Учреждение образования
"БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

**Учебно-методическое пособие для
студентов-заочников БГТУ
специальности 1-75 01 01 "Лесное хозяйство"**

Минск
2004

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я7
В 93

Рассмотрено и рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом университета

Составители:
Р.М. Кончиц, Т.Б. Копейкина, Н.П. Можей

Рецензенты:
доцент кафедры методов оптимального управления БГУ *В.В. Кракотко*;
доцент кафедры высшей математики № 3 БНТУ *Т.Н. Гурина*

В 93 **Высшая математика:** Учеб.-метод. пособие для студентов-заочников БГТУ специальности 1-75 01 01 "Лесное хозяйство" / Сост. Р.М. Кончиц и др. — Мн.: БГТУ, 2004. — 87 с.

ISBN 985-434-322-7

Приведены основные теоретические сведения по курсу "Высшая математика", типовые задачи с решениями и рекомендациями по выполнению контрольных работ, задания по контрольным работам для студентов-заочников специальности "Лесное хозяйство".

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я7

ISBN 985-434-322-7

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

На изучение курса "Высшая математика" студентами специальности "Лесное хозяйство" учебным планом предусмотрены следующее распределение часов по видам учебных занятий и следующие формы контроля:

I семестр			
Устан. сессия	Зимняя сессия		
Лекции (ч)	Лекции (ч)	Практич. зан.(ч)	Экзамен
8	8	20	1
II семестр (летняя сессия)			
Лекции (ч)	Практич. зан.(ч)	Зачет	
4	8	1	
III семестр (зимняя сессия)			
Лекции (ч)	Практич. зан.(ч)	Экзамен	
6	12	1	

Основной же формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа.

Программа содержит 9 тем. В первом семестре после изучения тем 1, 2, 3, 4 студенты выполняют контрольную работу № 1, после изучения тем 5, 6 — контрольную работу № 2. Во втором семестре после изучения темы 7 выполняется контрольная работа № 3. В третьем семестре после изучения тем 8, 9 — контрольная работа № 4.

Рекомендуемые учебные пособия по курсу "Высшая математика" приведены в списке литературы. В следующем разделе указана программа курса с номерами страниц учебных пособий для каждого вопроса, который необходимо изучить. Кроме этого, приведён минимум теоретических сведений, необходимый для выполнения контрольных работ. Задачи, представленные по каждой теме, также являются обязательным минимумом. Все они снабжены ответами.

Если в процессе изучения материала или при решении задачи у студента возникли трудности, то следует обратиться на кафедру высшей математики для получения устной или письменной консультации. Устные консультации проводятся 1–2 раза в неделю, и их расписание имеется как на кафедре высшей математики, так и в деканате заочного факультета. В запросе о письменной консультации следует максимально точно описать характер затруднения.

При выполнении контрольных работ студент должен руководствоваться следующими правилами.

1. Каждую работу необходимо выполнять в отдельной тетради, в которой остаются поля шириной 3–4 см для замечаний преподавателя. На внешней обложке тетради должны быть указаны фамилия и инициалы студента, полный шифр, номер контрольной работы и дата её отправления в университет.

2. Условие каждой задачи следует полностью переписать перед её решением.

3. Решения всех задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. При необходимости следует делать соответствующие ссылки на теоретический материал с указанием формул, теорем, выводов, которые используются при решении данной задачи.

4. Все вычисления, в том числе и вспомогательные, должны быть приведены полностью, чертежи и графики нужно выполнять аккуратно и чётко, с указанием единиц масштаба, осей координат. Объяснения к задачам должны соответствовать тем обозначениям, которые даны на чертеже.

5. Контрольные работы необходимо выполнять самостоятельно. К выполнению каждой из них следует приступать только после изучения соответствующего материала курса по учебнику и решения задач, предложенных к каждой теме. Нужно также внимательно разобрать решения тех задач, которые приводятся в данном пособии.

6. После получения из университета прорецензированной работы студент должен исправить все отмеченные рецензентом недостатки. Если работа не допущена к защите, студенту необходимо в кратчайший срок исправить ее с учетом замечаний рецензента и представить на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

7. Если контрольная работа допущена к защите, то до экзамена или зачёта студент должен защитить её (получить зачёт по работе).

8. В период экзаменационной сессии студент на экзамене или зачёте обязан представить зачтённую контрольную работу.

9. Студент выполняет те задачи контрольной работы, последняя цифра номеров которых совпадает с последней цифрой его учебного шифра. Например, если учебный шифр заканчивается цифрой 8, то студент выполняет следующие задачи контрольной работы № 1: 8, 18, 28, 38, 48; если учебный шифр заканчивается цифрой 0 – 10, 20, 30, 40, 50.

ГЛАВА 1

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ "ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА"

Введение

Получение высшего образования по специальностям лесохозяйственного профиля требует наличия высокой математической культуры, достаточно глубокого владения рядом специальных математических методов и умения непосредственного их применения в профессиональной деятельности. В процессе освоения курса высшей математики по специальности "Лесное хозяйство" студенты овладеют математическими методами, используемыми для изучения и решения научно-производственных задач, получат представление о месте математики в системе природоведческих наук как особом способе познания мира, разовьют свой интеллект, способность к логическому мышлению, научатся самостоятельно составлять математические модели научно-производственных задач, строить их решения математическими методами с применением современных ПЭВМ, проводить анализ полученных результатов. В процессе обучения студенты получат навыки самостоятельной работы с математической литературой, научатся использовать ПЭВМ при решении практических задач. Для изучения данного курса необходимо знание следующих дисциплин из курса средней школы.

1. Элементарная математика (все разделы).
2. Геометрия (все разделы).

Изучение курса высшей математики в I-м и III-м семестрах заканчивается экзаменом, во II-м — зачётом.

Содержание дисциплины

I семестр

1. Элементы аналитической геометрии на плоскости. Прямая линия на плоскости, способы задания прямой. Взаимное расположение прямых на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Угол между двумя прямыми. Взаимное расположение

двух прямых, условия параллельности и перпендикулярности прямых. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Расстояние от данной точки до заданной прямой.

2. Определение функции, основные способы ее задания. Область определения функции. Определение конечного предела функции в точке и на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Основные теоремы о пределах. Первый и второй замечательные пределы. Вычисление пределов функций, основные методы раскрытия неопределённостей.

3. Производная и дифференциал функции одной переменной. Понятие производной. Правила вычисления производных. Таблица производных.

4. Применение производной к исследованию функций. Экстремум функции. Нахождение наименьшего и наибольшего значений функции, непрерывной на заданном отрезке. Применение производной к исследованию функций и построению графиков.

5. Неопределённый интеграл и его основные свойства. Таблица основных интегралов. Основные методы интегрирования: замена переменной и метод интегрирования по частям.

6. Определённый интеграл и его основные свойства. Формула Ньютона – Лейбница. Применение определённого интеграла в геометрии и физике.

Содержание контрольных работ I семестра

Контрольная работа № 1. Решение задач аналитической геометрии, вычисление пределов, нахождение производных от функций, применение производной к исследованию функций и построению графиков.

Контрольная работа № 2. Вычисление и применение неопределённых и определённых интегралов.

II семестр

7. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), основные понятия и определения. Общие и частные решения ОДУ. Задача Коши. Решение ОДУ I-го порядка (с разделяющимися переменными, однородных и линейных). Решение линейных ОДУ II-го порядка с постоянными коэффициентами.

Содержание контрольных работ II семестра

Контрольная работа № 3. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений I-го и II-го порядков.

III семестр

8. Теория вероятностей. Предмет теории вероятностей. Классификация случайных событий. Вероятность и её свойства. Теоремы о вычислении вероятностей случайных событий. Дискретные и непрерывные случайные величины и их законы распределения.

9. Элементы линейного программирования. Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП). Графический метод решения ЗЛП. Транспортная задача линейного программирования. Метод потенциалов решения транспортной задачи.

Содержание контрольных работ III семестра

Контрольная работа № 4. Решение задач по теории вероятностей, линейному программированию.

Рекомендации по изучению вопросов, вынесенных на самостоятельную работу

I семестр

1. Различные виды уравнения прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Угол между двумя прямыми. Взаимное расположение двух прямых, условия параллельности и перпендикулярности прямых. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Расстояние от данной точки до данной прямой [1, стр. 35–44].

2. Понятие окрестности точки. Функции одной переменной и их классификация. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Правила раскрытия неопределённостей $0/0$, $\infty - \infty$. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции и их применение для вычисления пределов [1, стр. 66–88, 100–125, 127–135].

3. Физический и геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции. Производная сложной и неявной функций. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков. Механический смысл второй производной. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Основные свойства дифференциала и его применение [1 , стр.137–168, 198–210].

4. Правило Лопиталя и его применение для раскрытия неопределённостей [1, стр. 174–177].

5. Возрастание и убывание функций на интервале, достаточные условия монотонности [1, стр. 172–174].

6. Минимум и максимум функции, необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке [1, стр. 182–188].

7. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции. Достаточное условие наличия точки перегиба [1, стр. 188–190].

8. Вертикальная и наклонная асимптоты графика функции и их нахождение. Общая схема исследования функции и построения её графика [1, стр. 194–195].

9. Прямая на плоскости. Различные виды уравнений прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости [1, стр. 46–50].

10. Кривые II-го порядка на плоскости (эллипс, гипербола, парабола) [1, стр. 53–57].

II семестр

1. Первообразная функция и ее свойства. Неопределённый интеграл и его свойства, таблица неопределённых интегралов [1, стр. 211– 217].

2. Вычисление неопределённого интеграла методом замены переменной и методом интегрирования по частям [1, стр. 219–223].

3. Интегрирование рациональных функций. Разложение правильной рациональной функции на простейшие дроби. Метод неопределённых коэффициентов [1, стр. 223–226].

4. Интегрирование простейших дробей трёх видов. Общая схема интегрирования рациональных функций [1, стр. 226–228].

5. Интегрирование тригонометрических функций [1, стр. 228–230].

6. Определённый интеграл и его свойства. Геометрический смысл определённого интеграла [1, стр. 233–242].

7. Производная интеграла с переменным верхним пределом. Формула Ньютона – Лейбница. Вычисление определённого интеграла методом замены переменной и методом интегрирования по частям [1, стр. 235, 244–246].

8. Применение определённого интеграла для вычисления площади плоской области и длины дуги плоской кривой [1, стр. 256–266].

9. Применение определённого интеграла для вычисления объёмов тел вращения и решения физических задач [1, стр. 268–270].

III семестр

1. Предмет теории вероятностей. Алгебра событий. Относительная частота и её свойство, классическое определение вероятности случайного события. Свойства вероятности [6, стр. 14–15, 18–21, 24–25].

2. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность. Формула полной вероятности [6, стр. 31–34, 37–52].

3. Схема испытаний Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Формула Пуассона [6, стр. 55–60].

4. Случайные величины и их виды. Понятие о законах распределения дискретных случайных величин. Функция распределения и её свойства. Числовые характеристики дискретных случайных величин [6, стр. 64–66, 75–97, 111–115].

5. Биномиальный закон распределения. Закон распределения Пуассона [6, стр. 66–69].

6. Плотность распределения непрерывных случайных величин и её свойства. Числовые характеристики непрерывных случайных величин [6, стр. 116–121, 124–126].

7. Законы показательного, равномерного и нормального распределений, их свойства и числовые характеристики [6, стр. 122–129, 132–134].

ГЛАВА 2

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Прямая на плоскости

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат xOy. Расстояние d между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1}$$

Координаты точки $C(x, y)$, делящей пополам отрезок M_1M_2, находят по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{2}$$

Любое уравнение первой степени относительно x и y, т. е. уравнение вида

$$Ax + By + C = 0, \tag{3}$$

где среди коэффициентов A и B есть отличные от нуля, определяет на плоскости некоторую прямую. Уравнение (3) называют ***общим уравнением прямой***.

Если $B \neq 0$, то уравнение (3) можно привести к виду

$$y = kx + b, \tag{4}$$

где $k = -\frac{A}{B}$, $\quad b = -\frac{C}{B}$.

Уравнение (4) называют ***уравнением прямой с угловым коэффициентом***, поскольку угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол, образованный данной прямой с положительным направлением оси Ox. Острый угол φ между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|. \tag{5}$$

Условие параллельности этих прямых: $\quad k_1 = k_2. \quad (6)$

Условие перпендикулярности: $\quad k_1 = -\frac{1}{k_2}. \quad (7)$

Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, можно записать в виде

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{8}$$

Уравнение (8) часто называют ***уравнением прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.***

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{9}$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ находят по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{10}$$

2. Задачи по теме "Прямая на плоскости"

1. Выясните, какие из точек $M_1(3;1)$, $M_2(2;3)$ и $M_3(6;3)$ лежат на прямой $2x - 3y - 3 = 0$.

2. Найдите точку пересечения двух прямых $3x - 4y - 29 = 0$ и $2x + 5y + 19 = 0$.

3. Определите угловой коэффициент каждой из прямых: 1) $3x + y + 5 = 0$; 2) $2x + 3y - 6 = 0$; 3) $y + 2 = 0$. Постройте эти прямые.

4. Установите, какие из следующих пар прямых перпендикулярны: 1) $3x - y + 5 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$; 2) $5x - 2y + 7 = 0$, $3x + 6y - 2 = 0$.

5. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,1)$: 1) параллельно данной прямой; 2) перпендикулярно данной прямой.

6. Даны вершины треугольника $A(2;1)$, $B(-1;-1)$, $C(3;2)$. Составьте уравнения высоты и медианы, проведенных из вершины A.

7. Даны вершины треугольника $A(-1;0)$, $B(1;1)$, $C(1;-2)$. Найдите угол при вершине A.

8. Даны вершины треугольника $A(1;-5)$, $B(2;3)$, $C(-1;-1)$. Найдите длину высоты, проведенной из вершины A на сторону BC.

9. Найдите расстояние между двумя параллельными прямыми $3x - 4y - 10 = 0$ и $6x - 8y + 5 = 0$.

3. Кривые второго порядка

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(x_0; y_0)$ имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{11}$$

Полагая в (11) $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, получим уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = R^2$.

Уравнение эллипса с центром $C(x_0; y_0)$ и полуосями a и b имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{12}$$

Полагая в (12) $a > b$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, получим ***каноническое уравнение эллипса:*** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Уравнение гиперболы с центром $C(x_0; y_0)$ и полуосями a и b, где a — действительная полуось, b — мнимая полуось, имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{13}$$

Полагая в (13) $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, получим ***каноническое уравнение гиперболы:*** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Уравнение параболы с вершиной $C(x_0; y_0)$ и осью симметрии, параллельной оси Ox, имеет вид

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0). \tag{14}$$

Полагая в (14) $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, получим ***каноническое уравнение параболы:*** $y^2 = 2px$.

Уравнение параболы с вершиной $C(x_0; y_0)$ и осью симметрии, параллельной оси Oy, имеет вид

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0). \tag{15}$$

Полагая в (15) $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, получим ***каноническое уравнение параболы:*** $x^2 = 2py$.

4. Задачи по теме "Кривые второго порядка"

10. Составьте уравнение окружности, если:
1) центр окружности совпадает с началом координат и её радиус равен 3; 2) центр окружности совпадает с точкой $C(2;-3)$ и её радиус равен 7; 3) окружность проходит через начало координат и её центр совпадает с точкой $C(-6;8)$.

11. Найдите координаты центра и радиус R окружности, заданной уравнениями: 1) $x^2+y^2+6y=0$; 2) $x^2+y^2-2x+4y=20$; 3) $x^2+ +y^2+x=0$. Постройте окружности.

12. Составьте каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox симметрично относительно начала координат, если: 1) его большая полуось равна 10, а расстояние между фокусами $2c=8$; 2) его малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon=12/13$; 3) его большая полуось равна 4 и эллипс проходит через точку $M(2;-2)$. Постройте эти эллипсы.

13. Составьте каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Ox симметрично относительно начала координат, если: 1) расстояние между фокусами равно 6 и эксцентриситет $\varepsilon=3/2$; 2) большая полуось равна 8, а эксцентриситет $\varepsilon=5/4$; 3) уравнения ее асимптот $y=\pm 4/3x$ и расстояние между фокусами $2c=20$. Постройте гиперболы.

14. Составьте каноническое уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что: 1) парабола расположена симметрично относительно оси Ox и проходит через точку $M(9,6)$; 2) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $C(4;-8)$. Постройте параболы.

5. Пределы

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (в самой точке x_0 функция может быть и не определена).

