе области, и область интегрирования D ограничена лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ (рис. 10.5). Тогда интеграл (10.3) вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi; r\sin\varphi) r dr d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{0}^{\phi(\varphi)} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi) r dr\,. \qquad (10.5)$$

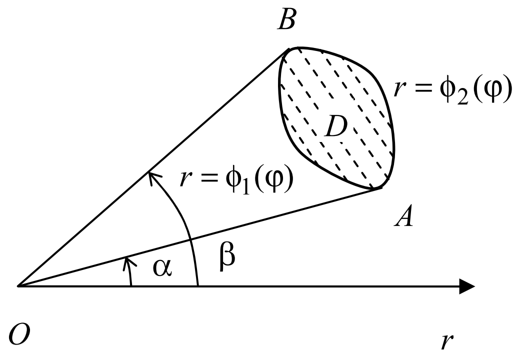


Рис. 10.4

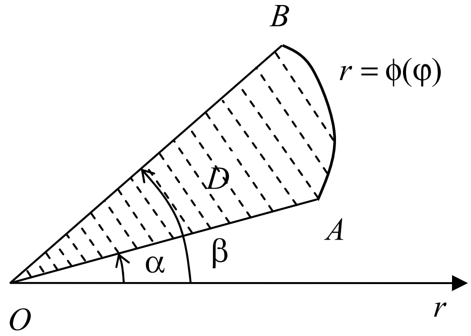


Рис. 10.5

3. Полюс находится внутри области интегрирования D (рис. 10.6), интеграл (9.3) вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi; r\sin\varphi) r dr d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\phi(\varphi)} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi) r dr\,. \qquad (10.6)$$

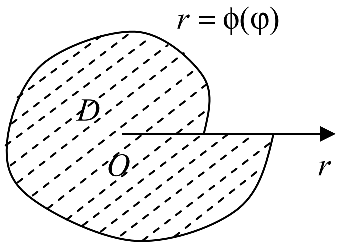


Рис. 10.6

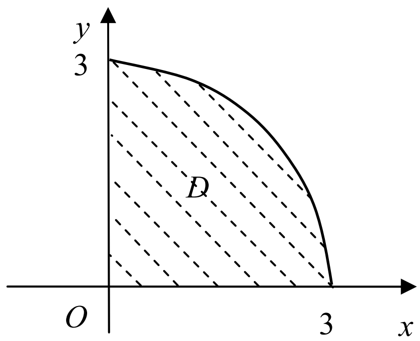


Рис. 10.7

Замечание. Если область D не удовлетворяет вышеуказанным условиям, то ее разбивают на несколько областей, каждая из которых удовлетворяет указанным условиям.

Задача 2. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где D – четверть круга радиуса $R = 3$, лежащая в 1-м квадранте.

Решение. Изобразим область D на рис. 10.7.

Границу области D и подынтегральную функцию удобнее выразить в полярных координатах, поэтому переходим к полярным координатам и вычисляем данный интеграл по формуле (10.4):

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\; rdrd\varphi = \iint_D r^2 drd\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^3 r^2 dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^3 \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9 d\varphi = \frac{9\pi}{2}.$$

Замечание. Свойства двойного интеграла аналогичны свойствам определенного интеграла. В частности, двойной интеграл по области D от функции, тождественно равной единице, равен площади области D:

$$\iint_D 1 \cdot dxdy = S_D. \tag{10.7}$$

10.2. Тройные интегралы, их вычисление в декартовой и цилиндрической системах координат

Тройной интеграл определяется как конечный предел интегральной суммы от функции $u = f(x;\, y;\, z)$ по трехмерной области V и обозначается $\iiint_V f(x;\, y;\, z)dxdydz$ [2].

Если $f(x;\, y;\, z) \equiv 1$, то тройной интеграл равен объему области V.

Вычисление тройного интеграла сводится к повторному, а затем к последовательному вычислению трех определенных интегралов. Если область V снизу ограничена поверхностью $z = \psi_1(x;\, y)$, сверху – поверхностью $z = \psi_2(x;\, y)$, а проекция этой области на плоскость xOy есть область D, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками функций $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, причем $\varphi_2(x) \ge \varphi_1(x)$ при $x \in [a;\, b]$ (рис. 10.8), то тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint_V f(x;\, y;\, z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x;\, y;\, z)dz =$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x;\, y;\, z)dz. \tag{10.8}$$

В тройном интеграле сначала вычисляют интеграл по переменной z, считая x и y постоянными. Таким образом, тройной интеграл сводится к двойному, и затем можно интегрировать по переменной y, считая x постоянной, и наконец, по переменной x. Получившееся число и есть искомый тройной интеграл.

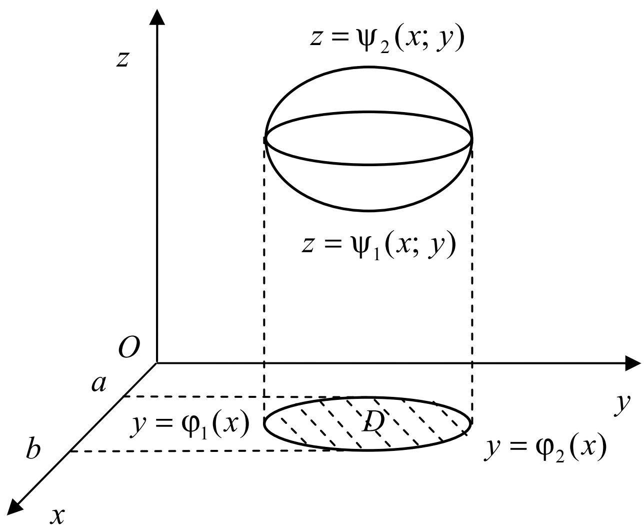


Рис.10.8

Задача 3. Вычислить $\iiint\limits_V x dx dy dz$, где V – область, ограниченная плоскостями $x = 1, y = 2x, z = 0$ и $x + y + z = 4$.

Решение. Область V – это усеченная призма, изображенная на рис. 10.9. Проекция этой призмы на плоскость xOy – это треугольник, изображенный на рис. 10.10.

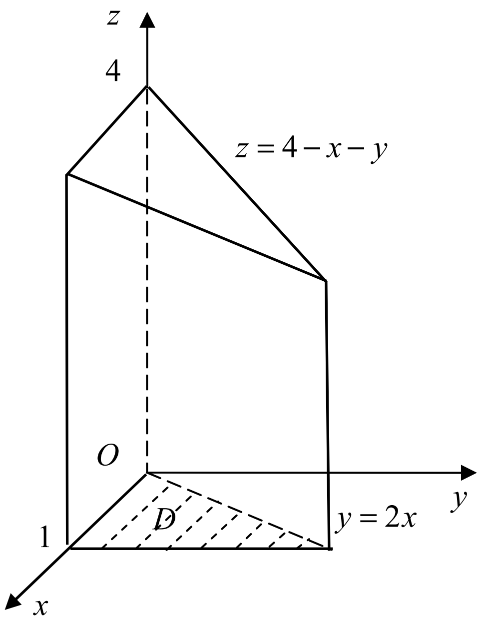


Рис. 10.9

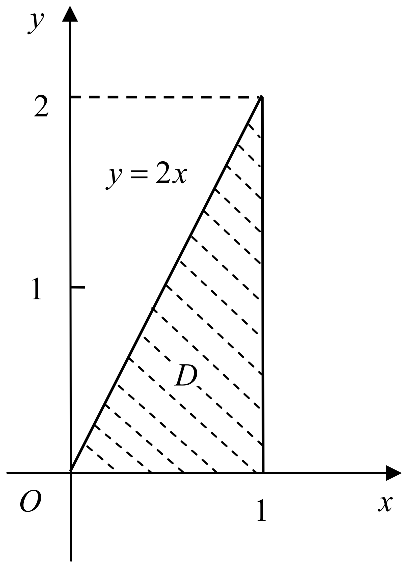


Рис. 10.10

В соответствии с формулой (10.8) получим:

$$\iiint\limits_V x\,dxdydz = \int_0^1 dx\int_0^{2x} dy \int_0^{4-x-y} x\,dz = \int_0^1 dx\int_0^{2x}\left(xz\Big|_0^{4-x-y}\right)dy =$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^{2x}\left(x(4-x)-xy\right)dy = \int_0^1 \left(x(4-x)y - x\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x(4-x)2x - x2x^2\right)dx = \int_0^1 \left(8x^2-4x^3\right)dx = \left(\frac{8x^3}{3}-x^4\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{3}-1=\frac{5}{3}.$$

В некоторых случаях вычисление тройного интеграла значительно упрощается, если от декартовой системы координат $x; y; z$ перейти к цилиндрическим координатам $r; \varphi;\ z$ по формулам:

$x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$; $z = z$ $(0 \le r \le +\infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty < z < +\infty)$.(10.9)

Тройной интеграл преобразуется следующим образом:

$$\iiint\limits_V f(x; y; z)dxdydz = \iiint\limits_V f(r\cos\varphi; r\sin\varphi; z)rdrd\varphi\, dz\,. \qquad (10.10)$$

Вычисление стоящего в правой части (10.10) интеграла осуществляется путем его преобразования к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Задача 4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 9$.

Решение. Изобразим тело, ограниченное эллиптическим параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 9$, перпендикулярной оси Oz (рис. 10.11).

Проекция этого тела на плоскость xOy − это круг радиуса $R = 3$ (рис. 10.12), так как линией пересечения данных поверхностей является окружность $x^2 + y^2 = 3^2$, лежащая в плоскости $z = 9$.

Учитывая, что уравнение эллиптического параболоида в цилиндрических координатах имеет вид $z = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$, а уравнение окружности $r = 3$, и полюс находится внутри области D, вычислим объем тела с помощью тройного интеграла в цилиндрических координатах:

$$V = \iiint\limits_V 1\cdot dxdydz = \iiint\limits_V rdrd\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^3 dr\int_0^{r^2} rdz = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^3\left(rz\Big|_0^{r^2}\right)dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^3 r^3dr = \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^3\right)d\varphi = \frac{81}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{81}{4}2\pi = \frac{81\pi}{2} \text{ (куб. ед.).} \qquad (10.11)$$

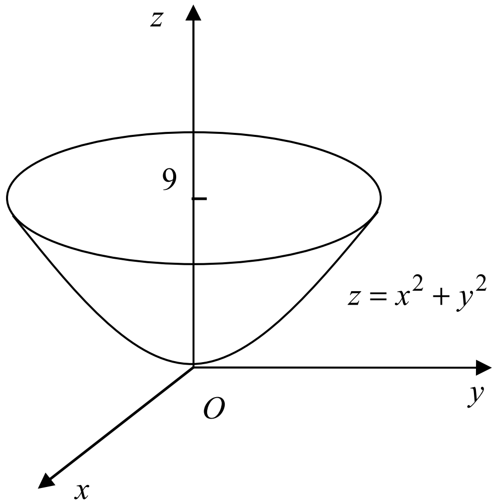


Рис. 10.11

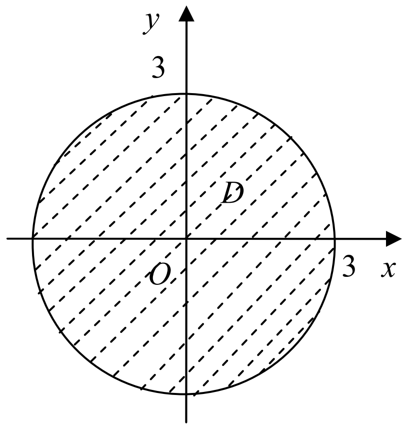


Рис. 10.12

10.3. Криволинейные интегралы

Криволинейный интеграл по длине дуги или интеграл I рода от функции $z = f(x; y)$ по кривой L определяется как конечный предел соответствующей интегральной суммы [2] и обозначается

$$\int_L f(x; y)ds. \qquad (10.12)$$

Если $f(x; y) \equiv 1$ на кривой L, то интеграл (10.12) численно равен длине кривой L.

Криволинейные интегралы по координатам или интегралы II рода от функций $P(x;\ y)$ и $Q(x;\ y)$ по кривой L также определяются как конечные пределы соответствующих интегральных сумм [2] и обозначаются

$$\int_L P(x;\ y)dx; \quad \int_L Q(x;\ y)dy \qquad (10.13)$$

или в общем случае

$$\int_L P(x; y)dx + Q(x; y)dy. \qquad (10.14)$$

Криволинейный интеграл II рода вида (10.14) численно равен работе, производимой силой $\vec{F}(x; y) = P(x; y)\cdot\vec{i} + Q(x; y)\cdot\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль кривой L.

Если кривая L является графиком функции $y = y(x)$, $a \le x \le b$, то криволинейные интегралы вычисляются их сведением к определенным интегралам по формулам

$$\int\limits_L f(x;\, y)\,ds = \int\limits_a^b f(x;\, y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx; \qquad (10.15)$$

$$\int\limits_L P(x;\, y)\,dx + Q(x;\, y)\,dy = \int\limits_a^b \big(P(x;\, y(x)) + y'(x)Q(x;\, y(x))\big)\,dx. \qquad (10.16)$$

Если кривая L задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то криволинейные интегралы вычисляются сведением к определенным интегралам по формулам

$$\int\limits_L f(x;y)\,ds = \int\limits_a^b f\big(\varphi(t);\psi(t)\big)\cdot\sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2}\,dt; \qquad (10.17)$$

$$\int\limits_L P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy =$$
$$= \int\limits_\alpha^\beta \Big(P\big(\varphi(t);\, \psi(t)\big)\cdot\varphi'(t) + Q\big(\varphi(t);\, \psi(t)\big)\,\psi'(t)\Big)\,dt. \qquad (10.18)$$

Задача 5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L x\,ds$, где L – дуга параболы $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}}$ от точки $O(0;\, 0)$ до точки $B(2;\, 2\sqrt{2})$.

Решение. Кривая L задана в явном виде. Находим производную заданной функции:

$$y' = \frac{2x}{\sqrt{2}} = x\sqrt{2}.$$

Для вычисления криволинейного интеграла по длине дуги используем формулу (10.15):

$$\int\limits_L x\,ds = \int\limits_{OB} x\,ds = \int\limits_0^2 x\sqrt{1+(x\sqrt{2})^2}\,dx = \int\limits_0^2 x\sqrt{1+2x^2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^2 (1+2x^2)^{\frac{1}{2}}\,d(1+2x^2) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{1}{6}(27-1) = \frac{13}{3}.$$

Задача 6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L y^2 ds$, где L – часть окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Так как кривая L задана параметрическими уравнениями, то для вычисления криволинейного интеграла по длине дуги используем формулу (10.17):

$$\int\limits_L y^2 ds = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (a\sin t)^2 \cdot \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}\, dt =$$

$$= a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt =$$

$$= \frac{a^3}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)\, dt = \frac{a^3}{2} \left(t - \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^3}{4}.$$

***Задача** 7.* Вычислить работу A, производимую силой $\vec{F}(x;y) = \left(xy - x^2\right)\vec{i} + x\,\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги параболы $y = 2x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $B(1;3)$.

Решение. Вычислим работу A с помощью криволинейного интеграла II рода по формуле (10.18), при этом учитывая, что $P(x;y) = xy - x^2$, $Q(x;y) = x$:

$$A = \int\limits_L \left(xy - x^2\right) dx + x dy = \int\limits_0^1 \left(x \cdot 2x^2 - x^2 + x\left(2x^2\right)' \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(2x^3 + 3x^2\right) dx = \left(2\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Тема 11. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

11.1. Скалярное поле

При изучении различных физических процессов широко используется понятие скалярного поля. Примерами скалярных полей является поле температур внутри нагретого тела, поле плотной массы и т. д.

Пусть D – некоторая область на плоскости или в пространстве. Говорят, что в области D задано *скалярное поле*, если каждой точке M из области D ставится в соответствие некоторое число $u = u(M)$.

Иначе говоря, скалярное поле задается с помощью числовой функции. Рассмотрим далее основные операции, связанные со скалярными полями.

Градиент скалярного поля

Пусть в трехмерном пространстве задана прямоугольная декартова система координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, направленными соответственно вдоль оси Ox, Oy и Oz, и пусть в некоторой области D этого пространства задано скалярное поле с помощью дифференцируемой функции $u = u(x; y; z)$.

