ISSN 0002-3566 (print)
УДК 621.039.577-182.3

Поступила в редакцию 16.03.2017
Received 16.03.2017

А. П. Ахрамович[1], И. В. Войтов[2], В. П. Колос[1]

[1]Институт энергетики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[2]Белорусский государственный технологический университет, Минск, Беларусь

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СКОРОСТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ТЕПЛОНОСИТЕЛЯ В СЛОЕ МИКРОТВЭЛОВ

Показано, что при математическом моделировании гидродинамики топливного слоя с микротвэлами до сих пор не удалось удовлетворительно описать вязкие и инерционные эффекты. Уравнения фильтрации, получаемые путем усреднения уравнения движения вязкой жидкости по элементарному объему и содержащие так называемый вязкий член, справедливы лишь для бесконечной пористой среды. Использование этих уравнений и условий прилипания на непроницаемых торцах слоя приводит к результатам, зачастую не совпадающим с результатами экспериментов.

В основу построенной модели положены законы движения идеальной жидкости с объемной силой межфазного взаимодействия, которая представлена в виде дивергенции тензора с потенциальной и вихревой составляющими. При этом потенциальная составляющая отражает вклад сил сопротивления в нормальное напряжение (давление) теплоносителя и является «скрытым» параметром – причиной разброса экспериментальных данных.

Изучена с использованием разработанной модели динамика потока теплоносителя при входе и выходе его из топливного слоя и определены условия сопряжения для вектора скорости и давления. Эти условия обеспечивают сшивку на проницаемых границах слоя уравнений фильтрации и динамики вязкой жидкости.

Установлено, что вследствие доминирования сил инерции на входе и выходе из слоя поток преломляется: при входе разворачивается в сторону нормали к границе слоя, а при выходе – в сторону касательной. Учет этого эффекта позволит оптимизировать контуры топливного слоя с точки зрения теплофизики и нейтронной физики.

Ключевые слова: математическая модель, топливный слой, микротвэлы, фильтрация, тензор межфазного взаимодействия, условия сопряжения, разрыв функции Бернулли, инерционные и вязкие эффекты

A. P. Akhramovich[1], I. V. Voitov[2], V. P. Kolos[1]

[1]Institute of Power Engineering of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[2]Belarusian State Technological University, Minsk, Belarus

DYNAMIC MODEL OF RAPID COOLANT FILTRATION THROUGH A BED OF MICRO FUEL PARTICLES

It is shown that mathematical hydrodynamic models of micro fuel beds can't describe viscous and inertial effects truly. The filtration equations obtained by averaging the equation of viscous fluid motion over an elementary volume and containing the so-called viscous term are valid only for the infinite porous medium. Using these equations and no-slip condition on the impermeable ends of bed leads to discrepancy between estimated and observed data.

The constructed rapid coolant filtration model is based on the ideal fluid motion laws with a volume interphase interaction force, which is represented as a divergence of a tensor with potential and vortex components. In this case, the potential component reflects the contribution of the resistance forces to the normal pressure of the coolant and is a "hidden" parameter – the reason for experimental data spread.

Using the model, dynamics of the coolant flow at the inlet and outlet of the fuel bed is investigated and the matching conditions for velocity and pressure vector are determined. These conditions make it possible to relate the filtration equation and viscous fluid motion equation on the bed permeable boundaries.

Due to dominance of inertia forces at entrance and exit of the bed, the stream is refracted: at the inlet towards the normal to the bed boundary, and at the exit towards the tangent. Accounting for this effect the optimize fuel bed contours in terms of thermal physics and neutron physics will be obtained.

Keywords: mathematical model, fuel bed, micro fuel particles, filtration, interface interaction tensor, matching conditions, Bernoulli's function breaking, inertial and viscous effects

Введение. Разработка и успешные испытания микротвэлов повышенной стойкости (с многослойной оболочкой) явились значимым вкладом в создание безопасных ядерных реакторов [1, 2]. К тому же сыпучесть и огромная поверхность теплосъема такого топлива позволят в перспективе конструировать реакторы с удельной мощностью на порядок выше достигнутой в настоящее время. Колоссальный качественный скачок в области реакторостроения (особенно специального, где стремятся максимально снизить массогабаритные характеристики установок), несомненно, приведет к зарождению прогрессивных научных направлений, уникальных прорывных технологий и технических решений и в других отраслях деятельности.

Создание реакторов высокой удельной мощности является сложной многоплановой задачей. Научный аспект ее решения требует значительного повышения степени адекватности моделирования реальных процессов на экспериментальных стендах и точности проводимых измерений, широкомасштабной визуализации физических явлений в активной зоне, безукоризненных теоретических схем и методик обработки опытных данных, а также разработки алгоритмов сопряженного расчета граничных условий и полей нейтронно-физических и термогидродинамических параметров в элементах реактора, особенно в топливном слое из микротвэлов. (Слой представляет собой плотную монодисперсную зернистую засыпку с внутренним источником тепла большой мощности [3].)

Исследованию теплообмена и движения жидкости в слое сыпучего материала в силу широты его практического применения посвящено огромное количество работ. Есть основополагающие публикации, авторы которых придерживаются интегральной формы описания процессов переноса; в том числе и монографии советских ученых [4–9]. Существует серия статей, в которых детализированы закономерности переноса в засыпке с помощью априорно задаваемых теоретических схем (отметим часть из них [10–15]). Накоплен обширный экспериментальный материал. Однако до сих пор не удалось удовлетворительно описать вязкие и инерционные эффекты вблизи границы слоя и решить проблему корректного учета их при формулировке граничных условий.

В 1970-е годы, казалось, все теоретические споры, должно ли уравнение фильтрации содержать вязкий член или нет, закончены. Американские ученые В. Грей и К. О'Нейл, используя транспортную теорему С. Уитакера, получили усредненное уравнение движения вязкой жидкости в слое без какой-либо идеализации структуры пористой среды и ее взаимодействия с потоком [16]. В усредненном уравнении присутствовал вязкий член $\mu\nabla^2\vec{V}$.