Число b называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** $x\to x_0$, если для любого числа $\epsilon>0$ существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $|f(x)-b|<\epsilon$. Записывают это так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b.$$

Приведём основные формулы, применяющиеся при вычислении пределов (здесь предполагается, что $C=\mathrm{const}$ и все пределы существуют и конечны).

$$\lim_{x\to x_0} C=C; \qquad (16) \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{C}{x}=0; \qquad (17) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1; \qquad (18)$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}; \quad \mathrm{e}=2,71828\ldots; \qquad (19)$$

$$\lim_{x\to x_0}(Cf(x))=C\lim_{x\to x_0} f(x); \qquad (20)$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x); \qquad (21)$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x); \qquad (22)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \text{ если } \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0. \qquad (23)$$

Если $f(x)$ — элементарная функция, определенная в точке x_0 и в некоторой ее окрестности, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \qquad (24)$$

Предел в (18) называется ***первым замечательным пределом***, а в (19) — ***вторым замечательным пределом***.

6. Задачи по теме "Пределы"

Найдите область определения функции.

15. $y=\sqrt{x^2+4x-5}$. **16.** $y=\sqrt{1-x}+\ln(x+2)$.

17. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$. **18.** $y=\dfrac{1}{x^2-x}$.

Найдите предел функции.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{x}{x+1}$. **20.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-1}$.

21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{x-2}$. **22.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2}{3x^2+1}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-6}{2x^2+7}$. **24.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+8}{2x^3-x^2+1}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 3x}{\sin 5x}$. **26.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 2x}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{2}{x}}$. **28.** $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^{3x}$.

29. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$. **30.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

Исследуйте функцию на непрерывность.

31. $y=\dfrac{x}{x-2}$. **32.** $y=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & \text{если } x\leqslant 0\\ 1, & \text{если } x>0\end{cases}$. **33.** $y=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & \text{если } x\leqslant 0\\ 2, & \text{если } x>0\end{cases}$

7. Производные

Производной $f'(x)$ ***функции*** $y = f(x)$ ***в точке*** x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Для обозначения производной функции используют и другие символы: y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$.

Функция, имеющая конечную производную, называется ***дифференцируемой.***

Операция нахождения производной называется дифференцированием. Если C — постоянная величина, x — независимая переменная, $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ — дифференцируемые функции переменной x, то справедливы следующие ***правила дифференцирования:***

$C' = 0$; (25) $x' = 1$; (26) $(Cu)' = Cu'$; (27) $(u + v)' = u' + v'$; (28)

$(uv)' = u'v + uv'$; (29) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. (30)

Если $y = y(x)$ и $u = u(x)$ — дифференцируемые функции, то сложная функция $y = y(u(x))$ дифференцируема и

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{31}$$

Формулу (31) называют ***правилом дифференцирования сложной функции.***

Таблица производных основных элементарных функций

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'; \quad \alpha = \text{const}. \tag{32}$$

При $\alpha = 1/2$ формула (32) примет вид

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u'. \tag{33}$$

При $\alpha = -1$ формула (32) примет вид

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} u'. \tag{34}$$

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'; \quad a = \text{const},\ a > 0,\ a \neq 1; \tag{35}$$

$$(\mathrm{e}^u)' = \mathrm{e}^u u'; \tag{36}$$

$$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u'; \quad a = \text{const};\ a > 0,\ a \neq 1; \tag{37}$$

$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} u'$; (38) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; (39)

$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$; (40) $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} u'$; (41)

$(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} u'$; (42) $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} u'$; (43)

$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} u'$; (44) $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1 + u^2} u'$; (45)

$$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1 + u^2} u'. \tag{46}$$

Если функция $y(x)$ задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ то производная $\frac{dy}{dx}$ вычисляется по формуле

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{47}$$

8. Задачи по теме "Производные"

Найдите $\dfrac{dy}{dx}$.

34. $y = \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$. **35.** $y = x\sqrt{1 + x^2}$.

36. $y = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$. **37.** $y = (x^3 - 3x + 5)\,\mathrm{e}^{2x}$.

38. $y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$. **39.** $y = \cos^2 x$.

40. $y = \sin^3 x^7$. **41.** $y = \ln \cos 3x$.

42. $y = \sqrt{\mathrm{e}^{\sin 8x}}$. **43.** $y = \ln \sqrt[5]{\operatorname{ctg} \dfrac{x}{2}}$.

44. $y = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$. **45.** $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

46. $y = \sin^2 \left(\dfrac{1 - \ln x}{x}\right)$. **47.** $y = x + \mathrm{e}^y$.

48. $y^2 - xy - x^3 = 3$. **49.** $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$

50. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

Найдите $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

51. $y = x^2 \ln x$. 52. $y = x\,\mathrm{e}^{-x}$. 53. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$.

Найдите dy.

54. $y = \ln \operatorname{ctg} 4x$. 55. $y = \cos^3 2t$. 56. $y = \sqrt[3]{\lg u}$.

Найдите промежутки монотонности и точки экстремума функции.

57. $y = x^5 - 5x - 4$. 58. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$. 59. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

Найдите наибольшее (M) и наименьшее (m) значения функции на заданном отрезке.

60. $y = x^5 - 5x - 4$ при $x \in [-1; 2]$.

Проведите исследование функции и постройте её график.

61. $y = x^5 - 5x - 4$. 62. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

63. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$. 64. $y = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

65. $y = x^3 + x$. 66. $y = \ln(1 + x^2)$.

67. $y = \mathrm{e}^{-x^2}$. 68. $y = \dfrac{x+1}{(x-3)^2}$.

9. Неопределённые интегралы

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$. Все первообразные функции $f(x)$ имеют вид $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная. Это выражение называют ***неопределённым интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначают $\int f(x)dx$. Таким образом, по определению $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Основные свойства неопределённых интегралов

$$\int dF(x) = F(x) + C; \tag{48}$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \text{ где } k = \text{const} \neq 0; \tag{49}$$

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx; \tag{50}$$

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = u(x)$, то

$$\int f(u)du = F(u) + C. \tag{51}$$

Таблица основных неопределённых интегралов

$$\int du = u + C; \quad (52) \qquad \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; \quad (53)$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C; \quad (54) \qquad \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C; \quad (55)$$

$$\int \sin u du = -\cos u + C; \quad (56) \qquad \int \cos u du = \sin u + C; \quad (57)$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C; \quad (58) \qquad \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C; \quad (59)$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C; \quad (60) \qquad \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C; \quad (61)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C; \quad (62) \qquad \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C; \quad (63)$$

$$\int \mathrm{e}^u du = \mathrm{e}^u + C; \quad (64) \qquad \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C; \quad (65)$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C; \tag{66}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C. \tag{67}$$

Основными приемами интегрирования являются методы интегрирования заменой переменной (подстановкой) и интегрирования по частям.

Замена переменной в неопределённом интеграле

Сущность интегрирования методом замены переменной заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в другой интеграл $\int g(t)dt$, который проще первоначального.

Замена переменной производится при помощи подстановок следующих двух видов.

1) Если подынтегральное выражение можно преобразовать к виду $g(\psi(x))\psi'(x)dx$, то рекомендуется сделать замену переменной по формуле

$$\psi(x) = t. \qquad (68)$$

При вычислениях это записывают следующим образом:

$$\int g(\psi(x))\psi'(x)dx = \left| \begin{smallmatrix} \psi(x)=t \\ \psi'(x)dx=dt \end{smallmatrix} \right| = \int g(t)dt.$$

2) Часто для нахождения интеграла $\int f(x)dx$ бывает удобно сделать замену переменной по формуле

$$x = \varphi(t), \qquad (69)$$

где $\varphi(t)$ — монотонная дифференцируемая функция новой переменной t.

При вычислениях это записывают следующим образом:

$$\int f(x)dx = \left| \begin{smallmatrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{smallmatrix} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Интегрирование по частям в неопределённом интеграле

Интегрированием по частям называется нахождение неопределённого интеграла по формуле

$$\int udv = uv - \int vdu, \qquad (70)$$

где $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ — дифференцируемые функции.

10. Задачи по теме "Неопределённые интегралы"

Найдите неопределённый интеграл.

69. $\int \dfrac{7 + 2\sin^3 x}{\sin^2 x}dx.$ **70.** $\int \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2x^2 + x^3 e^x}{x^3}dx.$

71. $\int \dfrac{10}{3 + x^2}dx.$

Найдите неопределённый интеграл, применяя приём подведения функции под знак дифференциала или метод замены переменной.

72. $\int \sqrt{1 - 3x}dx.$ **73.** $\int \dfrac{x}{x^2 + 5}dx.$

74. $\int \sin x \cos^4 x dx.$ **75.** $\int \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}dx.$

76. $\int \dfrac{dx}{x \ln^2 x}.$ **77.** $\int x^2 e^{5x^3} dx.$

78. $\int \dfrac{dx}{4 + 9x^2}.$ **79.** $\int \dfrac{e^x}{e^{2x} - 1}dx.$

Методом интегрирования по частям найдите интегралы.

80. $\int (5x - 3)\sin 2x dx.$ **81.** $\int (x + 1)\ln x dx.$

82. $\int x e^{-3x} dx.$

Найдите интегралы от рациональных функций.

83. $\int \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x + 2}dx.$ **84.** $\int \dfrac{x}{(x + 2)(2x + 1)}dx.$

11. Определённые интегралы

Определённым интегралом $\int_a^b f(x)dx$ ***от функции*** $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$, назовем приращение ее первообразной $F(x)$ на этом отрезке, т. е. разность $F(b) - F(a)$. Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (71)$$

Формулу (71) называют ***формулой Ньютона – Лейбница.*** Разность $F(b) - F(a)$ обозначают $F(x)|_a^b$.

Основными приёмами в вычислении определённых интегралов являются интегрирование методом замены переменной и интегрирование по частям.

Замена переменной в определённом интеграле осуществляется по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \qquad (72)$$

где функции $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ и $f(\varphi(t))$ непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$, здесь $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $a \leqslant \varphi(t) \leqslant b$.

Интегрирование по частям в определённом интеграле проводится по формуле

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu, \qquad (73)$$

где функции $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ и их производные $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$.

Если фигура ограничена кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, причем $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ (рис. 1),

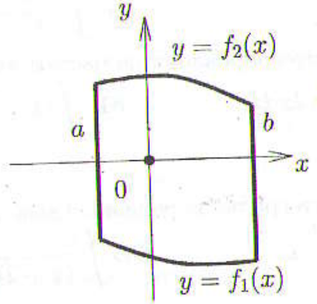


Рис. 1

то площадь S этой фигуры найдем по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \tag{74}$$

12. Задачи по теме "Определённые интегралы"

Вычислите определённые интегралы.

85. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \sin^2 x dx$. **86.** $\displaystyle\int_1^4 \frac{\ln x}{x^2} dx$.

87. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^3}$. **88.** $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x \sin 6x dx$.

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями.

89. $y = 4 - x^2$, $2x + y - 4 = 0$. **90.** $y = 2x - x^2$, $y = x$.

91. $y = \sqrt{x}$, $xy = 1$, $x = e$, $y - 0$.

Найдите объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями.

92. $y = x^2 - 3x$, $y = 0$ вокруг оси Ox.

93. $y = \ln x$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$ вокруг оси Oy.

Найдите длину дуги линии.

94. $y = \frac{4}{3} x\sqrt{x}$, $x \in [0; 2]$.

13. Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $F(x, y, y') = 0$ или (в разрешённом относительно y' виде) $y' = f(x, y)$, где x — независимая переменная, y — искомая функция, y' — её производная.

Дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C)$, где C — произвольная постоянная, называется ***общим решением*** дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \tag{75}$$

если она обращает это уравнение в тождество. Решение $y = \varphi(x, C_0)$, полученное из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при определённом значении постоянной $C = C_0$, называется ***частным решением*** уравнения (75).

Нахождение частного решения уравнения (75), удовлетворяющего начальным условиям $y = y_0$ при $x = x_0$ (или $y(x_0) = y_0$), называется ***задачей Коши***.

Рассмотрим три типа дифференциальных уравнений первого порядка.

Таблица 1

Тип уравнения	Метод решения
1. $y' = f(x)\varphi(y)$ — уравнение с разделяющимися переменными	Заменяя y' на $\frac{dy}{dx}$, получим $\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$, откуда $\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx$. Тогда $\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C$
2. $y' = f(\frac{y}{x})$ —однородное уравнение	Положив $y = ux$, найдем $y' = u'x + u$. Тогда $u'x + u = f(u)$, откуда $u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$. Таким образом, однородное уравнение заменой сводится к уравнению с разделяющимися переменными
3. $y' + p(x)y = q(x)$ — линейное уравнение	Решается с помощью подстановки $y = uv$, где $u(x)$ и $v(x)$ — неизвестные функции. Если $y = uv$, то $y' = u'v + uv'$, и уравнение примет вид $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$. Выбрав функцию $v(x)$ из условия $v' + p(x)v = 0$, функцию $u = u(x, C)$ находим из уравнения $u'v = q(x)$

Дифференциальным уравнением n-го порядка будем называть уравнение вида $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ или (в разрешённом относительно $y^{(n)}$ виде) $y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$, где x — независимая переменная, y — искомая функция, $y', \ldots, y^{(n)}$ — ее производные до n-го порядка включительно. Дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, удовлетворяющая данному уравнению n-го порядка, называется ***общим решением*** этого дифференциального уравнения.

Уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{76}$$

(p, q — постоянные) называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами***.

Общее решение уравнения (76) в зависимости от корней его ***характеристического уравнения*** $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет вид.

Таблица 2

Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$	Форма общего решения уравнения (76)
1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — действительные числа ($D > 0$)	$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
2. $\lambda_1 = \lambda_2$ — действительные числа ($D = 0$)	$y = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x)$
3. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ — комплексные числа ($D < 0$)	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

14. Задачи по теме "Дифференциальные уравнения"

95. Докажите, что функция $y = -\dfrac{1}{x}$ является решением дифференциального уравнения $x^2 y' = 2xy + 3$.

Решите дифференциальные уравнения.

96. $x^2 y' = y$.

97. $y \ln y dx + x dy = 0$.

98. $dy + (xy - 2x)dx = 0$.

99. $2x^2 yy' + y^2 = 2$.

100. $y' \operatorname{ctg} x = 2 - y,\ y(0) = -1$.

101. $y' = 3\sqrt[3]{y^2},\ y(2) = 1$.

102. $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y},\ y(1) = 1$.

103. $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$.

104. $y' - y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x},\ y(0) = 0$.

105. $x^2 y' = 2xy + 3$.

106. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$.

107. $y'' - 2y' + y = 0$.

108. $y'' + 6y' = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 12$.

109. $y'' - 4y' + 5y = 0$.

110. $y'' + 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

15. Теория вероятностей

По классическому определению ***вероятность P случайного события*** A вычисляется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m — число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события A, n — общее число равновозможных элементарных исходов испытания.

Вероятность суммы n попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ вычисляется по формуле

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

Если A и $\bar{A}$ — противоположные события, то $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Вероятность суммы двух совместных событий A и B вычисляется по формуле

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

где $P(AB)$ — вероятность произведения событий A и B.

Вероятность произведения событий A и B определяется следующим образом:

$$P(AB) = P(A)P(B/A),$$

где $P(B/A)$ — вероятность события B, вычисленная при условии, что событие A произошло (***условная вероятность***).

Если события A и B независимы, то

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Если событие A может наступить при появлении одного из n попарно несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$ и $P(H_1) + P(H_2) + \cdots + P(H_n) = 1$, то вероятность события A вычисляется по ***формуле полной вероятности:***

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \cdots + P(H_n)P(A/H_n).$$

Последовательность n независимых испытаний называется ***схемой Бернулли,*** если при каждом испытании рассматривают-ся только два возможных исхода: появление события A и непоявление его $\bar{A}$, причем вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p.

В схеме Бернулли вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях событие A наступит ровно k раз, вычисляется по ***формуле Бернулли:***

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{77}$$

где $q = 1 - p$, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, $0! = 1$.

Если в схеме Бернулли вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний мала, а число испытаний n достаточно велико, то вероятность $P_n(k)$ вычисляется приближенно по ***формуле Пуассона:***

$$P_n(k) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \tag{78}$$

где $a = np$. Формулу (78) применяют в тех случаях, когда $a \leqslant 10$.

