УДК 517.977

А. А. Якименко, канд. физ.-мат. наук, доцент
(БГТУ, г. Минск)

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ СИСТЕМОЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Рассмотрим линейную систему нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 \dot{x}(t-h) + bu(t),\ t > 0, \tag{1}$$

где $A_i, i = 0,1,2$ - постоянные (2×2)-матрицы, b- ненулевой 2-вектор, $h > 0$- постоянное запаздывание. Не ограничивая общности, считаем $b' = [0,\ 1]$.

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = q'_{00} x(t) + \sum_{i=0}^{L}\sum_{j=1}^{M} q'_{ij} x^{(i)}(t - jh) + \int_{-h}^{0} g'(s) x(t+s)\,ds, \tag{2}$$

где q_{00}, q_{ij} $(i = 0,\ldots,L, j = 0,\ldots,M)$- 2-векторы; $g(s)$, $s \in [-h,\ 0]$ – непрерывная 2-вектор-функция, $x^{(i)}(t) \overset{def}{=} \dfrac{d^i}{dt^i} x(t)$, $x^{(0)}(t) \equiv x(t)$.

Характеристическое уравнение системы (1) имеет следующий вид:

$$\det\left[A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_2\right] \equiv \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} \tilde{\alpha}_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} = 0, \tag{3}$$

где числа $\tilde{\alpha}_{ij}$ вычисляются как функции матриц A_i, $i = 0,\ 1,\ 2,$ в частности $\tilde{\alpha}_{00} = \det A_0$, $\tilde{\alpha}_{20} = 1$, $\tilde{\alpha}_{22} = \det A_2$.

Определение. Система (1) модально управляема регулятором вида (2), если для любых наперёд заданных чисел α_{ij}, $i = 0,\ 1,\ 2,$ $j = 0,\ 1,\ 2,$ $\alpha_{20} = 1,$ найдется регулятор (2) такой, что характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (2) имеет вид (ср. с (3)):

$$\det\left[A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_2 + bU(\lambda)\right] \equiv \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} \alpha_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} = 0,$$

где $U(\lambda)$ – регулятор (2) в частотной области.

Введем (2×2)-матрицы:

$$\mathsf{A}(\lambda) = A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h},$$

$$W(\lambda) = \left[\mathsf{A}(\lambda) b,\ \ b\right],\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим слабо циклический случай:

$\det W(\lambda) = c\left(\gamma_0 + e^{-\lambda h}\right), (c \neq 0).$

Матрица $\mathsf{A}(\lambda)$ в этом случае имеет следующий вид:

$$\mathsf{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} + \beta_2 \lambda e^{-\lambda h} & c\left(\gamma_0 + e^{-\lambda h}\right) \\ a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

где β_i, $i = 0, 1, 2$, γ_0 – некоторые действительные числа; $a_j(\lambda)$, $j = 1, 2$ – квазиполиномы:

$$a_i(\lambda) = a_{i0} + a_{i1} e^{-\lambda h} + a_{i2} \lambda e^{-\lambda h},$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$; $i = 1, 2$, $j = 0, 1, 2$.

Возможны два случая:

$$\text{i) } \beta_2 \gamma_0 + 1 = 0,$$
$$\text{ii) } \beta_2 \gamma_0 + 1 \neq 0.$$

Теорема 1. В случае i) система (1) модально управляема регулятором вида (2) тогда и только тогда, когда $\beta_0 - \beta_1 \gamma_0 \neq 0$.

Рассмотрим случай ii). Введем обозначения:

$$\xi = \frac{\beta_0 - \beta_1 \gamma_0}{1 + \beta_2 \gamma_0},$$
$$\delta_1 = \gamma_0 + e^{-\xi h}.$$

Теорема 2. Для того, чтобы система (1) в случае ii) была модально управляема регулятором вида (2), необходимо и достаточно выполнения условия $\delta_1 \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Якименко А. А. Модальное управление одной запаздывающей системой // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–7.