Приняв за основу этот результат, в 1977–1978 гг. исследователи Института атомной энергии им. И. В. Курчатова построили двумерную математическую модель теплосъема в сборке с продольно-поперечной фильтрацией теплоносителя сквозь слой микротвэлов [17, 18]. Модель содержала уравнения движения турбулентного потока теплоносителя в распределительном и отводном каналах, уравнение фильтрации с инерционным и вязким членами, три уравнения энергии (для каналов и слоя), отражающие конвективный и молекулярный перенос тепла, уравнения неразрывности и состояния. На торцах топливного слоя, огражденного непроницаемыми стенками, было принято условие прилипания. На боковых проницаемых поверхностях слоя, ограниченного коаксиальными цилиндрическими решетками, касательная составляющая вектора усредненной скорости приравнивалась к нулю. Подобные модели получили широкое распространение в 1980–1990-е годы, особенно при описании процессов в аппаратах химической технологии.

Распределение потока теплоносителя в слое микротвэлов, полученное с помощью двухмерных моделей, зачастую не совпадало с результатами опытов [19–22]. Несостоятельность этих моделей стала очевидной после экспериментального обнаружения вблизи торцов слоя отрывных и застойных зон, лимитирующих интенсивность теплосъема; указанные модели их не описывали. К тому же прилипание на торцах не согласовывалось с экспериментально подтвержденным условием ($V_n|_\Sigma \equiv 0$) отсутствия таких гидродинамических образований [19, 20].

Однако и сейчас многие исследователи придерживаются «вязкой» модели течения теплоносителя в слоях микротвэлов с условиями прилипания на непроницаемых поверхностях [23–25]. Одни вводят так называемую эффективную вязкость для учета турбулентности, связанной с вихреобразованием при отрыве струй от зерен засыпки, другие используют для решения своих задач такие программные комплексы, как ANSYS, FlUENT, FEMLAB, в которых априори заложены уравнения Навье – Стокса с вязкими членами.

Проведенный нами детальный анализ показал, что уравнения фильтрации, получаемые путем усреднения уравнения движения вязкой жидкости по элементарному объему (как, например, в [16]), действительно содержат вязкий член, но они справедливы лишь для бесконечной пористой среды. Только на бесконечно удаленной границе слоя истинная скорость и усредненная оказываются равными между собой (их значение – нуль), и для последней становится справедливо условие прилипания.

Следует отметить, что при формулировке граничных условий для многомерных моделей совершалась одна и та же логическая ошибка. Считалось, что поскольку уравнение движения вязкой жидкости имеет слагаемое $\mu\nabla^2\vec{V}$ и для такого течения на смачиваемой поверхности справедливо условие прилипания, то и для уравнения фильтрации с вязким членом это условие справедливо на торцах слоя. При этом не принималось во внимание, что в первом случае бралась истинная скорость, во втором – усредненная.

В [4] показано, что условие прилипания для усредненного движения в слое конечного размера некорректно и вязким членом необходимо пренебречь для сохранения логической стройности теоретических выкладок. К тому же флуктуация пористости вблизи ограждающих конструкций слоя (в силу грубости модели зернистого слоя как статистического ансамбля по сравнению с моделью сплошной среды) оказывает значительное влияние на фильтрацию в целом. Поэтому описание процессов в плотном слое в принципе не может быть точным, и учет эффектов вязкости (обусловленных молекулярным переносом импульса) с помощью слагаемого $\mu\nabla^2\vec{V}$ и условия прилипания является превышением разрешенной статистической точности. С этой позиции такое описание должно быть отвергнуто.

Рассматривая фильтрацию как внешнюю гидродинамическую задачу, была построена модель «квазиидеальная жидкость» [4]. Уже по одному названию можно понять, что уравнение фильтрации, как и дифференциальное уравнение движения идеальной жидкости первого порядка, не содержит вязкого члена. С помощью модели квазиидеальной жидкости впервые были определены условия сопряжения на границах раздела пористых сред и пористая среда – идеальная жидкость. Развивая идеи, использованные при создании модели квазиидеальной жидкости, построим динамическую модель скоростной фильтрации теплоносителя в слое микротвэлов (в тепловыделяющей зернистой засыпке), с помощью которой найдем «сшивку» на границе слоя уравнений фильтрации и движения вязкой жидкости.

Построение модели. Тензор межфазного взаимодействия. Поставленная задача отнюдь не тривиальна, она имеет свои особенности. При ее решении придется корректно связать между собой дифференциальные уравнения различного порядка (уравнение фильтрации первого порядка, уравнение движения вязкой жидкости – второго), с различной разрешенной описательной точностью (о ней было сказано выше), с различным объемом информационного содержания, заложенного в подобных между собой величинах (с одной стороны границы усредненные параметры, со второй – истинные).

В реальных ядерных аппаратах микротвэлы намного меньше характерных размеров топливного слоя, а следовательно, и характерных размеров течения. При их высокой концентрации величина различия в скорости движения слоев теплоносителя вблизи микротвэла существенно превосходит осредненный градиент скорости. Особенно это проявляется при больших скоростях фильтрации. Поэтому при моделировании примем, что течение теплоносителя в топливном слое энергонапряженного реактора, работающего в штатном режиме, подчиняется законам движения идеальной жидкости с объемной силой межфазного взаимодействия $\vec{S}$. В таком случае исходная система уравнений фильтрации для поставленной задачи будет иметь вид:

$$\rho\varepsilon\frac{DV_j}{dt}=-\frac{\partial P}{\partial x_j}-S_j+\varepsilon\rho g_j; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\varepsilon V_j)=0, \qquad (2)$$

где P – статическое давление, $\vec{V}$ – средняя расходная скорость, g_j – ускорение внешних массовых сил, ε – пористость топливного слоя, ρ – плотность теплоносителя, x_j – текущие декартовы координаты, t – время.