Если в схеме Бернулли вероятность p появления события A в каждом из n испытаний существенно отличается от нуля и единицы, а число испытаний n достаточно велико, то для вычисления вероятности $P_n(k)$ применяют приближённую ***локальную формулу Муавра – Лапласа:***

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \tag{79}$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

В схеме Бернулли вероятность $P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2)$ того, что в n независимых испытаниях (p существенно отличается от нуля и единицы, а n достаточно велико) событие A наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, вычисляется по ***интегральной формуле Муавра – Лапласа:***

$$P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{80}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ — функция Лапласа, $x_2 = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, причем $\Phi(x) = 0,5$ при $x \geqslant 5$.

Математическое ожидание M_ξ ***дискретной случайной величины*** ξ вычисляется по формуле

$$M_\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n, \tag{81}$$

где x_i, $i = 1, \ldots, n$ — возможные значения случайной величины, а p_i, $i = 1, \ldots, n$ — соответствующие им вероятности.

Дисперсией D_ξ случайной величины ξ называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания, т. е.

$$D_\xi = M(\xi - M_\xi)^2.$$

Дисперсию D_ξ дискретной случайной величины ξ часто ***вычисляют*** по формуле

$$D_\xi = M(\xi^2) - (M_\xi)^2, \tag{82}$$

где $M(\xi^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \cdots + x_n^2 p_n$.

Функцией распределения случайной величины ξ называется функция $F(x)$, выражающая вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, меньшее x, т. е.

$$F(x) = P(\xi < x).$$

Плотность $p(x)$ ***распределения вероятностей случайной величины*** ξ выражается через функцию распределения $F(x)$ следующим образом:

$$p(x) = F'(x).$$

Математическое ожидание M_ξ и ***дисперсия*** D_ξ ***непрерывной случайной величины*** ξ определяются по формулам

$$M_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx, \quad D_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx - (M_\xi)^2.$$

Средним квадратичным отклонением σ_ξ случайной величины ξ называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}. \tag{83}$$

Распределение случайной величины ξ называется ***нормальным***, если её плотность вероятности имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a — математическое ожидание, σ — среднее квадратичное отклонение случайной величины.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал $(\alpha;\beta)$ вычисляется по формуле

$$P(\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}), \qquad (84)$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

16. Задачи по теме "Теория вероятностей"

111. В урне 10 белых, 11 чёрных, 12 красных шаров. Вынули один шар. Найдите вероятность того, что этот шар чёрный.
112. В квадрат вписан круг. Какова вероятность того, что точка, брошенная наугад в квадрат, окажется внутри круга?
113. Студент знает 25 вопросов из 30. Каждый экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Найдите вероятность того, что студент знает все три вопроса, содержащиеся в билете.
114. В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причём в первой урне 5 белых шаров, 11 чёрных, а во второй соответственно 10 и 8. Из обеих урн наудачу извлекают по одному шару. Какова вероятность, что оба шара одного цвета?
115. Машина при проверке проходит три вида испытаний. Первое испытание проходит в 90%, второе — в 80% и третье — в 75% случаев. Найдите вероятность того, что машина пройдёт испытания только одного вида.
116. Производится стрельба по удаляющейся цели. При первом выстреле вероятность попадания равна 0,8; при каждом следующем выстреле вероятность уменьшается в 2 раза. Произведено 3 выстрела. Определите вероятности следующих событий: A={ровно два попадания}; B = {хотя бы одно попадание}.
117. В электрическую цепь включены три лампочки. Вероятность того, что первая лампочка исправна, равна 0,9, вторая — 0,8 и третья — 0,7. Какова вероятность того, что при замыкании в цепи будет ток, если лампочки включены: 1) последовательно; 2) параллельно?
118. Вероятность выигрыша по облигации займа за время его действия 0,25. Найдите вероятность того, что из 8 случайным образом приобретенных облигаций 6 будет выигрышных.
119. Доля плодов, пораженных болезнью, составляет 25%. Случайным образом выбирается 6 плодов. Определите вероятность того,

что в выборке окажется не более двух плодов, поражённых болезнью.
120. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найдите вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут более трёх.
121. Из большой партии зерна (пшеницы с рожью), в которой доля ржи 0,2, берут для пробы 900 случайных зёрен. Какова вероятность, что число зёрен ржи в пробе от 180 до 210?
122. В партии из 1000 изделий имеется 10 дефектных. Найдите вероятность того, что среди наудачу взятых из этой партии 50 изделий ровно 5 окажется дефектными.
123. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,0004. Найдите вероятность того, что из 1000 наудачу взятых изделий не выдержат испытания не менее 2 изделий.
124. Дан ряд распределения случайной величины

ξ	0	1	2	3	4
P	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

Найдите $P\{\xi < M_\xi\}$, σ_ξ.
125. В группе из 9 изделий 4 бракованных. Наудачу вынимают 2 изделия. Составьте ряд распределения числа бракованных среди них.
126. В партии деталей 10% нестандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Найдите математическое ожидание числа нестандартных деталей среди двух отобранных.
127. Случайная величина задана функцией распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 1, \\ 0,5(x-1), \text{ при } 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 1, \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

Найдите $P\{2,5 < \xi < 3,5\}$.
128. Найдите вероятность попадания на заданный интервал (15; 25) нормально распределённой случайной величины, если её математическое ожидание $M_\xi = 20$, а среднее квадратичное отклонение $\sigma = 5$.

17. Линейное программирование

Постановка задачи линейного программирования в нормальной форме: найти максимум или минимум линейной функции (***целевой функции***)

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad (85)$$

по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющим неравенствам (***ограничениям***)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m, \end{cases} \tag{86}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \ldots\ x_n \geqslant 0, \tag{87}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_m$, $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ — заданные действительные числа.

В более компактной записи задача принимает вид

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min); \tag{88}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m; \tag{89}$$

$$x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{90}$$

Постановка задачи линейного программирования в канонической форме

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min); \tag{91}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m; \tag{92}$$

$$x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{93}$$

Две формы записи задачи линейного программирования отличаются лишь типом основных ограничений (86), (89), (92). В нормальной форме ограничения заданы неравенствами (86), (89), в канонической — имеют вид равенств (92).

Отметим, что в рассмотренных задачах переменные входят в целевую функцию и ограничения линейно. В этом — суть задачи линейного программирования.

Планом X (или допустимым решением) задачи линейного программирования называется совокупность чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая ограничениям (86), (87), (89), (90), (92), (93).

Оптимальным планом $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ (или оптимальным решением) задачи линейного программирования называется план, при котором целевая функция z принимает экстремальное значение (максимум или минимум).

Задачи в нормальной и канонической формах эквивалентны между собой. Ограничения типа неравенств можно свести введением дополнительных переменных к ограничениям типа равенств. Если же не все переменные x_j неотрицательны, то можно заменить x_j разностью двух неотрицательных переменных $\hat{x}_j$ и $\tilde{x}_j$, т. е. $x_j = \hat{x}_j - \tilde{x}_j$.

Задачу максимизации функции $z = \Sigma_{j=1}^{n} c_j x_j$ можно всегда заменить задачей минимизации линейной функции $z_1 = -z = -\Sigma_{j=1}^{n} c_j x_j$.

Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования с двумя переменными, заданной в нормальной форме

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min); \tag{94}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leqslant b_m, \end{cases} \tag{95}$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \tag{96}$$

Рассмотрим плоскость и введем на ней декартову систему координат x_1Ox_2. Уравнение $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ есть уравнение прямой в этой плоскости. Неравенство $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1$ определяет полуплоскость, лежащую по одну сторону от прямой $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$. Следовательно, решением каждого из неравенств системы (95), (96) является некоторая полуплоскость плоскости x_1Ox_2, а решением всей системы (95), (96) будет область D — пересечение этих полуплоскостей.

Область D называют ***многоугольником допустимых решений***, так как любая пара чисел $(x_1, x_2) \in D$ удовлетворяет ограничениям (95), т. е. является допустимым решением задачи (94)–(96).

Линии уровня целевой функции $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$ образуют семейство параллельных прямых. Вектор $\operatorname{grad} z = \{c_1, c_2\}$ (он перпендикулярен линиям уровня) указывает направление (наискорейшего) возрастания целевой функции, а вектор $-\operatorname{grad} z$ — направление (наискорейшего) убывания целевой функции. Для удобства построим вектор $\operatorname{grad} z = \{c_1, c_2\}$ из начала координат и линию уровня l: $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ (z=0) (рис. 2).

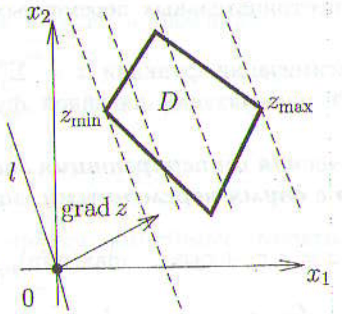


Рис. 2

Передвигая прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ в направлении $\operatorname{grad} z$ ($-\operatorname{grad} z$), либо находят точку (возможно, отрезок), в которой целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение (это последняя общая точка прямой и области D), либо устанавливают неограниченность функции на множестве планов. Затем определяют координаты точки максимума (минимума) целевой функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

Транспортная задача

Имеется m пунктов производства $A_1, A_2, \ldots, A_m$ некоторого продукта и n пунктов его потребления $B_1, B_2, \ldots, B_n$. В i-м пункте A_i производится a_i единиц продукта, в j-м пункте B_j потребляется b_j единиц продукта, причем выполняется условие баланса:

$\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$. Стоимость перевозки единицы продукта из A_i в B_j равна c_{ij}. Требуется составить план перевозок, при котором весь продукт из пунктов производства будет вывезен, все потребности удовлетворены, а транспортные расходы окажутся минимальными.

Обозначим x_{ij} ($x_{ij} \geqslant 0$) — объём перевозок из пункта A_i в пункт B_j ($i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$).

Условие задачи удобно записывать в виде таблицы. Эту таблицу называют ***матрицей планирования.***

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	…	B_n	Запасы
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_n	$\Sigma_{i=1}^{m} a_i = \Sigma_{j=1}^{n} b_j$

Стоимость c_{ij} перевозки единицы продукции от i-го поставщика к j-му потребителю называется ***тарифом клетки*** (i, j). Стоимость всех перевозок выразится линейной функцией

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},$$

которую необходимо минимизировать при следующих ограничениях:

1) все грузы должны быть вывезены, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i = 1, \ldots, m;$$

2) все потребности должны быть удовлетворены, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче линейного программирования:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1, \ldots, m; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1, \ldots, n; \\ x_{ij} \geqslant 0. \end{cases}$$

Если $\Sigma_{i=1}^{m} a_i = \Sigma_{j=1}^{n} b_j$, то модель называется ***закрытой***. В этом случае транспортная задача всегда разрешима.

Решение транспортной задачи всегда начинается с построения первоначального плана. Рассмотрим два способа построения такого плана.

1) ***Метод северо-западного угла***. Сначала заполняют клетки первой строки матрицы планирования по порядку, пока не будут исчерпаны все запасы a_1, при этом, по возможности, полностью удовлетворяют потребности B_1, B_2 и т. д.; затем последовательно заполняют клетки второй строки, начиная с того потребителя, которому не хватило запасов a_1, до полного исчерпания запасов a_2 и т. д.

2) ***Метод минимальной стоимости***. Заполнение таблицы начинаем с клетки, тариф которой минимален, и продолжаем в порядке неубывания стоимости.

Клетки, в которых стоят отличные от нуля x_{ij}, называют ***загруженными***, а остальные — ***свободными***. План, содержащий $m + n - 1$ загруженную клетку, называется ***невырожденным***.

Если при построении первоначального плана число занятых клеток будет меньше, чем $m+n-1$, то построенный план вырожден. Тогда, чтобы получить невырожденный план, в свободную клетку (обычно ту, которой соответствует наименьший тариф) заносится "базисный" нуль, и эта клетка считается занятой. Кроме того, построенный план должен быть ***ацикличным***, т. е. в матрице планирования нельзя построить цикл, все вершины которого расположены в загруженных клетках.

Циклом называется набор клеток матрицы планирования, в котором две и только две соседние клетки расположены в одном

столбце или одной строке, причём последняя клетка находится в том же столбце или строке, что и первая (о циклах более подробно будет сказано ниже).

После нахождения первоначального невырожденного ацикличного плана необходимо исследовать его на оптимальность, и если он не оптимален, то перейти к улучшенному плану. Одним из методов такого исследования является ***метод потенциалов***.

Сущность метода потенциалов состоит в следующем. После того, как найден первоначальный невырожденный план перевозок, каждому поставщику A_i (каждой строке) ставится в соответствие некоторое число u_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, а каждому потребителю B_j (каждому столбцу) — некоторое число v_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Числа u_i, v_j называют потенциалами соответственно A_i и B_j. Числа u_i, v_j выбирают так, чтобы в любой загруженной клетке их сумма равнялась тарифу этой клетки, т. е.

$$u_i + v_j = c_{ij}. \tag{97}$$

Так как чисел u_i и v_j всего $m+n$, а загруженных клеток $m+n-1$, то для нахождения потенциалов u_i, v_j получаем систему (97) из $m+n-1$ уравнений с $m+n$ неизвестными. В этой системе уравнений на одно меньше, чем неизвестных, поэтому один потенциал можно задать произвольно, например, положив равным нулю. Тогда остальные потенциалы определяются однозначно.

При проверке оптимальности плана для каждой свободной клетки вычисляют разность между тарифом клетки и суммой потенциалов соответствующих строки и столбца:

$$s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j). \tag{98}$$

План оптимален, если $s_{ij} \geqslant 0$.

Если хотя бы для одной из клеток $s_{ij} < 0$, то план не оптимален и нужно переходить к новому плану.

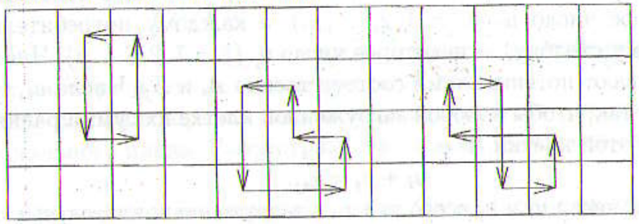
Переход к новому плану.

1. Клетка, для которой значение s_{ij} минимально, является ***перспективной*** и подлежит загрузке. (Если таких клеток несколько, то берём любую).

2. Для выбранной перспективной клетки строим ***цикл***, т. е. составляем замкнутый контур, по которому следует перераспределить груз. ***Контур*** представляет собой замкнутую ломаную линию,

состоящую из горизонтальных и вертикальных направленных отрезков, соединяющих середины клеток, из которых одна (именно перспективная) свободна, а все остальные — загружены. ***Для каждой свободной клетки такой контур существует и является единственным***. Точка, в которой меняется направление контура (горизонтальное на вертикальное и наоборот), называется ***вершиной цикла***. В одной строке или одном столбце могут находиться две и только две вершины. Точки самопересечения контура вершинами не являются.

Примеры циклов следующие:



3. Расставим поочередно знаки "+" и "–" в вершинах цикла. В перспективной клетке ставим знак "+", затем, двигаясь по вершинам цикла, ставим поочередно знаки "–" и "+", пока не придём к исходной вершине.

4. В клетках, соответствующих отрицательным вершинам, отыскивается наименьший груз (обозначим его Θ), который "перемещается" по клеткам цикла, т. е. прибавляется к поставкам x_{ij} в клетках со знаком "+" (включая свободную) и вычитается в клетках со знаком "–".

В итоге мы получаем новый невырожденный план, для которого составляем новую систему потенциалов, и проверяем план на оптимальность.

Процесс продолжается, пока не получится оптимальный план перевозок.

Примечание 1. Наличие свободных клеток, в которых $s_{ij} = 0$, свидетельствует о том, что имеются другие варианты оптимального плана, эквивалентные по общей сумме затрат. Это позволяет больше маневрировать при составлении конкретных плановых заданий.

Примечание 2. ***Открытая модель транспортной задачи.***

В случае невыполнения условия баланса (***открытая модель транспортной задачи***) возможно возникновение двух случаев:

1) запасы превосходят потребности (т. е. имеет место перепроизводство):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j;$$

2) запасы не обеспечивают потребностей (дефицит продукции):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Для сведения открытой задачи к закрытой в случае 1) вводят фиктивного потребителя, а в случае 2) — фиктивного поставщика. Все дополнительные тарифы считают равными нулю.

