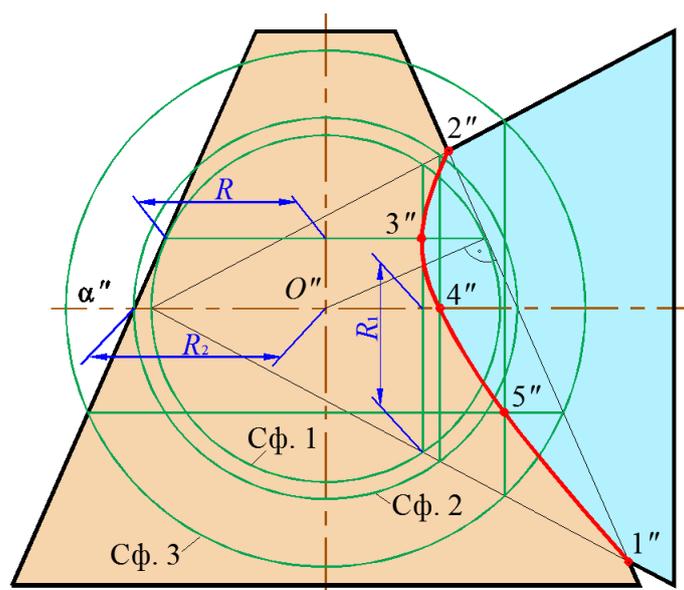


А. Л. Калтыгин
С. В. Красковский
С. В. Ращупкин

ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ГРАФИКА

Тексты лекций
для студентов специальностей 1-40 01 01 «Программное обеспечение
информационных технологий», 1-40 05 01 «Информационные системы
и технологии», 1-47 01 02 «Дизайн электронных и веб-изданий»,
1-98 01 03 «Программное обеспечение информационной
безопасности мобильных систем»



УДК 514.18:744:004.9(075.8)
ББК 22.151.3я73
К17

Рассмотрены и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом Белорусского государственного технологического университета

Р е ц е н з е н т ы :

заведующий кафедрой инженерной графики БГУИР кандидат
технических наук, доцент *В. А. Столер*;

заведующий кафедрой инженерной графики строительного
профиля БНТУ кандидат технических наук, доцент *И. М. Шуберт*

Калтыгин, А. Л.

К17 Инженерная геометрия и графика : тексты лекций для студентов специальностей 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий», 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии», 1-47 01 02 «Дизайн электронных и веб-изданий», 1-98 01 03 «Программное обеспечение информационной безопасности мобильных систем» / А. Л. Калтыгин, С. В. Красковский, С. В. Ращупкин. – Минск : БГТУ, 2017. – 80 с.

Издание содержит лекции по дисциплине «Инженерная геометрия и графика». Материал построен с использованием современных образовательных технологий в области преподавания инженерной и начертательной геометрии, каждая тема проиллюстрирована решением типовых задач, приведены контрольные вопросы для закрепления знаний, полученных студентами при изучении теоретической части курса.

УДК 514.18:744:004.9(075.8)
ББК 22.151.3я73

© УО «Белорусский государственный технологический университет», 2017
© Калтыгин А. Л., Красковский С. В., Ращупкин С. В., 2017

ВВЕДЕНИЕ

Инженерная геометрия и графика относится к числу общеобразовательных дисциплин. Она изучает законы изображения пространственных предметов на плоскости и служит теоретической основой для изучения инженерно-технических дисциплин: компьютерной графики, теоретической механики и т. д.

Инженерная геометрия способствует развитию пространственного воображения и логического мышления.

Основные цели дисциплины «Инженерная геометрия и графика»:

- освоение методов построения изображений предметов на плоскости;
- изучение геометрических свойств предмета по заданным изображениям;
- решение пространственных задач на чертеже;
- развитие пространственного и логического мышления.

Данное издание базируется на материалах лекций, читаемых в Белорусском государственном технологическом университете. Материал изложен в объеме, соответствующем количеству учебного времени, отведенного на изучение предмета. Теоретический материал сопровождается примерами решения задач. Некоторые лекции построены на примерах, поэтому раздел с задачами в этих лекциях отсутствует. Отдельные теоретические вопросы и графические построения сопровождаются видеопримерами, просмотр которых можно активировать щелчком указателя мыши по иконке в виде скрепки. В конце каждой лекции приводятся контрольные вопросы по теме излагаемого материала.

Принятые обозначения и символы

1. Точки в пространстве – прописными буквами латинского алфавита (A, B, C, \dots), а также цифрами.

2. Линии в пространстве – строчными буквами латинского алфавита (a, b, c, \dots).

3. Плоскости – строчными буквами греческого алфавита ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$).

4. Углы – строчной буквой греческого алфавита φ и подстрочным индексом ($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$).

5. Плоскости проекций – строчной буквой греческого алфавита π . Произвольная плоскость – π_0 , горизонтальная – π_1 , фронтальная – π_2 , профильная – π_3 , дополнительные – π_4, π_5 и т. д.

6. Оси проекций – строчными буквами x, y, z .

7. Проекции точек на горизонтальную плоскость π_1 – A', B', C', \dots , на фронтальную плоскость π_2 – A'', B'', C'', \dots ; на профильную плоскость π_3 – A''', B''', C''', \dots ; на дополнительные плоскости π_4, π_5 – $A^{IV}, B^{IV}, C^{IV}, A^V, B^V, C^V$ и т. д.

8. После преобразования чертежей вращением (плоскопараллельным перемещением) точки в новом положении после первого преобразования – $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \dots$, после второго преобразования – $\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{C}}, \dots$.

Лекция 1

МЕТОД ПРОЕКЦИЙ.

ОБРАЗОВАНИЕ ПРОЕКЦИОННОГО ЧЕРТЕЖА

ТОЧКИ, ПРЯМОЙ, ПЛОСКОСТИ

1.1. Метод проекций

Для того чтобы чертеж соответствовал изображаемому предмету и передавал его свойства, он должен быть построен по определенным геометрическим законам. Правила построения изображений в инженерной геометрии основаны на *методе проекций*.

Метод проекций предполагает наличие плоскости проекций, объекта проецирования и проецирующих лучей.

Проекцией точки A на плоскость π_0 называется точка пересечения A^0 с этой плоскостью проецирующего луча p , проходящего в пространстве через точку A (рис. 1.1).

Различают два метода проецирования: центральное и параллельное.

1.2. Центральное и параллельное проецирование

При *центральной проецировании* все проецирующие лучи проходят через точку S , называемую центром проекций и не лежащую в плоскости проекций. Для построения проекций некоторых точек A, B, C, D (рис. 1.2) проводим через эти точки и центр проекций S проецирующие лучи до пересечения с плоскостью π_0 . На плоскости проекций π_0 каждой точке будет соответствовать единственная точка – проекции A^0, B^0, C^0, D^0 .

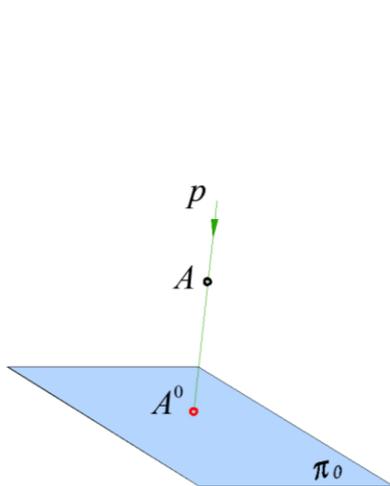


Рис. 1.1

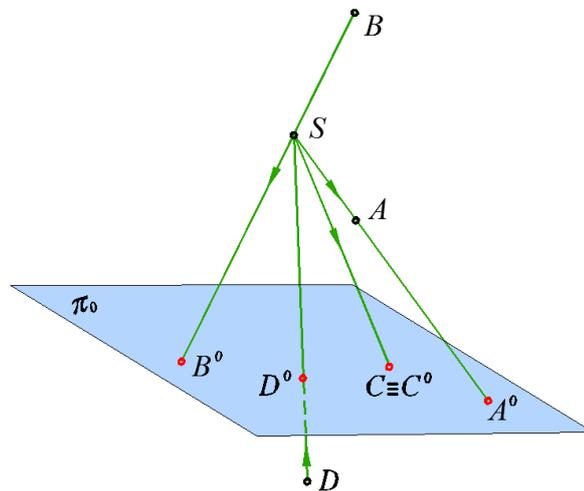


Рис. 1.2

Центральное проецирование обладает наглядностью, оно используется при построении изображений архитектурно-строительных объектов, но дает значительное искажение размеров, вследствие чего не применяется для выполнения чертежей.

При *параллельном проецировании* проецирующие лучи параллельны заданному направлению S (рис. 1.3). Точки пересечения проецирующих лучей, проходящих через точки A, B, C , с плоскостью проекций π_0 – параллельные проекции A^0, B^0, C^0 на плоскости π_0 .

