УДК 517.968.7

А.Х. Дадабаев (Таджикский национальный университет)

О РАЗРЕШИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ЗАДАННЫХ НА НЕОГРАНИЧЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ БЕЗ КРАЯ

В этой работе рассматривается параболическое уравнение заданное на многомерном неограниченном C^∞ - многообразие без края. Пусть $\mathcal{M}$- n- мерное C^∞ - многообразие без края. В качестве многообразие $\mathcal{M}$ можно, например, положить $\mathcal{M}= \partial\Omega$, где $\Omega= R^{n+1}$ неограниченная область с C^∞ границей. При этом рассматривается случай общих самосопряженных эллиптических дифференциальных операторов произвольного порядка .

1. Покроем $\mathcal{M}$ системой открытых ограниченных множеств $\mathcal{M}_j \subset \mathcal{M}$, j=1,2,….., конечной кратности так, что $\mathcal{M} =\cup_{j=1}^{+\infty} \mathcal{M}_j$, и при этом найдутся функции $\psi_j(\mu)$, $\zeta_j(\mu)$, j=1,2,….., обладающие следующими свойствами:

I. Функции $\psi_j(\mu)$, j=1,2,….., образуют разбиение единицы многообразия $\mathcal{M}$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j(\mu) = 1. \qquad (\mu \epsilon \mathcal{M})$$

II. $0\leq \psi_j(\mu) \leq 1,\ 0 \leq \zeta_j(\mu) \leq 1,\ \mu \epsilon \mathcal{M},$ j=1,2,…..,

III. $\zeta_j(\mu)=1$ *для* $\mu \,\epsilon\, \mathrm{supp}\psi_j, \mathbf{j} = 1,2,\ldots$

Далее на $\mathcal{M}$ вводится положительная C^∞ - плотность $d\mu$ и предполагается, что при любом j=1,2,… существует C^∞ -гомеоморфизм g_j множества $\mathcal{M}_j$ на открытое ограниченное множество $V_j \subset \mathcal{R}^n$ и для всех открытых множеств $\omega \subset \mathcal{M}_j$ выполняется неравенство

$$C_1 mes g_j(\omega) \leq \int d\mu \leq C_2 mes g_j(\omega),$$

с константами $C_1, C_2 > 0$ не зависящими от $\mathbf{j}$.

Для дифференциального оператора $\mathcal{A}$ с областью определения $C_0^\infty(\mathcal{M})$ можно построить операторы $\mathcal{A}_j$, j=1,2,… такие, что для $u \in C_0^\infty(\mathcal{M}_j)$ выполняется равенство

$$\mathcal{A}u = \pi_j^{-1}\mathcal{A}_j\pi_j u,$$

где отображение $\pi_j: C_0^\infty(\mathcal{M}_j) \longrightarrow C_0^\infty(V_j)$

задается по формуле $(\pi_j u)(x) = u\left(g_j^{-1}(x)\right), x \in V_j.$

При этом дифференциальный оператор $\mathcal{A}_j$ имеет вид

$$\left(\mathcal{A}_j v\right)(x) = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_{\alpha,j}(x) D_x^{\alpha} v(x) + Q_j(x) v(x), \qquad v \in C_0^{\infty}(V_j)$$

Предполагается, что коэффициенты операторов бесконечно дифференцируемы и обладают производными равномерно ограниченными по j =1,2,…. вплоть до порядка 2m, функции $Q_j(x) \epsilon C^1(V_j)$, $j = 1,2, \dots$ удовлетворяют неравенствам

$$Q_j(x) \ge 1, \quad \left|\nabla_x Q_j(x)\right| \le M \cdot Q_j^{1+\frac{1}{2m}-\varepsilon}(x), \ (x \in V_j)$$

где число $\varepsilon, M > 0$ от j не зависят.

Теорема. Существует число $\lambda_0 > 0$ такое, что уравнение

$$\mathcal{A}u + \lambda u = f,$$

где $f \in L_2(\mathcal{M}: d\,\mu)$, имеет единственное решение

$$u \in L_2(\mathcal{M}: d\,\mu) \cap W_{2,loc}^{2m}(\mathcal{M}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойматов К. Х. Спектральная асимптотика дифференциальных операторов. Труды семинара им. И.Г. Петровского, вып. 7, 1981, с.56-100.