ГЛАВА 3

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ (ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ)

1. Указания к выполнению контрольной работы № 1

Задача 1. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(-7,4)$, $B(5,-5)$, $C(3,9)$. Найдите: 1) длину стороны AB; 2) уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты; 3) угол треугольника при вершине B; 4) уравнение высоты CD и ее длину; 5) уравнение медианы AE и координаты точки K пересечения этой медианы с высотой CD; 6) уравнение прямой, проходящей через точку K параллельно стороне AB. Сделайте чертеж (рис. 3).

Решение.

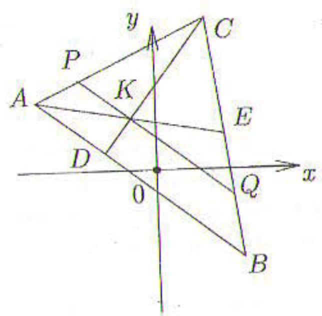


Рис. 3

1) Длину стороны AB определим по формуле (4):

$$|AB| = \sqrt{(5+7)^2 + (-5-4)^2} = \sqrt{225} = 15.$$

2) Уравнение сторон AB и BC найдем по формуле (9). Для AB получим

$$\frac{x+7}{5+7} = \frac{y-4}{-5-4};$$

$$12(y-4) = -9(x+7);$$
$$3x + 4y + 5 = 0;$$
$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}.$$

Следовательно, $k_{AB} = -\frac{3}{4}$. Аналогично находим уравнение прямой BC: $7x + y - 30 = 0$. Тогда $y = -7x + 30$, откуда $k_{BC} = -7$.

3) Угол B треугольника найдем как угол между прямыми BC и AB, используя формулу (5):

$$\operatorname{tg} \angle B = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB}k_{BC}} = \frac{-3/4 + 7}{1 + 7 \cdot 3/4} = \frac{-3 + 28}{4 + 21} = 1; \ \angle B = 45^\circ.$$

4) Уравнение высоты CD определяем по формуле (8), используя условие (7). Из условия (7) находим

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-3/4} = \frac{4}{3}.$$

Тогда по формуле (8) имеем $y - 9 = \frac{4}{3}(x-3)$, или $4x - 3y + 15 = 0$. Длину высоты CD найдем как расстояние от точки $C(3;9)$ до прямой AB, общее уравнение которой $3x + 4y + 5 = 0$. Применяя формулу (10), получим

$$|CD| = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 9 + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{50}{5} = 10.$$

5) Точку $E(x_E, y_E)$ найдем как середину отрезка BC по формулам (2):

$$x_E = \frac{1}{2}(x_B + x_C) = \frac{1}{2}(5+3) = 4; \ y_E = \frac{1}{2}(-5+9) = 2.$$

Зная точки $A(-7;4)$ и $E(4;2)$, по формуле (9) найдем уравнение медианы:

$$\frac{x+7}{4+7} = \frac{y-4}{2-4};$$
$$11(y-4) = -2(x+7);$$
$$2x + 11y - 30 = 0.$$

Координаты точки K определим, решив систему уравнений, задающих прямые AE и CD:

$$\begin{cases} 2x + 11y - 30 = 0, \\ 4x - 3y + 15 = 0, \end{cases}$$

откуда $x = -1,5$, $y = 3$, т. е. $K(-1,5; 3)$.

б) Уравнение прямой PQ, параллельной прямой AB и проходящей через точку $K(-3/2; 3)$, найдём по формуле (8), предварительно используя условие (6). Из условия (6) следует, что $k_{PQ} = k_{AB} = -\frac{3}{4}$. Тогда $y - 3 = -\frac{3}{4}(x + 1,5)$, откуда $6x + 8y - 15 = 0$.

Ответ. $|AB| = 15$; $3x + 4y + 5 = 0$ (AB); $k_{AB} = -\frac{3}{4}$; $7x + y - 30 = 0$ (BC), $k_{BC} = -7$; $\angle B = 45^\circ$; $4x - 3y + 15 = 0$ (CD); $|CD| = 10$; $2x + 11y - 30 = 0$ (AE); $K(-1,5; 3)$; $6x + 8y - 15 = 0$ (PQ).

Задача 2. Составьте уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $A(2; 6)$ и прямой $y = 2$. Полученное уравнение привести к каноническому виду и построить кривую.

Решение.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка искомой кривой. Тогда по условию задачи (рис. 4) $|AM| = |NM|$.

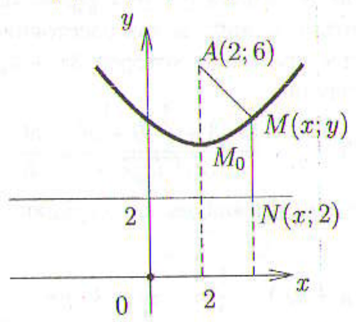


Рис. 4

Выразим эти расстояния через координаты точек A, M, N по формуле (1):

$$|AM| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-6)^2}, \quad |NM| = \sqrt{(y-2)^2 + (x-x)^2}.$$

Следовательно, $\sqrt{(x-2)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{(y-2)^2}$. Возводя обе части последнего уравнения в квадрат, получим: $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 12y + 36 = y^2 - 4y + 4$, откуда $y - 4 = \frac{1}{8}(x-2)^2$. Из полученного уравнения видно, что искомой линией является парабола с вершиной в точке $M_0(2; 4)$ и осью симметрии $x = 2$.

Задача 3. Найдите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 + 5x - 7}{3x^2 - x - 2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 4x}{x \sin 5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3 - 4x^2 + 6x + 5}{x^3 - 7x + 4}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2 + 6x + 5}{x^3 - 7x + 4}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3 - 4x^2 + 6x + 5}{7x + 4}$.

Решение.

а) $$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 + 5x - 7}{3x^2 - x - 2} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)(x+\frac{7}{2})}{3(x-1)(x+\frac{2}{3})} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x+\frac{7}{2})}{3(x+\frac{2}{3})} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+7}{3x+2} = \frac{9}{5}.$$

Нашли корни квадратных трёхчленов $2x^2 + 5x - 7$ и $3x^2 - x - 2$, разложили эти трёхчлены на линейные множители по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, сократили на $(x-1)$ и воспользовались формулами (20), (21), (23);

б) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x \cos 3x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin 2x}{2x} 2x\right) \cos 3x}{\frac{\sin 3x}{3x} 3x} = \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right) \cos 3x}{\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3}.$$

Выполнили очевидные тождественные преобразования и воспользовались формулами (20), (22), (23), (18) и (24);

в) $$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 3x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\arcsin 3x}{3x} 3x}{5x} = \frac{3}{5} \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 3x}{3x} = \frac{3}{5} \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\sin\alpha} = \frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{3}{5}.$$

Выполнили очевидное тождественное преобразование, вынесли постоянный множитель $\frac{3}{5}$ за знак предела и положили $\arcsin 3x = \alpha$. Откуда $3x = \sin\alpha$, причем $\alpha \to 0$ при $x \to 0$, а затем воспользовались формулой (18);

г) $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 2x}{x \sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{8 \sin 2x \cdot \sin 2x}{2x \cdot 2x \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5} = \frac{8}{5} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin 5x}{5x}\right) = \frac{8}{5} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{8}{5}.$$

Воспользовались тождеством $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$, выполнили тождественные преобразования, вынесли постоянный множитель $\frac{8}{5}$ за знак предела и применили формулы (22) и (18);

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-4x^2+6x+5}{x^3-7x+4} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{1-\frac{7}{x^2}+\frac{4}{x^3}} =$

$= \dfrac{5-0+0+0}{1-0+0} = 5.$

Разделили числитель и знаменатель на x в максимальной степени, т. е. на x^3, и воспользовались формулами (16) и (17);

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+6x+5}{x^3-7x+4} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{1-\frac{7}{x^2}+\frac{4}{x^3}} = \dfrac{0+0+0}{1-0+0} = 0.$

Разделили числитель и знаменатель на x в максимальной степени, т. е. на x^3, и воспользовались формулами (16) и (17);

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-4x^2+6x+5}{7x+4} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{\frac{7}{x^2}+\frac{4}{x^3}} =$

$= \dfrac{5-0+0+0}{0+0} = \dfrac{5}{0} = \infty.$

Разделили числитель и знаменатель на x в максимальной степени, т. е. на x^3, и воспользовались формулами (16) и (17).

Задача 4. Применяя формулы и правила дифференцирования, найдите производные следующих функций:

а) $\dfrac{3-6x}{5}$; б) $\dfrac{5}{(3+9x)^8}$; в) $\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^3+7x+1}}$;

г) $\left(5^{\sin^2 x}-\cos 2x\right)^3$; д) $\ln\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}$; е) $e^{\arccos^2\sqrt{2x-1}}$.

Решение.

а) $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{3-6x}{5}\right)' = \dfrac{1}{5}(3-6x)' = \dfrac{1}{5}\cdot(-6) = -\dfrac{6}{5}.$

Здесь использовались формулы (25), (26), (27), 28);

б) $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{5}{(3+9x)^8}\right)' = 5\left((3+9x)^{-8}\right)' =$

$= 5\cdot(-8)(3+9x)^{-8-1}(3+9x)' = -360(3+9x)^{-9}.$

При нахождении производной использовались формулы (32), (25), (26), (27), (28);

в) $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^3+7x+1}}\right)' =$

$= \dfrac{(x^2-4)'\sqrt{x^3+7x+1}-(x^2-4)\left(\sqrt{x^3+7x+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^3+7x+1}\right)^2} =$

$= \dfrac{2x\sqrt{x^3+7x+1}-(x^2-4)\frac{1}{(2\sqrt{x^3+7x+1})}(x^3+7x+1)'}{x^3+7x+1} =$

$= \dfrac{2x\sqrt{x^3+7x+1}-(x^2-4)\frac{1}{(2\sqrt{x^3+7x+1})}(3x^2+7)}{x^3+7x+1} =$

$= \dfrac{4x(x^3+7x+1)-(x^2-4)(3x^2+7)}{2\sqrt{x^3+7x+1}(x^3+7x+1)} = \dfrac{x^4+33x^2+4x+28}{2\sqrt{(x^3+7x+1)^3}}.$

Здесь были использованы формулы (30), (33), (28), (32), (27), (26), (25);

г) $\dfrac{dy}{dx} = \left(\left(5^{\sin^2 x}-\cos 2x\right)^3\right)' =$

$= 3\left(5^{\sin^2 x}-\cos 2x\right)^2\left(5^{\sin^2 x}-\cos 2x\right)' =$

$= 3\left(5^{\sin^2 x}-\cos 2x\right)^2\left(5^{\sin^2 x}\ln 5(\sin^2 x)'-(-\sin 2x)(2x)'\right) =$

$= 3\left(5^{\sin^2 x}-\cos 2x\right)^2\left(5^{\sin^2 x}\ln 5\cdot 2\sin x\cos x+2\sin 2x\right) =$

$= 3\left(5^{\sin^2 x}-\cos 2x\right)^2\sin 2x\left(5^{\sin^2 x}\ln 5+2\right).$

Были использованы формулы (32), (28), (35), (40), (39), (26), (27);

д) $\dfrac{dy}{dx} = (\ln\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x})' = \dfrac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}}(\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x})' =$

$= \dfrac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}}\dfrac{(\sqrt[3]{x})'}{1+(\sqrt[3]{x})^2} = \dfrac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}}\dfrac{1}{3}x^{-2/3}\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}} =$

$= \dfrac{1}{3\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot(1+\sqrt[3]{x^2})}.$

Были использованы формулы (38), (45), (32);

е) $\frac{dy}{dx}=\left(\mathrm{e}^{\arccos^2\sqrt{2x-1}}\right)'=\mathrm{e}^{\arccos^2\sqrt{2x-1}}\cdot 2\arccos\sqrt{2x-1}\cdot$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{2x-1})^2}}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}\cdot 2=$$

$$=\frac{-2\,\mathrm{e}^{\arccos^2\sqrt{2x-1}}\arccos\sqrt{2x-1}}{\sqrt{1-(2x-1)}\sqrt{2x-1}}=$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{6x-4x^2-2}}\mathrm{e}^{\arccos^2\sqrt{2x-1}}\arccos\sqrt{2x-1}.$$

Использовались формулы (36), (32), (44), (33), (28), (26), (25).

Задача 5. Найдите производные $\frac{dx}{dy}$ функций, заданных неявно:

а) $3x+\cos 2y=6$; б) $\operatorname{tg}x=\ln\sqrt[3]{3y+1}$.

Решение.

При отыскании производной y'_x функции, заданной неявно, надо обе части уравнения продифференцировать по x, помня, что y зависит от x, и из полученного уравнения выразить y'_x через x и y.

а) $(3x+\cos 2y)'_x=(6)'_x$; $\quad 3-\sin 2y\cdot 2y'=0$; $\quad y'=\frac{3}{2\sin 2y}$;

б) $(\operatorname{tg}x-\ln\sqrt[3]{3y+1})'_x=0'_x$;

$$\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sqrt[3]{3y+1}}\cdot\frac{1}{3}(3y+1)^{-2/3}\cdot 3y'=0;$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{y'}{\sqrt[3]{3y+1}\sqrt[3]{(3y+1)^2)}};\qquad \frac{1}{\cos^2 x}=\frac{y'}{3y+1};$$

$$y'=\frac{3y+1}{\cos^2 x}.$$

Задача 6. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции, заданной параметрически.

$$\begin{cases}x=t-\cos 2t,\\ y=\sin^2 t.\end{cases}$$

Решение.

Применяя формулу (47), получим

$$\frac{dy}{dy}=\frac{(\sin^2 t)'}{(t-\cos 2t)'}=\frac{2\sin t\cos t}{1+2\sin 2t}=\frac{\sin 2t}{1+2\sin 2t}.$$

Задача 7. Найдите наибольшее (M) и наименьшее (m) значения $y=x^3-3x+1$ на отрезке $[0;3]$.

Решение.

Найдем критические точки $y'=0$, принадлежащие отрезку $[0;3]$, присоединим к этим точкам концы данного отрезка, во всех этих точках вычислим значения функции и из полученных чисел выберем наибольшее и наименьшее:

$$y'=(x^3-3x+1)'=3x^2-3=3(x^2-1);$$

$$y'=0;\qquad x^2-1=0;\qquad x_1=-1;\ x_2=1.$$

Так как $x_1=-1$ не принадлежит отрезку $[0;3]$, то следует вычислить значения функции при $x=0$; $x=1$; $x=3$. Вычислив, получим $y(0)=1$; $y(1)=-1$; $y(3)=19$.

Таким образом, $M=19$; $m=-1$.

2. Указания к выполнению контрольной работы № 2

Задача 1. Найдите неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{dx}{(4x-1)^4}$; б) $\int\frac{dx}{5x-2}$; в) $\int\sin(2x+1)dx$;

г) $\int\frac{dx}{\cos^2(3x+1)}$; д) $\int\mathrm{e}^{\cos x}\sin x dx$; е) $\int\sin^5 x\cos x dx$;

ж) $\int\frac{(3x^2+4)dx}{x^3+4x+5}$; з) $\int x\,\mathrm{e}^x\,dx$; и) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

Решение.

а) Сделаем замену переменной $t=4x-1$; тогда $dt=4dx$, откуда $dx=\frac{1}{4}dt$. Следовательно,

$$\int\frac{dx}{(4x-1)^4}=\int\frac{\frac{1}{4}dt}{t^4}=\frac{1}{4}\int t^{-4}dt=\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-4+1}}{-4+1}+C=\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-3}}{-3}+$$

$$+C=-\frac{1}{12t^3}+C=-\frac{1}{12(4x-1)^3}+C.$$

При нахождении интеграла применили свойства (49) и (51), формулу (53);

б) Положим, $t = 5x - 2$; тогда $dt = 5dx$ и $dx = \frac{1}{5}dt$;

$$\int \frac{dx}{5x-2} = \int \frac{\frac{1}{5}dt}{t} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ln|t| + C = \frac{1}{5}\ln|5x-2| + C.$$

При нахождении интеграла применили свойства (49), (51) и формулу (54);

в) Применим подстановку $2x+1 = t$; тогда $2dx = dt$, $dx = \frac{1}{2}dt$;

$$\int \sin(2x+1)dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \sin t dt = -\frac{1}{2}\cos t + C =$$
$$= -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C.$$

Использовали свойства (49), (51) и формулу (56);

г) Пусть $t = 3x+1$, отсюда $dt = 3dx$, $dx = \frac{1}{3}dt$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\cos^2(3x+1)} = \int \frac{\frac{1}{3}dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{3}\operatorname{tg} t + C = \frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x+1) + C;$$

д) Положим, $\cos x = t$, тогда $-\sin x dx = dt$, $\sin x dx = -dt$ и

$$\int e^{\cos x}\sin x dx = \int e^t(-dt) = -\int e^t\,dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C;$$

е) $\displaystyle\int \sin^5 x\cos x dx = \left|\begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt\end{matrix}\right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C =$

$= \dfrac{1}{6}\sin^6 x + C.$

Примечание. Вспомогательную работу, связанную с заменой переменной, часто оформляют как в примере е);

ж) $\displaystyle\int \frac{(3x^2+4)dx}{x^3+4x+5} = \left|\begin{matrix} x^3+4x+5 = t \\ (3x^2+4)dx = dt\end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$

$= \ln|x^3+4x+5| + C;$

з) $\displaystyle\int x\,e^x\,dx =$ |Применим интегрирование по частям, т. е. формулу (70). Положим, $u = x$, $dv = e^x\,dx$; тогда $du = dx$, $v = e^x$|. Следовательно,

$$\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C = (x-1)\,e^x + C;$$

и) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \left|\begin{matrix} x = \frac{1}{2}t \\ dx = \frac{1}{2}dt\end{matrix}\right| = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin t + C =$

$= \dfrac{1}{2}\arcsin 2x + C.$

Задача 2. Вычислите определенные интегралы.