Параллельное проецирование можно рассматривать как частный случай центрального при бесконечно удаленном центре проекций. В зависимости от направления проецирующих лучей относительно плоскости проекций параллельное проецирование может быть *прямоугольным* (проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций) и *косоугольным* (проецирующие лучи составляют с плоскостью проекций угол, не равный 90°).

Прямоугольной (ортогональной) проекцией точки A (рис. 1.4) является основание перпендикуляра A^0 , проведенного из точки A на плоскость π_0 . Динамический рисунок с перемещением точек A и B в пространстве относительно плоскости проекций можно посмотреть [здесь](#). 

Ортогональное проецирование имеет ряд преимуществ перед центральным и косоугольным параллельным проецированием.

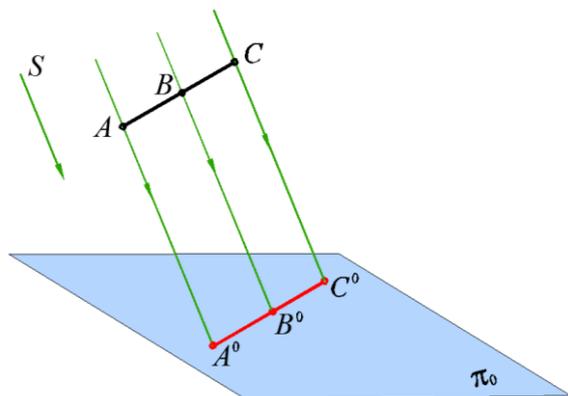


Рис. 1.3

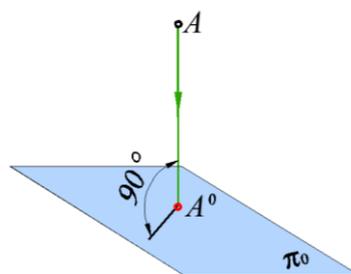


Рис. 1.4

Для разработки чертежей применяется в основном прямоугольное (ортогональное) проецирование. Прямоугольное проецирование включает в себя все свойства центрального и параллельного проецирования.

1.3. Свойства прямоугольного проецирования

1. Каждая точка и прямая в пространстве имеют единственную проекцию на плоскости, так как через любую точку в пространстве можно провести только один проецирующий луч (рис. 1.4).
2. Каждая точка на плоскости проекций может быть проекцией множества точек, если через них проходит общий проецирующий луч (рис. 1.5).
3. Если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции этой прямой (рис. 1.6).

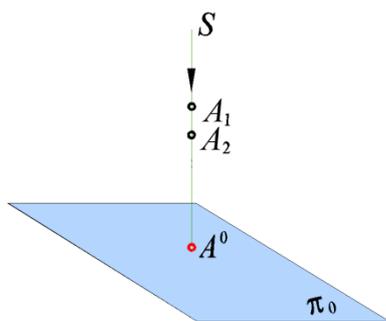


Рис. 1.5

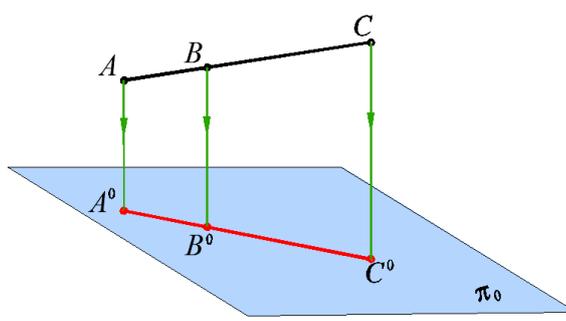


Рис. 1.6

4. Отношение отрезков прямой равно отношению их проекций (рис. 1.6):

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A^0B^0}{B^0C^0}.$$

5. Проекции параллельных прямых параллельны. Если $AB \parallel CD$, то $A^0B^0 \parallel C^0D^0$ (рис. 1.7). Если прямая перпендикулярна плоскости проекций, то проекцией этой прямой является точка (прямая AB , рис. 1.8).

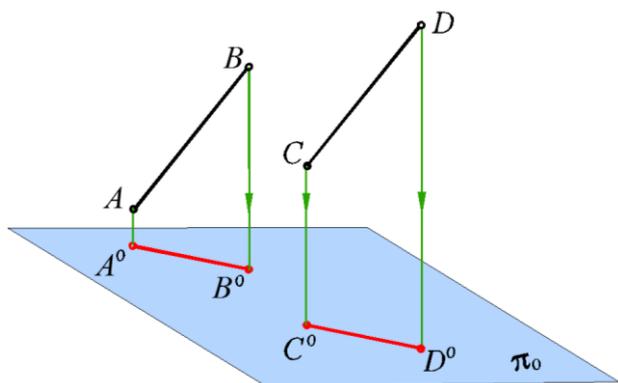


Рис. 1.7

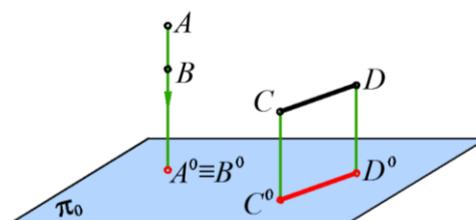


Рис. 1.8

6. Если отрезок прямой параллелен плоскости проекций, то на эту плоскость отрезок проецируется в натуральную величину (прямая CD , рис. 1.8).

1.4. Точка в системе двух и трех плоскостей проекций

Возьмем в пространстве две взаимно перпендикулярные плоскости. Одна из них располагается горизонтально – ее называют *горизонтальной плоскостью проекций* и обозначают буквой π_1 . Другая плоскость перпендикулярна горизонтальной и называется *фронтальной плоскостью проекций*. Эта плоскость обозначается буквой π_2 (рис. 1.9). Линия пересечения плоскостей проекций называется *осью проекций*. Ось проекций x разделяет каждую из плоскостей на две полуплоскости.

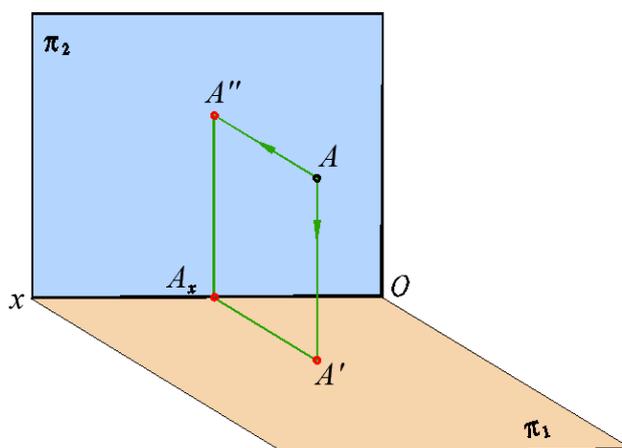


Рис. 1.9

Спроецируем точку A на плоскости проекций π_1 и π_2 . *Горизонтальной проекцией* точки называют прямоугольную проекцию точки на горизонтальной плоскости проекций. Горизонтальную проекцию находим как точку пересечения перпендикуляра, проведенного из точки A ,

с плоскостью π_1 . Обозначим ее символом A' . Проведем из точки A' в плоскости π_1 перпендикуляр на ось Ox и отметим вспомогательную точку A_x .

Фронтальной проекцией точки называют прямоугольную проекцию точки на фронтальной плоскости проекций. Фронтальную проекцию находим как точку пересечения перпендикуляра, проведенного из точки A , с плоскостью π_2 . Обозначим ее A'' .

Для получения плоского чертежа точки необходимо совместить плоскость π_1 с плоскостью π_2 поворотом вокруг оси Ox . При этом отрезки A_xA'' и A_xA' образуют один отрезок $A''A'$, перпендикулярный к оси Ox . Отрезок $A''A'$ называется *линией проекционной связи* (рис. 1.10). Без обозначения плоскостей π_1 и π_2 этот чертеж будет выглядеть так, как показано на рис. 1.11. Полученный чертеж имеет название *эпюр Монжа* (Epure – чертеж (франц.)), в честь основоположника начертательной геометрии французского ученого Гаспара Монжа.