Силу взаимодействия потока с микротвэлами $\vec{S}$ определим в рамках внешней гидродинамической модели фильтрации

$$\vec{S} = \eta\vec{s};\ \eta = \frac{6(1-\varepsilon)}{\pi d^3}, \tag{3}$$

представив силу воздействия потока на отдельный микротвэл в виде суммы силы гидравлического сопротивления отдельного микротвэла, архимедовой силы выталкивания и силы присоединенных масс $\vec{f}$

$$\vec{s} = \frac{\pi d^2 \rho \varepsilon^2}{8\psi^2}|\vec{V}|\vec{V} - \frac{\pi d^3}{6}\nabla P + \vec{f};\ \psi = 0,625\varepsilon^{1,4}, \tag{4}$$

где d – диаметр микротвэла, η – число микротвэлов в единице объема, ψ – минимальное относительное проходное сечение.

Теоретический учет воздействия на фильтрацию силы присоединенных масс сложен и трудоемок. При моделировании силу $\vec{f}$ либо опускают в результате ее сравнительной малости, либо учитывают, вводя в первое слагаемое выражения (4) численный множитель, значение которого определяется из эксперимента. И в том и другом случае уравнение (1) с учетом (3), (4) будет иметь вид

$$\rho\frac{DV_j}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_j} - k\rho|\vec{V}|V_j + \rho g_j. \tag{5}$$

При определении объемной силы сопротивления на практике используют формулу $k = 1,7(1-\varepsilon)/\varepsilon d$.

Сравнивая выражение (5) с уравнениями движения квазиидеальной и вязкой жидкостей, отметим, что во всех этих уравнениях присутствует сила сопротивления (трения), которая из физических соображений конечна и направлена противоположно течению. Существенное же отличие уравнения (5) заключается в том, что проекция силы сопротивления на любое направление зависит не только от проекции скорости на данное направление, но и от модуля самой скорости. Причем слагаемое, учитывающее объемную силу сопротивления в уравнении (5), усиливает его нелинейность, которая сохраняется даже в случае пренебрежения конвективным ускорением.

Такие физико-математические особенности требуют при построении модели единой формы описания движения теплоносителя по обе стороны границы топливного слоя. В связи с этим уравнению (5) и уравнению движения вязкой жидкости придадим вид общего уравнения динамики сплошной среды:

$$\rho\frac{DV_j}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial\sigma_{jk}}{\partial x_k} + \rho g_j, \tag{6}$$

в котором при фильтрации $\sigma_{jk} = G_{jk}$, при движении вязкой жидкости $\varepsilon = 1$, $\sigma_{jk} = d_{jk}$, где d_{jk} – девиатор напряжений.

Определим компоненты тензора G_{jk} и установим его физический смысл. Неинвариантность уравнения (5) относительно любой группы движений не позволяет считать тензор G_{jk} характеристикой напряженного состояния в модели скоростной фильтрации, поэтому логично будет назвать его тензором межфазного взаимодействия, несмотря на кажущуюся аналогию с тензором напряжений в сплошной среде.

Как известно, естественным требованием, накладываемым на поле скоростей, является их исчезновение на бесконечности. В силу того, что поле сопротивления порождено движением жидкости, данное требование распространяется и на него, что позволяет, согласно теореме Стокса, представить тензор G_{jk} в виде потенциальной и вихревой составляющих:

$$G_{jk} = -P^*\delta_{jk} + \Omega_{jk};\ \Omega_{jk} = -\Omega_{kj}. \tag{7}$$

P^* – скалярный, $\frac{1}{2}\varepsilon_{jik}\Omega_{jk}$ – векторный потенциалы силы сопротивления, δ_{jk} – символ Кронекера, ε_{jik} – единичный псевдотензор.

Введенный несимметричный тензор G_{jk} имеет четыре степени свободы и поэтому не может быть однозначно определен своей дивергенцией. В задачах механики жидкости обычно используют феноменологический подход – постулируют уравнение состояния, связывающее напряжения с соответствующими кинетическими переменными. Например, для ньютоновской жидкости принимают, что девиатор напряжений линейно связан с дифференциальным тензором поля скоростей. Для рассматриваемого случая такой подход неприемлем, поскольку, с одной стороны, уравнение (5) уже сформулировано, а с другой – G_{jk} не является тензором напряжений, хотя по определению он должен быть равен нулю везде, где равна нулю сила сопротивления (скорость фильтрации):

$$(V_j = 0) \models (G_{jk} = 0). \tag{8}$$

Если для однозначного определения G_{jk} потребовать, чтобы потенциалы на бесконечности были равны нулю и выполнялось условие соленоидальности, то окажется, что условие (8) будет справедливо лишь для течения через бесконечную засыпку. Поэтому в случае топливного слоя, имеющего ограниченные размеры, учтем, что дивергенция и вихрь силы сопротивления определены во всех его внутренних точках, нормальная компонента фиксирована на границе, и для поиска G_{jk} используем теоремы для однозначного нахождения тензорного поля в конечном объеме [23]. В результате получим уравнения:

$$\nabla^2 P^* = \varepsilon\rho\vec{V}\nabla\left(\frac{k}{\varepsilon\,|\vec{V}\,|}\right) - k\,|\vec{V}\,|\frac{\partial\rho}{\partial t}; \tag{9}$$

$$\nabla^2\Omega_{jk} = k\rho\,|\vec{V}\,|\,(V_{j,k} - V_{k,j}) + V_j\frac{\partial}{\partial x_k}(k\rho\,|\vec{V}\,|) - V_k\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho k\,|\vec{V}\,|), \tag{10}$$

и граничные условия:

$$\frac{\partial P^*}{\partial n} = k\rho\,|\vec{V}\,|\,V_n; \tag{11}$$

$$\varepsilon_{ilk} n_l\left(k\rho\,|\vec{V}\,|\,V_k + \frac{\partial\Omega_{jk}}{\partial x_j}\right) = 0, \tag{12}$$

однозначно описывающие скалярный и векторный потенциалы силы сопротивления ($\vec{n}$ – нормаль к границе топливного слоя). Из выражений (9)–(12) легко получить условия подобия между потенциалами силы сопротивления и соответствующими потенциалами массовой скорости фильтрации ($\varepsilon\rho\vec{V}$). Эти условия определяют область значений параметров потока, при которых картины скоростной фильтрации и малоинтенсивного движения жидкости в пористых средах схожи.

