УДК 517.982.4

Е. В. Терешко, ассист., магистр физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

К ВОПРОСУ О НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЯХ С ДЕЛЬТА-ОБРАЗНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим уравнение $u' - \delta u = 0$. Рассмотрим последовательность $\delta_n(t) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n\,t^2}$, которая сходится к $\delta(t)$ в пространстве $D'(\boldsymbol{R})$.

В пространстве новых обобщенных функций Егорова решением данного уравнения является $u = (u_1, u_2, u_3, \dots)$, где $u_n \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, которые удовлетворяют уравнению $u_n{}' - \delta_n\, u_n = 0$.

Будем искать решение этого уравнения.

$$\frac{du_n}{u_n} = \delta_n ds,\ \ \ln|u_n| = -\int_t^{+\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n\,s^2}\, ds + \ln c,\ \ c > 0$$

$$u_n(t) = c\, e^{-\int_t^{+\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n\,s^2} ds},\ c \subset \boldsymbol{R}$$

Решением данного уравнения в пространстве обобщенных функций Егорова является последовательность:

$$u = c\left(e^{-\int_t^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{\pi}} e^{-s^2} ds}, e^{-\int_t^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2\,s^2} ds}, e^{-\int_t^{+\infty} \sqrt{\frac{3}{\pi}} e^{-3\,s^2} ds}, \dots\right); < u_n, \varphi > =$$

$$c\, e^{-1} \int_{-\infty}^{0} \varphi(t) dt + c \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt;$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1}, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases};\ u_n \to cf \text{ в } D'(\boldsymbol{R}).$$

Заметим, что решение уравнения зависит от выбора последовательности δ_n. Рассмотрим то же уравнение $u_n{}' - \delta_n\, u_n = 0$, только в качестве последовательности δ_n возьмем $\delta_n(t) = \frac{n}{\pi(n^2 t^2 + 1)}$.

$$u_n(t) = c\, e^{-\frac{1}{2} + \frac{arctg\, nt}{\pi}}, \qquad c \in \boldsymbol{R}$$

Решением данного уравнения в пространстве обобщенных функций Егорова является функция:

$$u = c\,(e^{-\frac{1}{2} + \frac{arctg\, t}{\pi}}, e^{-\frac{1}{2} + \frac{arctg\, 2t}{\pi}}, e^{-\frac{1}{2} + \frac{arctg\, 3t}{\pi}}, e^{-\frac{1}{2} + \frac{arctg\, 4t}{\pi}}, \dots)$$

$$< u_n, \varphi > = c\, e^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{arctg\, nt}{\pi}} \varphi(t) dt \to c\, e^{-1} \int_{-\infty}^{0} \varphi(t) dt + \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1}, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases};\ u_n \to cf \text{ в } D'(\boldsymbol{R})$$

Получили, что при данных аппроксимациях функции δ решение сходится к одной и той же функции cf.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения, Мн., БГУ, 2006 – 430 с.