Определение. *Градиентом скалярного поля* $u = u(x; y; z)$ называется вектор, обозначаемый $\mathrm{grad}\, u$, проекциями которого на оси декартовой прямоугольной системы координат являются частные производные функции $u = u(x; y; z)$ по соответствующим переменным, т. е.

$$\mathrm{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \tag{11.1}$$

Равенство (11.1) часто записывают с помощью символа ∇, называемого оператором Гамильтона:

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{11.2}$$

Используя (11.2), получим:

$$\nabla u = \vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z}, \text{ т. е. } \nabla u = grad\, u. \tag{11.3}$$

Производная по направлению

Пусть в области D задано скалярное поле функцией $u = u(x; y; z) = u(M)$, M_0 – некоторая точка этой области, и некоторый вектор $\vec{l}$, задающий направление в точке M_0. Пусть M_1 – другая точка области D, такая, что вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ коллинеарен вектору $\vec{l}$ и $\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \rho$.

Определение. Если существует конечный предел

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{u(M_1) - u(M_0)}{\rho}, \tag{11.4}$$

то он называется *производной* скалярного поля в точке M_0 *по направлению вектора* $\vec{l}$ и обозначается $\dfrac{\partial u}{\partial l}$.

Итак,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\rho \to 0} \frac{u(M_1) - u(M_0)}{\rho}. \tag{11.5}$$

Если $\vec{l} = l_x \vec{i} + l_y \vec{j} + l_z \vec{k}$, т. е. l_x; l_y; l_z – координаты вектора $\vec{l}$ в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, то

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{\left|\vec{l}\right|};\ \cos\beta = \frac{l_y}{\left|\vec{l}\right|};\ \cos\gamma = \frac{l_z}{\left|\vec{l}\right|} \tag{11.6}$$

являются направляющими косинусами вектора $\vec{l}$ (здесь $\left|\vec{l}\right| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}$ – длина вектора $\vec{l}$).

В этом случае, производная по направлению вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{11.7}$$

Из определения производной вытекает, что она задает скорость изменения функции $u = u(M)$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{l}$. Нетрудно показать, что градиент скалярного поля задает направление наибольшего изменения функции u.

Задача 1. Дана функция $z = x^2 y + xy^2$. Найти в точке $M_0(2;1)$ $\operatorname{grad} z$ и производную по направлению вектора $\vec{l} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.

Решение. Так как

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy,$$

то $\dfrac{\partial z(2;\,1)}{\partial x} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2 = 5$; $\dfrac{\partial z(2;\,1)}{\partial y} = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 8$.

По формуле (11.1), записанной для двумерного случая, получим:

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}, \text{ или } \operatorname{grad} z(M_0) = 5\vec{i} + 8\vec{j}.$$

Вычислим направляющие косинусы вектора $\vec{l}$ по формуле (11.6):

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{5}; \ \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{3}{5}.$$

По формуле (11.7) получим:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = 5 \cdot \frac{4}{5} + 8 \cdot \frac{3}{5} = \frac{44}{5} = 8{,}8.$$

11.2. Векторное поле

Наряду со скалярными полями рассматривают векторные поля. Поле скоростей потока жидкости, поле вектора магнитной индукции – это примеры векторных полей.

Если каждой точке M области D ставится в соответствие определенный вектор $\vec{F} = \vec{F}(M)$, то говорят, что в области D задано *векторное поле*.

Иначе говоря, векторное поле задается с помощью векторной функции. Пусть в трехмерном пространстве задана прямоугольная декартова система координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, направленными соответственно вдоль оси Ox, Oy и Oz. Тогда векторная функции $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$ записывается в виде:

$$\vec{F}(x; y; z) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}. \qquad (11.8)$$

Пусть P, Q и R – дифференцируемые функции своих аргументов. Рассмотрим основные характеристики векторных полей.

Определение. *Дивергенцией* векторного поля (11.8) в некоторой точке называется число, обозначаемое символом $\operatorname{div}\vec{F}$ и вычисляемое по формуле

$$\mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (11.9)$$

Используя оператор Гамильтона, выражение (11.9) символически можно записать следующим образом:

$$\mathrm{div}\vec{F} = \nabla\vec{F}, \qquad (11.10)$$

где $\nabla\vec{F}$ – скалярное произведение оператора Гамильтона на векторную функцию $\vec{F}$. Действительно,

$$\mathrm{div}\vec{F} = \left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Если дивергенция в точке больше нуля, то точка называется *источником*, если же меньше нуля, то *стоком.* Значение дивергенции равно *мощности* источника или стока.

Определение. *Ротором,* или *вихрем,* векторного поля (11.8) в некоторой точке называется вектор, обозначаемый символом $\mathrm{rot}\vec{F}$ и вычисляемый по формуле

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}. \qquad (11.11)$$

Используя оператор Гамильтона, выражение (11.11) можно записать в виде

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \qquad (11.12)$$

где $\nabla\times\vec{F}$ – векторное произведение оператора Гамильтона на векторную функцию $\vec{F}$.

Ротор характеризует вращательное (вихревое) свойство векторного поля.

Дивергенция и ротор векторного поля используются для анализа векторных полей.

В приложениях векторного анализа наиболее часто находят применения некоторые частные виды векторных полей.

Определение. Векторное поле $\vec{F}$ называется *соленоидальным* (*трубчатым*), если

$$\mathrm{div}\vec{F} = 0. \qquad (11.13)$$

Соленоидальные поля не содержат ни источников, ни стоков.

Определение. Векторное поле $\vec{F}$ называется *потенциальным* (*безвихревым*) в области D, если криволинейный интеграл $\oint(\vec{F};\vec{\tau})ds$ (*циркуляция векторного поля*) равен нулю по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой L, расположенной в области D (здесь $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к кривой L).

Необходимым и достаточным условием потенциальности векторного поля (11.8) в поверхностно-односвязной области D является равенство нулю его ротора во всех точках этой области:

$$\mathrm{rot}\vec{F} = 0. \qquad (11.14)$$

Для потенциального поля $\vec{F}$ существует такая скалярная функция (потенциал) u, что

$$\vec{F} = \mathrm{grad}\, u. \qquad (11.15)$$

Потенциал векторного поля можно находить по формуле

$$u(x;y;z) = \int_{x_0}^{x} P(x;y_0;z_0)dx + \int_{y_0}^{y} P(x;y;z_0)dy + \int_{z_0}^{z} P(x;y;z)dz, \qquad (11.16)$$

где точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – фиксированная точка из области задания векторного поля. Если точка $O(0;0;0)$ принадлежит области задания векторного поля, то ее удобно брать в качестве M_0.

Задача 4. Проверить, является ли заданное векторное поле $\vec{F} = (2x+yz)\vec{i} + (2y+xz)\vec{j} + (2z+xy)\vec{k}$ соленоидальным и потенциальным. В случае потенциальности найти его потенциал.

Решение. Для проверки соленоидальности векторного поля $\vec{F}$ вычислим его дивергенцию по формуле (11.9). Так как в нашем случае $P(x;y;z) = 2x+yz$, $Q(x;y;z) = 2y+xz$, $R(x;y;z) = 2z+xy$, то $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} = 2$ и $\mathrm{div}\,\vec{F} = 2+2+2 = 6$.

Поскольку $\mathrm{div}\,\vec{F} \neq 0$, то векторное поле $\vec{F}$ не является соленоидальным.

Для проверки потенциальности векторного поля $\vec{F}$ вычислим его ротор по формуле (11.11).

Учитывая, что $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}=x$, $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=z$, получим:

$$\operatorname{rot}\vec{F}=(x-x)\vec{i}+(y-y)\vec{j}+(z-z)\vec{k}=0.$$

Поскольку $\operatorname{rot}\vec{F}=0$, то векторное поле $\vec{F}$ потенциальное.

Найдем потенциал векторного поля по формуле (11.16), выбрав фиксированную точку $O(0;0;0)$:

$$u(x;y;z)=\int_0^x 2x\,dx+\int_0^y 2y\,dy+\int_0^z (2z+xy)\,dz=$$

$$=x^2\Big|_0^x+y^2\Big|_0^y+(z^2+xyz)\Big|_0^z=x^2+y^2+z^2+xyz.$$

Итак, $u=x^2+y^2+z^2+xyz$ – потенциал векторного поля $\vec{F}$.

Тема 12. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

12.1. Случайные события и их классификация

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных явлений.

Результат опыта или наблюдения в теории вероятностей называется *событием.* События обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \ldots$.

Наблюдаемые события можно разделить на три вида: достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным называется событие, которое всегда происходит при осуществлении некоторого эксперимента.

Невозможным называется событие, которое заведомо не произойдет при осуществлении некоторого эксперимента.

Случайным называется событие, которое может произойти, а может и не произойти при осуществлении некоторого эксперимента. Например, выпадение герба при однократном подбрасывании монеты, число очков при подбрасывании игральной кости, количество дождливых дней в июне для данной местности и т. п.

Для некоторых опытов можно указать конечное множество взаимно исключающих друг друга, равновозможных элементарных исходов, причем в результате одного опыта должен осуществиться какой-нибудь один из них. Такая совокупность называется *пространством элементарных событий* Ω, связанных с данным опытом, а входящие в нее события – *элементарными событиями* ω_i.

Под *равновозможными* понимают такие события, которые имеют одинаковые условия для появления и для которых нет оснований утверждать, что какое-либо из них в результате опыта имеет больше шансов появиться, чем другое.

Любое подмножество элементарных событий образует некоторое случайное событие A. Говорят, что событие A произошло, если в результате опыта имело место одно из элементарных событий, принадлежащих событию A.

Заметим, что каждое элементарное событие является случайным, а все пространство Ω является достоверным событием. Достоверное событие будем обозначать через Ω.

Каждому событию A соответствует *противоположное* событие $\overline{A}$, появление которого равносильно не появлению A.

Невозможное событие представляет собой событие, противоположное достоверному событию Ω. Очевидно, что невозможное событие представляет собой пустое множество элементарных событий. Например, выпадение более шести очков при бросании игральной кости. Невозможное событие будем обозначать через $\varnothing$.

Для возможности выполнения действия с событиями введем основные определения.

Событие B называется *следствием* события $A: A \subset B$, если из появления A следует появление B. Очевидно, если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

Суммой, или *объединением*, двух событий A и B называется такое событие C, которое состоит в осуществлении события A или события B, или событий A и B вместе. Условно записывают так:

$$C = A + B, \text{ или } C = A \cup B.$$

Сумма событий $A + B$ состоит из всех элементарных событий, принадлежащих событиям A и B.

Произведением, или *пересечением*, двух событий A и B называется событие C, которое состоит в осуществлении события A и события B одновременно. Условно записывают так:

$$C = AB, \text{ или } C = A \cap B.$$

Произведение событий AB состоит из элементарных событий, одновременно входящих в событие A и событие B.

События A и B называются *совместными*, если они могут появиться одновременно в одном и том же испытании. Это значит, что существуют такие элементарные события, которые входят в состав и A, и B одновременно, другими словами, произведение событий AB не пустое множество.

События A и B называются *несовместными***,** если появление одного из них исключает появление другого, т. е. если $AB = \varnothing$. Иными словами, нет ни одного элементарного события, которое входило бы в состав и A, и B одновременно. В частности, противоположные события A и $\overline{A}$ всегда несовместны.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *попарно несовместными*, если любые два из них несовместны.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют *полную группу*, если в результате опыта наступит хотя бы одно из них.

Если при этом события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны, то говорят, что они образуют *полную группу попарно несовместных событий.*

Противоположные события A и $\overline{A}$ представляют собой простейший случай полной группы событий.

12.2. Классическое определение вероятности. Свойства вероятности

Вероятность случайного события A есть численная мера степени объективной возможности появления события A.

Рассмотрим пространство элементарных событий Ω, состоящее из n элементарных (равновозможных, несовместных, образующих полную группу) событий $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

Элементарное событие называется благоприятствующим событию A, если его появление влечет за собой появление события A.

Классическое определение вероятности

Вероятностью $P(A)$ *случайного события* A называется отношение числа m благоприятствующих ему элементарных событий к их общему числу n:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{12.1}$$

Основные свойства вероятности

1. Вероятность случайного события A есть неотрицательное число, заключенное между нулем и единицей, т. е.

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2. Вероятность достоверного события равна единице $P(\Omega) = 1$.

3. Вероятность невозможного события равна нулю $P(\varnothing) = 0$.

12.3. Элементы комбинаторики

При вычислении вероятности случайного события по формуле (12.1) полезно использовать элементы комбинаторики.

Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Любое его подмножество, содержащее m элементов, называется *сочетанием* из n элементов по m. Порядок элементов, входящих в сочетание, роли не играет.

Число всех сочетаний из n элементов по m элементов обозначается символом C_n^m и вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}. \qquad (12.2)$$

Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Любое его упорядоченное подмножество, содержащее m элементов, называется *размещением* из n элементов по m. Различают размещения без повторений, когда один элемент входит в подмножество только один раз, и размещения с повторениями, когда один и тот же элемент может входить в подмножество несколько раз.

Число всех размещений без повторений из n элементов по m элементов обозначается символом A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1). \qquad (12.3)$$

Число всех размещений с повторениями из n элементов по m элементов обозначается символом $(A_n^m)_{\text{повт}}$ и вычисляется по формуле

$$(A_n^m)_{\text{повт}} = n^m. \qquad (12.4)$$

Множество называем *упорядоченным*, если по условиям опыта важен порядок входящих в него элементов. Например, из цифр 1, 2, 3 составляется трехзначное число.

Перестановками из n элементов называются соединения, каждое из которых содержит все n элементов, отличающихся поэтому друг от друга только порядком их расположения.

Число всех перестановок из n элементов обозначается символом P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = n!. \qquad (12.5)$$

Задача 1. Набирая номер телефона, студент забыл две последние цифры. Вспомнив, что эти цифры были различны, он набрал их наугад. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

Решение. Здесь элементарное событие представляет упорядоченное подмножество из двух различных цифр, причем важен их порядок записи. Число n всевозможных элементарных событий равно числу всех размещений без повторений из 10 элементов (множество всех цифр) по 2, т. е. $n = A_{10}^2$.

Событию A (цифры набраны верно) благоприятствует только один исход, т. е. $m = 1$. По формуле (12.1) находим $P(A)$:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{A_{10}^2}=\frac{1}{10\cdot 9}=\frac{1}{90}.$$

Задача 2. В партии из 50 изделий 5 бракованных. Какова вероятность того, что выбранные наугад 3 изделия окажутся годными?

Решение. Рассмотрим подмножество из пяти различных изделий, причем порядок их расположения внутри множества неважен. Число n всевозможных исходов равно числу сочетаний из 50 элементов по 3, т. е. $n=C_{50}^3$. Так как изделия выбираются наугад, то все эти способы выбора равновероятны.

Через A обозначим событие – выбранные наугад 3 изделия годные. Число m исходов, благоприятствующих данному событию, равно числу сочетаний из 45 (число годных деталей) элементов по 3, т. е. $m=C_{45}^3$.

По формуле (12.1) находим $P(A)$:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{45}^3}{C_{50}^3}=\frac{45\cdot 44\cdot 43}{1\cdot 2\cdot 3}:\frac{50\cdot 49\cdot 48}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{45\cdot 44\cdot 43}{50\cdot 49\cdot 48}\approx 0{,}724.$$

12.4. Основные теоремы вероятностей случайных событий

Наряду с классическим определением, для вычисления вероятностей случайных событий можно использовать сформулированные ниже теоремы.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{12.6}$$

Следствие 1. Вероятность суммы нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n). \tag{12.7}$$

Следствие 2. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий, равна 1:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1. \tag{12.8}$$

Следствие 3. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \qquad (12.9)$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий за вычетом вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (12.10)$$

Для формулировки теорем о вероятности произведения событий вводится понятие условной вероятности, поскольку вероятность некоторых событий может меняться по мере получения информации о протекании эксперимента.

Два события A и B называются *зависимыми*, если вероятность появления одного из них зависит от наступления или не наступления другого. В противном случае события A и B называются независимыми.

Несколько событий называются *независимыми в совокупности*, если каждое из них и любая комбинация остальных есть события независимые.

Вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A произошло, называют *условной вероятностью* события B и обозначают символом $P_A(B)$ или $P(B/A)$.

Для независимых событий $P_A(B) = P(B)$.

Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB)=P(A)P_A(B). \qquad (12.11)$$

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB)=P(A)P(B). \qquad (12.12)$$

Последнюю теорему легко обобщить на случай произведения конечного числа событий:

$$P(A_1A_2A_3 \ldots A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot\ldots\cdot P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n). \qquad (12.13)$$

В частности, для независимых в совокупности событий формула (12.13) принимает следующий вид:

$$P(A_1A_2A_3 \ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Следствие 1. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей

$$P(ABC\ldots KL) = P(A)P(B)P(C)\ldots P(K)P(L). \qquad (12.14)$$

Следствие 2. Вероятность появления *хотя бы одного* из событий $A, B, C, \ldots, D$, независимых в совокупности, равна

$$P = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})\ \ldots\ P(\bar{D}). \qquad (12.15)$$

Задача 3. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка − 0,6, для второго – 0,8. Найти вероятность следующих событий: *A* – в мишень попадут оба стрелка; *B* – в мишень попадет только один стрелок; *C* – ни один стрелок не попадет в мишень; *D* – в мишень попадет хотя бы один стрелок.

Решение. Обозначим события: H_i – i-й стрелок попал в мишень $(i = 1, 2)$, $\bar{H}_i$ – i-й стрелок не попал в мишень. Тогда события *A*, *B* и *C* можно представить в виде:

$$A = H_1H_2;\ B = H_1\bar{H}_2 + \bar{H}_1H_2;\ C = \bar{H}_1\bar{H}_2. \qquad (12.16)$$

Вероятность попадания в мишень каждого из стрелков не зависит от того, попал или нет в мишень другой стрелок. Значит по теореме о вероятности произведения независимых событий и о вероятности суммы несовместных событий из равенств (12.16) получим:

$$P(A) = P(H_1)P(H_2);\ P(B) = P(H_1)P(\bar{H}_2) + P(\bar{H}_1)P(H_2);$$

$$P(C) = P(\bar{H}_1)P(\bar{H}_2).$$

Так как по условию задачи $P(H_1) = P_1 = 0{,}6$, $P(H_2) = P_2 = 0{,}8$, то для противоположных событий

$$P(\bar{H}_1) = q_1 = 1 - p_1 = 0{,}4;\ P(\bar{H}_2) = q_2 = 1 - p_2 = 0{,}2.$$

Следовательно,

$$P(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48;$$

$$P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}44;$$

$$P(C) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08.$$

Полученный результат можно проконтролировать следующим образом. Так как события *A*, *B* и *C* образуют полную группу попарно несовместных событий, то сумма их вероятностей должна быть равна 1. Действительно, $P(A)+P(B)+P(C)=0{,}48+0{,}44+0{,}08=1{,}0$.

Поскольку события D и C противоположные, т. е. $D=\bar{C}$, то $P(D)=P(\bar{C})=1-P(C)=1-0{,}08=0{,}92$.

Вероятность этого события можно найти и другим способом. Поскольку $D=A+B$, то $P(D)=P(A)+P(B)=0{,}48+0{,}44=0{,}92$.

Задача 4. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор последовательно один за другим задает 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент ответит на предложенные 3 вопроса.

Решение. Пусть A_i – событие, состоящее в том, что студент знает i-й вопрос $(i=1,2,3)$, B – событие, состоящее в том, что студент знает все 3 предложенные вопроса. Тогда $B=A_1A_2A_3$. По определению вероятности случайного события получим, что $P(A_1)=\dfrac{20}{25}$. Если событие A_1 произошло, то у экзаменатора осталось 24 вопроса, из которых студент знает 19. То есть вероятность события A_2 следует вычислять с учетом того, что произошло событие A_1. Поэтому $P_{A_1}(A_2)=\dfrac{19}{24}$. Аналогично $P_{A_1A_2}(A_3)=\dfrac{18}{23}$.

По формуле (12.13) находим, что

$$P(B)=P(A_1)P_{A_1}P(A_2)P_{A_1A_2}P(A_3)=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23}\approx 0{,}496.$$

Следствием сформулированных выше теорем является формула полной вероятности.

Теорема. Пусть событие A может произойти только при появлении одного из событий $H_1, H_2, \cdots, H_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий и называемых гипотезами. Тогда вероятность события A равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P_{H_1}(A). \qquad (12.17)$$

Так как гипотезы $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу несовместных событий, то

$$\sum_{k=1}^{n} P(H_k) = 1.$$

Задача 5. Из двух цехов поступили заготовки для дальнейшей обработки, причем из первого цеха поступило 2000 заготовок, а из второго – 3000 заготовок. Брак среди заготовок первого цеха составляет 5%, а среди заготовок второго цеха 2%. Найти вероятность того, что наугад взятая для обработки заготовка бракованная.

Решение. Событие A, состоящее в том, что наугад взятая заготовка бракованная, может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий H_1 (деталь изготовлена первым цехом) или H_2 (деталь изготовленная вторым цехом). Учитывая количество изготовленных цехами заготовок, получим:

$$P(H_1) = \frac{2000}{2000+3000} = \frac{2}{5};\ \ P(H_2) = \frac{3000}{2000+3000} = \frac{3}{5}.$$

По условию задачи $P_{H_1}(A) = \dfrac{5\%}{100\%} = 0{,}05$, $P_{H_2}(A) = \dfrac{2\%}{100\%} = 0{,}02$.

По формуле полной вероятности (12.17) находим вероятность события A:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) = \frac{2}{5}\cdot 0{,}05 + \frac{3}{5}\cdot 0{,}02 = 0{,}032.$$

Итак, вероятность того, что наугад взятая заготовка бракованная, равна 0,032.

12.5. Схема испытаний Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p или не появиться с вероятностью $q = 1 - p$. В этом случае говорят, что имеет место *схема испытаний Бернулли.*

Вероятность того, что в описанных n испытаниях событие A появиться ровно k раз $(0 \le k \le n)$, вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (12.18)$$

Задача 6. Стрелок производит 5 выстрелов по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что будет ровно три попадания.

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли (12.18). Так как в нашем случае $n=5,\ \ k=3,\ \ q=1-0{,}8=0{,}2$, то

$$P_5(3)=C_5^3\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^2=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 0{,}512\cdot 0{,}04=0{,}2048.$$

Использовать формулу Бернулли при больших значениях n трудно, так как формула требует выполнения большого числа арифметических действий.

В этих случаях пользуются локальной теоремой Лапласа или формулой Пуассона.

Локальная теорема Лапласа

Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и не близка к нулю или единице, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появиться в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad (12.19)$$

где $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$; $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Определить значение для функции $\varphi(x)$ можно по специальной таблице (см. прил. 1).

Задача 7. Вероятность того, что изготовленная деталь бракованная, $p=0{,}2$. Найти вероятность того, что среди 400 деталей бракованных окажется ровно 80.

Решение. Так как по условию задачи $n=400,\ \ k=80,\ \ p=0{,}2$, то $q=1-0{,}2=0{,}8$ и $x=\dfrac{80-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=0$.

По прил. 1 находим, что $\varphi(0)=0{,}3989$. Тогда по формуле (12.19) получим $P_{400}(80)\approx\dfrac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\cdot 0{,}3989\approx 0{,}050$.

Если же число испытаний n велико, а вероятность p появления события A мала, то обычно используют формулу Пуассона

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad (12.20)$$

где $\lambda=np$.

Задача 8. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность отрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение минуты произойдет отрыв нитей на пяти веретенах.

Решение. По условию $n = 1000$; $p = 0{,}004$; $k = 5$.

Тогда $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}004 = 4$. Искомая вероятность будет равна

$$P_{1000}(4) = \frac{4^5}{5!} e^{-4} = 0{,}1563.$$

Интегральная теорема Лапласа

Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и не близка к нулю или единице, то вероятность $P_n(k_1; k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, вычисляется по формуле

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (12.21)$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, а $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – интегральная функция Лапласа. Значение для функции $\Phi(x)$ смотреть в прил. 2.

Задача 9. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна $p = 0{,}2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Решение. По условию $n = 400$; $k_1 = 70$; $k_2 = 100$; $p = 0{,}2$. Тогда

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}25; \; x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5.$$

Учитывая нечетность функции $\Phi(x)$, по прил. 2 находим, что

$$\Phi(-1{,}25) = -\Phi(1{,}25) = -0{,}3944; \; \Phi(2{,}5) = 0{,}4938.$$

По формуле (12.20) находим искомую вероятность:

$$P_{400}(70; 100) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) =$$

$$= 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

12.6. Случайные величины

Случайной величиной называют величину, которая в результате испытания принимает одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Случайные величины обычно обозначают греческими буквами $\xi, \eta, \zeta, \dots$ или заглавными буквами $X, Y, Z, \dots$ латинского алфавита, а их возможные значения – строчными латинскими буквами $x, y, z, \dots$. Случайные величины делятся на дискретные и непрерывные.

Дискретной называют случайную величину, если ее возможные значения можно пронумеровать. Дискретная случайная величина принимает изолированные значения.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Законом распределения случайной величины называется любое соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями. Это соответствие можно задать таблицей, графически и аналитически.

При табличном способе задания *дискретной случайной величины* в первой строке указывают ее возможные значения, а во второй – их вероятности (табл. 12.1).

Таблица 12.1

ξ	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Следует иметь в виду, что $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Такую таблицу называют также *рядом распределения дискретной случайной величины*.

Законы распределения как дискретных, так и непрерывных случайных величин можно задать с помощью интегральной функции распределения $F(x)$.

Интегральной функцией распределения случайной величины ξ называется функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, меньшее x:

$$F(x) = P(\xi < x). \qquad (12.22)$$

Отметим следующие свойства $F(x)$;

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) $F(x)$ – неубывающая и непрерывная слева функция, т. е. если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) > F(x_1)$;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

При решении задач наиболее часто используется следующее свойство $F(x)$:

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a). \tag{12.23}$$

Задача 10. В денежной лотерее выпущено 100 билетов, причем разыгрывается один выигрыш в 10 000 рублей и 10 выигрышей по 5000 рублей. Составить закон распределения случайной величины ξ – возможного выигрыша в лотерее на приобретенный один билет, найти ее функцию распределения и построить ее график.

Решение. Возможные значения случайной величины ξ – это числа 0, 5000, 10 000. Найдем вероятность этих значений. Вероятность того, что ξ примет значение, равное 0, будет: $P\left(\xi = 0\right) = \dfrac{89}{100} = 0{,}89$, так как из ста билетов лотереи 89 без выигрыша.

Аналогично: $P\left(\xi = 5000\right) = \dfrac{10}{100} = 0{,}10$ и $P\left(\xi = 10\,000\right) = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$. Следовательно, закон распределения случайной величины ξ имеет вид, представленный в табл. 12.2.

Таблица 12.2

ξ	0	5000	10 000
p	0,89	0,10	0,01

Найдем функцию распределения $F(x)$.

Если $x \le 0$, то $F(x) = 0$. Если $0 < x \le 5000$, то $F(x) = 0{,}89$.

Если $5000 < x \le 10000$, то $F(x) = 0{,}89 + 0{,}10 = 0{,}99$.

Наконец, если $x > 10000$, то $F(x) = 0{,}99 + 0{,}01 = 1{,}0$. Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ 0{,}89, & \text{если} \quad 0 < x \le 5000, \\ 0{,}99, & \text{если} \quad 5000 < x \le 10\,000, \\ 1{,}0, & \text{если} \quad x > 10\,000. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 12.1.

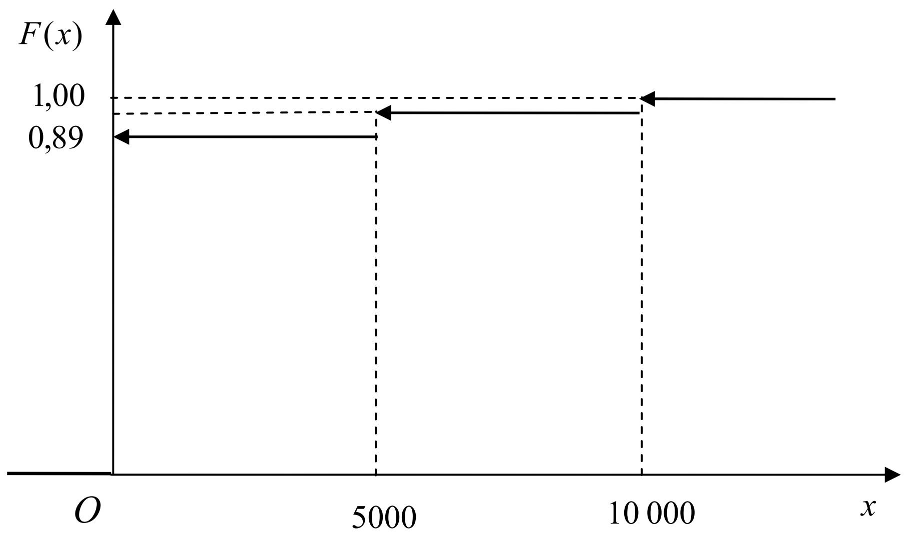


Рис.12.1

Закон распределения непрерывных случайных величин наряду с интегральной функцией распределения $F(x)$ можно задавать плотностью распределения вероятностей $p(x)$.

Плотностью распределения вероятностей, или дифференциальной функцией распределения, непрерывной случайной величины называется функция $p(x)$, такая, что

$$p(x) = F'(x). \tag{12.24}$$

Свойства функции $p(x)$:

1) $p(x) \geq 0$, т. е. плотность распределения неотрицательна;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$.

При решении задач часто используется следующая формула:

$$P(a < \xi < b) = \int\limits_a^b p(x)dx. \tag{12.25}$$

Откуда следует, что

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt.$$

12.7. Числовые характеристики случайных величин

К основным числовым характеристикам случайных величин относятся математическое ожидание M_ξ, дисперсия D_ξ, среднеквадратическое отклонение σ_ξ.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины ξ называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M_\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (12.26)$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ, возможные значения которой принадлежат отрезку [a; b], называют определенный интеграл

$$M_\xi = \int_a^b x p(x) dx. \qquad (12.27)$$

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то

$$M_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx. \qquad (12.28)$$

Вероятностный смысл математического ожидания состоит в том, что оно приближенно равно среднему ожидаемому значению случайной величины.

Отклонением случайной величины от ее математического ожидания называют разность $\xi - M_\xi$ между случайной величиной и ее математическим ожиданием.

Дисперсией (рассеиванием) случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D_\xi = M((x_i - M_\xi)^2). \qquad (12.29)$$

Для дискретной случайной величины дисперсия вычисляется по формуле

$$D_\xi = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M_\xi\right)^2 p_i. \qquad (12.30)$$

Для непрерывной случайной величины дисперсия равна

$$D_\xi = \int_a^b (x - M_\xi)^2 p(x) dx, \qquad (12.31)$$

если возможные значения принадлежат отрезку [a; b], и

$$D_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_\xi)^2 p(x) dx, \qquad (12.32)$$

если возможные значения принадлежат всей оси Ox.

На практике, как правило, используют другие формулы. Поскольку верно, что

$$D_\xi = M(\xi^2) - M_\xi^{\ 2}, \qquad (12.33)$$

то дисперсия для дискретной случайной величины вычисляется по формуле

$$D_\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} p_i - M_\xi^{\ 2}. \qquad (12.34)$$

Для непрерывных случайных величин по формуле

$$D_\xi = \int_a^b x^2 p(x) dx - M_\xi^{\ 2} \qquad (12.35)$$

или

$$D_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx - M_\xi^{\ 2}. \qquad (12.36)$$

Дисперсия характеризует степень рассеяния возможных значений случайной величины относительно ее математического ожидания.

Среднеквадратическим отклонением случайной величины ξ называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}. \qquad (12.37)$$

Среднеквадратическое отклонение, как и дисперсия, характеризует степень рассеивания значений случайной величины относительно ее математического ожидания.

Задача 11. По данному закону распределения дискретной случайной величины ξ (табл. 12.3):

а) найти математическое ожидание M_ξ;

б) найти дисперсию D_ξ;

в) найти среднеквадратическое отклонение σ_ξ;

г) найти вероятность $P(\xi < M_\xi)$;

д) найти функцию распределения $F(x)$;

е) построить график функции распределения.

Таблица 12.3

ξ	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Решение

а) Найдем математическое ожидание M_ξ по формуле (12.26):

$$M_\xi = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}3 = 3{,}5\,.$$

б) Для того, чтобы найти дисперсию, запишем закон распределения случайной величины ξ^2 (табл. 12.4).