Как известно, скалярная величина P (статическое давление), вводимая в механике как изотропная часть тензора напряжений, не является одним из параметров состояния, используемых в равновесной термодинамике. Здесь давление рассматривают как меру локального сжатия. При определении тензора вязких напряжений жидкости предполагают, что сумма его диагональных элементов равна нулю, то есть он не дает добавки к среднему нормальному напряжению. При скоростной фильтрации величина P^* как бы отражает вклад сил сопротивления в нормальное напряжение. В связи с этим обратим внимание на определение закона падения давления в неподвижных зернистых слоях в [7–9, 27–29]. Имеющийся разброс экспериментальных данных говорит об отсутствии единой, всеми признанной методики обработки полученных результатов, а также, возможно, и о наличии скрытых параметров, которые принимают различные значения в зависимости от экспериментальной установки, способов и методов измерения величин. Из сказанного выше и выражений (7), (9)–(12) следует, что величина P^* может являться таким скрытым параметром, способным вносить несогласованность в результаты при обработке экспериментальных данных.

Выясним физический смысл тензора Ω_{jk}. Его антисимметричность обусловлена неинвариантностью уравнения (5) относительно вращения, которое свидетельствует о наличии в среде распределенных пар сил. Продолжая эту логическую цепочку, запишем формулу для вращательного момента, действующего на объем W,

$$M_{jk} = \iiint_W \left[\frac{\partial}{\partial x_l}(G_{jl} x_k) - G_{jl}\delta_{lk} - \frac{\partial}{\partial x_l}(G_{kl} x_j) + G_{kl}\delta_{lj} \right] \delta W. \tag{13}$$

Подставив в (13) выражение (7), получим уравнение

$$M_{jk} = \oiint_\Sigma (G_{jl} x_k - G_{kl} x_l)\delta\Sigma_l + 2\iiint_W \Omega_{jk}\delta W, \tag{14}$$

из которого следует, что при бесконечном объеме W величина $2\Omega_{jk}$ является плотностью вращательного момента сил сопротивления.

Диссипация энергии. Условия сопряжения. Исходя из обычной формулировки динамики материальной среды, запишем интегральное уравнение изменения кинетической энергии потока теплоносителя при фильтрации в топливном слое

$$\frac{D}{dt}\iiint_W \frac{\rho |\vec{V}|^2}{2}\delta W = \iiint_W \rho g_j V_j \delta W - \oiint_\Sigma P\delta_{jk} V_j \delta\Sigma_k + \iiint_W N\delta W, \tag{15}$$

где N – плотность распределения мощности внутренних сил. Величина G_{jk} не вошла в выражение (15), поскольку не является тензором напряжений. Используя теорему Гаусса, освободимся в уравнении (15) от интегралов и запишем его в дифференциальной форме:

$$\rho \frac{D}{dt}\frac{\vec{V}^2}{2} = \rho g_j V_j - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(P\delta_{jk} V_j\right) + N, \tag{16}$$

приняв во внимание, что $D\left(\rho\delta W\right)/dt = 0$.

Векторное уравнение (6) скалярно умножим на $\vec{V}$, из полученного результата вычтем (16) и остаток разрешим относительно N. В итоге будем иметь:

$$N = PV_{j,j} + V_j \frac{\partial}{\partial x_k} G_{jk}. \tag{17}$$

Исключив из выражения (17) слагаемое, характеризующее скорость объемного расширения, и поменяв знак у оставшейся величины, получим формулу для определения скорости диссипации механической энергии в единице объема при фильтрации

$$\Phi = -V_j \frac{\partial}{\partial x_k} G_{jk} = V_j \frac{\partial}{\partial x_k} P^* \delta_{jk} - V_j \frac{\partial}{\partial x_k}\Omega_{jk} \triangleq -V_j \frac{\partial}{\partial x_k}\sigma_{jk}. \tag{18}$$

Для вязкой жидкости величина Φ описывается следующим выражением [30]:

$$\Phi = -d_{jk}\frac{\partial}{\partial x_k} V_j \triangleq -\sigma_{jk}\frac{\partial}{\partial x_k} V_j. \tag{19}$$

При таком определении диссипации различию, состоящему в том, что Ω_{jk} антисимметричный тензор, а d_{jk} – симметричный, соответствует перестановка параметров в операторах правых частей выражений (18), (19). Это позволяет движение теплоносителя по обе стороны границы топливного слоя описать системой уравнений с едиными ограничениями гидродинамических параметров потока и на их основе определить условия сопряжения на границе.

Динамика потока теплоносителя при входе в топливный слой и выходе из него существенно различны. Так, на выходе вблизи границы слоя происходят дополнительные нерегулярное вихревое движение и связанный с ним процесс неустановившегося перемешивания жидкости (газа), которые не имеют места при обтекании микротвэлов вблизи входа потока. Поэтому для описания фильтрации на выходе из слоя выберем интегральную форму записи уравнений количества движения и неразрывности:

$$\oiint_{\Sigma} \varepsilon(\rho V_j V_k + P\delta_{jk})\delta\Sigma_k - \iiint_W P\delta_{jk}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_k}\delta W + \iiint_W \left(V_j\frac{\partial(\varepsilon\rho)}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial\sigma_{jk}}{\partial x_k} - \varepsilon\rho g_j\right)\delta W = 0; \tag{20}$$

$$\iiint_W \frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)\delta W + \oiint_{\Sigma}\varepsilon\rho V_j\delta\Sigma_j = 0. \tag{21}$$

Основное достоинство этих равенств состоит в том, что отдельные члены в них записаны в виде интегралов по поверхности области W, и подробности изменения параметров течения внутри W не имеют значения, сами же подынтегральные функции могут содержать конечное число разрывов.