а) $\displaystyle\int_1^2 x^4 dx$; б) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$; в) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\,e^x\,dx$;

г) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x\cos 2x dx$; д) $\displaystyle\int_0^{1/2} \operatorname{arctg} 2x dx$; е) $\displaystyle\int_1^2 x^3\ln x dx$.

Решение.

а) Применив формулу (71), получим

$$\int_1^2 x^4 dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1^5}{5} = \frac{31}{5};$$

б) Применив формулу (72), получим

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \left|\begin{matrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt\end{matrix}\ \boxed{\begin{matrix} x=1; & x=e \\ t=0; & t=1\end{matrix}}\right| = \int_0^1 t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 =$$
$$= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3};$$

в) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\,e^x\,dx$ — применим интегрирование по частям. Положим, $u = 2x+1$, $dv = e^x\,dx$, тогда $du = 2dx$, $v = e^x$. Применяя формулу (73), получим

$$\int_0^1 (2x+1)\,e^x\,dx = (2x+1)\,e^x|_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot 2dx = 3\,e - 1 -$$
$$-2\int_0^1 e^x\,dx = 3\,e - 1 - 2\,e^x|_0^1 = 3\,e - 1 - (2\,e - 2) = e + 1;$$

г) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x\cos 2x dx = \left|\begin{matrix} u = x; \ du = dx \\ dv = \cos 2x dx; \ v = \frac{1}{2}\sin 2x\end{matrix}\right| = \left.\frac{1}{2}x\sin 2x\right|_0^{\pi/4} -$

$\displaystyle-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \sin 2x dx = \frac{\pi}{8} + \left.\frac{1}{4}\cos 2x\right|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}(0-1) = \frac{\pi-2}{8}.$

Примечание. Вспомогательная работа здесь оформлена так же, как в задачах 1 е), ж), и);

д) $\displaystyle\int_0^{1/2} \operatorname{arctg} 2x dx = \left|\begin{matrix} u = \operatorname{arctg} 2x; \ dv = dx \\ du = \frac{2dx}{1+4x^2}; \ v = x\end{matrix}\right| = x\operatorname{arctg} 2x|_0^{1/2} -$

$\displaystyle-\int_0^{1/2} \frac{2xdx}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \int_0^{1/2} \frac{2xdx}{1+4x^2} = \frac{\pi}{8} - \int_0^{1/2} \frac{2xdx}{1+4x^2} =$

$$= \begin{vmatrix} 1+4x^2 = t \\ 8xdx = dt \\ xdx = \frac{1}{8}dt \end{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} x=0 & x=1/2 \\ t=1 & t=2 \end{matrix}} = \frac{\pi}{8} - \int_1^2 \frac{2\cdot 1/8dt}{t} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln|t|\Big|_1^2 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2 = \frac{\pi - 2\ln 2}{8} =$$

$$= \frac{\pi - \ln 4}{8}.$$

При решении данной задачи использовались формулы (73), (72);

е) $$\int_1^2 x^3 \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln 2x; \; dv = x^3 dx \\ du = \frac{1}{x}dx; \; v = \frac{x^4}{4} \end{vmatrix} = \frac{x^4}{4}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^4}{4}\cdot \frac{1}{x}dx = 4\ln 2 - \frac{1}{4}\ln 1 - \frac{1}{4}\int_1^2 x^3 dx = 4\ln 2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = 4\ln 2 - \frac{1}{16}(16 - 1) = 4\ln 2 - \frac{15}{16}.$$

Задача 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

а) $y = x^2$; $x = 1$; $x = 2$; $y = 0$; б) $y = -x$; $y = 2x - x^2$;

в) $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$; $3x - 2y - 2 = 0$.

Решение.

а) Фигура, ограниченная данными линиями, изображена на рис. 5.

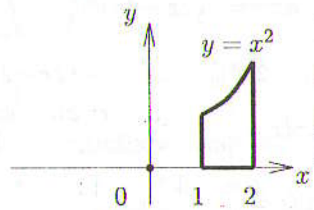


Рис. 5

По формуле (74) находим

$$S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}(\text{кв.ед.});$$

б) Решив систему $y = -x$, $y = 2x - x^2$, находим точки пересечения данных линий: $(0;0)$ и $A(3;-3)$ (рис. 6).

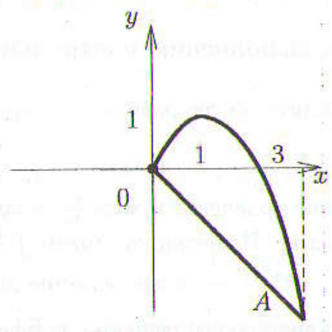


Рис. 6

Так как график параболы расположен выше графика прямой, то, применяя формулу (74), получим

$$S = \int_0^3 [(2x - x^2) - (-x)]dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2}(\text{кв.ед.});$$

в) Решая систему, находим точки пересечения данных линий: $A(1;1/2)$, $B(6;8)$ (рис. 7).

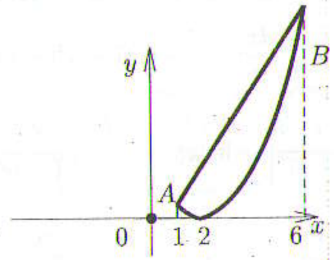


Рис. 7

Так как график прямой лежит выше графика параболы, то, применяя формулу (74), получим

$$S = \int_1^6 [(\frac{3}{2}x - 1) - \frac{1}{2}(x-2)^2]dx = \frac{1}{2}\int_1^6 (7x - x^2 - 6)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 6x\right)\Bigg|_1^6 = \frac{1}{2}\left(126 - 72 - 36 - \frac{7}{2} + \frac{1}{3} + 6\right) = \frac{125}{12}.$$

3. Указания к выполнению контрольной работы № 3

Задача 1. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y' = xy$.

Решение.

Запишем данное уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = xy$. Разделяя переменные, получим $\frac{dy}{y} = xdx$. Интегрируя, имеем $\int \frac{dy}{y} = \int xdx + C$, или $\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C$; $y = e^{\frac{1}{2}x^2+C}$ — общее решение данного уравнения.

Задача 2. Найдите общее решение дифференциального уравнения $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$.

Решение.

Запишем данное уравнение в виде $2xyy' = x^2 + y^2$. Разделив обе части этого уравнения на $2xy$, получим $y' = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)$. Так как правая часть является функцией вида $F\left(\frac{y}{x}\right)$, то данное уравнение является однородным. Полагая $\frac{y}{x} = u$, получим $y = ux$, $y' = u'x + u$, тогда $u'x + u = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + u\right)$, откуда $u'x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + u\right) - u$, или $x\frac{du}{dx} = \frac{1-u^2}{2u}$. Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получаем уравнение $\frac{2udu}{1-u^2} = \frac{dx}{x}$, откуда находим

$$\int \frac{2udu}{1-u^2} = \int \frac{dx}{x}; \qquad -\ln|1-u^2| + \ln C = \ln|x|;$$

$$\ln\left|\frac{C}{1-u^2}\right| = \ln|x|; \qquad \frac{C}{1-u^2} = x.$$

Так как $u = \frac{y}{x}$, то

$$\frac{C}{1-\frac{y^2}{x^2}} = x; \qquad \frac{Cx^2}{x^2-y^2} = x,$$

откуда $x^2 - y^2 = Cx$. Искомая функция $y = y(x, C)$ получена в неявном виде, т. е. найден ***общий интеграл*** дифференциального уравнения $x^2 - y^2 = Cx$.

Примечание. При вычислении интеграла произвольную постоянную записали в виде $\ln C$, так как последующие преобразования при таком выборе произвольной постоянной упрощаются.

Задача 3. Найдите частное решение дифференциального уравнения $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$.

Решение.

Данное уравнение — линейное. Будем искать общее решение в виде $y = u \cdot v$, тогда $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + uv \operatorname{tg} x = \sin 2x;$$

$$u'v + u(v' + v \operatorname{tg} x) = \sin 2x.$$

Выберем v так, чтобы $v' + v \operatorname{tg} x = 0$, тогда $\frac{dv}{dx} = -v \operatorname{tg} x$, $\frac{dv}{v} = -\operatorname{tg} x dx$. Интегрируя, получим $\ln|v| = \ln|\cos x|$, откуда $v = \cos x$. Если $v = \cos x$, то имеем $u' \cos x = \sin 2x$, $u' \cos x = 2 \sin x \cos x$, $u' = 2 \sin x$, $du = 2 \sin x dx$, $u = \int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C$. Тогда $y = u \cdot v = (C - 2\cos x)\cos x$. Получили общее решение данного уравнения $y = (C - 2\cos x)\cos x$. Выберем C из условия $y(0) = 0$. Тогда $0 = C - 2$, откуда $C = 2$. Искомое частное решение: $y = (2 - 2\cos x)\cos x$.

Задача 4. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y = 0$.

Решение.

Для нахождения общего решения составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 2 = 0$, $\lambda^2 = -2$; его корни $\lambda_1 = \sqrt{2}i$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}i$. Так как корни комплексные, то общее решение уравнения запишем в виде 3 (табл. 2), т. е. $y = C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x$.

Задача 5. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' = 0$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda = 0$, его корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$. Так как корни характеристического уравнения действительные и разные, то общее решение запишем в виде 1 (табл. 2), т. е. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{0x}$, или $y = C_1 e^{3x} + C_2$.

Задача 6. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Решение.

Для нахождения общего решения составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$; $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2$. Так как $\lambda_1 = \lambda_2$ — действительные числа, то общее решение запишем в виде 2 (табл. 2): $y = \mathrm{e}^{-2x}(C_1 x + C_2)$.

Задача 7. Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (задача Коши).

Решение.

Для нахождения общего решения составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$, $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$, $\lambda_1 = 2 + 3i$, $\lambda_2 = 2 - 3i$. Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — комплексные числа, то общее решение запишем в виде 3 (табл. 2): $y = \mathrm{e}^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, необходимо определить значения произвольных постоянных C_1 и C_2. Подставляя значения $x = 0$, $y = 1$, $y' = 0$ в выражения для y и $y' = 2\,\mathrm{e}^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \mathrm{e}^{2x}(-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x)$, получим систему для нахождения C_1 и C_2: $1 = C_1$, $0 = 2C_1 + 3C_2$, откуда $C_1 = 1$, $C_2 = -2/3$.

Следовательно, частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид $y = \mathrm{e}^{2x}(\cos 3x - \frac{2}{3} \sin 3x)$.

4. Указания к выполнению контрольной работы № 4

Задача 1. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найдите вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут: 1) четыре; 2) не менее четырех.

Решение.

1) Мы имеем схему Бернулли из пяти испытаний (посеяно пять семян). Событие $A = \{$семя взошло$\}$. По условию задачи $p = P(A) = 0,9$, тогда $q = 1 - p = 0,1$. Искомую вероятность $P_5(4)$ находим по формуле (77):

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0,9^4 \cdot 0,1 = \frac{3!}{4!(5-4)!} \cdot 0,9^4 \cdot 0,1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 0,9^4 \cdot 0,1 =$$

$= 0,328$.

2) Искомое событие B состоит в том, что из пяти посеянных семян взойдут или четыре, или пять. Таким образом, $P(B) = P_5(4) + P_5(5)$. Первое слагаемое найдено. Для вычисления второго слагаемого применяем формулу (77):

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0,9^5 \cdot 0,1^0 = 0,591.$$

Следовательно, $P(B) = 0,328 + 0,591 + P_5(5) = 0,919$.

Задача 2. Среди семян ржи 0,04% сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 5000 семян обнаружить 5 семян сорняков?

Решение.

Пусть $A = \{$выбранное семя — семя сорняка$\}$, мы имеем схему Бернулли в случае, когда число независимых испытаний $n = 5000$ — велико, а $p = P(A) = 0,0004$ — мало. Для нахождения искомой вероятности $P_{5000}(5)$ применяем формулу (78), где $a = np = 5000 \cdot 0,0004 = 2$. Таким образом,

$$P_{5000}(5) = \frac{2^5}{5!}\,\mathrm{e}^{-2} = \frac{32}{120} \cdot 0,1353 = 0,036.$$

Задача 3. Вероятность появления события A в каждом из 600 независимых испытаний равна 0,6. Найдите вероятность того, что событие a в этих испытаниях наступит: 1) ровно 330 раз; 2) не менее 330 и не более 375 раз.

Решение.

1) Применим локальную формулу Муавра – Лапласа (79). По условию задачи $n = 600$; $p = 0,6$; $k = 330$. Находим: $q = 1 - p = 0,4$. Определяем при этих данных значение x:

$$x = \frac{330 - 600 \cdot 0,6}{\sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = -2,5.$$

По таблице значений функции $\varphi(x)$ (прилож. 1) находим, что

$$\varphi(2,5) = 0,0175.$$

По формуле (79) найдём искомую вероятность:

$$P_{600}(330) = \frac{1}{\sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} \cdot 0,0175 = 0,0015.$$

2) В этом случае применима интегральная формула Муавра – Лапласа (80). По условию задачи $n = 600$; $p = 0,6$; $k_1 = 330$; $k_2 = 375$. Находим x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{330 - 600 \cdot 0,6}{\sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = -2,5;$$

$$x_2 = \frac{375 - 600 \cdot 0,6}{\sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = 1,25.$$

По таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ (прилож. 2) находим, что

$$\Phi(-2,5) = -0,4938; \qquad \Phi(1,25) = 0,3944.$$

По формуле (80) искомая вероятность

$$P_{600}(330 \leqslant k \leqslant 375) = \Phi(1,25) - \Phi(-2,5) = 0,3944 - (-0,4938) = 0,8882.$$

Задача 4. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону. Математическое ожидание $M_\xi = 5$; дисперсия $D_\xi = 0,644$. Найдите вероятность попадания этой случайной величины в интервал $(4; 7)$.

Решение.

Так как $a = M_\xi = 5$; $\sigma = \sqrt{D_\xi} = 0,8$, то по формуле (84) находим

$$P(4 < \xi < 7) = \Phi\left(\frac{7-5}{0,8}\right) - \Phi\left(\frac{4-5}{0,8}\right) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = 0,3944 - (-0,4938) = 0,8882.$$

Задача 5. По заданному закону распределения случайной величины ξ

ξ	20	30	40	50
P	0,1	0,6	0,1	0,2

найдите математическое ожидание M_ξ, дисперсию D_ξ, среднее квадратичное отклонение σ_ξ, вероятность $P(\xi < M_\xi + 3)$.

Решение.

Найдём математическое ожидание M_ξ по формуле (81):

$$M_\xi = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = 20 \cdot 0,1 + 30 \cdot 0,6 + 40 \cdot 0,1 + 50 \cdot 0,2 = 2 + 18 + 4 + 10 = 34.$$

Для того чтобы найти дисперсию, запишем закон распределения случайной величины ξ^2:

ξ^2	400	900	1600	2500
P	0,1	0,6	0,1	0,2

Найдём математическое ожидание M_ξ^2 :

$$M_\xi^2 = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + x_4^2p_4 = 400 \cdot 0,1 + 900 \cdot 0,6 + 1600 \cdot 0,1 + 2500 \cdot 0,2 = 40 + 540 + 160 + 500 = 1240.$$

Искомую дисперсию найдём по формуле (82):

$$D_\xi = M_{\xi^2} - M_\xi^2 = 1240 - 34^2 = 1240 - 1156 = 84.$$

Среднее квадратичное отклонение будет $\sigma_\xi = \sqrt{84} = 9,165$.