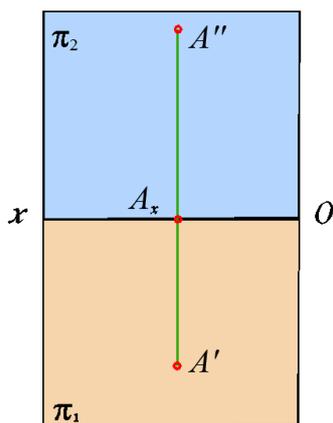


Рис. 1.10

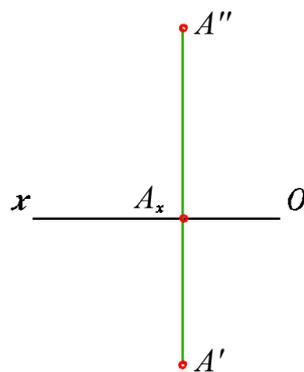


Рис. 1.11

Иногда двух проекций геометрического элемента бывает недостаточно, чтобы определить его форму и истинные размеры. Тогда выполняют построение изображения на третьей плоскости. Введем в систему π_1, π_2 третью плоскость проекций, перпендикулярную плоскостям π_1 и π_2 . Ее называют *профильной* плоскостью проекций и обозначают π_3 (рис. 1.12).

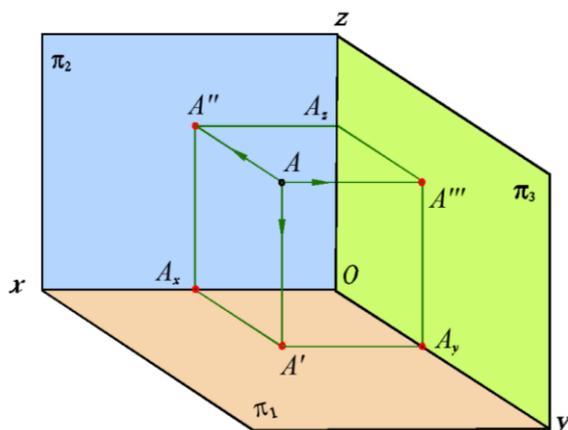


Рис. 1.12

Три взаимно перпендикулярные плоскости проекций называются *координатными* плоскостями. Они пересекаются по трем взаимно перпендикулярным прямым Ox, Oy, Oz , которые называются *осями координат* и обозначаются x, y, z . Общая точка O – начало координат.

Рассмотрим построение трех проекций некоторой точки пространства. Зададимся произвольной точкой A (рис. 1.12). Проецирование на плоскости π_1 и π_2 выполняется аналогично

приведенному выше примеру проецирования точки A на две плоскости проекций. Профильной проекцией точки является прямоугольная проекция точки на профильной плоскости проекций π_3 . Обозначим ее A''' .

Часто с осями проекций совмещают декартову систему координат. Из рис. 1.12 видно, что:

$AA' = A''A_x = A'''A_y$ (высота z точки A – аппликата);

$AA'' = A'A_x = A'''A_z$ (глубина y точки A – ордината);

$AA''' = A'A_y = A''A_z$ (ширина x точки A – абсцисса).

Чтобы перейти к плоскому изображению, повернем плоскость π_1 вниз вокруг оси Ox и плоскость π_3 вправо вокруг оси Oz до совмещения с плоскостью π_2 . При развороте плоскостей π_1 и π_3 ось y воспроизводится дважды.

На рис. 1.13 показано расположение проекций A' , A'' , A''' точки A после совмещения плоскостей проекций.

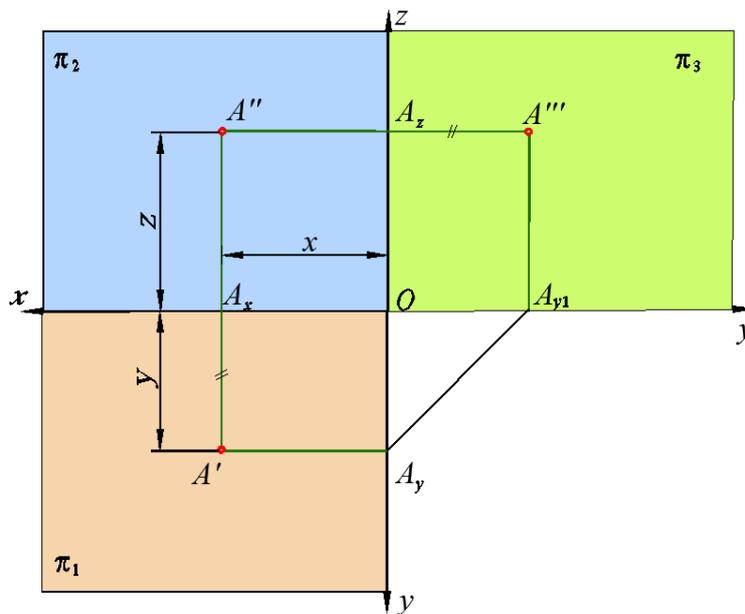


Рис. 1.13

Прямые, соединяющие на чертеже две проекции одной и той же точки, являются линиями проекционной связи, между A' и A'' – вертикальная линия связи, между A'' и A''' – горизонтальная линия связи, между проекциями A' и A''' – ломаная линия связи. Переход от оси y плоскости π_1 к оси y плоскости π_3 может осуществляться при помощи дуги или вспомогательной прямой, проведенной под углом 45° к оси y .

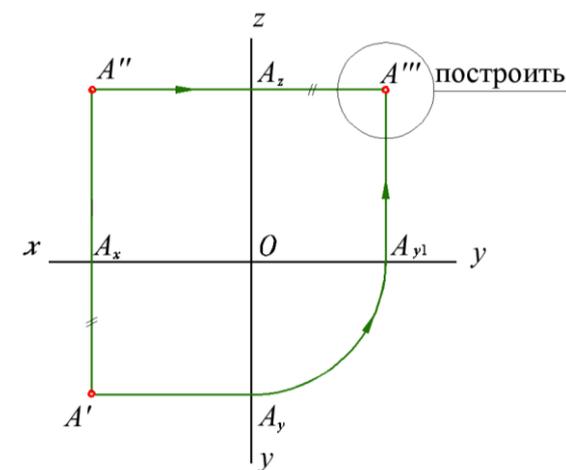


Рис. 1.14

На рис. 1.14 выполнено построение профильной проекции A''' точки A по заданной горизонтальной A' и фронтальной A'' . Построение выполняется следующим образом.

1. Проводим через проекцию A'' горизонтальную линию связи, на которой находится профильная проекция A''' .

2. Проводим ломаную линию связи через $A'A_yA_{y1}A'''$ до пересечения с горизонтальной линией связи, проведенной через фронтальную проекцию A'' .

Профильную проекцию A''' можно получить, откладывая на горизонтальной линии связи от точки A_z отрезок, равный координате y ($O A_y$).

Как известно, положение точки в пространстве может быть задано при помощи трех ее координат (абсциссы x , ординаты y , аппликаты z), т. е. трех чисел, выражающих расстояния от этой точки до трех плоскостей проекций. Запись координат точки производится в такой форме: $A(x, y, z)$. Например, задана точка $A(25, 15, 45)$. Эта запись означает, что точка A определяется координатами $x = 25, y = 15, z = 45$.

Если масштаб для построения чертежа задан или выбран, то построение проводят так, как показано на рис. 1.13, 1.14 – откладываются на оси x от точки O отрезок $OA_x = 25$, а на перпендикуляре к этой оси, проведенном из точки A_x , откладывают отрезки $A_xA' = 15$ и $A_xA'' = 45$. Затем строят профильную проекцию A''' , как описано выше.

1.5. Проекция отрезка прямой линии

Как известно из элементарной геометрии, прямая линия определяется двумя точками, поэтому чтобы построить проекции этой прямой, необходимо иметь проекции двух точек, принадлежащих этой прямой.

Возьмем на произвольной прямой две точки A и B (рис. 1.15). Их проекции A^0 и B^0 на плоскости π_0 определяют прямую, которую можно рассматривать как линию пересечения плоскости π_0 с плоскостью β , определяемой прямой AB и проецирующими лучами AA^0 и BB^0 . Линия пересечения плоскостей π_0 и β проходит через проекции A^0 и B^0 на плоскости π_0 . Эта линия и является проекцией прямой на плоскости проекций π_0 .

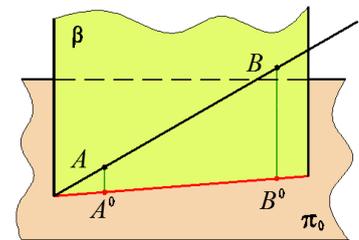


Рис. 1.15

Одна проекция прямой не определяет ее положения в пространстве. Для однозначного определения прямой в пространстве необходимы как минимум две проекции.

1.6. Прямые общего и частного положения

Прямые в пространстве могут занимать относительно плоскостей проекций различное положение. Прямую, не параллельную ни одной из плоскостей проекций, называют *прямой общего положения*. На рис. 1.16, а дано пространственное изображение, а на рис. 1.16, б – чертеж прямой AB .

Точки A и B находятся на разных расстояниях от каждой из плоскостей проекций, т. е. прямая AB не параллельна ни одной из них. Значит, прямая AB общего положения.