Границу топливного слоя, обладающую свойством регулярной поверхности, представим как некоторую переходную область W, толщина которой устремлена к нулю. При таком определении переходной области течение в ней будет иметь лишь естественные ограничения: конечность скорости, вихря, величины давления, диссипации (силы сопротивления).

Условимся индексом 1 отмечать параметры течения со стороны набегающего на границу потока, 2 – с другой ее стороны. На границе введем тройку базисных ортогональных векторов $(\vec{n}; \vec{\tau}; \vec{\theta})$, где $\vec{n}$ – единичный вектор, лежащий на нормали к границе слоя и направленный в сторону движения потока; $\vec{\tau}$ – единичный вектор, находящийся в плоскости, касательной к границе и совпадающий по направлению с касательной составляющей вектора скорости; $\vec{\theta} = \vec{n} \times \vec{\tau}$.

Пористость имеет смысл среднего относительного проходного сечения или, иными словами, средней относительной площади поперечного сечения струй фильтрующегося потока. На формирование этих струй, на их осредненные параметры в выделенном сечении слоя доминирующее влияние оказывает структура сравнительно тонкой части засыпки, непосредственно прилегающей к сечению со стороны набегающего потока. Поэтому на границе слоя, где существует некоторая неопределенность значения ε, примем

$$\varepsilon = \varepsilon|_{n=-0}.$$

В предельном случае, когда толщина области W стремится к нулю, из интегрального уравнения неразрывности (21) получим следующее условие сопряжения:

$$\varepsilon|_{n=-0}\,\rho_1 V_{1n} = \rho_2 V_{2n}. \tag{22}$$

С помощью единичной функции $U_-(\cdot)$ пористость внутри переходной области опишем ступенчатым выражением

$$\varepsilon = \varepsilon|_{n=-0} + (1 - \varepsilon|_{n=-0})U_-(n). \tag{23}$$

После подстановки (23) в подынтегральную функцию второго интеграла равенства (20) получим

$$\oiint_{\Sigma}\varepsilon(\rho V_j V_k + P\delta_{jk})\delta\Sigma_k - (1-\varepsilon|_{n=-0})\Sigma_n\delta_{nj}\int_{-a}^{a}\delta_-(n)P(n)\delta n + \iiint_W\left(V_j\frac{\partial(\varepsilon\rho)}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial\sigma_{jk}}{\partial x_k} - \varepsilon\rho g_j\right)\delta W = 0, \tag{24}$$

где a – половина толщины переходной области, $\delta_-(\cdot)$ – асимметричная функция Дирака.

Уравнение (24) спроектируем на оси n, τ, θ. Затем, перейдя к предельному случаю ($a \to 0$) и воспользовавшись соотношением (22), установим остальные условия сопряжения:

$$P_1 - P_2 = \rho_2 V_{2n}(V_{2n} - V_{1n}); \tag{25}$$

$$V_{1\tau} = V_{2\tau};\ V_{1\theta} = V_{2\theta} \triangleq 0. \tag{26}$$

Визуализация движения теплоносителя вблизи входа в топливный слой свидетельствует о плавном характере течения в этой области [22]. Данное обстоятельство вынуждает отказаться от интегральных уравнений и связь между гидродинамическими параметрами потока по обе стороны границы слоя определить с помощью дифференциальных уравнений (2), (6), предполагающих постепенное изменение в переходной области как характеристик потока, так и самой геометрии гидравлического тракта.

Из уравнения неразрывности (2) обычным способом получим условие сопряжения для нормальной составляющей вектора скорости, схожее с выражением (22),

$$\rho_1 V_{1n} = \varepsilon|_{n=+0}\, \rho_2 V_{2n}. \tag{27}$$

Уравнение движения (6) для переходной области запишем в инвариантной форме Громека – Ламба:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla|\vec{V}|^2 + \vec{\omega}\times\vec{V} + \frac{1}{\rho}\nabla P - \frac{1}{\rho}\mathrm{Div}\,\sigma - \vec{g} = 0;$$
$$\vec{\omega} \triangleq \mathrm{rot}\vec{V}. \tag{28}$$

Умножив выражение (28) на единичный вектор $\vec{V}/|\vec{V}|$, получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial l}|\vec{V}|^2 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial l} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}\left(\frac{\mathrm{Div}\sigma}{\rho} + \vec{g}\right) - \frac{\partial|\vec{V}|}{\partial t}, \tag{29}$$

где ∂l – дифференциал траектории движения теплоносителя в переходной области.

При плавном изменении параметров потока в переходной области, которой моделируется граница слоя и толщина которой стремится к нулю, процесс пересечения границы идет с постоянной теплоемкостью, то есть является политропическим. В этом случае из (29) при предельном переходе $a \to 0$ найдем условие сопряжения для давления теплоносителя:

$$\left(\frac{P}{\rho}\right)_1 - \left(\frac{P}{\rho}\right)_2 = \frac{1-\gamma}{2\gamma}\left(|\vec{V}_1|^2 - |\vec{V}_2|^2\right), \tag{30}$$

где γ – показатель политропы.

При теплосъеме несжимаемой жидкостью на основании (29) получим условие сопряжения для функции Бернулли $H = P/\rho + |\vec{V}|^2/2$:

$$H_1 - H_2 = 0. \tag{31}$$

Что же касается условий сопряжения для V_τ и V_θ, то они идентичны условиям на выходе теплоносителя из топливного слоя (26). Действительно, наличие скачка значений касательных составляющих скорости на поверхностях переходной области при стремлении к нулю ее толщины привело бы к сингулярности величины вихря на границе слоя и, соответственно, к бесконечности третьего слагаемого в уравнении (28). Поскольку остальные слагаемые в (28) конечны, то справедливость этого уравнения позволяет считать условия сопряжения для компонент скорости V_τ и V_θ на входе и выходе потока из топливного слоя одинаковыми.