Чтобы найти вероятность $P(\xi < M_\xi + 3)$, посмотрим, какие значения случайной величины попадают в интервал $(-\infty, M_\xi + 3)$, т. е. в интервал $(-\infty, 37)$. Это $\xi = 20$ и $\xi = 30$.

Тогда

$$P(\xi < M_\xi + 3) = P(\xi = 20) + P(\xi = 30) = 0,1 + 0,6 = 0,7.$$

Задача 6. Найдите математическое ожидание M_ξ, дисперсию D_ξ, среднее квадратичное отклонение σ_ξ, вероятность $P(\xi < M_\xi + 1/2)$ для непрерывной случайной величины, заданной функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Решение.

Найдём плотность вероятности $p(x)$:

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Найдём математическое ожидание M_ξ по формуле

$$M_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Найдём дисперсию D_ξ по формуле

$$D_\xi = M_{\xi^2} - M_\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx - M_\xi^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

$$P(\xi < M_\xi + 1/2) = P(\xi < 1) = F(1) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1.$$

Задача 7. Лесопитомник общей площадью 10 га обслуживают 15 рабочих. Разработаны две технологии производства. По первой технологии: работает один человек и производит 200 тыс. сеянцев на 1 га ежегодно. По второй технологии: работают 2 человека и производят 300 тыс. сеянцев на 1 га ежегодно. Требуется определить, сколько га нужно обрабатывать по первой технологии, а сколько — по второй, чтобы годичное производство сеянцев было максимальным.

Решение.

Составим математическую модель задачи. Предположим, что x_1 га будет обработано по первой технологии, а x_2 га — по второй. Тогда годичное производство сеянцев будет равно

$$z = 200x_1 + 300x_2 \text{ (тыс.сеянцев).}$$

По смыслу задачи должны выполняться ограничения:

1) $x_1 + x_2 \leqslant 10$, так как общая площадь 10 га;

2) $x_1 + 2x_2 \leqslant 15$, так как на каждом из x_1 га работает 1 человек, а на каждом из x_2 га — 2 человека. Всего же лесопитомник обслуживают 15 человек;

3) $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$.

Таким образом, получили задачу линейного программирования с двумя переменными в нормальной форме:

$$z = 200x_1 + 300x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 10, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 15; \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

Решим задачу графическим методом. На плоскости x_1Ox_2 строим область D по ограничениям. Для этого на плоскости построим (граничные) прямые (l_1) $x_1 + x_2 = 10$, (l_2) $x_1 + 2x_2 = 15$, (l_3) $x_1 = 0$, (l_4) $x_2 = 0$ (рис. 8).

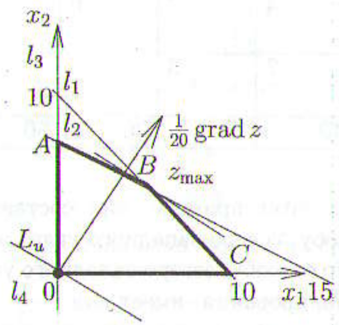


Рис. 8

Подставляя координаты какой-нибудь точки, не лежащей на граничной прямой, в левую часть каждого из неравенств, установим, какие полуплоскости они определяют.

Пересечением полученных полуплоскостей будет область D — четырехугольник $OABC$. Из z получим grad $z = \{200; 300\}$; построим его (или вектор, сонаправленный ему) из начала координат. Построим линию уровня $z = 0$, т. е. прямую $L_u : 200x_1 + 300x_2 = 0$ (она перпендикулярна grad z). Перемещая линию уровня параллельно самой себе в направлении вектора grad z, определяем, что в точке B целевая функция принимает максимальное значение. Найдем координаты точки B (это точка пересечения прямых l_1 и l_2). Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10, \\ x_1 + 2x_2 = 15; \end{cases}$$

$$x_1 = 5(\text{га});\ x_2 = 5(\text{га}).$$

Таким образом, оптимальный план $X^* = (5; 5)$ и $z_{\max} = 200\times$ $\times 5 + 300 \cdot 5 = 2500$ (тыс. сеянцев в год).

Задача 8. Решите транспортную задачу, условие которой дано в таблице.

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_n	Запасы
A_1	5	4	1	2	60
A_2	4	2	6	3	40
A_3	7	3	5	4	35
Потребности	40	25	20	50	135

Решение.

Покажем на этом примере, как составляется первоначальный план по способу "северо-западного угла" и способу "минимальной стоимости". По способу "северо-западного угла" первоначальный план (матрица планирования) имеет вид

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	5 40	4 20	1	2	60
A_2	4	2 5	6 20	3 15	40
A_3	7	3	5	4 35	35
Потребности	40	25	20	50	135

В клетку первой строки и первого столбца, т. е. (1, 1) завозим груз x_{11} в количестве $x_{11} = \min\{b_1, a_1\} = \min\{60, 40\} = 40$. Потребности потребителя B_1 удовлетворены. Так как у первого поставщика остались запасы в количестве $a_1 - b_1 = 60 - 40 = 20$, то переходим к заполнению второй клетки первой строки, т. е. (1, 2). В эту клетку завезем груз x_{12} в количестве $x_{12} = \min\{a_1 - b_1, b_2\} = \min\{20, 25\} = 20$. Весь груз из первого пункта вывезен, поэтому переходим ко второй строке. Так как потребности B_2 не удовлетворены, то в клетку (2, 2) завозим груз x_{22} в количестве $x_{22} = \min\{5, 40\} = 5$. Потребности B_2 удовлетворены, но груз из A_2 не вывезен полностью, поэтому завозим груз в клетку (2, 3) в количестве $x_{23} = \min\{20, 35\} = 20$. Процесс продолжаем до тех пор, пока не будет вывезен весь груз из

пунктов A_1, A_2, A_3 и не будут удовлетворены все потребности B_1, B_2, B_3, B_4.

В результате получаем матрицу перевозок.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 20 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}.$$

Полученный первоначальный план X_1 является невырожденным, так как число загруженных клеток $m + n - 1 = 6$. Общая стоимость перевозки грузов по этому плану равна

$$z_1 = 5 \cdot 40 + 4 \cdot 20 + 2 \cdot 5 + 6 \cdot 20 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 35 = 595.$$

Построим первоначальный план этой задачи по способу минимальной стоимости

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_n	Запасы
A_1	5	4	1 20	2 40	60
A_2	4 5	2 25	6	3 10	40
A_3	7 35	3	5	4	35
Потребности	40	25	20	50	135

Выбираем в таблице наименьший тариф. Он равен единице. Ему соответствует клетка (1, 3). В эту клетку помещаем груз в количестве $\min\{20; 60\} = 20$ и исключаем из рассмотрения третий столбец. В оставшейся таблице наименьший тариф равен двум. Ему соответствуют две клетки (1,4) и (2,2). Выбираем любую, например (1,4), и помещаем в неё груз в количестве $\min\{50; 60 - 20\} = 40$ и исключаем из рассмотрения первую строку. В оставшейся таблице опять выбираем наименьший тариф и продолжаем процесс до тех пор, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены. В результате получаем матрицу перевозок

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 5 & 25 & 0 & 10 \\ 35 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

План X_2 является невырожденным ($m+n-1=6$).

Общая стоимость перевозки грузов по этому плану равна

$$z_2 = 1\cdot 20 + 2\cdot 40 + 4\cdot 5 + 2\cdot 25 + 3\cdot 10 + 7\cdot 35 = 445.$$

Решим задачу методом потенциалов, исходя из плана, построенного по способу минимальной стоимости (так как $z_2 < z_1$) (отметим, что план X_2 — невырожден и ацикличен). Каждому поставщику поставим в соответствие числа u_i, $i=1,2,3$, а каждому потребителю числа v_j, $j=1,2,3,4$.

По занятым клеткам составляем систему уравнений (97) для определения потенциалов u_i и v_j:

$$\begin{cases} u_1+v_3=1,\\ u_1+v_4=2,\\ u_2+v_1=4,\\ u_2+v_2=2,\\ u_2+v_4=3,\\ u_3+v_1=7. \end{cases}$$

Положим, $u_1=0$, тогда $v_3=1$, $v_4=2$, $u_2=1$, $v_1=3$, $v_2=1$, $u_3=4$.

Проверяем условие оптимальности (98) для свободных клеток:

$s_{11}=5-(0+3)=2>0$; $s_{12}=4-(0+1)=3>0$;

$s_{23}=6-(1+1)=4>0$; $s_{32}=3-(4+1)=-2<0$;

$s_{33}=5-(4+1)=0$; $s_{34}=4-(4+2)=-2<0$.

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы	u_i
A_1	5	4	1 20	2 40	60	$u_1=0$
A_2	+4 5	−2 $\boxed{25}$	6	3 10	40	$u_2=1$
A_3	$\boxed{-7}$ 35	+3	5	4	35	$u_3=4$
Потребности	40	25	20	50	135	
v_j	$v_1=3$	$v_2=1$	$v_3=1$	$v_4=2$		

Поскольку $s_{32}<0$ и $s_{34}<0$, то план является неоптимальным. Так как $s_{32}=s_{34}$, то объявим, например, клетку (3, 2) — перспективной.

Эту клетку необходимо заполнить (загрузить). Для клетки (3, 2) построим цикл (3, 2),(2, 2),(2, 1),(3, 1) (в таблицах цикл отмечен пунктиром). Проставим знаки в цикле поочередно, начиная со свободной клетки, "+" и "–". Найдём минимальную перевозку в отрицательно обозначенных вершинах цикла: $\Theta_1=\min\{25;35\}=25$. Чтобы общий баланс цикла не изменился, необходимо в клетки цикла со знаком "+" прибавить 25 единиц груза, а из клеток со знаком "–" вычесть столько же единиц.

Получим новый план перевозок

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы	u_i
A_1	5	4	1 20	2 40	60	$u_1=0$
A_2	+4 30	2	6	−3 10	40	$u_2=1$
A_3	−7 10	3 25	5	+4	35	$u_3=4$
Потребности	40	25	20	50	135	
v_j	$v_1=3$	$v_2=-1$	$v_3=1$	$v_4=2$		

Определяем потенциалы u_i и v_j из системы уравнений (97):

$$\begin{cases} u_1+v_3=1,\\ u_1+v_4=2,\\ u_2+v_1=4,\\ u_2+v_4=3,\\ u_3+v_1=7,\\ u_3+v_2=3. \end{cases}$$

Положим, $u_1=0$, тогда $v_3=1$, $v_4=2$, $u_2=1$, $v_1=3$, $u_3=4$, $v_2=-1$. Проверяем условие оптимальности (98):

$s_{11}=5-(0+3)=2>0$; $s_{12}=4-(0-1)=5>0$;

$s_{22}=2-(1-1)=2>0$; $s_{23}=6-(1+1)=4>0$;

$s_{33}=5-(4+1)=0$; $s_{34}=4-(4+2)=-2<0$.

Так как $s_{34}<0$, то план является неоптимальным. Строим цикл с вершиной в клетке (3, 4): (3, 4), (2, 4), (2, 1), (3, 1).

Определяем $\Theta_2 = \min\{10; 10\} = 10$. Следовательно, 10 единиц груза нужно добавить в клетки (3, 4) и (2, 1) и убрать из клеток (2, 4) и (3, 1), причем в клетке, например (2, 4), оставляем "базисный" нуль, чтобы план был невырожденным.

Получаем новый план перевозок и определяем потенциалы u_i и v_j из системы (97):

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = 1, \\ u_1 + v_4 = 2, \\ u_2 + v_1 = 4, \\ u_2 + v_4 = 3, \\ u_3 + v_2 = 3, \\ u_3 + v_4 = 4. \end{cases}$$

Положим, $u_1 = 0$, тогда $v_3 = 1$, $v_4 = 2$, $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $v_2 = 1$, $v_1 = 3$.

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы	u_i
A_1	5	4	1 20	2 40	60	$u_1 = 0$
A_2	4 40	2	6	3 0	40	$u_2 = 1$
A_3	7	3 25	5	4 10	35	$u_3 = 2$
Потребности	40	25	20	50	135	
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$		

Проверяем условие оптимальности (98):

$s_{11} = 5 - (0 + 3) = 2 > 0;$ $\quad s_{12} = 4 - (0 + 1) = 3 > 0;$

$s_{22} = 2 - (1 + 1) = 0;$ $\quad s_{23} = 6 - (1 + 1) = 4 > 0;$

$s_{31} = 7 - (2 + 3) = 2 > 0;$ $\quad s_{33} = 5 - (2 + 1) - 2 > 0.$

Так как для всех свободных клеток выполнено условие $s_{ij} \geqslant 0$, то план оптимален.

Матрица оптимальных перевозок

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Этому плану соответствует минимальная стоимость перевозок:

$$z_{\min} = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 40 + 3 \cdot 25 + 4 \cdot 10 = 375 \text{ (денежных единиц)}.$$

ГЛАВА 4

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

1. Контрольная работа № 1

В задачах 1–10 даны координаты вершин треугольника ABC. Найдите: 1) длину стороны AB; 2) уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты; 3) уравнение высоты CD и её длину. Сделайте чертёж.

1. $A(-1;4)$, $B(11;-5)$, $C(15;17)$.
2. $A(2;5)$, $B(14;4)$, $C(18;18)$.
3. $A(-4;10)$, $B(8;1)$, $C(12;23)$.
4. $A(1;0)$, $B(13;-9)$, $C(17;13)$.
5. $A(-9;6)$, $B(3;-3)$, $C(7;19)$.
6. $A(0;2)$, $B(12;-7)$, $C(16;15)$.
7. $A(-10;9)$, $B(2;0)$, $C(6;22)$.
8. $A(-12;-1)$, $B(0;-10)$, $C(4;12)$.
9. $A(-5;7)$, $B(7;-2)$, $C(11;20)$.
10. $A(-8;-3)$, $B(4;-12)$, $C(8;10)$.

В задачах 11–20 составьте уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от данной точки $A(x,y)$ и данной прямой $y=b$. Полученное уравнение приведите к каноническому виду и постройте кривую.

11. $A(2;3)$, $y=1$. **12.** $A(3;4)$, $y=3$.
13. $A(4;-1)$, $y=-2$. **14.** $A(2;-3)$, $y=2$.
15. $A(3;-2)$, $y=-3$. **16.** $A(1;-1)$, $y=3$.
17. $A(-2;-3)$, $y=-1$. **18.** $A(-4;3)$, $y=-1$.
19. $A(3;-4)$, $y=-2$. **20.** $A(2;5)$, $y=1$.

В задачах 21–30 найдите указанные пределы.

21. a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-8x+4}{2x^2-x-6}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 2x}{4x^2}$.

22. a) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{7x^2+32x-15}{2x^2+7x-15}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{2\arcsin^2 3x}$.

23. a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2-2x-5}{3+x-2x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 5x}{3x}$.

24. a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-8x-3}{5x^2-17x+6}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 3x}$.

25. a) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{10x-x^2-24}{2x^2-9x+4}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{4x\sin 3x}$.

26. a) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{6x^2+13x+2}{6-x-2x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}6x-\sin 6x}{2x^3}$.

27. a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+5x-7}{3-2x-x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^3 5x}{4x^2\operatorname{tg}2x}$.

28. a) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{3-8x-3x^2}{3x^2+7x-6}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 6x-1}{x\sin 4x}$.

29. a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{5x-2x^2-3}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{1-\cos x}$.

30. a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{8-x^3}{6x-x^2-8}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3}{x\sin 3x(1-\operatorname{ctg}^2 x)}$.

В задачах 31–40 найдите $\frac{dy}{dx}$, пользуясь формулами дифференцирования.

31. a) $y=\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2-7x+3}}$; b) $y=5^{\sin 7x}\cos(2x+5\,e^2)$;
c) $y=\ln\arccos\sqrt{1-3x^2}$.

32. a) $y=\dfrac{7x+4}{\sqrt{5x^2+2x-1}}$; b) $y=4^{\sin(1-2x)}\ln(3+7x)$;
c) $y=\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{1-3x^2}$.

33. a) $y=\dfrac{3x^2-2}{\sqrt{x^3+x^2-3}}$; b) $y=2^{\cos(9x-1)}\cos 4x$;
c) $y=\ln\cos(1+3x^3)$.

34. a) $y=\dfrac{5-2x}{\sqrt{9x^3-3x+1}}$; b) $y=3^{\operatorname{tg}(1-3x)}\cos^3 9x$;
c) $y=e^{2\arccos(1-3x^2)}$.