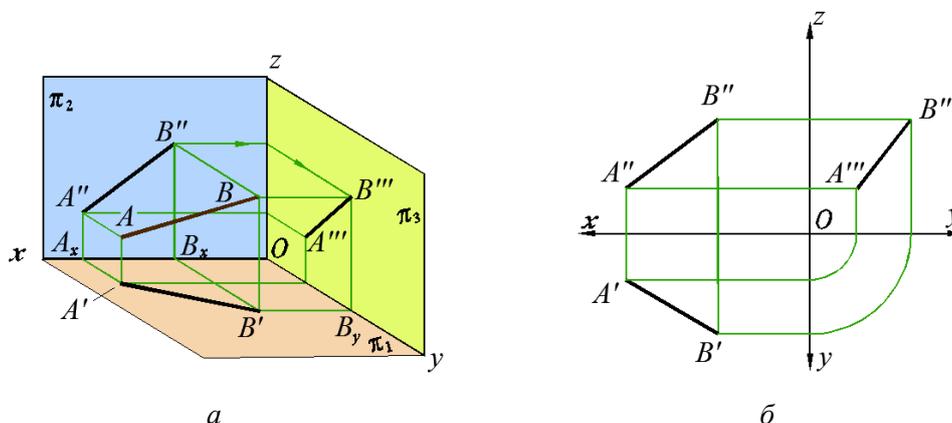


Рис. 1.16

На представленном [здесь](#) видеопримере показан перемещающийся в пространстве отрезок AB и его проекции на три плоскости.

По двум известным проекциям отрезка прямой всегда можно построить третью проекцию, так как любая пара проекций содержит все три координаты конечных точек отрезка.

Прямые, параллельные или перпендикулярные к плоскостям проекций, называются *прямыми частного положения*.

Прямая, параллельная плоскости проекций, называется *прямой уровня*. Существуют три линии уровня.

Горизонтальная (параллельная горизонтальной плоскости проекций π_1)	Фронтальная (параллельная фронтальной плоскости проекций π_2)	Профильная (параллельная профильной плоскости проекций π_3)

Прямая, перпендикулярная к плоскостям проекций, называется *проецирующей*.
Различают три вида проецирующих прямых.

Горизонтально-проецирующая (перпендикулярная плоскости π_1)	Фронтально-проецирующая (перпендикулярная плоскости π_2)	Профильно-проецирующая (перпендикулярная плоскости π_3)

1.7. Определение натуральной величины отрезка прямой и углов наклона прямой к плоскостям проекций

Отрезки прямых общего положения не проецируются в натуральную величину ни на одну из плоскостей проекций. Длину (натуральную величину – НВ) отрезка можно определить на основании свойства ортогонального проецирования.

Из рисунка 1.17 видно, что натуральная величина отрезка AB общего положения является гипотенузой прямоугольного треугольника $AB1$. В этом треугольнике один катет $A1$ параллелен плоскости π_1 и равен по длине горизонтальной проекции отрезка AB ($A1 = A'B'$), а величина второго катета равна разности расстояний точек B и A до плоскости проекций π_1 , т. е. $B1 = BB' - AA' = \Delta z$.

Угол ϕ_1 – угол наклона отрезка AB к горизонтальной плоскости проекций π_1 .

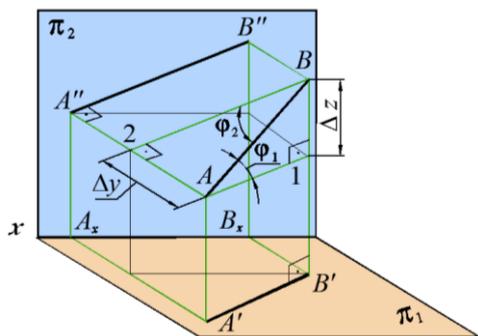


Рис. 1.17

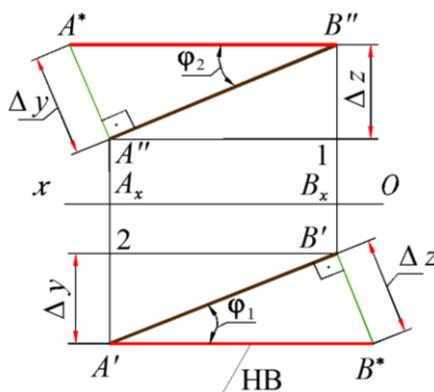


Рис. 1.18

Таким образом, на горизонтальной проекции отрезка AB (рис. 1.18) можно построить прямоугольный треугольник, взяв вторым катетом Δz . Гипотенуза этого треугольника $A'B^*$ будет натуральной величиной отрезка AB , а угол φ_1 определяет угол наклона отрезка AB к горизонтальной плоскости проекций π_1 .

Аналогичное построение можно сделать на фронтальной плоскости проекций, взяв в качестве второго катета разность расстояний концов отрезка (Δy) до фронтальной плоскости проекций π_2 . Отрезок A^*B'' – натуральная величина отрезка AB , угол φ_2 – угол наклона AB к плоскости π_2 .

1.8. Относительное положение точки и прямой

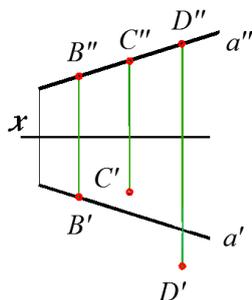


Рис. 1.19

Точка и прямая в пространстве могут занимать различное положение относительно друг друга. Если точка принадлежит прямой, то проекции этой точки лежат на одноименных проекциях данной прямой. Точка B принадлежит прямой a (рис. 1.19), так как ее проекции B' и B'' лежат на одноименных проекциях прямой a' и a'' . Точки C, D не принадлежат прямой a , так как одна из проекций этих точек не лежит на соответствующей проекции прямой.

1.9. Задание плоскости на чертеже

Плоскостью называется поверхность, образуемая перемещением прямой линии, которая движется параллельно самой себе по неподвижной направляющей прямой.

На чертеже плоскость можно изобразить только в том случае, если она проецируется в линию. На рис. 1.20 плоскость α , расположенная перпендикулярно к плоскости π_1 , проецируется на нее прямой линией α' .

Если плоскость не перпендикулярна к плоскости проекций, то изобразить ее на чертеже невозможно, так как проекции плоскости занимают полностью всю плоскость проекций.

Однако ее можно задать на чертеже, изобразив отдельные геометрические элементы, определяющие ее.

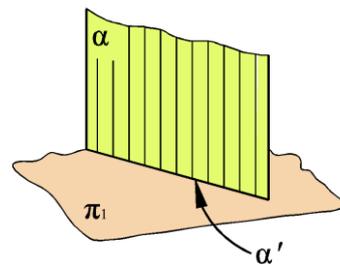


Рис. 1.20

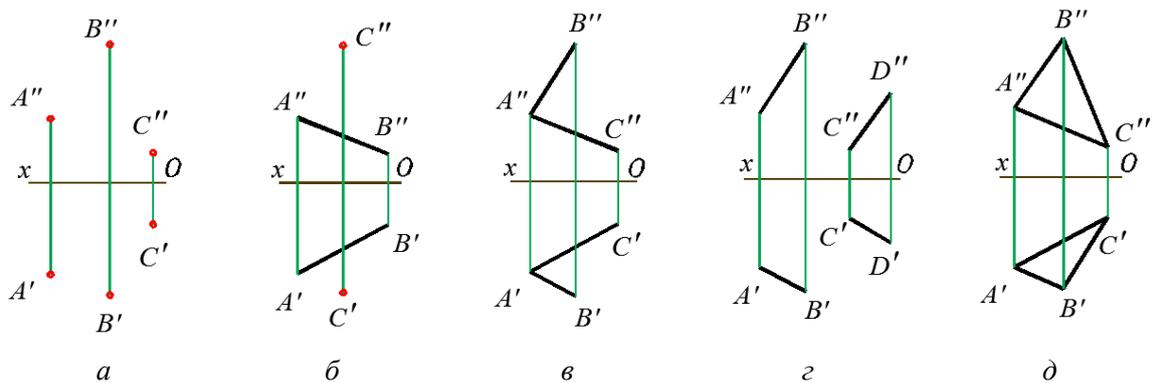


Рис. 1.21

Таковыми элементами являются:

- три точки, не лежащие на одной прямой (рис. 1.21, а);
- прямая и точка, не лежащая на ней (рис. 1.21, б);
- пересекающиеся прямые (рис. 1.21, в);
- две параллельные прямые (рис. 1.21, г);
- плоская фигура (рис. 1.21, д).