Отметим, что при фильтрации несжимаемой жидкости на выходе из топливного слоя функция Бернулли терпит разрыв:

$$H_1 - H_2 = \frac{|\vec{V}_1|^2}{2} - \frac{|\vec{V}_2|^2}{2} + V_{2n}^2 - V_{2n}V_{1n}. \tag{32}$$

Условие (32) получено в результате замены переменной P на H в выражении (25).

Поскольку функция Бернулли представляет собой полную механическую энергию, то можно сделать вывод о том, что возникшее в результате скачкообразного изменения геометрии гидравлического тракта дополнительное вихреобразование приводит к диссипации механической энергии за счет внутреннего трения в жидкости. Механизм этой диссипации идентичен механизму необратимых потерь энергии при течении в канале с внезапным расширением проходного сечения [30].

Заключение. Построенный тензор межфазного взаимодействия является с физической и математической точек зрения псевдоаналогом тензора напряжений в жидкости. Введение его в математическую структуру модели скоростной фильтрации придало последней форму, схожую с формой уравнений динамики вязкой жидкости. Это позволило определить условия сопряжения гидродинамических параметров потока на границе топливного слоя и «сшить» уравнения фильтрации и движения вязкой жидкости. Данная сшивка открывает возможность построения качественно новых многомерных моделей термогидродинамики сборок с микротвэлами – моделей с высокой степенью адекватности.

Очень важно, что отмеченная выше структурная схожесть уравнений допускает формальное распространение уравнений динамики сплошной среды на весь гидравлический тракт тепловыделяющей сборки, включая топливный слой, распределительный и отводной каналы. В этом случае для решения задач по термогидродинамике сборок с микротвэлами можно использовать хорошо развитый математический аппарат, разработанный для широкого спектра задач механики жидкости и газа.

Полученные условия сопряжения требуют коррективы моделирования теплосъема в сборках с микротвэлами. Члены, описывающие кинетическую энергию потока с обеих сторон границы топливного слоя, должны иметь одинаковый порядок малости, что обеспечит единственность решения термогидродинамических задач, в том числе и связанных с исследованиями устойчивости фильтрации в ограниченном слое при различного рода возмущениях объемного тепловыделения. Условия сопряжения позволяют также описать поведение вихря на границе слоя и приступить к моделированию турбулентности на проницаемых стенках распределительного и отводного каналов с учетом эффекта вихреобразования.

Как следует из результатов выкладок, силы инерции доминируют на входе и выходе потока из слоя, в результате чего поток теплоносителя на проницаемой границе топливного слоя преломляется. При входе за счет ускорения поток разворачивается в сторону нормали к границе слоя, при выходе – в сторону касательной. Учет этого эффекта при проектировании тепловыделяющей сборки с микротвэлами позволит получить контуры топливного слоя, выгодные с точки зрения как теплофизики, так и нейтронной физики.

Список использованных источников

1. Пономарев-Степной, Н. Микротвэлами против ядерных катастроф и терроризма [Электронный ресурс] / Н. Пономарев-Степной, Е. Гришанин, Н. Кухаркин // Промышл. ведомости. – 2001. – № 18 (29). – Режим доступа: http://www.promved.ru/oct_2001_04.shtml. – Дата доступа: 18.04.2016.

2. Гришанин, Е. И. Антитеррористическое топливо для АЭС / Е. И. Гришанин // Атом. стратегия. – 2007. – № 29. – С. 15.

3. Ахрамович, А. П. О работоспособности реактора с микротвэлами. Анализ организации теплосъема в активных зонах / А. П. Ахрамович, И. В. Войтов, В. П. Колос // Изв. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2016. – № 3. – С. 77–86.

4. Гольдштик, М. А. Процессы переноса в зернистом слое / М. А. Гольдштик. – Новосибирск: Изд-во Ин-та теплофизики СО РАН, 2005. – 358 с.

5. Жаворонков, Н. М. Гидравлические основы скрубберного процесса и теплопередача в скрубберах / Н. М. Жаворонков. – М.: Совет. наука, 1944. – 224 с.

6. Лейбензон, Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде / Л. С. Лейбензон. – М.: Гостехиздат, 1947. – 244 с.

7. Аэров, М. Э. Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим слоем / М. Э. Аэров, О. М. Тодес. – Л.: Химия, 1968. – 510 с.

8. Аэров, М. Э. Аппараты со стационарным зернистым слоем / М. Э. Аэров, О. М. Тодес, Д. А. Наринский. – Л.: Химия, 1979. – 176 с.

9. Богоявленский, Р. Г. Гидродинамика и теплообмен в высокотемпературных ядерных реакторах с шаровыми твэлами / Р. Г. Богоявленский. – М.: Атомиздат, 1978. – 112 с.

10. Бердичевский, В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды / В. Л. Бердичевский. – М.: Наука, 1983. – 482 с.

11. Нигматуллин, Р. И. Основы механики гетерогенных сред / Р. И. Нигматуллин. – М.: Наука, 1978. – 336 с.

12. Буевич, Ю. А. О переносе тепла и массы в дисперсной среде / Ю. А. Буевич, Ю. А. Корнеев // Журн. приклад. механики и техн. физики. – 1974. – № 4. – С. 79–82.

13. Бородуля, В. А. О каркасной проводимости зернистых систем / В. А. Бородуля, Ю. А. Буевич // Инж.-физ. журн. – 1977. – Т. 32, № 2. – С. 275–279.

14. Буевич, Ю. А. Фильтрация жидкости в среде со случайной пористостью / Ю. А. Буевич, А. И. Леонов // Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа. – 1967. – № 6. – С. 167–171.