35. a) $y=\dfrac{2x^3+x}{\sqrt{7x+3-x^2}}$; b) $y=e^{\cos 9x}\operatorname{arctg}(x^3+2x)$;
c) $y=\ln\operatorname{tg}(1-3x^2)$.

36. a) $y = \dfrac{4x+1}{\sqrt{x^4-3x^2+7}}$; b) $y = 3^{\mathrm{ctg}\,3x}\sin^4(1-5x)$;
c) $y = e^{x\sqrt{2+3x^3}}$.

37. a) $y = \dfrac{x^2-3x+1}{\sqrt{x^5-x+3}}$; b) $y = 6^{\cos 3x}\sin 3x^2$;
c) $y = \ln\arcsin\frac{2}{\sqrt{7x}}$.

38. a) $y = \dfrac{3x}{\sqrt{x^3-5x^2+2}}$; b) $y = 3^{\mathrm{arctg}\,2x}\ln(x-3x^2)$;
c) $y = \mathrm{arcctg}(\sqrt{1+4x^2})$.

39. a) $y = \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4-2x+3}}$; b) $y = e^{\cos 6x}\sqrt{1-6x^2}$;
c) $y = \arccos\ln(1+2x^3)$.

40. a) $y = \dfrac{2x^3-5}{\sqrt{6x^3+3x^2-2}}$; b) $y = 7^{\arcsin(5x-9)}\,\mathrm{tg}(2+\sqrt{x})$;
c) $y = \ln\mathrm{arctg}(3x^2-4)$.

В задачах 41–50 найдите $\frac{dy}{dx}$.

41. $x^2-3x+y^2-3y=1$. **42.** $e^3-x^3y-x\,\mathrm{tg}\,2y=3$.
43. $\sin(3-x)+\mathrm{arctg}\,y=2$. **44.** $2^{x-7}-2x^3-e^{2y}=0$.
45. $2y^3-\cos(2x-11)=3xy$. **46.** $3y^2-\ln(1-3x^3)=7$.
47. $\sin x+xy^2+3y=1$. **48.** $x-3-2yx^3-e^{3-y}=6$.
49. $\sin y^2-\cos 2x+7xy=5$. **50.** $\sin y-\sqrt{1+x^3}=8$.

В задачах 51–60 найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на заданном отрезке.

51. $y=2x^3-15x^2+24x-5$, $[0;3]$. **52.** $y=-x^3+3x^2-4$, $[1;3]$.
53. $y=-2x^3-9x^2+6$, $[-2;1]$. **54.** $y=x^3+2x^2-7x$, $[-2;2]$.
55. $y=2x^3-3x^2-12x+1$, $[-2;4]$. **56.** $y=x^3-3x+1$, $[-1;-1]$.
57. $y=x^3-6x^2+2$, $[-2;2]$. **58.** $y=-3x^3+4x^2+x$, $[0;2]$.
59. $y=x^3-3x^2+3$, $[1;3]$. **60.** $y=x^3-12x+7$, $[0;3]$.

2. Контрольная работа № 2

В задачах 61–70 найдите неопределённые интегралы методом подведения функции под знак дифференциала.

61. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2(8x-3)}$. **62.** $\displaystyle\int\frac{x^3}{x^4+1}dx$. **63.** $\displaystyle\int\frac{e^x}{e^x-1}dx$.

64. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{5x-31}}$. **65.** $\displaystyle\int e^{2x-3}\,dx$. **66.** $\displaystyle\int\frac{dx}{8x+7}$.

67. $\displaystyle\int e^{8x-3}\,dx$. **68.** $\displaystyle\int\sin(3x-7)dx$. **69.** $\displaystyle\int e^{1-3x}\,dx$.

70. $\displaystyle\int\frac{dx}{(7x+1)^8}$.

В задачах 71–80 найдите неопределённые интегралы методом замены переменной.

71. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(3x-7)^3}}$. **72.** $\displaystyle\int e^{\sin x}\cos x dx$. **73.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2(7x+2)}$.

74. $\displaystyle\int\mathrm{tg}\,9x dx$. **75.** $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$. **76.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x-5}}$.

77. $\displaystyle\int\sin^4 x\cdot\cos x dx$. **78.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$. **79.** $\displaystyle\int\sin(5x-9)dx$.

80. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}$.

В задачах 81–90 найдите неопределённые интегралы.

81. $\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^2+x-3}dx$. **82.** $\displaystyle\int\frac{dx}{(9x-1)^2}$. **83.** $\displaystyle\int\frac{dx}{8x^2+1}$.

84. $\displaystyle\int e^{x^4}\cdot 8x^3dx$. **85.** $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x^3-3x+1}dx$. **86.** $\displaystyle\int\cos^3 x\sin x dx$.

87. $\displaystyle\int\frac{dx}{9x^2+1}$. **88.** $\displaystyle\int\frac{x^2}{4x^3-1}dx$. **89.** $\displaystyle\int\frac{2x^2}{9x^3-4}dx$.

90. $\displaystyle\int\cos(9x-4)dx$.

В задачах 91–100 вычислите определённые интегралы.

91. $\displaystyle\int_1^2\frac{\ln x}{2x^2}dx$. **92.** $\displaystyle\int_{-1}^0(2x+3)\,e^{-2x}dx$. **93.** $\displaystyle\int_0^2\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}dx$.

94. $\int\limits_0^{\pi} x\cos\frac{x}{2}dx$. 95. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (3x+2)\sin 2x dx$. 96. $\int\limits_0^{1} \operatorname{arctg} x dx$.

97. $\int\limits_{-1}^{2} 3x\ln(x+2)dx$. 98. $\int\limits_0^{\pi} 3x\sin 5x dx$. 99. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} 4\arcsin 2x dx$.

100. $\int\limits_0^{2} \ln(x^2+4)dx$.

В задачах 101–110 вычислите с помощью определённого интеграла площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Сделайте чертёж.

101. $y = -\frac{1}{4}(1-x)^2$, $x - 2y + 11 = 0$.

102. $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2$, $x - 2y + 10 = 0$.

103. $y = \frac{1}{4}(3-x)^2$, $x - 2y + 9 = 0$.

104. $y = \frac{1}{4}(x-4)^2$, $x - 2y + 8 = 0$.

105. $y = -\frac{1}{4}(x-5)^2$, $x - 2y + 7 = 0$.

106. $y = -\frac{1}{3}(1-x)^2$, $y - 2x + 2 = 0$.

107. $y = \frac{1}{3}(2-x)^2$, $y - 2x - 5 = 0$.

108. $y = \frac{1}{2}(3-x)^2$, $y - 2x + 6 = 0$.

109. $y = -\frac{1}{3}(x-4)^2$, $y - 2x + 8 = 0$.

110. $y = \frac{1}{3}(5-x)^2$, $y - 2x + 10 = 0$.

3. Контрольная работа № 3

В задачах 111–120 найдите общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения первого порядка.

111. $y' - \frac{y}{x} = 0$.
112. $y'\sin x = y\cos x$.
113. $y' = x\operatorname{tg} y$.
114. $(x + xy)dy + (y - xy)dx = 0$.
115. $(1-x^2)y' = 2x - xy$.
116. $(x+1)y' = y(x^3 - x)$.
117. $y' = \frac{y}{e^{2x}}$.
118. $2x^3y' = 2yx^2 - y$.
119. $y' + y\operatorname{tg} x = 0$.
120. $(x^2 - x^2y)y' = y^2x^2 - y^2x^3$.

В задачах 121–130 найдите частное решение дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

121. $y' + \frac{xy}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$, $y(0) = 1$.

122. $y'\cos x - y\sin x = 2$, $y(0) = \pi/3$.

123. $y' + 2y\operatorname{tg} 2x = \sin 4x$, $y(0) = 0$.

124. $y' + y = -e^{-2x}$, $y(0) = 1$.

125. $xy' - y = x^2\cos x$, $y(\pi/2) = \pi/2$.

126. $xy' + y = -x^2$, $y(1) = 1$.

127. $y'\sin x - y\cos x = 1$, $y(\pi/2) = 0$.

128. $xy' + 2y = 3x^2$, $y(1) = -1$.

129. $y' + 2xy = 3x^2e^{-x^2}$, $y(0) = 0$.

130. $y' - 2xy = 3x^2e^{x^2}$, $y(0) = 2$.

В задачах 131–140 найдите общее решение дифференциального уравнения второго порядка.

131. $y'' - 4y' + 5y = 0$.
132. $y'' + 4y = 0$.
133. $y'' + 9y = 0$.
134. $y'' - 4y' + 8y = 0$.
135. $y'' - 8y' + 20y = 0$.
136. $y'' + 6y' + 13y = 0$.
137. $y'' + 4y' + 5y = 0$.
138. $y'' + 2y' + 2y = 0$.
139. $y'' + 2y' + 5y = 0$.
140. $y'' - 6y' + 13y = 0$.

В задачах 141–150 найдите частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

141. $y'' - 2y' - 8y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.

142. $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$.

143. $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

144. $y'' + 9y'$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.
145. $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.
146. $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
147. $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 6$.
148. $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
149. $y'' - 2y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
150. $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

4. Контрольная работа № 4

Решите задачи по теории вероятностей.

151. В куче картофеля имеется 20% клубней, поражённых болезнью. Какова вероятность того, что среди пяти взятых наудачу клубней поражённых болезнью окажется: а) два клубня; б) по крайней мере один клубень?

152. Опытом установлено, что в среднем 70% массовой продукции, выпускаемой некоторой мастерской, принадлежит первому сорту. Какова вероятность того, что из 6 взятых наудачу изделий этой мастерской первого сорта окажется: а) два изделия; б) не менее пяти изделий?

153. Всхожесть семян томатов составляет 95%. Найдите вероятность того, что из десяти посеянных семян взойдут: а) семь; б) хотя бы одно.

154. Доля плодов, поражённых болезнью в скрытой форме, составляет 25%. Случайным образом отбирается 8 плодов. Определите вероятность того, что в выборке поражённых болезнью окажется: а) четыре плода; б) не более трех плодов.

155. Прибор состоит из пяти узлов. Вероятность безотказной работы в течение смены для каждого узла равна 0,8. Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что за смену откажут: а) три узла; б) не более четырёх узлов.

156. В зимнее время вероятность своевременного прибытия поезда на станцию принимается равной 0,8. Определите вероятность того, что из четырёх ожидаемых поездов прибудут своевременно: а) два поезда; б) не более двух поездов.

157. В некотором водоёме карпы составляют 80% всех рыб. Какова вероятность того, что среди выловленных в этом водоёме семи рыб окажется: а) пять карпов; б) не менее четырёх карпов?

158. В хлопке 70% длинных волокон. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу шести волокон длинных окажется: а) три; б) не менее четырёх?

159. Среди лесопосадочного материала 30% составляют саженцы сосны. Какова вероятность того, что среди выбранных наудачу восьми саженцев сосен окажется: а) пять; б) не более трёх?

160. В выбранной партии деталей доля бракованных составляет 20%. Найдите вероятность того, что среди взятых наугад шести деталей бракованных окажется: а) две; б) не более трёх.

161. Семена содержат 0,2% сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 2000 семян обнаружить 7 семян сорняков?

162. Завод отправил потребителю 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найдите вероятность того, что на базу прибудет менее трёх негодных изделий.

163. Вероятность появления бракованной детали в выбранной партии равна 0,005. Найдите вероятность того, что из 800 случайно отобранных деталей окажется 4 бракованных.

164. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение часа равна 0,003. Найдите вероятность того, что за час откажут 3 элемента.

165. Производство даёт 1% брака. Какова вероятность того, что из наугад взятых на исследование 1200 изделий выбраковано будет ровно 19?

166. Вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,01. Свёрла случайным образом укладывают в коробки по 100 штук. Найдите вероятность того, что число бракованных свёрл окажется не более пяти.

167. Книга издана тиражом в 50 000 экземпляров. Вероятность того, что в книге имеется дефект брошюровки, равна 0,0001. Найдите вероятность того, что тираж содержит 8 неправильно сброшюрованных книг.

168. Вероятность того, что любой абонент звонит на коммутатор в течение часа, равна 0,005. Телефонная станция обслуживает 800 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 7 абонентов?

169. Вероятность выживания бактерий после радиоактивного облучения равна 0,005. Найдите вероятность того, что после облучения из 800 бактерий выживут более пяти бактерий.

170. Вероятность того, что изделие не выдержит испытаний, равна 0,002. Найдите вероятность того, что из 1500 наудачу взятых изделий не выдержат испытаний не менее пяти изделий.

171. Вероятность выхода из строя за время t одного конденсатора равна 0,2. Определите вероятность того, что за время t из 150 конденсаторов выйдут из строя: а) от 15 до 35 конденсаторов; б) ровно 24 конденсатора.

172. Вероятность допущения дефекта при производстве механизмов равна 0,3. Наудачу отбираются 500 механизмов. Какова вероятность того, что с дефектами будут: а) от 110 до 256 механизмов; б) ровно 147 механизмов?

173. Опытным путём установлено, что доля коротких волокон хлопка-сырца составляет в среднем 10% в каждой подопытной партии. Какова вероятность появления при 1700 опытах: а) от 130 до 180 коротких волокон; б) ровно 175 коротких волокон?

174. К электросети подключено 120 приборов, каждый мощностью 5 квт. Известно, что каждый прибор потребляет в данный момент энергию с вероятностью, равной 0,8. Найдите вероятность того, что потребляемая в данный момент мощность окажется: а) от 420 до 620 квт; б) ровно 500 квт.

175. Имеется 2000 клубней картофеля, среди которых 500 нового сорта. Определите вероятность того, что из 200 наудачу взятых клубней окажется: а) от 48 до 69 нового сорта; б) ровно 55 нового сорта.

176. Всхожесть семян оценивается вероятностью 0,9. Какова вероятность того, что из 400 высеянных семян взойдут: а) от 340 до 369 семян; б) ровно 370 семян?

177. Процент вывода гусят из яиц в среднем равен 70. В инкубатор заложено 250 яиц. Найдите вероятность того, что выведется: а) от 168 до 182 гусят; б) ровно 175 гусят.

178. Из большой поступившей партии зерна (пшеницы с рожью), в которой доля ржи равна 0,3, случайным образом для пробы берут 700 зёрен. Какова вероятность того, что число зёрен ржи в пробе: а) от 185 до 215; б) ровно 200?

179. Завод сортовых семян выпускает гибридные семена кукурузы. Известно, что семена первого сорта составляют 80%. Определите вероятность того, что из взятых наудачу для проверки 180 семян будет: а) от 143 до 151 первого сорта; б) ровно 148 первого сорта.

180. В ОТК поступила партия изделий. Вероятность того, что наудачу взятое изделие стандартно, равна 0,6. Найдите вероятность того, что из 150 проверенных изделий стандартных окажется: а) от 83 до 97; б) ровно 88 изделий.

В задачах 181 — 190 по заданному закону распределения случайной величины ξ найти математическое ожидание M_ξ, дисперсию D_ξ, среднее квадратичное отклонение σ_ξ, вероятности $P(\xi < M_\xi+3)$, $P(\xi = M_\xi+1)$, $P(\xi = M_\xi)$.

181.

ξ	45	47	51	53
p	0,2	0,3	0,4	0,1

182.

ξ	23	25	29	31
p	0,3	0,2	0,4	0,1

183.

ξ	60	64	68	73
p	0,1	0,3	0,4	0,2

184.

ξ	17	21	26	28
p	0,2	0,4	0,3	0,1

185.

ξ	21	25	27	29
p	0,1	0,4	0,2	0,3

186.

ξ	24	26	28	30
p	0,2	0,2	0,4	0,2

187.

ξ	12	14	17	21
p	0,1	0,4	0,2	0,3

188.

ξ	25	27	29	32
p	0,2	0,3	0,4	0,1

189.

ξ	24	27	29	32
p	0,2	0,3	0,4	0,1

190.

ξ	52	54	57	59
p	0,1	0,4	0,3	0,2

В задачах 191 — 200 дано, что детали, выпускаемые цехом, по размеру диаметра распределены по нормальному закону. Стандартный диаметр детали (математическое ожидание) равен a мм, среднее квадратичное отклонение — σ мм. Найдите дисперсию и вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали будет больше α мм и меньше β мм. Значения a, σ, α, β для каждого варианта даны ниже.

191. $a = 25$; $\sigma = 2$; $\alpha = 20$; $\beta = 27$.

192. $a = 50$; $\sigma = 5$; $\alpha = 45$; $\beta = 52$.