1.10. Плоскости общего и частного положения

Плоскость, не перпендикулярную ни к одной из плоскостей проекций, называют *плоскостью общего положения* (рис. 1.22). Эти плоскости имеют наибольшее распространение. Причем плоскость не ограничивается задающей ее плоской фигурой, а является бесконечной (если иное не оговорено в условии задачи).

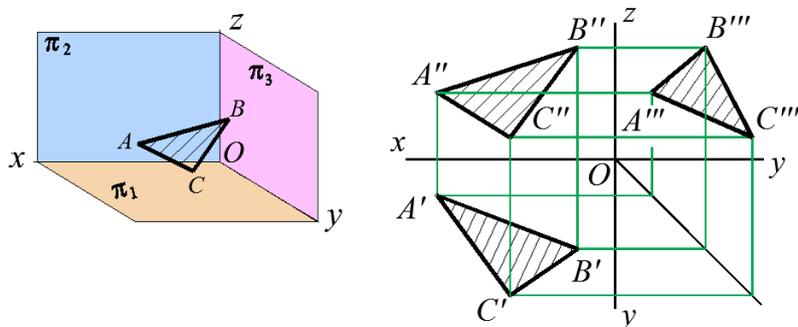


Рис. 1.22

К плоскостям *частного положения* относятся плоскости, перпендикулярные или параллельные плоскостям проекций.

Если плоскости перпендикулярны к одной из плоскостей проекций, то они называются *проецирующими*.

Различают горизонтально-проецирующую, фронтально-проецирующую и профильно-проецирующую плоскости.

Плоскости, параллельные какой-либо плоскости проекций, называются *плоскостями уровня*.

К ним относятся:

- 1) *горизонтальная плоскость уровня* – параллельная плоскости проекций π_1 ;
- 2) *фронтальная плоскость уровня* – параллельная плоскости π_2 ;
- 3) *профильная плоскость уровня* – параллельная плоскости π_3 .

1.11. Прямая и точка в плоскости

К числу основных задач, решаемых на плоскости, относятся: построение прямой, принадлежащей заданной плоскости; построение недостающих проекций точки, лежащей в плоскости. Решение указанных задач основано на известных положениях геометрии, перечисленных ниже.

1. *Прямая принадлежит плоскости, если две ее точки принадлежат этой плоскости.*

Например, плоскость задана параллельными прямыми AB и CD (горизонтальные проекции $A'B'$, $C'D'$ и фронтальные проекции $A''B''$, $C''D''$ на рис. 1.23). Требуется построить горизонтальную проекцию $E'F'$ прямой EF , лежащей в этой плоскости, если известна ее фронтальная проекция $E''F''$.

Прямые AB , CD , EF лежат в одной плоскости, поэтому точки E и F являются точками пересечения соответственно прямых AB и EF и CD и EF . По линиям связи определяем горизонтальные проекции точек F и E . Через проекции точек E' и F' проводим горизонтальную проекцию прямой.

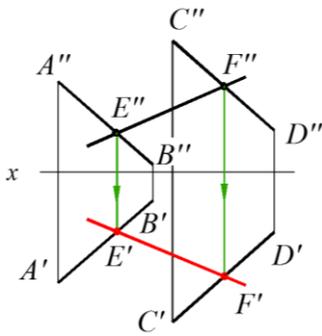


Рис. 1.23

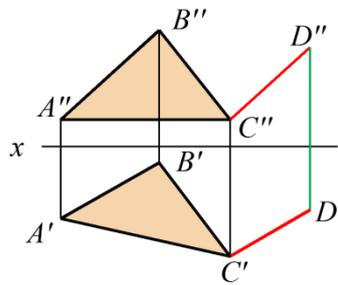


Рис. 1.24

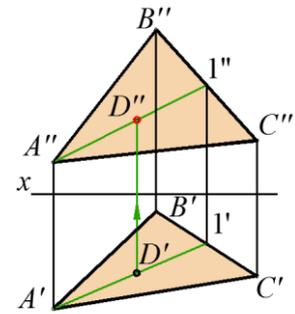


Рис. 1.25

2. *Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через точку этой плоскости параллельно какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости.*

Например, плоскость задана треугольником ABC (проекции $A'B'C'$ и $A''B''C''$ на рис. 1.24). Требуется построить прямую, лежащую в плоскости ABC и проходящую через точку C . Через точку C проводим прямую CD , параллельную AB ($C'D' \parallel A'B'$, $C''D'' \parallel A''B''$).

Следует отметить, что через точку C в плоскости треугольника можно провести множество прямых.

Точка принадлежит плоскости, если она находится на прямой, лежащей в этой плоскости. Например, необходимо определить фронтальную проекцию точки D , принадлежащей плоскости, заданной треугольником ABC (рис. 1.25). Через точку D' проведем горизонтальную проекцию прямой $A'1'$ и построим $A''1''$. Проекция точки принадлежит одноименным проекциям прямой $A1$. По линии связи находим фронтальную проекцию D'' точки D .

1.12. Прямые особого положения в плоскости

К числу прямых, занимающих особое положение в плоскости, относятся *горизонтали*, *фронтали*, *профильные линии*. Прямая, принадлежащая данной плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций π_1 , называется *горизонталью* плоскости. Фронтальная проекция горизонтали параллельна оси x . Построение проекций горизонтали треугольника ABC , представленного проекциями $A'B'C'$ и $A''B''C''$ на рис. 1.26, начинается с проведения из вершины C'' фронтальной проекции горизонтали $C''D'' \parallel Ox$, затем по линиям проекционной связи строится горизонтальная проекция $C'D'$.

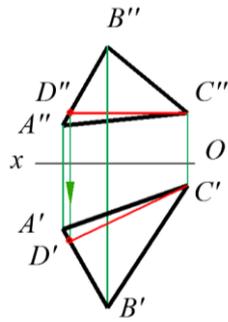


Рис. 1.26

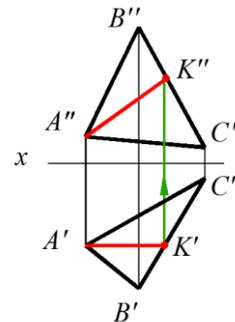


Рис. 1.27

На рис. 1.27 построение фронтали (линии, параллельной фронтальной плоскости проекций) треугольника ABC удобно начать с горизонтальной проекции $A'K' \parallel x$, затем с помощью линий проекционной связи строится фронтальная проекция $A''K''$.



Примеры решения задач

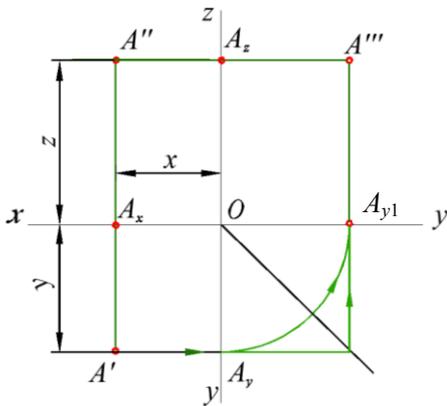


Рис. 1.28

Задача 1. По заданным координатам точки A ($x = 15$, $y = 20$, $z = 30$) построить ее проекции.

Решение. По оси Ox откладываем $x = 15$ (точка A_x на рис. 1.28). В точке A_x восстанавливаем перпендикуляр к оси (линия связи) и, отложив на нем $y = 20$ и $z = 30$, получаем A' – горизонтальную и A'' – фронтальную проекции точки A .

Затем из точки A' проведем перпендикуляр к оси Oy (точка A_y). Радиусом OA_y переносим точку A_y на ось Oy на профильной проекции.

Из точки A'' проводим горизонтальную линию связи. В пересечении линий связи получим точку A''' – профильную проекцию точки A .

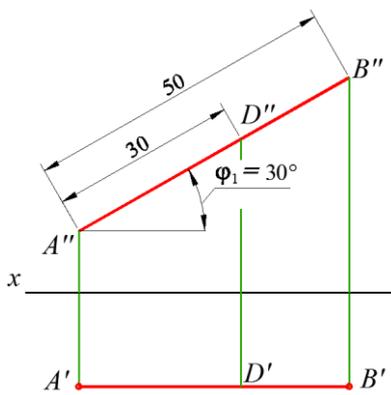


Рис. 1.29

Задача 2. Через точку A (проекции A' и A'' на рис. 1.29) провести фронтальную прямую AB длиной 50 мм под углом 30° к плоскости π_1 и отложить на ней отрезок $CD = 30$ мм.

Решение. Прямая AB параллельна фронтальной плоскости проекций π_2 и спроецируется на эту плоскость в натуральную величину.

Из точки A'' проводим прямую под углом 30° к оси x и откладываем на ней отрезок 50 мм.

На фронтальной проекции $A''B''$ откладываем отрезок $A''D'' = 30$ мм. По линии связи определяем горизонтальную проекцию точки D (D').