Таблица 12.4

ξ^2	4	9	25
p	0,1	0,6	0,3

Найдем математическое ожидание $M(\xi^2)$:

$$M(\xi^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}6 + 25 \cdot 0{,}3 = 13{,}3\,.$$

Искомую дисперсию найдем по формуле (12.30):

$$D_\xi = M(\xi^2) - M_\xi^{\,2} = 13{,}3 - 3{,}5^2 = 1{,}05\,.$$

в) Среднеквадратическое отклонение будет равно:

$$\sigma_\xi = \sqrt{1{,}05} \approx 1{,}025\,.$$

г) Вычислим вероятность:

$$P(\xi < M_\xi) = P(\xi < 3{,}5) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = 0{,}1 + 0{,}6 = 0{,}7\,.$$

д) Функцию распределения находим аналогично задаче 10:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 2, \\ 0{,}1, & \text{если } 2 < x \le 3, \\ 0{,}7, & \text{если } 2 < x \le 5, \\ 1{,}0, & \text{если } x > 5. \end{cases}$$

е) Построим график функции распределения $F(x)$ (рис. 12.2).

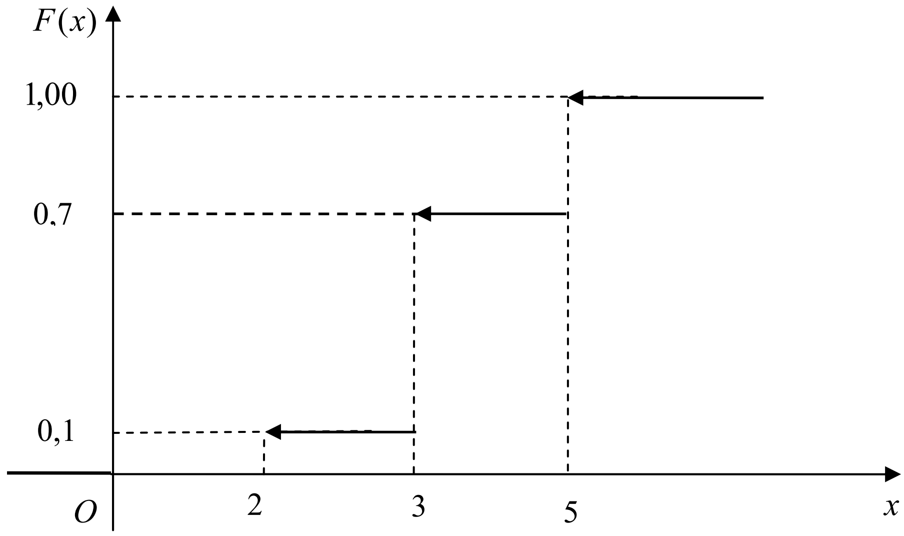


Рис. 12.2

Задача 12. Непрерывная случайная величина ξ задана интегральной функцией распределения $F(x)$. Требуется найти: а) плотность распределения $p(x)$ вероятностей случайной величины ξ; б) математическое ожидание M_ξ и дисперсию D_ξ; в) $P(|\xi - M_\xi| < \sigma_\xi)$; г) построить графики функции распределения $F(x)$ и плотности распределения вероятностей $p(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ x, 0 < x \le 1, \\ 1, x > 1. \end{cases}$$

Решение. а) Найдем плотность вероятности $p(x)$:

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ 1, \text{ если } 0 < x \le 1, \\ 0, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

б) Найдем математическое ожидание по формуле (12.27):

$$M_\xi = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Найдем дисперсию по формуле (12.31):

$$D_\xi = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

в) Находим вероятность:

$$P(|\xi - M_\xi| < \sigma_\xi) = P(-\sigma_\xi < \xi - M_\xi < \sigma_\xi) = P\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} < \xi < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) =$$

$$= F\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) - F\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

г) Построим графики функции распределения $F(x)$ и плотности распределения вероятностей $p(x)$ (рис. 12.3).

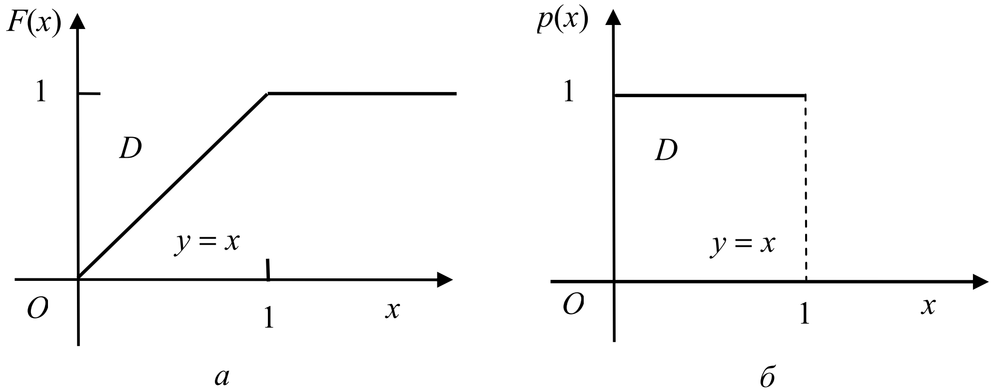


Рис. 12.3

12.8. Некоторые законы распределения случайных величин

Биноминальный закон распределения

Если вероятности возможных значений дискретной случайной величины ξ вычисляются по формуле Бернулли $p(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, то распределение называется *биноминальным.* Числовые характеристики биноминального распределения:

$$M_\xi = np; \quad D_\xi = npq; \quad \sigma_\xi = \sqrt{npq}. \qquad (12.38)$$

Распределение Пуассона

Если вероятности возможных значений дискретной случайной величины ξ вычисляются по формуле Пуассона $P_n(k)=\dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, то распределение называется *распределением Пуассона.* Его числовые характеристики:

$$M_\xi = D_\xi = np = \lambda; \;\; \sigma_\xi = \sqrt{np}. \tag{12.39}$$

Закон равномерного распределения

Распределение непрерывной случайной величины ξ называется *равномерным*, если ее плотность вероятности постоянна на промежутке $(a; b]$, т. е. имеет вид:

$$p(x)=\begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x \le b, \\ 0, & x > b. \end{cases} \tag{12.40}$$

Интегральная функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \tag{12.41}$$

Числовые характеристики равномерного распределения:

$$M_\xi = \frac{b+a}{2}; \; D_\xi = \frac{(b-a)^2}{12}; \; \sigma_\xi = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{12.42}$$

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $(\alpha; \beta)$ будет равна:

$$p(\alpha < \xi < \beta) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}. \tag{12.43}$$

Показательный закон распределения

Непрерывная случайная величина называется распределенной *по показательному закону*, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$p(x)=\begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \quad \lambda > 0. \end{cases} \tag{12.44}$$

Интегральная функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases} \tag{12.45}$$

Числовые характеристики:

$$M_\xi=\frac{1}{\lambda};\ D_\xi=\frac{1}{\lambda^2};\ \sigma_\xi=\frac{1}{\lambda} \tag{12.46}$$

Вероятность попадания в заданный интервал $(\alpha;\beta)$ будет равна:

$$p(\alpha<\xi<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}. \tag{12.47}$$

Нормальный закон распределения

Непрерывная случайная величина называется распределенной по *нормальному закону*, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$p(x)=\frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_\xi^2}}, \tag{12.48}$$

где $M_\xi=a$; $D_\xi=\sigma_\xi^2$.

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $(\alpha;\beta)$ вычисляется по формуле

$$p(\alpha<\xi<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma_\xi}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma_\xi}\right). \tag{12.49}$$

Вероятность отклонения случайной величины от математического ожидания на величину δ равна:

$$p(|\xi-M_\xi|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_\xi}\right). \tag{12.50}$$

Здесь $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа; $\Phi(-x)=-\Phi(x)$ – функция нечетная; $\Phi(0)=0$; $\Phi(x\ge 5)=0{,}5$. Значения функции $\Phi(x)$ представлены в прил. 2.

Задача 13. Случайная величина ξ – время работы радиолампы – распределена по показательному закону. Среднее время работы лампы 400 часов. Найти вероятность того, что радиолампа проработает не менее 600 часов.

Решение. По условию $M_\xi = 400$. Для показательного закона распределения $M_\xi = \frac{1}{\lambda} = 400$. Следовательно, $\lambda = \frac{1}{400}$. Искомую вероятность $p(\xi \geq 600)$ будем искать, используя вероятность противоположного события и формулу (12.47):

$$p(\xi \geq 600) = 1 - p(0 \leq \xi < 600) = 1 - \left(e^{-\frac{0}{400}} - e^{-\frac{600}{400}}\right) = e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,22.$$

Задача 14. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение этой величины соответственно равны 30 и 10.

Найти: а) вероятность попадания случайной величины в интервал (20; 50); б) вероятность $p(|\xi - M_\xi| < \sigma_\xi)$.

Решение. а) По условию $\alpha = 20$; $\beta = 50$; $a = 30$; $\sigma = 10$. По формуле (12.49) и прил. 2 получим:

$$p(20 < \xi < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{20-30}{10}\right) = \Phi(2) - \Phi(-1) =$$

$$= \Phi(2) + \Phi(1) = 0,4772 + 0,3413 = 0,8185.$$

б) По формуле (12.50) получим:

$$p(|\xi - M_\xi| < \sigma_\xi) = 2\Phi\left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\xi}\right) = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0,3413 = 0,6826.$$

Тема 13. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

13.1. Статистический ряд и его описание

Математическая статистика занимается установлением закономерностей, которым подчинены массовые, однородные, случайные явления, на основе изучения статистических данных – результатов наблюдений.

Генеральной совокупностью называется множество всех возможных значений случайной величины ξ.

Выборкой объема n называется множество $x_1, x_2, \cdots, x_n$ наблюдаемых значений изучаемой случайной величины, которые соответствуют n независимым испытаниям (опытам).

Размах выборки W – разность между максимальным и минимальным значениями элементов выборки: $W = x_{\max} - x_{\min}$.

Статистический ряд – совокупность пар $(x_i;\, n_i)$, $i = \overline{1,k}$, где x_i – разные элементы выборки, n_i – частота появления выборочного значения x_i. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Величины $\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$, $i = \overline{1,k}$ называются относительными частотами, и для них $\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1$.

Обычно статистический ряд записывают в виде табл. 13 1.

Таблица 13.1

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k
ω_i	$\dfrac{n_1}{n}$	$\dfrac{n_2}{n}$	…	$\dfrac{n_k}{n}$

При изучении непрерывной случайной величины или при большом объеме выборки ее элементы объединяются в группы, и записывают интервальный статистический ряд (табл. 13.2).

Если все интервалы имеют одинаковую длину h, то $h = \dfrac{W}{k}$. Количество интервалов выбирают по формуле

$$k = 1 + 3{,}2\lg n. \qquad (13.1)$$

Таблица 13.2

Интервал	$[x_{\min}; x_2)$	$[x_2; x_3)$	...	$[x_k; x_{\max}]$
Середина интервала	x_1^*	x_2^*	...	x_k^*
Частота	n_1	n_2	...	n_k
Относительная частота	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

Полигоном частот статистического ряда называется ломаная линия с вершинами в точках $(x_i; n_i)$, $i = \overline{1, k}$.

Полигоном относительных частот статистического ряда называется ломаная линия с вершинами в точках $\left(x_i; \frac{n_i}{n}\right)$, $i = \overline{1, k}$.

Гистограммой относительных частот статистического интервального ряда называется ступенчатая фигура, составленная из прямоугольников, построенных на интервалах группирования с высотой прямоугольников $\frac{n_i}{nh}$. Площадь каждого прямоугольника равна $\frac{n_i}{n}$, а сумма площадей всех прямоугольников равна 1.

Эмпирической функцией распределения $F^*(x)$ называется функция

$$F^*(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n_i}{n}. \qquad (13.2)$$

Эта функция непрерывна слева, обладает всеми свойствами функции распределения случайной величины $F(x) = P(\xi < x)$ и является приближенным представлением последней.

13.2. Статистическая оценка параметров распределения

Анализ полигона, гистограммы и эмпирической функции распределения дает возможность сделать предположение о законе распределения изучаемой случайной величины. Данный закон может быть установлен и на основании теоретических предположений.

Затем возникает задача оценки параметров предполагаемого закона распределения по полученной выборке. Оценкой параметра называют функцию от выборки, значение которой является приближенным значением параметра. Оценки параметров подразделяются на точечные и интервальные.

Точечные оценки задаются одним числом, а интервальные – границами доверительного интервала. Точечные оценки должны удовлетворять определенным требованиям.

Несмещенной называется статистическая оценка $\tilde{\Theta}$, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру Θ при любом объеме выборки, т. е. $M\left(\tilde{\Theta}\right)=\Theta$.

Эффективной называется статистическая оценка, которая (при данном объеме выборки) имеет минимально возможную дисперсию.

Состоятельной называется статистическая оценка, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру, т. е. $P\left(\left|\tilde{\Theta}-\Theta\right|<\varepsilon\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Точечной оценкой математического ожидания является *выборочное среднее*

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i\,. \tag{13.3}$$

Для интервального статистического ряда (табл. 13.2)

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^* n_i\,. \tag{13.4}$$

Точечной оценкой дисперсии является выборочная дисперсия $\overline{D_{\text{в}}}$, которая вычисляется по формуле

$$\overline{D_{в}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i-\bar{x}^2.$$

Эта оценка является смещенной. *Несмещенной оценкой дисперсии* D_ξ является $s^2=\dfrac{n}{n-1}\overline{D_{\text{в}}}$. Для статистического ряда выборки объема n она вычисляется по формуле

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\frac{n}{n-1}\bar{x}^2. \tag{13.5}$$

Для интервального статистического ряда (табл. 13.2)

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i^*-\bar{x}\right)^2 n_i=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i^*)^2 n_i-\frac{n}{n-1}\bar{x}^2. \tag{13.6}$$

Оценкой среднеквадратического отклонения служит корень из несмещенной оценки дисперсии, т. е. s.

Доверительным интервалом для параметра Θ называется интервал $(\alpha_1;\alpha_2)$, который покрывает неизвестный параметр Θ с заданной надежностью $\gamma=1-\alpha$, т. е. $P(\alpha_1<\Theta<\alpha_2)=\gamma$. Число $\gamma=1-\alpha$ называется доверительной вероятностью, а значение α – уровнем значимости. На практике обычно используют уровни значимости: 0,1; 0,05; 0,01.

Доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной случайной величины ξ при данном уровне значимости α и известной дисперсии $D_\xi=\sigma_\xi^2$ имеет вид

$$\left(\bar{x}-t_\gamma\frac{\sigma_\xi}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_\gamma\frac{\sigma_\xi}{\sqrt{n}}\right), \tag{13.7}$$

где t_γ определяется из условия $2\Phi(t_\gamma)=\gamma=1-\alpha$, или $\Phi(t_\gamma)=\gamma/2$, и $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа (см. прил. 2).

При неизвестной дисперсии генеральной совокупности используется формула

$$\left(\bar{x}-t_{\alpha;\,\nu}\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{\alpha;\,\nu}\frac{s}{\sqrt{n}}\right), \tag{13.8}$$

где $t_{\alpha;\,\nu}$ определяется с помощью таблицы значений распределения Стьюдента по данному числу степеней свободы $\nu=n-1$ и уровню значимости α (прил. 3). Здесь s – оценка среднеквадратического отклонения (13.4). Отметим, что при объеме выборки $n>30$ вместо распределения Стьюдента можно пользоваться нормальным распределением.

Задача 1. Даны результаты наблюдения случайной величины, записанные в табл. 13.3.

1. Построить гистограмму относительных частот.
2. Найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график.
3. Определить гипотетическую плотность закона распределения.
4. Вычислить выборочное среднее значение $\bar{x}$ и несмещенную оценку дисперсии s^2.

Таблица 13.3

36	39	43	45	26	34	50	33	36	57
29	40	31	34	17	47	39	35	41	28
25	30	39	36	49	42	24	27	20	52
36	33	18	32	56	37	40	29	31	46
38	19	28	33	42	26	35	37	34	48
44	22	36	49	30	27	40	32	41	43
45	38	24	37	46	36	29	25	39	52
50	21	38	34	41	47	29	31	28	35
44	55	39	30	27	32	34	40	54	36
25	53	45	33	43	37	26	42	28	51

5) Найти доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$.

Решение. Поскольку объем выборки достаточно большой: $n = 100$, то строим интервальный статистический ряд. Количество интервалов вычисляем по следующей формуле (13.1):

$$k = 1 + 3{,}2\lg 100 = 1 + 6{,}4 = 7{,}4\,.$$

Принимаем $k = 7$. Размах выборки $W = 57 - 17 = 40$.