193. $a = 40$; $\sigma = 3$; $\alpha = 34$; $\beta = 43$.

194. $a = 20$; $\sigma = 3$; $\alpha = 17$; $\beta = 26$.

195. $a = 35$; $\sigma = 4$; $\alpha = 27$; $\beta = 37$.
196. $a = 36$; $\sigma = 4$; $\alpha = 30$; $\beta = 40$.

197. $a = 45$; $\sigma = 5$; $\alpha = 40$; $\beta = 48$.
198. $a = 60$; $\sigma = 5$; $\alpha = 54$; $\beta = 70$.

199. $a = 30$; $\sigma = 3$; $\alpha = 24$; $\beta = 33$.
200. $a = 48$; $\sigma = 4$; $\alpha = 45$; $\beta = 56$.

201–210. Лесхозу требуется не более a трехтонных машин и не более $(a-2)$ пятитонных автомашин. Отпускная цена машины первой марки 2 тыс. ден. единиц, а второй марки — 4 тыс. ден. единиц. Лесхоз может выделить для приобретения автомашины $(6a-20)$ тыс. ден. единиц. Сколько следует приобрести автомашин каждой марки в отдельности, чтобы их общая (суммарная) грузоподъемность была максимальной?

Постройте математическую модель и решите задачу графическим методом.

Номер задачи	**201**	**202**	**203**	**204**	**205**	**206**	**207**	**208**	**209**	**210**
a	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

211. Найдите схему снабжения лесоматериалами предприятий-потребителей, при которой сумма затрат на производство и доставку всех лесоматериалов была бы наименьшей. Себестоимость производства и доставки за 1 м^3 задана в таблице.

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	Объем производства
A_1	8	10	9	100
A_2	9	6	11	200
A_3	10	12	13	150
Потребности	180	100	170	

212. В четырех хранилищах A_1, A_2, A_3, A_4 имеется соответственно 40, 50, 60, 30 т топлива. Требуется спланировать перевозки топлива к трём потребителям B_1, B_2, B_3, спрос которых соответственно равен 60 т, 80 т, 40 т, так, чтобы затраты на транспортировку были минимальными. Стоимость перевозок 1 т указана в таблице.

Стоимость / Хранилище	B_1	B_2	B_3
A_1	4	3	5
A_2	6	2	1
A_3	7	4	2
A_4	5	6	3

213. Имеется четыре леспромхоза с заданными ресурсами пиловочника и три лесопильных завода с заданными объемами потребления пиловочника. Общий объем ресурсов пиловочника во всех леспромхозах равен общему объему потребления пиловочника лесозаводами. Пиловочник может быть доставлен из любого леспромхоза на каждый лесопильный завод. Требуется составить план перевозки пиловочника из леспромхозов на лесозаводы, чтобы все ресурсы пиловочника в леспромхозах были использованы и чтобы потребность в пиловочнике всех лесозаводов была удовлетворена. При составлении плана обеспечьте минимальные затраты на перевозку.

В таблице приведены затраты на перевозку пиловочника из леспромхозов на лесозаводы.

Лесозаводы / Леспромхоз	I	II	III	Ресурсы пиловочника
I-й	2	3	5	300
II-й	4	2	1	400
III-й	3	4	3	300
IV-й	1	2	2	400
Потребности	650	350	400	

214. Три предприятия-отправителя лесоматериалов имеют ресурсы: первое — 20 тыс. м^3, второе — 30 тыс. м^3, третье — 50 тыс. м^3, потребность предприятий-получателей лесоматериалов соответственно 30 тыс. м^3, 40 тыс. м^3, 30 тыс. м^3. Себестоимость перевозки 1 м^3 задана в таблице.

Получатель / Отправитель	I-е	II-е	III-е
I-е	2	1	3
II-е	1	2	2
III-е	3	4	3

Составьте план перевозки лесоматериалов при минимальных затратах на перевозку.

215. Перевозятся пиломатериалы из двух пунктов A и B к трём местам назначения I, II, III. Ежедневно отправляется 65 м^3, в том числе из пункта A — 40 м^3, из B — 25 м^3. В пункты назначения должно поступать следующее количество пиломатериалов: в пункт I — 10 м^3, в пункт II — 35 м^3, в пункт III — 20 м^3. Расстояния от пункта A до пунктов назначения равны 7 км, 2 км, 4 км, а от пункта B — 3 км, 8 км, 9 км. Составьте план перевозки, обеспечивающий наименьший общий пробег грузов.

216. Имеются три отправителя лесоматериалов и три получателя пиломатериалов. Ресурсы поставщиков и потребности предприятий-потребителей в пиломатериалах, а также себестоимость перевозок приведены в таблице

Потребители / Поставщики	I-й	II-й	III-й	Ресурсы
I-й	2	3	2	50
II-й	3	2	1	75
III-й	1	1	3	125
Потребность	100	50	100	

Составьте оптимальный план перевозок.

217. Имеются три поставщика пиломатериалов и четыре потребителя. Исходные данные приведены в таблице.

Потребители / Поставщики	I-й	II-й	III-й	IV-й	Ресурсы
I-й	2	3	1	2	50
II-й	3	2	5	4	80
III-й	1	3	4	5	70
Потребность	20	30	30	120	

Составьте оптимальный план перевозок.

218. Ресурсы пиловочника и потребности в нем лесозаводов, а также себестоимость перевозок приведены в таблице.

Лесозаводы / Леспромхоз	I-й	II-й	III-й	IV-й	Ресурсы
I-й	2	3	5	2	300
II-й	4	2	1	3	400
III-й	3	4	3	5	300
IV-й	1	2	2	4	500
Потребность	200	350	400	550	

Составьте оптимальный план перевозок.

219. Объем производства лесоматериалов, потребности в них по предприятиям, а также себестоимость производства 1 м^3 лесоматериалов с доставкой приведены в таблице.

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	Объем производства
A_1	8	10	9	150
A_2	9	6	11	200
A_3	10	12	13	100
Потребности	150	130	170	

Найдите схему снабжения лесоматериалами предприятий-потребителей, при которых сумма затрат на производство и доставку всех материалов была бы наименьшей.

220. Совхозы A_1, A_2, A_3 выделяют соответственно 30 ц; 40 ц; 20 ц молока для ежедневного снабжения пунктов B_1, B_2, B_3, B_4. Стоимость перевозки и потребности пунктов даны в таблице.

Потребитель / Совхоз	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	5	4
A_2	3	2	4	1
A_3	4	3	2	6
Потребность	20	25	35	10

Требуется организовать снабжение таким образом, чтобы полностью обеспечить потребителей молоком и чтобы транспортные расходы были минимальными.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

5. Прямая на плоскости

1. Точки M_1 и M_3 лежат на данной прямой, а точка M_2 не лежит на ней. **2.** $(3;-5)$. **3.** 1) $k=-3$; 2) $k=-2/3$; 3) $k=0$. **4.** 1) перпендикулярны; 2) нет. **5.** 1) $2x+3y-7=0$; 2) $3x-2y-4=0$. **6.** 1) $4x+3y-11=0$; 2) $x-2y=0$. **7.** $\operatorname{arctg} 3$ **8.** 4 л ед. **9.** 2,5 л ед.

6. Кривые второго порядка

10. 1) $x^2+y^2=9$; 2) $(x-2)^2+(y+3)^2=49$; 3) $(x+6)^2+(y-8)^2=100$. **11.** 1) $(0;-3)$; $R=3$; 2) $(1;-2)$; $R=5$; 3) $(-1/2;0)$, $R=1/2$. **12.** 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$; 3) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16/3}=1$. **13.** 1) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; 2) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; 3) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$. **14.** 1) $y^2=4x$; 2) $x^2=-2y$.

7. Пределы

15. $(-\infty;-5]\cup[1;+\infty)$. **16.** $(-2;1]$. **17.** $(-\infty;2)$. **18.** $(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1,+\infty)$. **19.** 0. **20.** 0. **21.** ∞. **22.** $-\frac{2}{3}$. **23.** ∞. **24.** 0. **25.** $\frac{6}{5}$. **26.** $\frac{7}{2}$. **27.** e^{-10}. **28.** e^6. **29.** $\frac{1}{8}$. **30.** $\frac{1}{4}$. **31.** $x=2$ — точка разрыва II-го рода. **32.** Функция непрерывна на $\mathbb{R}$. **33.** $x=0$ — точка разрыва I-го рода.

8. Производные

34. $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}$. **35.** $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$. **36.** $\frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. **37.** $(2x^3+3x^2-6x+7)\,e^{2x}$. **38.** $\arcsin x$. **39.** $-\sin 2x$. **40.** $21x^6\sin^2 x^7\cos x^7$.

41. $-3\operatorname{tg}3x$. **42.** $4\cos 8x\sqrt{e^{\sin 8x}}$. **43.** $-\frac{1}{5\sin x}$. **44.** $-\ln 2(x\cos\frac{1}{x})^{-2}2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$. **45.** $(2\sqrt{x}(1+x))^{-1}$. **46.** $\frac{\ln x-2}{x^2}\sin 2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$. **47.** $\frac{1}{1-e^y}$. **48.** $\frac{y+3x^2}{2y-x}$. **49.** $\frac{3}{2}(1+t)$. **50.** $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$. **51.** $2\ln x+3$. **52.** $e^{-x}(x-2)$. **53.** $\frac{1}{3\sin t\cos^4 t}$. **54.** $\frac{-8dx}{\sin 8x}$. **55.** $-6\sin 2t\cos^2 2t dt$. **56.** $(3u\sqrt[3]{\lg^2 u}\ln 10)^{-1}$. **57.** На $(-\infty;-1)$ возрастает, на $(-1;1)$ убывает, на $(1;+\infty)$ возрастает, $y_{\max}(-1)=0$, $y_{\min}(1)=-8$. **58.** На $(-\infty;0)$ возрастает, на $(0;1)$ убывает, на $(1;2)$ убывает, на $(2;+\infty)$ возрастает, $y_{\max}(0)=0$, $y_{\min}(2)=4$. **59.** Функция возрастает на всей области определения. **60.** $M=18$, $m=-8$.

9. Неопределенный интеграл

69. $C-7\operatorname{ctg}x-2\cos x$. **70.** $C-\frac{3}{5\sqrt[3]{x^5}}-2\ln|x|+e^x$. **71.** $\frac{10}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$. **72.** $C-\frac{2}{9}\sqrt{(1-3x)^3}$. **73.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+5)+C$. **74.** $C-\frac{1}{5}\cos^5 x$. **75.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C$. **76.** $C-\frac{1}{\ln x}$. **77.** $\frac{1}{15}e^{5x^3}+C$. **78.** $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}+C$. **79.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|$. **80.** $\frac{5}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}(5x-3)\cos 2x+C$. **81.** $\frac{x^2+2x}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2-x+C$. **82.** $-\frac{1}{9}e^{-3x}(3x+1)+C$. **83.** $\frac{x^2}{2}+x+3\ln|x+2|+C$. **84.** $\frac{2}{3}\ln|x+2|-\frac{1}{6}\ln|2x+1|+C$.

10. Определенный интеграл

85. $\frac{1}{3}$. **86.** $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$. **87.** $\frac{5}{72}$. **88.** $-\frac{\pi}{3}$. **89.** $\frac{4}{3}$ кв. ед. **90.** $\frac{1}{6}$ кв. ед. **91.** $\frac{5}{3}$ кв. ед. **92.** $8,1\pi$ куб. ед. **93.** $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$ куб. ед. **94.** $\frac{13}{3}$ л ед.

11. Дифференциальные уравнения

96. $y = C\,\mathrm{e}^{-1/x}$. **97.** $y = \mathrm{e}^{C/x}$. **98.** $y = 2 + C\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. **99.** $y^2 - 2 + C\,\mathrm{e}^{1/x} = 0$. **100.** $y = 2 - 3\cos x$. **101.** $y = (x-1)^2$. **102.** $y^2 + x^2(2\ln|x| - 1) = 0$. **103.** $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln C\sqrt{x^2+y^2}$. **104.** $y = \dfrac{x}{\cos x}$.
105. $y = Cx^2 - \dfrac{1}{x}$. **106.** $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{2x}$. **107.** $y = (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{x}$.
108. $y = 4 - 2\,\mathrm{e}^{-6x}$. **109.** $y = \mathrm{e}^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$. **110.** $y = \cos 2x + \sin 2x$.

12. Элементы теории вероятностей

111. $1/3$. **112.** $\pi/4$. **113.** $115/203$. **114.** $23/48$. **115.** $0,08$.
116. $P(A) = 0,368$; $P(B) = 0,904$. **117.** 1) $0,504$; 2) $0,994$.
118. $0,0038$. **119.** $0,8$. **120.** $0,919$. **121.** $0,4938$. **122.** $0,05$. **123.** $0,0616$.
124. $P\{\xi < M_\xi\} = 0,4$; $\sigma_\xi = 1,1$. **125.**

ξ	0	1	2
p	5/18	5/9	1/6

. **126.** $0,2$.
127. $0,25$. **128.** $0,6826$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

2. Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2}\, dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,8	0,2881	1,20	0,3849	1,60	0,4452
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869	1,61	0,4463
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3888	1,62	0,4474
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907	1,63	0,4484
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925	1,64	0,4495
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944	1,65	0,4505
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962	1,66	0,4515
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980	1,67	0,4525
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997	1,68	0,4535
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015	1,69	0,4545
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032	1,70	0,4554
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049	1,71	0,4564
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066	1,72	0,4573
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082	1,73	0,4582
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099	1,74	0,4591
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115	1,75	0,4599
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131	1,76	0,4608
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147	1,77	0,4616
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162	1,78	0,4625
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177	1,79	0,4633
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192	1,80	0,4641
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207	1,81	0,4649
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222	1,82	0,4656
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236	1,83	0,4664
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251	1,84	0,4671
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265	1,85	0,4678
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279	1,86	0,4686
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292	1,87	0,4693
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306	1,88	0,4699
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319	1,89	0,4706
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332	1,90	0,4713
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345	1,91	0,4719
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357	1,92	0,4726
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370	1,93	0,4732
0,34	0,1331	0,74	0,2704	1,14	0,3729	1,54	0,4382	1,94	0,4738
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394	1,95	0,4744
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406	1,96	0,4750
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418	1,97	0,4756
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429	1,98	0,4761
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441	1,99	0,4767

Окончание табл. 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,00	0,4772	2,30	0,4893	2,60	0,4953	2,90	0,4981
2,02	0,4783	2,32	0,4898	2,62	0,4956	2,92	0,4982
2,04	0,4793	2,34	0,4904	2,64	0,4959	2,94	0,4984
2,06	0,4803	2,36	0,4909	2,66	0,4961	2,96	0,4985
2,08	0,4812	2,38	0,4913	2,68	0,4963	2,98	0,4986
2,10	0,4821	2,40	0,4918	2,70	0,4965	3,00	0,49865
2,12	0,4830	2,42	0,4922	2,72	0,4967	3,20	0,49931
2,14	0,4838	2,44	0,4927	2,74	0,4969	3,40	0,49966
2,16	0,4846	2,46	0,4931	2,76	0,4971	3,60	0,499841
2,18	0,4854	2,48	0,4934	2,78	0,4973	3,80	0,499928
2,20	0,4861	2,50	0,4938	2,80	0,4974	4,00	0,499968
2,22	0,4868	2,52	0,4941	2,82	0,4976	4,50	0,499997
2,24	0,4875	2,54	0,4945	2,84	0,4977	5,00	0,499997
2,26	0,4881	2,56	0,4948	2,86	0,4979		
2,28	0,4887	2,58	0,4951	2,88	0,4980		

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. — М.: Наука, 1986.

2. Щипачев В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. — М.: Высшая школа, 1996, 1998.

3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука, 1985. — Т. 1–3.

4. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа для втузов. — М.: Наука, 1996.

5. Гурский Е. И. Основы линейной алгебры и аналитическая геометрия. — Мн., 1968.

6. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1997.

7. Берман Г. И. Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1985.

8. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. — М., 1980.

9. Гурский Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. — Мн., 1984.

10. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. — М., 1964.

Дополнительная

1. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1989.

2. Волк А. М., Игнатенко В. В., Яценко А. В. Высшая математика: Программа, методические указания и контрольные задания. — Мн.: БГТУ, 2002.

3. Алещенко Л. Н., Асмыкович И. К. и др. Высшая математика: Программа, упражнения и контрольные задания. — Мн.: БГТУ, 1997.

ОГЛАВЛЕНИЕ