Вопросы для контроля

1. Как называются и обозначаются плоскости проекций?
2. Сформулируйте основные свойства прямоугольного проецирования.
3. Какие координаты определяют положение фронтальной проекции точки?
4. Какая прямая называется прямой общего положения?

Лекция 2 ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

2.1. Относительное положение двух прямых в пространстве

Прямые в пространстве могут занимать различное взаимное положение – они могут быть параллельными, пересекаться и скрещиваться. Из свойств параллельного проецирования следует, что если прямые *параллельны* (рис. 2.1), то их проекции также параллельны. На рис. 2.2 приведен чертеж параллельных прямых AB и CD . Проекции $A'B' \parallel C'D'$, $A''B'' \parallel C''D''$, $A'''B''' \parallel C'''D'''$.

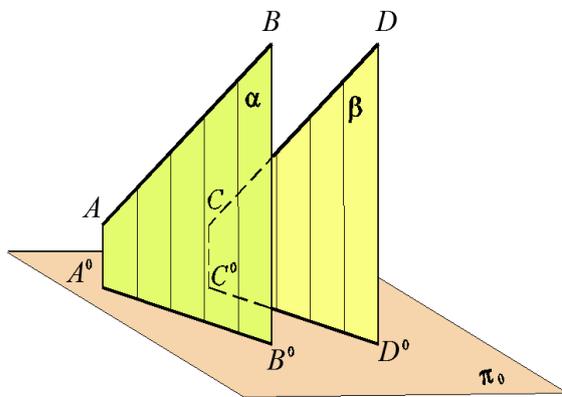


Рис. 2.1

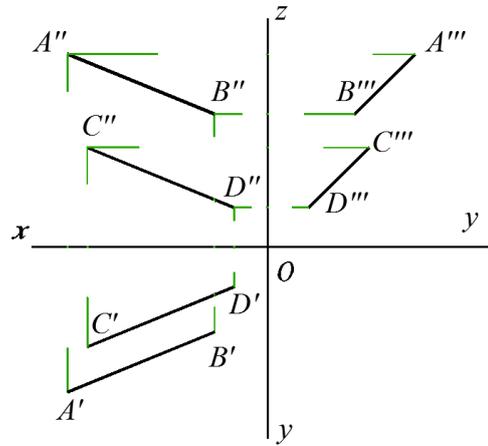


Рис. 2.2

Если прямые в пространстве *пересекаются*, то их проекции также пересекаются и точка пересечения лежит на одной общей линии связи. Пересекающиеся прямые AB и CD , приведенные на рис. 2.3, а, имеют общую точку K .

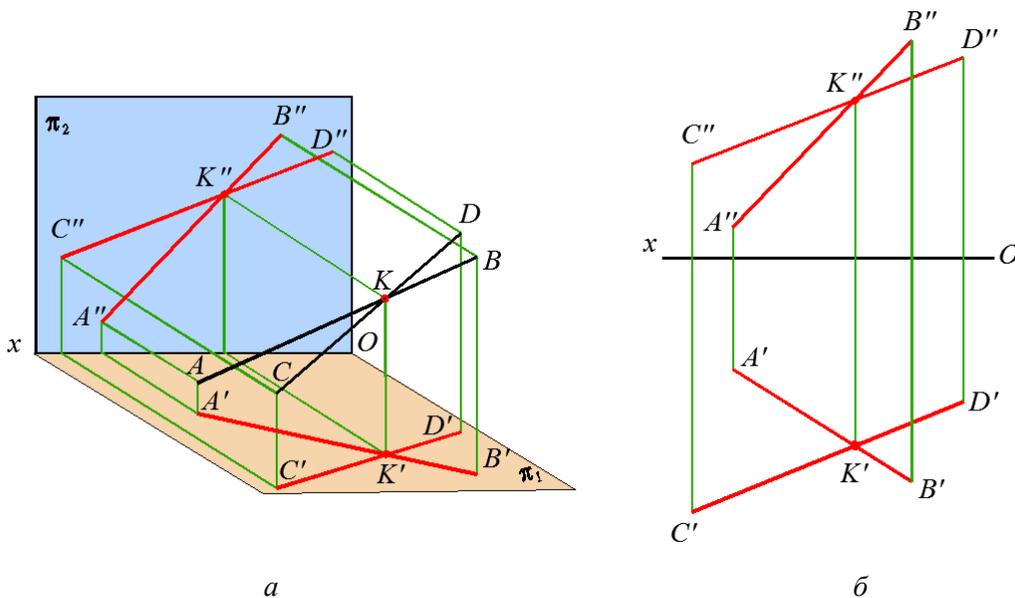


Рис. 2.3

Поэтому горизонтальная (K') и фронтальная (K'') проекции этой точки лежат на пересечении одноименных проекций данных прямых. На рис. 2.3, б проекции точки K' и K'' соединены линией связи (находятся на одном перпендикуляре к оси проекций).

Если две прямые не параллельны и не пересекаются, то они называются *скрещивающимися*. Как видно из рис. 2.4, а и б, горизонтальные проекции точек A и C (A', C') прямых m и n , заданных проекциями m', m'' и n', n'' , и фронтальные проекции точек B и D (B'', D'') сливаются в одну, так как расположены на одной проецирующей прямой. Но эти точки пересечения одноименных проекций ($A' \equiv C'$ и $B'' \equiv D''$) не являются общими для двух прямых, и, следовательно, прямые m и n скрещиваются.

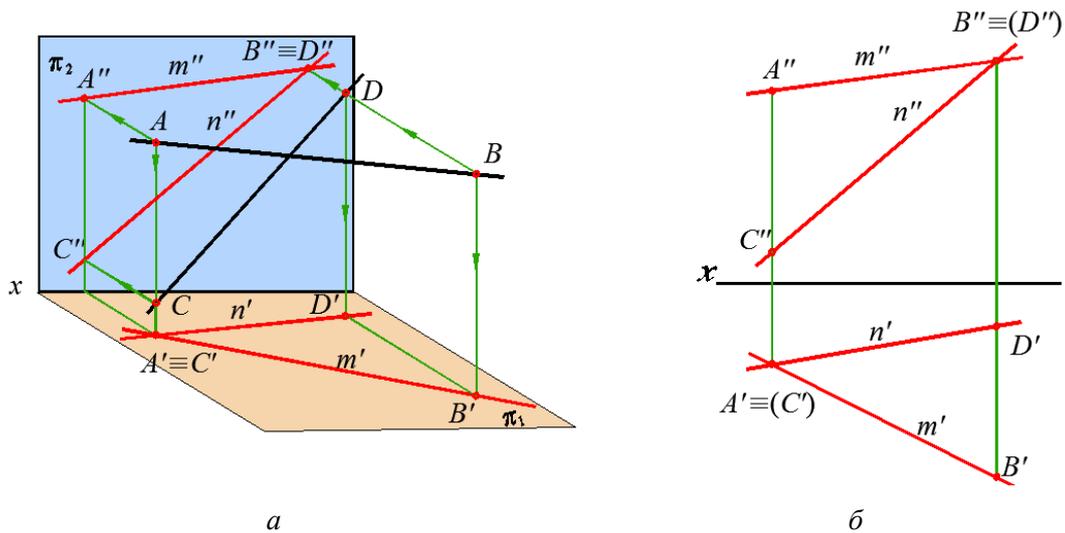


Рис. 2.4

Пары точек A и C , лежащие на горизонтально-проецирующей прямой, или B и D , лежащие на фронтально-проецирующей прямой, называются *конкурирующими*.

2.2. Параллельность прямой и плоскости

Прямая, не лежащая в плоскости, может быть параллельна плоскости или пересекаться с ней. Решение вопроса о параллельности прямой и плоскости основывается на следующем свойстве: прямая параллельна плоскости, если она параллельна одной из прямых, лежащих в этой плоскости.

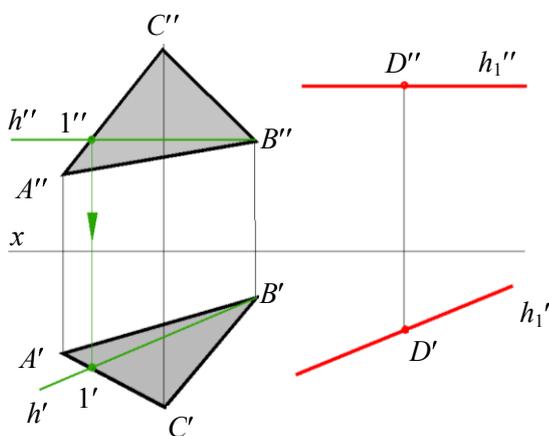


Рис. 2.5

Пример. Через точку D требуется провести горизонтальную прямую, параллельную плоскости треугольника ABC (рис. 2.5).