Длина интервала: $h = \dfrac{40}{7}$. Принимаем $h = 6$.

Находим количество элементов выборки в каждом интервале и строим интервальный статистический ряд (табл. 13.4).

1) Строим гистограмму относительных частот (рис. 13.1) (значение высот вычислено и записано в четвертой строке табл. 13.4).

Таблица 13.4

Интервал $[x_i - x_{i+1})$	[17–23)	[23–29)	[29 –35)	[35–41)	[41–47)	[47–53)	[53–59]
Середина интервала, x_i^*	20	26	32	38	44	50	56
Частота, n_i	6	15	22	26	16	10	5
Относительная частота, $\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$	0,06	0,15	0,22	0,26	0,16	0,1	0,05
Высота, $\dfrac{n_i}{hn}$	0,01	0,025	0,037	0,043	0,027	0,017	0,008

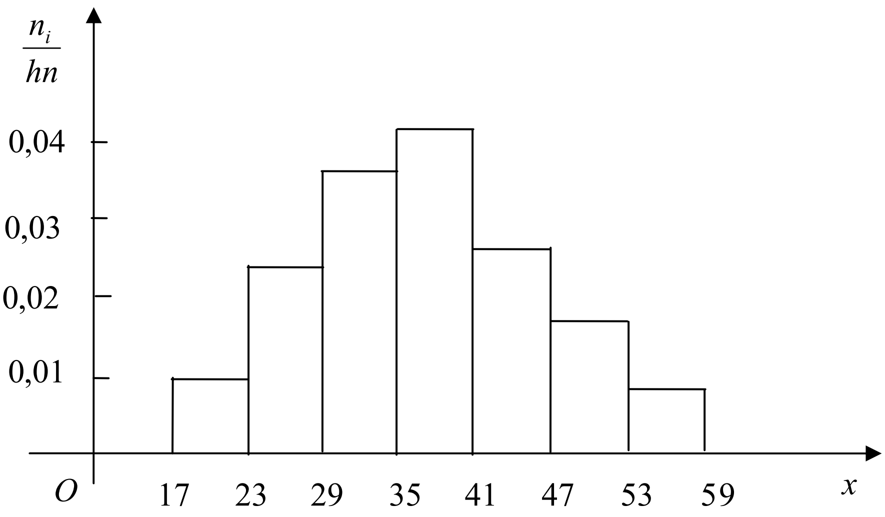


Рис. 13.1

Строим график функции распределения (рис. 13.2).

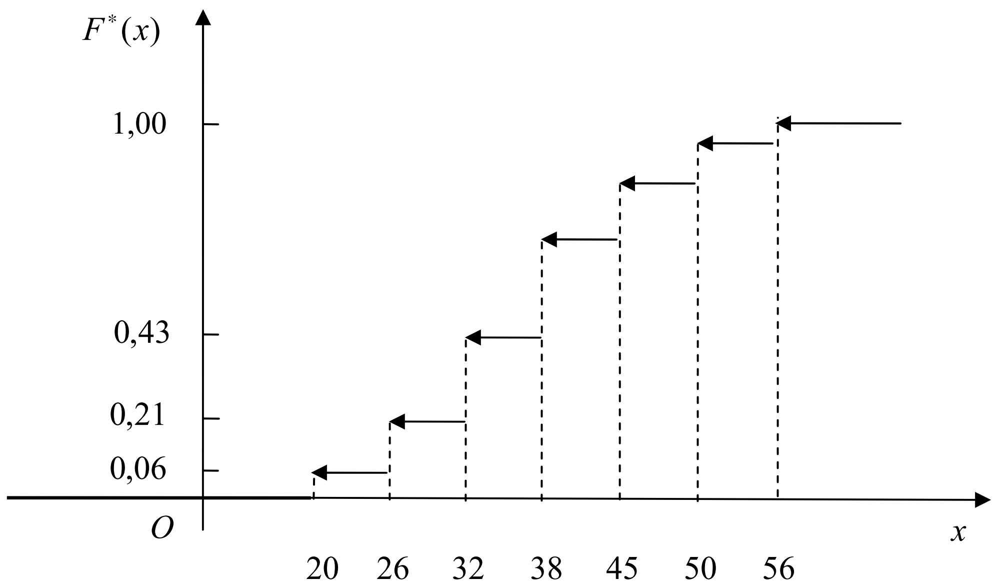


Рис. 13.2

2) Найдем эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$ по формуле (13.2). Данная функция является кусочно-постоянной, ее значения получаются накоплением относительных частот в точках x_i и изменяются в пределах от 0 до 1.

Запишем функцию в следующем виде:

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 20,\\ 0{,}06, & \text{если} \quad 20<x\le 26,\\ 0{,}21, & \text{если} \quad 26<x\le 32,\\ 0{,}43, & \text{если} \quad 32<x\le 38,\\ 0{,}69, & \text{если} \quad 38<x\le 44,\\ 0{,}85, & \text{если} \quad 44<x\le 50,\\ 0{,}95, & \text{если} \quad 50<x\le 56,\\ 1, & \text{если} \quad x>56.\end{cases}$$

3) По виду гистограммы выдвигаем гипотезу о нормальном законе распределения случайной величины. Данный закон содержит два параметра a и σ: $M_\xi=a$; $D_\xi=\sigma^2$.

4) Найдем точечную оценку математического ожидания по формуле (13.4):

$$\bar{x}=\frac{1}{100}\left(20\cdot 6+26\cdot 15+32\cdot 22+38\cdot 26+44\cdot 16+50\cdot 10+56\cdot 5\right)=$$

$$=\frac{3686}{100}=36{,}86.$$

Несмещенную оценку дисперсии найдем по формуле (13.6):

$$s^2=\frac{1}{99}\left(16{,}86^2\cdot 6+10{,}86^2\cdot 15+4{,}86^2\cdot 22+1{,}14^2\cdot 26+7{,}14^2\cdot 16+\right.$$

$$\left.+13{,}14^2\cdot 10+19{,}14^2\cdot 5\right)=\frac{8402{,}04}{99}=84{,}87.$$

Тогда $s=9{,}2$.

Функция плотности соответствующего нормального закона распределения имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{9{,}2\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-36{,}86)^2}{2\cdot 9{,}2^2}}.$$

5) Найдем доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии по формуле (13.8) с уровнем значимости $a=0{,}05$. Число степеней свободы будет $\nu=n-1=99$. По прил. 3 определим $t_{\alpha;\,\nu}=t_{0{,}05;\;99}=1{,}98$.

Тогда получим:

$$\left(36{,}86-1{,}98\frac{9{,}2}{\sqrt{100}};\ 36{,}86+1{,}98\frac{9{,}2}{\sqrt{100}}\right)=(35{,}04;38{,}68).$$

13.3. Эмпирические зависимости. Метод наименьших квадратов

При исследовании многочисленных физических, химических, технологических и других процессов очень часто сталкиваются со следующей задачей: в итоге опыта получен ряд значений переменных x и y, требуется по полученным данным найти аналитическое выражение зависимости между x и y. Такая зависимость называется *эмпирической*.

Пусть заданы результаты наблюдений (табл. 13.5).

Таблица 13.5

X	x_1	x_2	…	x_n
Y	y_1	y_2	…	y_n

Нужно получить такую эмпирическую зависимость

$$y=f(x;a_0;a_1;a_2;...;a_m), \qquad (13.9)$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ – такие параметры, при которые значения $y=f(x;a_0;a_1;a_2;...;a_m)$ в точках x_i мало отличались от опытных данных y_i, $i=\overline{1,n}$.

Задача определения эмпирической зависимости состоит из двух этапов:

1) определение вида функциональной зависимости (выбор класса функций, которому должна принадлежать искомая функция $y=f(x;a_0;a_1;a_2;...;a_m)$;

2) определение параметров эмпирической зависимости.

Определение вида зависимости может быть произведено на основе теоретических представлений о характере изучаемой зависимости или из геометрических соображений. На плоскости xOy строят точки $M_i(x_i;y_i)$, $i=\overline{1,n}$ и по характеру их расположения выбирают вид функциональной зависимости.

Например, расположение экспериментальных точек может навести на мысль о линейной или квадратичной, или экспоненциальной, или другой зависимости.

Однако общего метода для нахождения наилучшего типа эмпирической зависимости, соответствующей опытным данным, указать нельзя.

После того, как определен класс, которому должна принадлежать искомая эмпирическая зависимость, встает вопрос о нахождении конкретных значений параметров $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Одним из основных методов нахождения параметров эмпирической зависимости является метод наименьших квадратов. Этот метод не решает вопроса о выборе общего вида аналитической функции, а дает возможность при заданном типе аналитической функции подобрать наиболее вероятные значения для ее параметров.

Сущность метода наименьших квадратов состоит в том, что параметры $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ выбираются из условия минимума суммы квадратов уклонений

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[f\left(x; a_0; a_1; a_2; \ldots; a_m\right) - y_i \right]^2 . \tag{13.10}$$

Известно, что если в качестве функции f берется многочлен $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$, то функция $S = S\left(a_0; a_1; a_2; \ldots; a_m\right)$ имеет одну точку экстремума, в которой достигается минимум. В этом случае коэффициенты многочлена $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ представляют собой решение системы линейных уравнений $m+1$-го порядка:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \ldots + a_m \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + \ldots + a_m \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{m+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ \vdots \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{m+2} + \ldots + a_m \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{2m} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m y_i. \end{cases} \tag{13.11}$$

Данная система называется нормальной и решается любым известным методом (Гаусса, Крамера, матричным).

В частном случае, когда y зависит от x линейно: $y = ax + b$, система для нахождения коэффициентов имеет вид:

$$\begin{cases} bn + a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases} \qquad (13.12)$$

Задача 2. По результатам наблюдений (табл. 13.6) установить вид эмпирической зависимости y от x и методом наименьших квадратов найти эмпирическую зависимость $y = f(x)$.

Построить точечную диаграмму и график полученной эмпирической зависимости.

Таблица 13.6

x	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41
y	32	36	42	48	52	56	62	64	69	76

Решение

На плоскости xOy построим точки $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1,10}$.

Из точечной диаграммы (рис. 13.3) видно, что точки $M_i(x_i; y_i)$ расположены вблизи некоторой прямой, поэтому можно считать, что зависимость y от x будет линейной, т. е. вида $y = ax + b$.

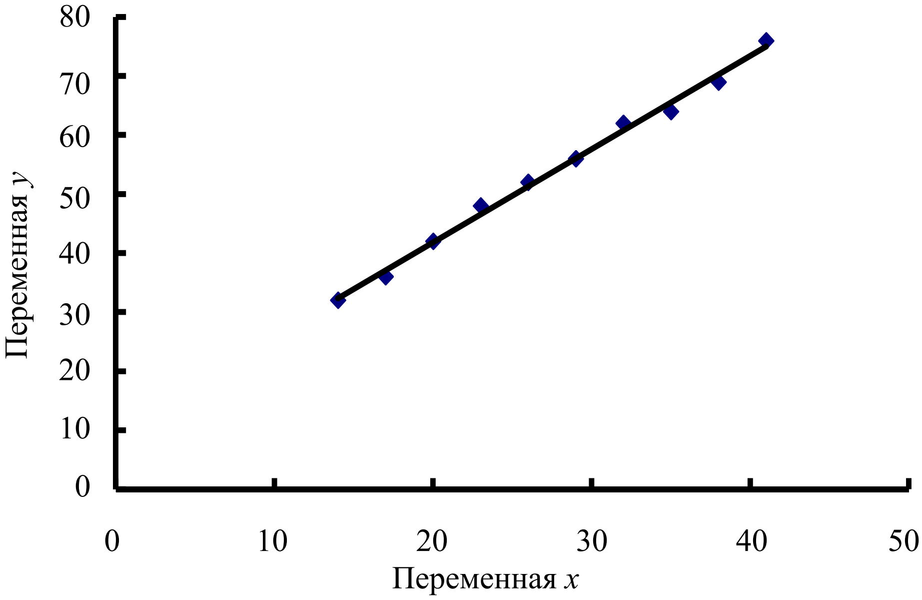


Рис. 13.3

Для нахождения коэффициентов a и b запишем нормальную систему (13.12). Для вычисления коэффициентов системы (13.12) составим табл. 13.7.

Таблица 13.7

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	14	32	196	448
2	17	36	289	612
3	20	42	400	840
4	23	48	529	1104
5	26	52	676	1352
6	29	56	841	1624
7	32	62	1024	1984
8	35	64	1225	2240
9	38	69	1444	2622
10	41	76	1681	3116
$\sum$	275	537	8305	15942

Система (13.12) для нашего примера имеет вид:

$$\begin{cases} 10b + 275a = 537, \\ 275b + 8305a = 15942. \end{cases}$$

Из нее находим коэффициенты a и b: $a = 1{,}58$; $b = 10{,}2$. Искомая эмпирическая функция: $y = 1{,}58x + 10{,}2$. На рис. 13.3 построим график полученной прямой. График эмпирической зависимости соответствует точечной диаграмме.

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Тема 1. Элементы линейной алгебры, векторной алгебры и аналитической геометрии

Задачи 1–10. Записать систему линейных уравнений в матричной форме и решить методом Крамера.

1. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 22. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3, \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 7x_3 = -6, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 5x_3 = -14, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$

Задачи 11–20. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти: 1) длину ребра A_1A_2; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 4) площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) объем пирамиды; 6) уравнение прямой A_1A_2; 7) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на плоскость $A_1A_2A_3$.

11. $A_1(2; 4; 7)$; $A_2(6; 6; 2)$; $A_3(5; 4; 7)$; $A_4(7; 3; 0)$.

12. $A_1(4; 5; 7)$; $A_2(7; 5; 3)$; $A_3(9; 4; 4)$; $A_4(7; 9; 6)$.

13. $A_1(4;2;0)$; $A_2(6;1;1)$; $A_3(4;6;6)$; $A_4(1;2;6)$.

14. $A_1(3;5;10)$; $A_2(5;5;4)$; $A_3(3;8;4)$; $A_4(5;8;2)$.

15. $A_1(4;6;3)$; $A_2(0;7;1)$; $A_3(4;1;5)$; $A_4(3;9;8)$.

16. $A_1(5;7;8)$; $A_2(9;5;5)$; $A_3(-3;7;1)$; $A_4(6;9;2)$.

17. $A_1(4;\ 9;\ 3)$; $A_2(2;\ 4;\ 3)$; $A_3(7;\ 6;\ 3)$; $A_4(3;\ 6;\ 7)$.

18. $A_1(1;9;9)$; $A_2(3;5;4)$; $A_3(5;8;3)$; $A_4(6;4;8)$.

19. $A_1(1;7;3)$; $A_2(3;3;9)$; $A_3(6;9;1)$; $A_4(8;5;8)$.

20. $A_1(-1;1;6)$; $A_2(3;1;4)$; $A_3(-1;6;1)$; $A_4(0;4;-1)$.

Задача 21. Составить каноническое уравнение эллипса, большая полуось которого равна 10, эксцентриситет 0,6 и фокусы лежат на оси Ox. Изобразить эллипс на рисунке.

Задача 22. Составить каноническое уравнение эллипса, сумма полуосей которого равна 8 и расстояние между лежащими на оси Ox фокусами 8. Изобразить эллипс на рисунке.

Задача 23. Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояния от лежащего на оси Oy фокуса до концов его большой оси равны 9 и 1. Изобразить эллипс на рисунке.

Задача 24. Составить каноническое уравнение эллипса, вытянутого вдоль оси Oy, если расстояние между директрисами равно 12 и расстояние между фокусами равно 8. Изобразить эллипс на рисунке.

Задача 25. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Oy, действительная полуось равна 6, а эксцентриситет $\frac{5}{3}$. Изобразить гиперболу на рисунке.

Задача 26. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между лежащими на оси Ox фокусами равно 20, а уравнение асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$. Изобразить гиперболу на рисунке.

Задача 27. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между лежащими на оси Oy фокусами равно 20, а расстояние между вершинами 12. Изобразить гиперболу на рисунке.

Задача 28. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между лежащими на оси Oy фокусами равно 26, сумма полуосей равна 17, а действительная полуось больше мнимой. Изобразить гиперболу на рисунке.

Задача 29. Составить каноническое уравнение параболы, вершина которой совпадает с началом координат, а прямая $x = 3$ является директрисой. Изобразить параболу на рисунке.