15. Буевич, Ю. А. Континуальная механика монодисперсных суспензий. Уравнения сохранения / Ю. А. Буевич, И. Н. Щелчкова. – Новосибирск: Ин-т проблем механики АН СССР, 1976. – 57 с. – (Препринт / Ин-т проблем механики АН СССР ; № 72).

16. Gray, W. G. On the general equations for flow in porous media and their reduction to Darcy's law / W. G. Gray, K. O'Neill // Water Resources Research. – 1976. – Vol. 12, iss. 2. – P. 148–154.

17. Сегаль, М. Д. Постановка задачи расчета полей скорости, температуры и давления в гидравлическом тракте реактора / М. Д. Сегаль, Л. П. Смирнов. – М.: Ин-т атом. энергии, 1977. – 8 с. – (Препринт / Ин-т атом. энергии ; № 2924).

18. Смирнов, Л. П. Математическая модель расчета полей скорости, температуры и давления в гидравлическом тракте реактора с пористой энерговыделяющей средой / Л. П. Смирнов, М. Д. Сегаль. – М.: Ин-т атом. энергии, 1978. – 8 с. – (Препринт / Ин-т атом. энергии ; № 3049).

19. Колос, В. П. Организация безотрывного продольно-поперечного течения жидкости в кольцевом плотном слое / В. П. Колос, В. Н. Сорокин // Докл. АН БССР. – 1986. – Т. 30, № 1. – С. 51–54.

20. Колос, В. П. Двумерная модель безотрывного продольно-поперечного движения жидкости в кольцевом тепловыделяющем слое / В. П. Колос, В. Н. Сорокин // Изв. АН БССР. Сер. Физ.-энерг. наук. – 1986. – № 4. – С. 36–44.

21. Ахрамович, А. П. Продольно-поперечная фильтрация жидкости в кольцевом тепловыделяющем слое / А. П. Ахрамович, В. П. Колос, В. Н. Сорокин // Инж.-физ. журн. – 1987. – Т. 52, № 5. – С. 756–765.

22. Деменок, С. Л. Визуализация течения жидкости в каналах / С. Л. Деменок, В. В. Медведев, С. М. Сивуха. – СПб.: Страта, 2014. – 134 с.

23. Комов, А. Т. Численное моделирование процессов гидродинамики и теплообмена в тепловыделяющей сборке с микротвэлами / А. Т. Комов, Е. В. Бочарова, Ю. Н. Токарев // Вестн. Моск. энергет. ин-та. – 2009. – № 2. – С. 43–47.

24. Меламед, Л. Э. FEMLAB и ANSYS в расчетах гидродинамики атомных реакторов, или Научно-практический рассказ о том, как приспособить «тяжелые» пакеты для решения задач одного тяжелого класса / Л. Э. Меламед // Exponenta Pro. – 2004. – № 2 (6). – С. 18–21.

25. Сморчков, Ю. В. Численное моделирование гидродинамики и теплообмена в шаровых засыпках / Ю. В. Сморчков, А. В. Дедов // Соврем. наука: исследования, идеи, результаты, технологии. – 2013. –№ 1 (12). – С. 62–67.

26. Схоутен, Я. А. Тензорный анализ для физиков / Я. А. Схоутен. – М.: Наука, 1965. – 456 с.

27. Кутателадзе, С. С. Справочник по теплопередаче / С. С. Кутателадзе, В. М. Боришанский. – М. ; Л.: Госэнергоиздат, 1959. – 414 с.

28. Аверкиев, М. В. Исследование теплообмена и гидравлического сопротивления при течении воздуха в трубах с шаровой насадкой / М. В. Аверкиев, Е. Ф. Ратников // Хим. и нефтехим. машиностроение. – 1975. – № 10. – С. 24–25.

29. Чечеткин, А. В. Высокотемпературные теплоносителя / А. В. Чечеткин. – М.: Энергия, 1971. – 496 с.

30. Бэтчелор, Дж. Введение в динамику жидкости / Дж. Бэтчелор. – М.: Мир, 1973. – 760 с.

References

1. Ponomarev-Stepnoy N., Grishanin E., Kuharkin N. Micro fuel particles against nuclear disasters and terrorism. *Promyshlennye vedomosti* [Industry news], 2001, no. 18 (29). Available at http://www.promved.ru/oct_2001_04.shtml. (accessed 18 April 2016) (in Russian).

2. Grishanin E. Antiterrorist fuel for nuclear power plants. *Atomnaya strategiya* [Nuclear strategy], 2007, no. 29, p. 15 (in Russian).

3. Akhramovich A. P., Voytov I. V., Kolos V. P On the performance of the reactor with micro fuel. Heat removal organization analysis in the active zones. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnych navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series], 2016, no. 3, pp. 77–86 (in Russian).

4. Goldstick M. A *Transfer processes in a granular layer.* Novosibirsk, Publishing house of the Institute of Thermophysics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2005. 358 p. (in Russian).

5. Zhavoronkov N. M. *Hydraulic principles of the scrubbing process and heat transfer in scrubbers.* Moscow, Sovetskaya nauka Publ., 1944. 224 p. (in Russian).

6. Leybenzon L. S. *The movement of natural liquids and gases in a porous medium.* Moscow, Gostehizdat Publ., 1947. 244 p. (in Russian).

7. Aerov M. E., Todes O. M. *Hydraulic and thermal fundamentals of the operation of apparatuses with stationary and boiling beds.* Leningrad, Khimiya Publ., 1968. 510 p. (in Russian).

8. Aerov M. E., Todes O. M., Narinskii D. A. *Devices with a stationary granular layer.* Leningrad, Khimiya Publ., 1979. 176 p. (in Russian).

9. Bogoyavlenskiy R. G. *Hydrodynamics and heat transfer in high temperature nuclear reactors with spherical fuel elements*. Moscow, Atomizdat Publ., 1978. 112 p. (in Russian).