Построение следует начинать с проведения в плоскости треугольника ABC произвольной прямой – горизонтали h , например через вершину B .

Затем через заданную точку D проводим прямую h_1 , параллельную h .

Если заданы плоскость и прямая, то для определения их параллельности нужно попытаться построить в плоскости прямую, параллельную заданной.

2.3. Параллельность двух плоскостей

Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые, принадлежащие одной плоскости, параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. Так, на рис. 2.6 плоскость треугольника ABC параллельна плоскости двух пересекающихся прямых a и b , проходящих через точку D , так как две стороны AB и AC соответственно параллельны прямым a и b .

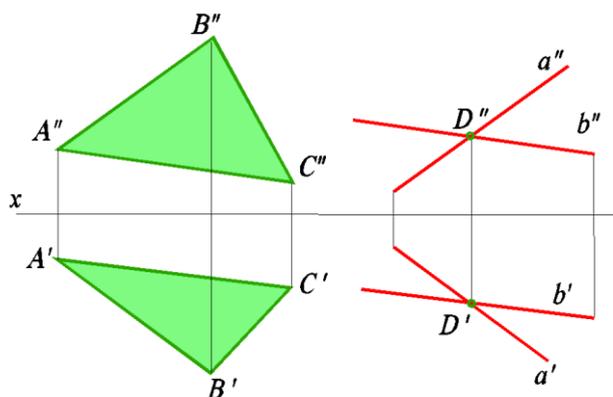


Рис. 2.6

Пример. Через точку A требуется провести плоскость, параллельную плоскости параллельных прямых m и l (рис. 2.7, а).

Решение. Через точку A проводим прямую k , параллельную прямым l и m , задающим плоскость (рис. 2.7, б).

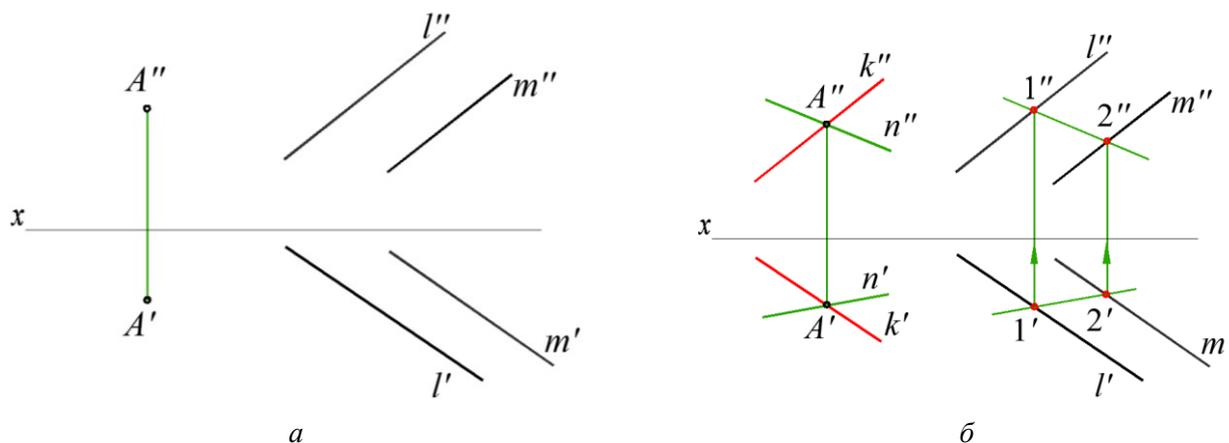


Рис. 2.7

Для того чтобы получить вторую прямую, проводим в заданной плоскости произвольную прямую 1-2. Затем проводим через точку A прямую n , параллельную прямой 1-2. Прямые k и n пересекаются и параллельны двум пересекающимся прямым заданной плоскости, следовательно, плоскости параллельны.

2.4. Пересечение двух плоскостей

Линией пересечения двух плоскостей является прямая, которая строится по двум точкам, общим для обеих плоскостей (рис. 2.8). Линия пересечения, по которой пересекаются между собой две плоскости, проходит через точки M и N , в которых прямые AB и AC плоскости треугольника пересекают вторую плоскость, т. е. точки M и N принадлежат обеим плоскостям.

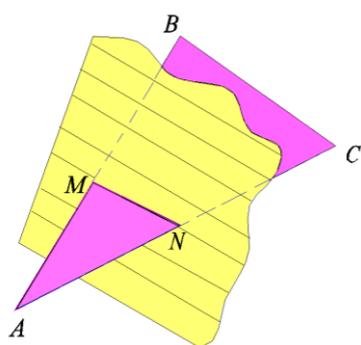


Рис. 2.8

Для нахождения точек пересечения приходится выполнять целый ряд вспомогательных построений.

На рис. 2.9 приведен пример построения линии пересечения двух плоскостей: плоскости общего положения, заданной треугольником ABC , и фронтально-проецирующей плоскости треугольника DEF . В данном случае решение упрощается, так как одна из плоскостей занимает частное положение. Общими точками для этих двух плоскостей будут точки пересечения K_1 и K_2 сторон AB и AC треугольника ABC с «вырожденной» проекцией треугольника DEF . Фронтальная проекция $K_1''K_2''$ линии пересечения совпадает с проекцией $D''E''F''$. Горизонтальные проекции K_1' и K_2' строятся при помощи линий связи.

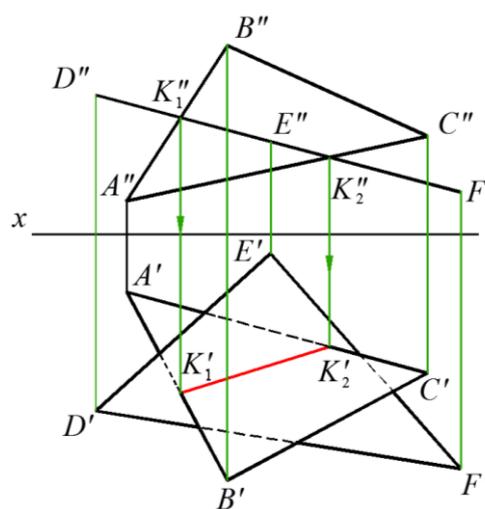


Рис. 2.9

При рассмотрении фронтальных проекций видно, что часть $K_1''K_2''C''B''$ треугольника ABC расположена над проекцией $D''E''F''$ и на горизонтальной проекции будет видна («накрывает» плоскость треугольника DEF). Часть $K_1''K_2''A''$ располагается под $D''E''F''$ и «накрывается» плоскостью треугольника DEF .

Теперь рассмотрим общий случай построения линии пересечения двух плоскостей. Пусть в пространстве (рис. 2.10) заданы две плоскости общего положения α и β , плоскость α – двумя пересекающимися прямыми a и b , плоскость β – двумя параллельными прямыми c и d . Для построения линии их пересечения необходимо найти две точки, общие для обеих плоскостей.

Для определения этих точек заданные плоскости пересекают двумя вспомогательными плоскостями. В качестве таких плоскостей применяют плоскости частного положения. В данном случае использованы горизонтальные плоскости γ_1 и γ_2 . Плоскость γ_1 пересекает плоскости α и β по горизонталям 1-2 и 3-4 соответственно. Эти горизонтальи, пересекаясь, определяют точку M , общую для плоскостей α и β . Вторая вспомогательная плоскость γ_2 пересекает заданные плоскости по горизонталям 5-6 и 7-8, которые, пересекаясь, определяют вторую общую точку N . Прямая MN – искомая линия пересечения плоскостей α и β . На рис. 2.11 описанный метод применен для решения этой задачи на проекционном чертеже.

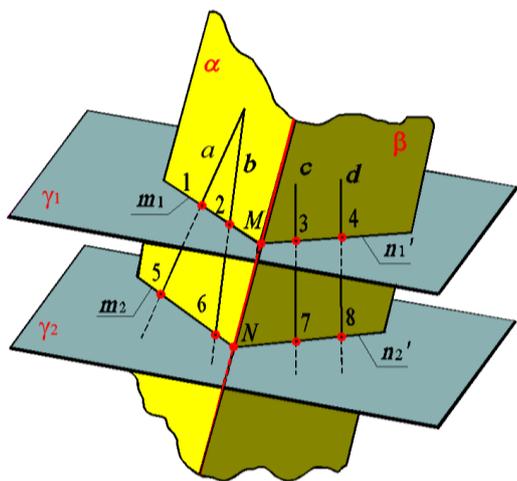


Рис. 2.10

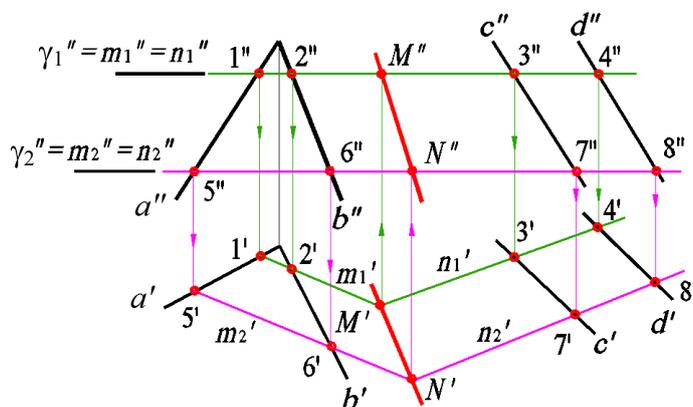


Рис. 2.11

2.5. Пересечение прямой линии с плоскостью частного положения

Так как плоскости частного положения проецируются на перпендикулярную к ней плоскость проекций в виде прямой линии, то на этой прямой должна находиться соответствующая проекция точки пересечения прямой с проецирующей плоскостью. Примеры определения точек пересечения прямой с плоскостью частного положения даны на рис. 2.12.