Задача 30. Составить каноническое уравнение параболы, вершина которой совпадает с началом координат, а фокус находится в точке $F(0; -1{,}5)$. Изобразить параболу на рисунке.

Тема 2. Предел и непрерывность функции

Задачи 31–40. Найти предел функции, не используя при этом правило Лопиталя.

31. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-10}{x^2+2x-3}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+2x}}{x^2+3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin 3x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+5}\right)^{x-1}$.

32. *а*) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{5+x}-3}{x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}x}{1-\cos 4x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{x+1}{x}}$.

33. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2+3x}{2x^3-x+10}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{4+x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 2x}{x^2}$; *г*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{1-3x}$.

34. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-1}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$; *г*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x}\right)^{-5x}$.

35. *а*) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\cdot\sin x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{3x}$.

36. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+10}{3x^2-2x+5}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{\sqrt{x}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\operatorname{tg}^2 x\cos 2x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{x}$.

37. *а*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^3-8}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{6x+1}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\operatorname{tg}^2 5x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

38. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$; *г*) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{2}{3x}}$.

39. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{4x^2+x-5}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$; *г*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^{4-x}$.

40. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+5}{3x^2-2x+10}$; *б*) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{\sin^2 3x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{3-x}$.

Задачи 41–50. Функция $y(x)$ задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной. Найти точки разрыва, если они существуют. Сделать чертеж.

41. $y=\begin{cases}-2x, & \text{если } x\le 0,\\ x^2, & \text{если } 0<x\le 2,\\ x+1, & \text{если } x>2.\end{cases}$ 42. $y=\begin{cases}x^2+1, & \text{если } x\le 1,\\ 2x, & \text{если } 1<x\le 3,\\ x+2, & \text{если } x>3.\end{cases}$

43. $y=\begin{cases}2x^2, & \text{если } x\le 0,\\ x, & \text{если } 0<x\le 1,\\ 2, & \text{если } x>1.\end{cases}$ 44. $y=\begin{cases}x-1, & \text{если } x\le 0,\\ x^2, & \text{если } 0<x<2,\\ 2x, & \text{если } x\ge 2.\end{cases}$

45. $y=\begin{cases}x-3, & \text{если } x<0,\\ x+1, & \text{если } 0\le x\le 4,\\ x^2-11, & \text{если } x>4.\end{cases}$ 46 $y=\begin{cases}3x+1, & \text{если } x<0,\\ x^2+1, & \text{если } 0\le x<1,\\ 0, & \text{если } x\ge 1.\end{cases}$

47. $y=\begin{cases}-2x, & \text{если } x\le 0,\\ x^2+1, & \text{если } 0<x\le 1,\\ 2, & \text{если } x>1.\end{cases}$ 48. $y=\begin{cases}1, & \text{если } x<0,\\ x^2+1, & \text{если } 0\le x\le 1,\\ x, & \text{если } x>1.\end{cases}$

49. $y=\begin{cases}-x, & \text{если } x<0,\\ x^2, & \text{если } 0\le x\le 4,\\ x-1, & \text{если } x>4.\end{cases}$ 50. $y=\begin{cases}2x+1, & \text{если } x<-1,\\ x^2, & \text{если } -1\le x\le 2,\\ 6-x, & \text{если } x>2.\end{cases}$

Тема 3. Производная и ее вычисление

Задачи 51–60. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ данных функций.

51. *а*) $y=\ln^2\left(\arcsin\sqrt{x}\right)$; *б*) $y=\left(2e^x+\cos 3x\right)^4$;

в) $y=(\sin 2x)^{3x}$; *г*) $xy^2+x^2y+xy=1$.

52. *а*) $y=e^{3x+\mathrm{tg}^2 x}$; *б*) $y=\mathrm{tg}^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)$;

в) $y=\frac{x\sqrt[3]{x+2}\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x+1}}$; *г*) $xy+e^y=y^2$.

53. *а*) $y = x\ln^2 5x - \ln\sin x$; *б*) $y = \mathrm{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$;

в) $y = (\mathrm{tg}3x)^{2x}$; *г*) $\cos(xy) = x$.

54. *а*) $y = \ln\mathrm{arctg}\sqrt{1+x^2}$; *б*) $y = e^{3x+1}\left(x^2 + 3x + \sqrt{x}\right)$;

в) $y = \left(x^3 + \sqrt{x}\right)^{\sin x}$; *г*) $x^3 + y^3 = xy$.

55. *а*) $y = \left(3^{\cos x} + \mathrm{tg}^2 x\right)^4$; *б*) $y = x^2\sqrt{1+\sqrt{\sin x}}$;

в) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1))}{(x^2-1)^5}}$; *г*) $y = 3x + \mathrm{arcctg}y$.

56. *а*) $y = 10^{1-\sin^3 x}$; *б*) $y = \arcsin\dfrac{x+1}{x-1}$;

в) $y = x^3 e^{2x}\sqrt{x+1}\sin 5x$; *г*) $x\sin y - y\cos x = 0$.

57. *а*) $y = \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 x + tg^3 x}$; *б*) $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;

в) $y = (\mathrm{arctg}x)^x$; *г*) $\mathrm{tg}y = xy$.

58. *а*) $y = \ln\cos\dfrac{x-1}{x}$; *б*) $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$;

в) $y = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{3x}$; *г*) $\ln y + \dfrac{x}{y} = 3$.

59. *а*) $y = \sin\left(e^{x^2+3x+1}\right)$; *б*) $y = \dfrac{1}{x} + \ln^3 x - \dfrac{\ln x}{x}$;

в) $y = \dfrac{(1+x)^2(1-2x)^3}{(1-x)^4(1+4x)^5}$; *г*) $x^2 + x^5 y + xy^3 = 0$.

60. *а*) $y = \ln\mathrm{ctg}^2\sqrt{x}$; *б*) $y = \dfrac{x}{\sin^3 x} - \sqrt{x}\arcsin x$;

в) $y = (\cos x)^{\sqrt{x}}$; *г*) $e^y = x^3 + y^5$.

Задачи 61–70. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ параметрически заданных функций.

61. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \cos t. \end{cases}$ 62. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \dfrac{1}{3}t^3 - t. \end{cases}$

63. $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t. \end{cases}$ 64. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

65. $\begin{cases} x = 2t - t^3, \\ y = 3t^2. \end{cases}$ 66. $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$

67. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin^2 t. \end{cases}$ 68. $\begin{cases} x = \cos\dfrac{t}{2}, \\ y = t - \sin t. \end{cases}$

69. $\begin{cases} x = t^3 + 8t, \\ y = t^5 + 2t. \end{cases}$ 70. $\begin{cases} x = \cos 3t, \\ y = \sin 3t. \end{cases}$

Тема 4. Исследование функций и построение графиков

Задачи 71–80. Исследовать функцию $y = f(x)$ и построить ее график.

71. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$. 72. $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$.

73. $y = \dfrac{x^2+3x+6}{x+2}$. 74. $y = \dfrac{x^2-x-1}{x+1}$.

75. $y = \dfrac{x}{x^2-1}$. 76. $y = \dfrac{x^2+1}{1-x^2}$.

77. $y = \dfrac{2x^2+x+1}{x+1}$. 78. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$.

79. $y = \dfrac{8}{x^2-4}$. 80. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Задачи 81–90. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

81. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x$, $[0; 3]$.

82. $f(x)=18x^2+8x^3-3x^4$, [0; 4].

83. $f(x)=x^4-2x^2$, [0; 2].

84. $f(x)=x^3-12x$, [–1; 3].

85. $f(x)=\dfrac{x}{8}+\dfrac{2}{x}$ [1; 6].

86. $f(x)=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$, [–5; –1].

87. $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$, [–2; 2].

88. $f(x)=x^3-3x^2$, [1; 3].

89. $f(x)=x^4+4x$, [–2; 2].

90. $f(x)=x^3-12x+7$, [0; 3].

Тема 5. Неопределенный интеграл и его вычисление

Задачи 91–100. Вычислить неопределенные интегралы:
а) методом замены переменной;
б) методом интегрирования по частям.

91. *а)* $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$; *б)* $\int (2x^2+x+1)e^x dx$.

92. *а)* $\int \frac{(\mathrm{arctg} x)^2\,dx}{1+x^2}$; *б)* $\int (3x+2)e^{\frac{x}{2}}dx$.

93. *а)* $\int xe^{x^2}dx$; *б)* $\int (x^2-x+1)\sin x dx$.

94. *а)* $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$; *б)* $\int x^2\ln x dx$.

95. *а)* $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$; *б)* $\int (3x^2+2x-1)\cos x dx$.

96. *а)* $\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-3x+8}$; *б)* $\int (2x+5)e^{3x+1}dx$.

97. *а)* $\int \sin^3 x\cos x dx$; *б)* $\int x\ln x dx$.

98. *а*) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; *б*) $\int \operatorname{arctg} x dx$.

99. *а*) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1+x^5}}$; *б*) $\int (x+1)\cos 2x dx$.

100. *а*) $\int e^{\sin x}\cos x dx$; *б*) $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$.

Задачи 101–110. Вычислить неопределенные интегралы.

101. $\int \frac{3x^2-2x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx$. 102. $\int \frac{4x+9}{(2-x)(x^2+4x+5)}dx$.

103. $\int \frac{x^2-x+5}{(1-x)(x^2+4)}dx$. 104. $\int \frac{x+2}{x(x^2+2x+2)}dx$.

105. $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+1)}dx$. 106. $\int \frac{2x+4}{(x-2)(x^2+4)}dx$.

107. $\int \frac{x^2-x+2}{(x+2)(x^2+4)}dx$. 108. $\int \frac{2x^2-4x+32}{x(x^2+16)}dx$.

109. $\int \frac{3x^2-2x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx$. 110. $\int \frac{18-6x}{(x+3)(x^2+9)}dx$.

Задачи 111–120. Вычислить неопределенные интегралы от иррациональных и от тригонометрических функций.

111. *а*) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}$; *б*) $\int \sin^3 x dx$.

112. *а*) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2}-1}$; *б*) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

113. *а*) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-4}$; *б*) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x}$.

114. *а*) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3}+\sqrt[4]{x-1}}$; *б*) $\int \sin^2 2x dx$.

115. *а*) $\int \frac{dx}{2x+\sqrt{x}}$; *б*) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}$.

116. *а*) $\int \frac{\sqrt{2x-1}dx}{3+\sqrt{2x-1}}$; *б*) $\int \cos^3 xdx$.

117. *а*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(4+\sqrt[4]{x})}$; *б*) $\int \sin^2 3xdx$.

118. *а*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(2+\sqrt[3]{x})}$; *б*) $\int \mathrm{tg}^3 xdx$.

119. *а*) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+1}-\sqrt[4]{4x+1}}$; *б*) $\int \cos^2 5xdx$.

120. *а*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}(1-\sqrt[3]{x+1})}$; *б*) $\int \mathrm{ctg}^3 xdx$.

Тема 6. Определенный интеграл и его применение

Задачи 121–130. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями, и изобразить фигуру на чертеже.

121. $y = x^2 - 4x + 4, \quad y + x = 4$.

122. $y = x^2 + 4x + 5, \quad y - 2x = 8$.

123. $y = 1 + e^x, \ x + y = 2, \ x = 2$.

124. $y = -x^2 + 4x + 1, \ y - x - 1 = 0$.

125. $4y = x^2, \ y^2 = 4x$.

126. $xy = 6, \ x + y - 7 = 0$.

127. $y = x^2 - 2x + 1, \ y = -x^2 + 2x + 1$.

128. $y = e^x, \ y = e^{-x}, \ x = 1$.

129. $xy = 4, \ x = 4, \ y = 4$.

130. $y = \frac{16}{x}, \ y = 17 - x$.

Задачи 131–140. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси Ox (задачи 131–136) или вокруг оси Oy (задачи 137–140), ограниченной указанными линиями. Изобразить фигуру на рисунке.

131. $y=x^2,\ x=y^2$.

132. $y=2x-x^2,\ y=0$.

133. $xy=4,\ x=1,\ x=4,\ y=0$.

134. $y=1+\cos x,\ x=-\dfrac{\pi}{2},\ x=\dfrac{\pi}{2},\ y=0$.

135. $y=1+\sin x,\ x=0,\ x=\pi,\ y=0$.

136. $y=1+e^x,\ x=0,\ x=1,\ y=0.$

137. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

138. $y=x^2+1,\ y=3,\ x=0$.

139. $x=4y-y^2,\ x=0$.

140. $y=x^3,\ y=1,\ x=0$.

Задачи 141–150. Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость).

141. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

142. $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

143. $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{\ln x dx}{x}$.

144. $\int\limits_1^e \dfrac{dx}{x\ln x}$.

145. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{9x^2+1}$.

146. $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x\ln x}$.

147. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^2dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

148. $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{(x-1)^2}$.

149. $\int\limits_{-1}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+2x+2}$.

150. $\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Тема 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Задачи 151–160. Найти общее решение дифференциальных уравнений первого порядка.

151. $xy' + y = 3$.

152. $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$.

153. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

154. $xy' - y = y \ln \frac{y}{x}$.

155. $y' - y = e^x$.

156. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$.

157. $y' + 2xy = 3x^2 \cdot e^{-x^2}$.

158. $2x^2 y' + x^2 + y^2 = 0$.

159. $(x + 1)y' + y = x^3 + x$.

160. $xy' = y \ln \frac{y}{x}$.

Задачи 161–170. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка.

161. $y'' + 2\frac{y'}{x} = x^2$.

162. $y'' = \ln x$.

163. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

164. $y''(1 + y) - 5(y')^2 = 0$.

165. $y'' x \ln x = y'$.

166. $yy'' = (y')^2$.

167. $y'' - y' \operatorname{ctg} x = \sin x$.

168. $(y - 2)y'' = 2(y')^2$.

169. $xy'' = y'$.

170. $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$.

Задачи 171–180. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

171. $y'' + 4y = 0$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 2$.

172. $y'' - 6y' + 9y = 0$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 3$.

173. $y'' + 4y' + 4y = 0$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = -1$.

174. $y'' + 25y = 0$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 10$.

175. $y'' + y' - 20y = 0$, $\quad y(0) = 2$, $\quad y'(0) = 1$.

176. $4y'' + 4y' + y = 0$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 2$.

177. $y'' + 6y' + 13y = 0$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = -3$.

178. $y'' + 8y' + 16y = 0$, $\quad y(0) = 2$, $\quad y'(0) = -1$.

179. $y'' + 2y' + 2y = 0$, $\quad y(0) = 3$, $\quad y'(0) = 2$.

180. $y'' + 5y' = 0$, $\quad y(0) = 7$, $\quad y'(0) = -20$.

Задачи 181–190. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка.

181. $y'' - 3y' + 2y = 4\,e^{3x}$.

182. $y'' - 4y = 8x^3$.

183. $y'' + 4y' + 13y = (18x + 6)\,e^{x}$.

184. $y'' + 6y' + 8y = 7e^{3x}$.

185. $y'' - 2y' + y = 4\sin 2x - 3\cos 2x$.

186. $y'' + 2y' + 10y = 18\,e^{-x}$.

187. $y'' - 6y' + 9y = 2\cos x + 14\sin x$.

188. $y'' - 6y' + 5y = 5x^2 - 12x + 7$.

189. $y'' + 3y' = (4x - 2)\,e^{-x}$.

190. $y'' - 2y' + 26y = 25\cos x + 2\sin x$.

Задачи 191–200. Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

191. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

192. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

193. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \quad y(0) = -1.$

194. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \quad y(0) = 3.$

195. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y, \end{cases}$ $\quad x(0) = -2, \quad y(0) = 2.$

196. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 3, \quad y(0) = 5.$

197. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 4, \quad y(0) = 4.$

198. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

199. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \dfrac{dxy}{dt} = -2x + y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

200. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

Тема 8. Функции нескольких переменных

Задачи 201–210. Проверить, удовлетворяет ли заданному уравнению функция $u = u(x;\, y)$.

201. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2,$ $\quad$ если $u = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right).$

202. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},$ $\quad$ если $u = \sin(x + ay), \quad a - \mathrm{const}.$

203. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}$, если $u=\dfrac{x}{y}$.

204. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, если $u=e^{xy}$.

205. $\dfrac{\partial u}{\partial x}\left(x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, если $u=e^{\frac{y}{x}}$.

206. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, если $u=\ln\left(x^2-y^2\right)$.

207. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=1$, если $u=\ln\left(e^x+e^y\right)$.

208. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, если $u=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

209. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, если $u=\ln\left(x^2-y^2\right)$.

210. $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, если $u=\sin(x-ay)$.

Задачи 211–220. Исследовать функцию $z=z(x;\,y)$ на экстремум.

211. $z=xy-x^2-2y^2+x+10y$.

212. $z=3x^2+3xy+y^2-6x-2y$.

213. $z=3xy-x^2-4y^2+4x-6y$.

214. $z=3x^2+5xy+3y^2+4x+7y$.

215. $z=3xy-x^2-3y^2-6x+9y$.

216. $z=x^2+3xy+y^2-x-4y$.

217. $z=x^2-xy+y^2+x+y$.

218. $z=3x^2+5xy+3y^2+x-y$.

219. $z=x^2+2xy-y^2+6x-10y$.

220. $z=-5x^2-4xy-y^2-4x-2y$.

Задачи 231–240. Дана функция $z = z(x;\, y)$, точка $A(x_0;\, y_0)$ и вектор $\vec{a}$. Найти grad$z$ в точке A и производную функции z в точке A по направлению вектора $\vec{a}$.

221. $z = \operatorname{arctg}(x^2 y)$, $\quad A(2;1)$, $\quad \vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.

222. $z = \ln(4x^2 + 5y^2)$, $\quad A(1;1)$, $\quad \vec{a} = 15i - 8\vec{j}$.

223. $z = \arcsin\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$, $\quad A(3;1)$, $\quad \vec{a} = 12\vec{i} - 5\vec{j}$.

224. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, $\quad A(5;4)$, $\quad \vec{a} = 8\vec{i} - 15\vec{j}$.

225. $z = 2x^2 + 3xy + 4y$, $\quad A(1;3)$, $\quad \vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.

226. $z = \operatorname{arctg}\sqrt{xy}$, $\quad A(1;4)$, $\quad \vec{a} = 5\vec{i} + 12\vec{j}$.

227. $z = \ln(x^2 + 2xy + y^2)$, $\quad A(1;1)$, $\quad \vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.

228. $z = \arccos\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$, $\quad A(1;3)$, $\quad \vec{a} = 8\vec{i} - 6\vec{j}$.

229. $z = \ln\left(1 + \sqrt{xy}\right)$, $\quad A(1;4)$, $\quad \vec{a} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$.

230. $z = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}$, $\quad A(1;1)$, $\quad \vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

Тема 9. Числовые и степенные ряды

Задачи 231–240. Исследовать сходимость числового ряда.

231. *а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{2^n}$; $\quad$ *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+7}{n^3+5n+2}$.

232. *а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7^n}{3^n n!}$; $\quad$ *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{(n+1)^2}$.

233. *а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{(n+1)!}$; $\quad$ *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n+1}$.

234. *а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+1}{2^n(n+1)!}$; $\quad$ *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

235. $a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n4^n}$; $\quad$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+n+1}$.

236. $a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^{n+1}}$; $\quad$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+6}{n^2+4n+3}$.

237. $a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)2^n}$; $\quad$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

238. $a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$; $\quad$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^2$.

239. $a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^2}{n!}$; $\quad$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n+4}{3n^5+6n-1}$.

240. $a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$; $\quad$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$.

Задачи 241–250. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда.

241. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}$. $\quad$ 242. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(n+1)!}$.

243. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+1}}$. $\quad$ 244. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2x^n}{2^n}$.

245. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!\sqrt{n}}$. $\quad$ 246. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}$.

247. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\,x^n}{3^n}$. $\quad$ 248. $\sum_{n=1}^{\infty}n5^nx^n$.

249. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3n+1}$. $\quad$ 250. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n5^n}$.

Задачи 251–260. Вычислить $\int_a^b f(x)dx$ с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно.

251. $\int_0^1\cos x^2dx$. $\quad$ 252. $\int_0^{0,5}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}dx$.

253. $\int\limits_0^1 x^2\cos\sqrt{x}dx.$ 254. $\int\limits_0^{0,5}\sqrt{1+x^3}dx.$

255. $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx.$ 256. $\int\limits_0^{0,5}\frac{xdx}{1+x^3}.$

257. $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx.$ 258. $\int\limits_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx.$

259. $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx.$ 260. $\int\limits_0^{0,5}\frac{dx}{1+x^4}.$

Задачи 261–270. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения $y'=f(x;y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=y_0$.

261. $y'=e^{2x}+y,\quad y(0)=2.$ 262. $y'=e^{y}+xy,\quad y(0)=1.$

263. $y'=x^2+y^2,\quad y(0)=1.$ 264. $y'=\cos x+e^{y},\quad y(0)=1.$

265. $y'=e^{-x}+y^2,\quad y(0)=2.$ 266. $y'=\sin x+xy,\quad y(0)=1.$

267. $y'=\sin x+y^2,\quad y(0)=1.$ 268. $y'=x+y^3,\quad y(0)=2.$

269. $y'=e^{x}-y,\quad y(0)=2.$ 270. $y'=x+e^{y},\quad y(0)=0.$

Тема 10. Кратные и криволинейные интегралы, их применение

Задачи 271–280. Изменить порядок интегрирования. Изобразить область интегрирования.

271. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$ 272. $\int\limits_1^2 dx\int\limits_1^{x^2} f(x,y)dy.$

273. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)dy.$ 274. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2x}^{3x} f(x,y)dy.$

275. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{2x}^{4+2x} f(x,y)dy.$ 276. $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

277. $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$

278. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx.$

279. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx.$

280. $\int_2^5 dx \int_{\frac{10}{x}}^{7-x} f(x,y)dy.$

Задачи 281–290. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями.

281. $\iint_D (y+1)dxdy$, где $D: x = y^2,\ x = 5y$.

282. $\iint_D \frac{y^2}{x^2} dxdy$, где $D: x = y,\ xy = 1,\ y = 2$.

283. $\iint_D (x+1)dxdy$, где $D: y = 1 - x^2,\ y = x^2 - 1$.

284. $\iint_D xdxdy$, где $D: y = x^2,\ y = \frac{2}{1+x^2}$.

285. $\iint_D (y+x)dxdy$, где D: $y = x^2 - 1,\ y = 1 - x^2$.

286. $\iint_D \sqrt{1-(x^2+y^2)}dxdy$, где D – полукруг: $x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0$.

287. $\iint_D (x - y^2)dxdy$, где D: $y = x^2,\ y = 4$.

288. $\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy$, где D – четверть круга: $x^2 + y^2 \le 1$, расположенного в первом квадранте.

289. $\iint_D xdxdy$, где D: $xy = 6,\ y + x - 7 = 0$.

290. $\iint_D (x^2 + y)dxdy$, где D: $y = x^2,\ y^2 = x$.

Задачи 291–300. Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить с помощью тройного интеграла объемы тел, ограниченных указанными поверхностями. Изобразить данные тела.

291. $z = x^2 + y^2 - 1,\ z = 0$.

292. $z = x^2 + y^2,\ z = 4$.

293. $z = 8 - (x^2 + y^2),\ z = x^2 + y^2.$

294. $z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = 9,\ z = 0.$

295. $z = x^2 + y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

296. $z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 2.$

297. $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 = 4,\ z = 0.$

298. $z = x + 10,\ x^2 + y^2 = 1,\ z = 0.$

299. $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 + z^2 = 2.$

300. $z = y + 5,\ x^2 + y^2 = 1,\ z = 0.$

Задачи 301–306. Вычислить криволинейные интегралы.

301. $\int\limits_C yds,$ где C – дуга параболы: $y^2 = 2x,$ заключенная между точками $O(0;\ 0)$ и $A(2;\ 2)$.

302. $\int\limits_C xds,$ где C – дуга параболы: $y = x^2,$ заключенная между точками $A(7;\ 2\ )$ и $B(2;\ 4)$.

303. $\int\limits_C xds,$ где C – отрезок прямой от точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(1;\ 2)$.

304. $\int\limits_C \sqrt{2y}\,ds$, где C – первая арка циклоиды: $x = a(t - \sin t),$ $y = a(1 - \cos t),\ \ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

305. $\int\limits_C (x^2 + y\ )dx + xydy,$ C – дуга кривой: $y = e^x,$ заключенная между точками $A(0;\ 1)$ и $B(1;\ e)$.

306. $\int\limits_C (x + y)dx + (x - y)dy,$ где C – четверть окружности: $x = R\cos t,$ $y = R\sin t,\ \ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

Задачи 307–310. Вычислить с помощью криволинейных интегралов.

307. Длину дуги кривой: $x = \cos t + t\sin t,\ y = \sin t - t\cos t,\ 0 \le t \le \pi.$

308. Работу силы $\vec{F} = x^2\vec{i} + xy\vec{j}$ при перемещении материальной точки по четверти окружности: $x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

309. Работу силы $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль кривой: $y = \sqrt{x}$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$.

310. Работу силы $\vec{F} = x^2y\vec{i} + xy^2\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль кривой: $x = t,\ y = t^3,\ 0 \le t \le 1.$

Задачи 311–320. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{F}$ потенциальным и соленоидальным. В случае потенциальности векторного поля $\vec{F}$ найти его потенциал.

311. $\vec{F} = (2x + 3yz)\vec{i} + (2y + 3xz)\vec{j} + (2z + 3xy)\vec{k}$.

312. $\vec{F} = (3x - yz)\vec{i} + (3y - xz)\vec{j} + (3z - xy)\vec{k}$.

313. $\vec{F} = (x - 5yz)\vec{i} + (y - 5xz)\vec{j} + (z - 5xy)\vec{k}$.

314. $\vec{F} = (7x + yz)\vec{i} + (7y + xz)\vec{j} + (z + xy)\vec{k}$.

315. $\vec{F} = (4x - 3yz)\vec{i} + (4y - 3xz)\vec{j} + (z - 3xy)\vec{k}$.

316. $\vec{F} = (x + 5yz)\vec{i} + (y + 5xz)\vec{j} + (z + 5xy)\vec{k}$.

317. $\vec{F} = (3x + 2yz)\vec{i} + (3y + 2xz)\vec{j} + (3z + 2xy)\vec{k}$.

318. $\vec{F} = (5x - yz)\vec{i} + (5y - xz)\vec{j} + (5z - xy)\vec{k}$.

319. $\vec{F} = (x + yz)\vec{i} + (y + xz)\vec{j} + (z + xy)\vec{k}$.

320. $\vec{F} = (2x - yz)\vec{i} + (y - xz)\vec{j} + (z - xy)\vec{k}$.

Тема 12. Теория вероятностей

Задачи 321–330. Решите следующие задачи, используя теоремы сложения и умножения вероятностей.

321. Три стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Найти вероятность попаданий в цель: а) хотя бы одним стрелком; б) двумя стрелками.

322. В коробке 4 красных и 6 синих карандашей. Из коробки наудачу извлекли два карандаша. Найти вероятность того, что: а) извлечены карандаши одного цвета; б) извлечены карандаши разных цветов.

323. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа не потребует внимания первый станок 0,9, второй – 0,8, третий – 0,85. Найти вероятность того, что в течение часа не потребуют внимания: а) ровно два станка; б) хотя бы один станок.

324. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен 0,9, второй – 0,8 и третий – 0,7. Найти вероятность того, что студент сдаст: а) только один экзамен; б) все три экзамена; в) хотя бы один экзамен.

325. Для сигнализации об аварии установлено два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии срабатывает первый сигнализатор равна 0,95, второй – 0,9. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) только один сигнализатор; б) хотя бы один сигнализатор.

326. В урне находятся 10 белых и 5 черных шаров. Из урны наудачу извлекли 4 шара. Найти вероятность, что среди них: а) все белые шары; б) два белых и два черных шара.

327. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе – 0,85 и в третье – 0,8. Найти вероятность того, что два отделения получат газеты вовремя, а одно с опозданием.

328. Для одной бригады вероятность выполнения нормы равна 0,8, для другой – 0,9. Какова вероятность, что: а) обе бригады выполнят норму; б) хотя бы одна бригада выполнит норму.

329. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. После первого попадания стрельба прекращается. Найти вероятность того, что будет произведено ровно 4 выстрела.

330. В первой урне 2 белых и 10 черных шаров, во второй урне – 8 белых и 4 черных шара. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что: а) оба шара белые; б) один шар белый; в) хотя бы один шар белый.

Задачи 331–340. Решите следующие задачи, используя формулу полной вероятности.

331. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0,08 и на втором – 0,09. Производительность второго автомата вдвое больше, чем первого. Найти вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь стандартна.

332. В телевизионном ателье имеется 4 кинескопа. Вероятности того, что кинескопы выдержат гарантийный срок службы соответственно равны: 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что наугад взятый кинескоп выдержит гарантийный срок службы.

333. В ящике имеется 5 деталей, изготовленных заводом № 1 и 10 деталей, изготовленных заводом № 2. Сборщик последовательно вынимает из ящика детали одну за другой. Найти вероятность того, что второй будет извлечена деталь, изготовленная заводом № 1.

334. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов, 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму равна для лыжника 0,8; для велосипедиста 0,9; для бегуна 0,75. Найти вероятность того, что вызванный наудачу спортсмен выполнит квалификационную норму.

335. В каждой из двух урн находится по 5 белых и 10 черных шаров. Из первой во вторую перекладывают один шар. После чего из второй урны извлекают шар. Найти вероятность того, что он будет белый.

336. Имеется три ящика деталей: в первом ящике 40 деталей, из них 20 окрашенных; во втором 50, из них 10 окрашенных; в третьем 30 деталей, из них 15 окрашенных. Найдите вероятность того, что наугад взятая деталь из наугад взятого ящика окажется окрашенной.

337. Заготовки для обработки поступают из трех цехов: 50% из первого, 30% из второго, 20% из третьего. Брак среди заготовок первого составляет 5%, второго цеха 4% и третьего цеха 2%. Найти вероятность того, что наугад взятая заготовка не бракованная.

338. Имеются две партии одинаковых изделий из 18 и 20 штук. Причем в первой партии два, а во второй три бракованных изделия. Наудачу взятое изделие из первой партии переложено во вторую, после чего случайным образом выбирается изделие из второй партии. Найти вероятность того, что выбранное изделие бракованное.

339. Из трамвайного парка в случайном порядке выходят 4 трамвая № 1 и 8 трамваем № 2. Найти вероятность того, что второй из вышедших на линию трамваев будет иметь № 1.

340. В урне было 10 шаров, из них 4 черных. Из урны два шара забрали. После чего извлекли один шар. Найдите вероятность того, что он черный.

Задачи 341–350. Решите следующие задачи, используя схему Бернулли.

341. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. По мишени производится 7 выстрелов. Найдите вероятность того, что в мишень будет не менее двух попаданий.

342. При установившемся технологическом процессе 60% всех изготовляемых заводом изделий выпускается высшим сортом. Приемщик наугад берет 200 изделий. Чему равна вероятность того, что среди них изделий высшего сорта окажется от 120 до 150?

343. Вероятность того, что любой абонент некоторой сети выходит в интернет в течение часа равна 0,005. Сеть обслуживает 600 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа в интернет выйдет 5 абонентов?

344. Вероятность выхода из строя за некоторое время T одного конденсатора равна 0,2. Найдите вероятность того, что из 100 независимо работающих конденсаторов в течение времени T выйдет из строя не более 20 конденсаторов.

345. Производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,8. Найдите вероятность того, что в 100 испытаниях событие A появиться: а) ровно 90 раз; б) не менее 20 раз.

346. Найдите вероятность того, что в 6 независимых испытаниях событие A появится не менее 5 раз, если в каждом испытании вероятность появления события равна 0,9.

347. Вероятность того, что изделие не выдержит испытание, равна 0,004. Найдите вероятность того, что из 1000 наудачу взятых изделий не выдержат испытания не более двух изделий.

348. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах стрелок поразит мишень более 75 раз.

349. В партии из 1000 изделий имеется 10 дефектных. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых из этой партии 50 изделий ровно 5 окажутся дефектными.

350. Рабочий обслуживает 10 однотипных станков. Вероятность того, что в течение часа станок потребует внимания, равна 0,6. Найдите вероятность того, что в течение часа этих требований будет от 3 до 5.

Задачи 351–360. По данному закону распределения случайной величины ξ найдите: а) математическое ожидание M_ξ; б) дисперсию D_ξ; в) среднеквадратическое отклонение σ_ξ; г) $P(\xi < M_\xi)$; д) функцию распределения $F(x)$; *е*) постройте график $F(x)$.