10. Berdichevsky V. L. *Variational principles of continuum mechanics*. Moscow, Nauka Publ., 1983. 482 p. (in Russian).

11. Nigmatulin R. I. *Foundations of the mechanics of heterogeneous media*. Moscow, Nauka Publ., 1978. 336 p. (in Russian)

12. Buevich Yu. A., Korneev Yu. A. On heat and mass transfer in a dispersive medium. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1974, vol. 15, no. 4, pp. 500–506. Doi: 10.1007/bf00864728

13. Borodulya V. A., Buevich Yu. A. On the frame conductivity of granular systems. *Journal of Engineering Physics*, 1977, vol. 32, no. 2, pp. 168–174. Doi: 10.1007/bf00858505

14. Buevich Yu. A., Leonov A. I. Fluid filtration in a medium with random porosity. *Fluid Dynamics*, 1967, vol. 2, no. 6, pp. 116–120. Doi: 10.1007/BF01013730

15. Buevich Yu. A., Shchelchkova I. N. *Continual mechanics of monodisperse suspensions. The equations of conservation*. Novosibirsk, Institute of Problems of Mechanics of the Academy of Sciences of the USSR, 1976, preprint no. 72. 57 p. (in Russian).

16. Gray W. G., O'Neill K. On the general equations for flow in porous media and their reduction to Darcy's law. *Water Resources Research*, 1976, vol. 12, no. 2, pp. 148–154. Doi: 10.1029/wr012i002p00148

17. Segal M. D., Smirnov L. P. *The problem statement for calculating the velocity, temperature and pressure fields in the hydraulic circuit of a nuclear reactor*. Moscow, Institute of Atomic Energy, 1977, preprint no. 2924. 8 p. (in Russian).

18. Smirnov L. P., Segal M. D. *Mathematical model of calculation the velocity, temperature and pressure fields in the hydraulic circuit of the nuclear reactor with a porous fuel medium*. Moscow, Institute of Atomic Energy, 1978, preprint no. 3049. 8 p. (in Russian).

19. Kolos V. P., Sorokin V. N. Organization of unseparated longitudinal and transverse fluid flow in the annular dense bed. *Doklady akademii nauk BSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of BSSR], 1986, vol. 30, no. 1, pp. 51–54 (in Russian).

20. Kolos V. P., Sorokin V. N. Two-dimensional model of unseparated longitudinal and transverse fluid motion in the annular heat-releasing bed. *Izvestiya akademii nauk BSSR. Seriya fiziko-energeticheskih nauk* [Proceedings of the Academy of Sciences of BSSR. Series of physical-energy science], 1986, no. 4, pp. 36–44 (in Russian).

21. Akhramovich A. P., Kolos V. P., Sorokin V. N. Longitudinal and transverse fluid filtration in the annular heat-releasing bed. *Journal of Engineering Physics*, 1987, vol. 52, no. 5, pp. 547–555. Doi: 10.1007/bf00873308

22. Demenok S. L., Medvedev V. V., Sivuha S. M. *Visualization of fluid flow in channels*. Sankt Petersburg, Strata Publ., 2014. 134 p. (in Russian).

23. Komov A. T., Bocharova E. V., Tokarev J. N. Numerical simulation of hydrodynamics and heat transfer in a heat-releasing assembly with micro fuel elements. *Vestnic Moskovskogo energeticheskogo instituta* [MPEI Vestnik], 2009, no. 2, pp. 43–47 (in Russian).

24. Melamed L. E. Using FEMLAB and ANSYS in calculations of of nuclear reactor hydrodynamics, or a scientific and practical story on how to adapt "heavy" packages to solve heavy class problems. *Exponenta Pro*, 2004, no. 2 (6), pp. 18–21 (in Russian).

25. Smorchkov J. V., Dedov A. V. Numerical simulation of hydrodynamics and heat transfer in the bed of spherical particles. *Sovremennaja nauka: issledovaniya, idei, rezul'taty, tekhnologii* [Modern Science: actual problems of theory and practice], 2013, no. 1 (12), pp. 62–67 (in Russian).

26. Schouten J. A. *Tensor analysis for physicists*. Moscow, Nauka Publ., 1965. 456 p. (in Russian).

27. Kutateladze S. S., Borishanskii V. M. *Handbook on heat transfer*. Moscow, Leningrad, Gosenergoizdat Publ., 1959. 414 p. (in Russian).

28. Averkiev M. V., Ratnikov E. F. Heat-exchange and hydraulic resistance in the flow of air in tubes having bead packing. *Chemical and Petroleum Engineering*, 1975, vol. 11, no. 10, pp. 912–914. Doi: 10.1007/BF01150355

29. Chechetkin A. V. *High temperature coolant*. Moscow, Energiya Publ., 1971. 496 p. (in Russian).

30. Batchelor G. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 2000. 615 p. Doi: 10.1017/CBO9780511800955

Информация об авторах

Ахрамович Александр Павлович – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт энергетики Национальной академии наук Беларуси (ул. Академическая, 15, корп. 2, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: ahr@bas-net.by

Войтов Игорь Витальевич – доктор технических наук, ректор, Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: rektor@belstu.by

Колос Валерий Павлович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт энергетики Национальной академии наук Беларуси (ул. Академическая, 15, корп. 2, 220072, Минск, Республика Беларусь).

Information about the authors

Akhramovich Aliaksandr Pavlovich – Ph. D. (Engineering), Leading Researcher, Institute of Power Engineering of the National Academy of Sciences of Belarus (15, Akademicheskaya Str., building 2, 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ahr@bas-net.by

Voitov Igor Vitalievich – D. Sc. (Engineering), Rector, Belorusian State Technological University (13a, Sverdlov Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: rector@belstn.by

Kolos Valery Pavlovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Main Researcher, Institute of Power Engineering of the National Academy of Sciences of Belarus (15, Akademicheskaya Str., building 2, 220072, Minsk, Republic of Belarus).