351.

ξ	23	25	28	29
p	0,3	0,2	0,4	0,1

352.

ξ	17	21	25	27
p	0,2	0,4	0,3	0,1

353.

ξ	22	26	28	30
p	0,2	0,2	0,5	0,1

354.

ξ	12	16	19	21
p	0,1	0,5	0,3	0,1

355.

ξ	25	27	30	32
p	0,2	0,4	0,3	0,1

356.

ξ	30	32	35	40
p	0,1	0,5	0,2	0,2

357.

ξ	12	14	16	20
p	0,1	0,2	0,5	0,2

358.

ξ	21	25	28	31
p	0,1	0,4	0,2	0,3

359.

ξ	60	64	67	70
p	0,1	0,3	0,4	0,2

360.

ξ	45	47	60	82
p	0,2	0,4	0,3	0,1

Задачи 361–370. Случайная величина ξ задана функцией распределения $F(x)$. Требуется найти: а) плотность распределения $p(x)$ вероятностей случайной величины ξ; б) математическое ожидание M_ξ и дисперсию D_ξ; в) $P(|\xi - M_\xi| < \sigma_\xi)$; г) построить графики функции распределения $F(x)$ и плотности распределения вероятностей $p(x)$.

361. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 4, \\ \frac{1}{2}x - 2, & \text{при } 4 < x \le 6, \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$

362. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 0, \\ \dfrac{x^3}{9}, & \text{при } 0<x\le 3, \\ 1, & \text{при } x>3. \end{cases}$

363. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 1, \\ x-1, & \text{при } 1<x\le 2, \\ 1, & \text{при } x>2. \end{cases}$

364. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 0, \\ x^2, & \text{при } 0<x\le 1, \\ 1, & \text{при } x>1. \end{cases}$

365. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le -1, \\ \dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}, & \text{при } -1<x\le 2, \\ 1, & \text{при } x>2. \end{cases}$

366. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 2, \\ \dfrac{1}{2}x-1, & \text{при } 2<x\le 4, \\ 1, & \text{при } x>4. \end{cases}$

367. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 0, \\ \dfrac{1}{5}x, & \text{при } 0<x\le 5, \\ 1, & \text{при } x>5. \end{cases}$

368. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & \text{при } 0<x\le 2, \\ 1, & \text{при } x>2. \end{cases}$

369. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le -1, \\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}, & \text{при } -1<x\le \dfrac{1}{3}, \\ 1, & \text{при } x>1/3. \end{cases}$

370. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & \text{при } 0<x\le 2, \\ 1, & \text{при } x>2. \end{cases}$

Задачи 371–380. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами а и σ. Найдите: а) вероятность попадания случайной величины ξ в заданный интервал $(\alpha;\beta)$; б) $P(|\xi - M_\xi| < 2\sigma)$.

371. $a=50;\quad \sigma=5;\quad \alpha=45;\quad \beta=52.$

372. $a=20;\quad \sigma=3;\quad \alpha=17;\quad \beta=26.$

373. $a=36;\quad \sigma=4;\quad \alpha=30;\quad \beta=40.$

374. $a=60;\quad \sigma=5;\quad \alpha=54;\quad \beta=70.$

375. $a=48;\quad \sigma=4;\quad \alpha=45;\quad \beta=56.$

376. $a=30;\quad \sigma=3;\quad \alpha=24;\quad \beta=33.$

377. $a=45;\quad \sigma=5;\quad \alpha=40;\quad \beta=48.$

378. $a=35;\quad \sigma=4;\quad \alpha=27;\quad \beta=37.$

379. $a=40;\quad \sigma=3;\quad \alpha=34;\quad \beta=43.$

380. $a=25;\quad \sigma=2;\quad \alpha=20;\quad \beta=27.$

Тема 13. Математическая статистика

Задачи 381–390. По заданному интервальному ряду:

1) построить гистограмму относительных частот;

2) найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

3) определить гипотетическую плотность закона распределения;

4) вычислить выборочное среднее значение $\bar{x}$ и несмещенную оценку дисперсии s^2;

5) найти доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$.

381.

$[x_i - x_{i+1})$	$[10-12)$	$[12-14)$	$[14-16)$	$[16-18)$	$[18-20]$
n_i	7	20	44	21	8

382.

$[x_i - x_{i+1})$	$[14-16)$	$[16-18)$	$[18-20)$	$[20-22)$	$[22-24]$
n_i	10	18	42	22	8

383.

$[x_i - x_{i+1})$	$[18-24)$	$[24-30)$	$[30-36)$	$[36-42)$	$[42-48]$
n_i	8	21	38	22	11

384.

$[x_i - x_{i+1})$	$[20-24)$	$[24-28)$	$[28-32)$	$[32-36)$	$[36-40]$
n_i	6	19	48	20	7

385.

$[x_i - x_{i+1})$	$[6-12)$	$[12-18)$	$[18-24)$	$[24-30)$	$[30-36]$
n_i	8	20	40	21	11

386.

$[x_i - x_{i+1})$	$[2-6)$	$[6-10)$	$[10-14)$	$[16-18)$	$[18-22]$
n_i	6	22	43	19	10

387.

$[x_i - x_{i+1})$	$[4-10)$	$[10-16)$	$[16-22)$	$[22-28)$	$[28-34]$
n_i	10	22	34	23	11

388.

$[x_i - x_{i+1})$	$[20-22)$	$[22-24)$	$[24-26)$	$[26-28)$	$[28-30]$
n_i	8	21	39	22	10

389.

$[x_i - x_{i+1})$	$[10-14)$	$[14-18)$	$[18-22)$	$[22-26)$	$[26-30]$
n_i	12	20	30	21	17

390.

$[x_i - x_{i+1})$	$[20-24)$	$[24-28)$	$[28-32)$	$[32-36)$	$[36-40]$
n_i	9	24	35	22	10

Задачи 391–400. По результатам наблюдений установить вид эмпирической зависимости y от x и методом наименьших квадратов найти эмпирическую зависимость $y = f(x)$.

Построить точечную диаграмму и график полученной эмпирической зависимости.

391.

x	2,1	2,7	3,3	3,8	4,2	4,9	5,6	6,1	6,8
y	1,2	1,6	2,1	2,4	2,5	2,8	3,4	3,8	4,0

392.

x	0	0,6	1,3	1,8	2,7	3,1	3,9	4,2	5,1
y	10,2	8,2	6,0	5,1	1,5	0,8	–1,6	–2,8	–5,5

393.

x	–4,2	–3,7	–3,3	–2,6	–1,8	–1,1	–0,8	–0,4	0
y	0,1	0,5	1,1	1,8	2,9	3,6	4,0	4,7	4,9

394.

x	–9,8	–8,5	–6,5	–5,0	–2,0	2,0	4,6	7,0	9,5
y	0,8	0,5	0,3	0	–0,5	–1,7	–1,8	–2,5	–2,8

395.

x	–4,0	–3,5	–2,4	–2,0	–0,8	0,5	1,4	2,5	3,8
y	–1,6	–1,0	–0,8	–1,1	–0,7	–0,4	–0,2	0	0,3

396.

x	2,0	1,5	1,1	0,5	–0,3	–1,1	–1,2	–2,0	–2,5
y	–1,1	0	1,0	2,1	2,3	2,9	4,0	5,1	5,8

397.

x	0,8	1,5	2,7	3,5	4,1	5,3	6,1	7,7	8,8
y	2,3	2,5	3,0	3,5	3,6	4,0	4,4	5,2	5,6

398.

x	0,4	0,9	1,2	1,6	2,3	2,5	3,5	3,8	4,2
y	1,7	3,3	3,8	5,0	6,3	7,5	8,8	10,4	11,7

399.

x	2,1	2,8	3,5	3,1	4,2	4,4	5,7	5,8	6,2
y	6,7	3,4	1,3	0,7	–1,6	–2,8	–6,3	–8,4	–9,6

400.

x	–3,0	–2,0	–1,5	–1,0	0,8	0,9	2,0	2,5	3,2
y	–2,1	–1,3	–1,0	0,5	0,7	1,5	1,6	2,3	2,7

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица значений функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,34	0,1331	0,68	0,2517	1,02	0,3461	1,36	0,4131
0,01	0,0040	0,35	0,1368	0,69	0,2549	1,03	0,3485	1,37	0,4147
0,02	0,0080	0,36	0,1406	0,70	0,2580	1,04	0,3508	1,38	0,4162
0,03	0,0120	0,37	0,1443	0,71	0,2611	1,05	0,3531	1,39	0,4177
0,04	0,0160	0,38	0,1480	0,72	0,2642	1,06	0,3554	1,40	0,4192
0,05	0,0199	0,39	0,1517	0,73	0,2673	1,07	0,3577	1,41	0,4207
0,06	0,0239	0,40	0,1554	0,74	0,2704	1,08	0,3599	1,42	0,4222
0,07	0,0279	0,41	0,1591	0,75	0,2734	1,09	0,3621	1,43	0,4236
0,08	0,0319	0,42	0,1628	0,76	0,2764	1,10	0,3643	1,44	0,4251
0,09	0,0359	0,43	0,1664	0,77	0,2794	1,11	0,3665	1,45	0,4265
0,10	0,0398	0,44	0,1700	0,78	0,2823	1,12	0,3686	1,46	0,4279
0,11	0,0438	0,45	0,1736	0,79	0,2852	1,13	0,3708	1,47	0,4292
0,12	0,0478	0,46	0,1772	0,80	0,2881	1,14	0,3729	1,48	0,4306
0,13	0,0517	0,47	0,1808	0,81	0,2910	1,15	0,3749	1,49	0,4319
0,14	0,0557	0,48	0,1844	0,82	0,2939	1,16	0,3770	1,50	0,4332
0,15	0,0596	0,49	0,1879	0,83	0,2967	1,17	0,3790	1,51	0,4345
0,16	0,0636	0,50	0,1915	0,84	0,2995	1,18	0,3810	1,52	0,4357
0,17	0,0675	0,51	0,1950	0,85	0,3023	1,19	0,3830	1,53	0,4370
0,18	0,0714	0,52	0,1985	0,86	0,3051	1,20	0,3849	1,54	0,4382
0,19	0,0753	0,53	0,2019	0,87	0,3078	1,21	0,3869	1,55	0,4394
0,20	0,0793	0,54	0,2054	0,88	0,3106	1,22	0,3888	1,56	0,4406
0,21	0,0832	0,55	0,2088	0,89	0,3133	1,23	0,3907	1,57	0,4418
0,22	0,0871	0,56	0,2123	0,90	0,3159	1,24	0,3925	1,58	0,4429
0,23	0,0910	0,57	0,2157	0,91	0,3186	1,25	0,3944	1,59	0,4441
0,24	0,0948	0,58	0,2190	0,92	0,3212	1,26	0,3962	1,60	0,4452
0,25	0,0987	0,59	0,2224	0,93	0,3238	1,27	0,3980	1,61	0,4463
0,26	0,1026	0,60	0,2257	0,94	0,3264	1,28	0,3997	1,62	0,4474
0,27	0,1064	0,61	0,2291	0,95	0,3289	1,29	0,4015	1,63	0,4484
0,28	0,1103	0,62	0,2324	0,96	0,3315	1,30	0,4032	1,64	0,4495
0,29	0,1141	0,63	0,2357	0,97	0,3340	1,31	0,4049	1,65	0,4505
0,30	0,1179	0,64	0,2389	0,98	0,3365	1,32	0,4066	1,66	0,4515
0,31	0,1217	0,65	0,2422	0,99	0,3389	1,33	0,4082	1,67	0,4525
0,32	0,1255	0,66	0,2454	1,00	0,3413	1,34	0,4099	1,68	0,4535
0,33	0,1293	0,67	0,2486	1,01	0,3438	1,35	0,4115	1,69	0,4545

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,70	0,4554	1,88	0,4699	2,12	0,4830	2,48	0,4934	2,84	0,4977
1,71	0,4564	1,89	0,4706	2,14	0,4838	2,50	0,4938	2,86	0,4979
1,72	0,4573	1,90	0,4713	2,16	0,4846	2,52	0,4941	2,88	0,4980
1,73	0,4582	1,91	0,4719	2,18	0,4854	2,54	0,4945	2,90	0,4981
1,74	0,4591	1,92	0,4726	2,20	0,4861	2,56	0,4948	2,92	0,4982
1,75	0,4599	1,93	0,4732	2,22	0,4868	2,58	0,4951	2,94	0,4984
1,76	0,4608	1,94	0,4738	2,24	0,4875	2,60	0,4953	2,96	0,4985
1,77	0,4616	1,95	0,4744	2,26	0,4881	2,62	0,4956	2,98	0,4986
1,78	0,4625	1,96	0,4750	2,28	0,4887	2,64	0,4959	3,00	0,49865
1,79	0,4633	1,97	0,4756	2,30	0,4893	2,66	0,4961	3,20	0,49931
1,80	0,4641	1,98	0,4761	2,32	0,4898	2,68	0,4963	3,40	0,49966
1,81	0,4649	1,99	0,4767	2,34	0,4904	2,70	0,4965	3,60	0,499841
1,82	0,4656	2,00	0,4772	2,36	0,4909	2,72	0,4967	3,80	0,499928
1,83	0,4664	2,02	0,4783	2,38	0,4913	2,74	0,4969	4,00	0,499968
1,84	0,4671	2,04	0,4793	2,40	0,4918	2,76	0,4971	4,50	0,499997
1,85	0,4678	2,06	0,4803	2,42	0,4922	2,78	0,4973	5,00	0,499997
1,86	0,4686	2,08	0,4812	2,44	0,4927	2,80	0,4974		
1,87	0,4693	2,10	0,4821	2,46	0,4931	2,82	0,4976		

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

t-распределение Стьюдента

Число степеней свободы, ν	Уровень значимости (двухсторонняя критическая область), α		Число степеней свободы, ν	Уровень значимости (двухсторонняя критическая область), α	
	0,10	0,05		0,10	0,05
1	6,31	12,7	17	1,74	2,11
2	2,92	4,30	18	1,73	2,10
3	2,35	3,18	19	1,73	2,09
4	2,13	2,78	20	1,73	2,09
5	2,01	2,57	21	1,72	2,06
6	1,94	2,45	22	1,72	2,07
7	1,89	2,36	23	1,71	2,07
8	1,86	2,31	24	1,71	2,06
9	1,83	2,26	25	1,71	2,06
10	1,81	2,23	26	1,71	2,06
11	1,80	2,20	27	1,71	2,05
12	1,78	2,18	28	1,70	2,05
13	1,77	2,16	29	1,70	2,05
14	1,76	2,14	30	1,70	2,04
15	1,75	2,13	40	1,68	2,02
16	1,75	2,12	60	1,67	2,00
			120	1,66	1,98
ν	0,05	0,025	ν	0,05	0,025
	Уровень значимости (односторонняя критическая область), α			Уровень значимости (односторонняя критическая область), α	

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусак, А. А. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск: Тетрасистемс, 2004.

2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебник: в 2 т. – М.: Наука, 1978. – Т. 1, 2.

3. Кудрявцев, В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – М.: АСТ, 2004.

4. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 3-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2003.

5. Вентцель, Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель. – М.: Наука, 1980.

6. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1977.

7. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: Оникс, 2005. – Ч. 1, 2.

8. Блинова, Е. И. Теория вероятностей: учеб. пособие / Е. И. Блинова, В. М. Марченко, Н. П. Можей. – Минск: БГТУ, 2005.

9. Высшая математика: учеб.-метод. пособие для студентов первого курса заочного факультета: в 4-х ч. / сост. Ж. Н. Горбатович [и др.]. – Минск БГТУ, 2005–2008. – Ч. 1. – 2005; Ч. 2. – 2006; Ч. 3. – 2007; Ч. 4. – 2008.

Учебное издание

Волк Анатолий Матвеевич
Игнатенко Василий Васильевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие

Редактор *М. А. Юрасова*
Компьютерная верстка *М. А. Юрасова*

Подписано в печать 29.09.2010. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 11,5. Уч.-изд. л. 11,2.
Тираж 500 экз. Заказ .

Отпечатано в Центре издательско-полиграфических
и информационных технологий учреждения образования
«Белорусский государственный технологический университет».
220006. Минск, Свердлова, 13а.
ЛИ № 02330/0549423 от 08.04.2009.
ЛП № 02330/0150477 от 16.01.2009.