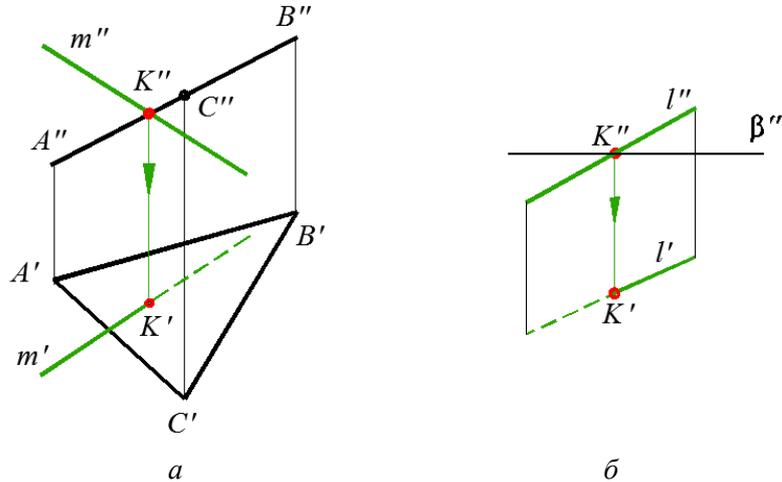


Рис. 2.12

На рис. 2.12, *a* прямая m общего положения пересекается с фронтально-проецирующей плоскостью, заданной треугольником ABC . Фронтальная проекция K'' точки пересечения находится в точке пересечения фронтальной проекции m'' прямой с проекцией $A''C''B''$. Горизонтальная проекция K' построена при помощи линий связи.

На рис. 2.12, *б* прямая l общего положения пересекается с горизонтальной плоскостью β , заданной проекцией β'' . В этом случае фронтальная проекция точки пересечения K'' определена в пересечении фронтальной проекции прямой l'' с проекцией плоскости β'' . Горизонтальная проекция K' построена при помощи линии связи.

Во всех случаях плоскость считается «непрозрачной» – та часть прямой, которая закрывается плоскостью, показывается штриховой линией.

2.6. Пересечение прямой с плоскостью общего положения

Для определения точки пересечения прямой с плоскостью общего положения следует выполнить следующие построения:

- провести через прямую вспомогательную плоскость;
- построить линию пересечения вспомогательной плоскости с заданной;
- найти точку пересечения заданной прямой и построенной;
- определить видимые части проекций данной прямой.

На рис. 2.13 приведено построение точки пересечения прямой m (проекции m' , m'') с плоскостью, заданной треугольником ABC (проекции $A'B'C'$, $A''B''C''$).

Через прямую m проведена вспомогательная горизонтально-проецирующая плоскость β (β'). По горизонтальным проекциям $1'$ и $2'$ точек 1 и 2 находим фронтальные $1''$ и $2''$, соединяя которые получаем фронтальную проекцию линии пересечения $1'2''$. Проекция $1'2''$ пересекает фронтальную проекцию m'' в точке K'' , с помощью линии связи определяем горизонтальную проекцию K' точки K . Видимость прямой и плоскости на горизонтальной плоскости проекций определяется с помощью горизонтально-конкурирующих точек 2 и 3. Точка 2 лежит на стороне AC , а 3 – на прямой m .

Их фронтальные проекции $2''$ и $3''$ показывают, что точка 2 находится ниже точки 3, поэтому на горизонтальной плоскости проекций горизонтальная проекция $2'$ точки 2 будет закрыта проекцией $3'$ точки 3. Отсюда следует, что проекция $A'C'$ расположена ниже проекции m' и участок этой прямой с левой стороны до K' будет видимым. Относительную видимость на фронтальной плоскости проекций можно определить с помощью фронтально-конкурирующих точек 4 и 5.

На рис. 2.14 изображена горизонтально-проецирующая прямая AB , пересекающаяся с плоскостью общего положения, заданной треугольником DEF .

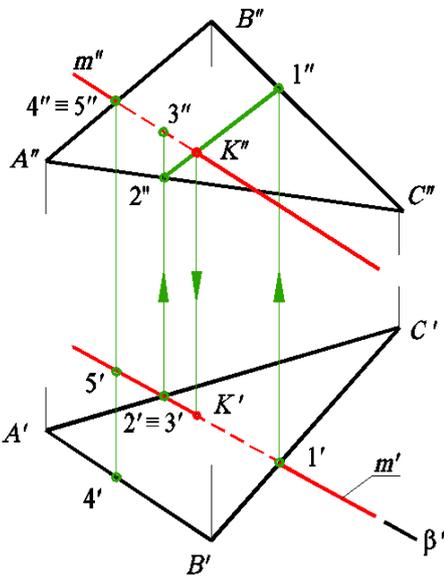


Рис. 2.13

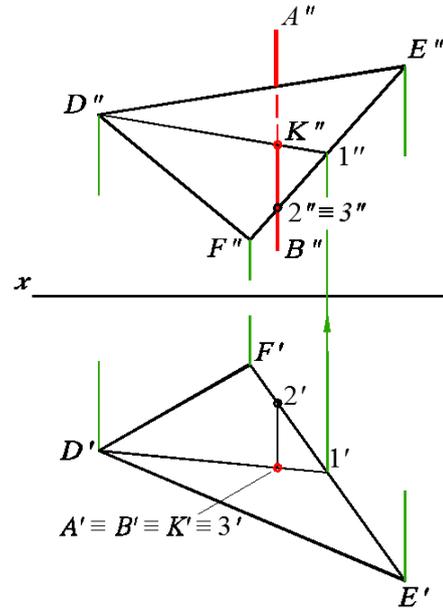


Рис. 2.14

Положение горизонтальной проекции K' точки пересечения K известно ($K' \equiv A' \equiv B'$), а положение фронтальной проекции определено при помощи прямой $D1$ треугольника DEF .

2.7. Перпендикулярность прямой и плоскости

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.

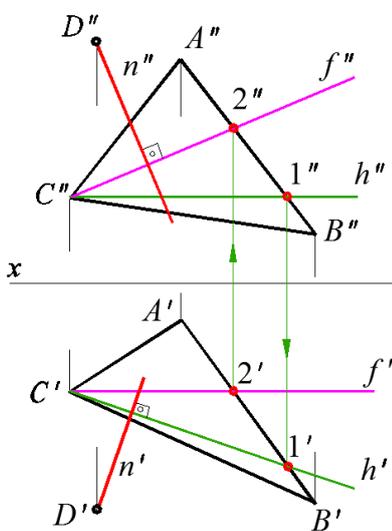


Рис. 2.15

На рис. 2.15 показано построение перпендикуляра из точки D к плоскости треугольника ABC . Направление проекций перпендикуляра определяется горизонталью h (прямая $C1$) и фронталью f (прямая $C2$) плоскости треугольника.

Горизонтальная проекция n' перпендикуляра проведена под прямым углом к проекции $C'1'$ горизонтали, а фронтальная проекция n'' расположена под прямым углом к фронтальной проекции $C''2''$ фронтали. Видеопример с этапами решения задачи приведен [здесь](#). 

Пример. Пусть требуется построить плоскость, проходящую через точку A и перпендикулярную данной прямой l (рис. 2.16).

Искомую плоскость задаем двумя пересекающимися прямыми (горизонталью h и фронталью f), проходящими через точку A .

Горизонтальная проекция h' горизонтали h перпендикулярна горизонтальной проекции l' прямой l , фронтальная проекция фронтали f'' перпендикулярна фронтальной проекции l'' .

Если плоскости занимают частное положение, то перпендикуляры к этим плоскостям располагаются параллельно плоскостям проекций. Так, перпендикуляром к горизонтально-проецирующей плоскости α (проекция α') является горизонталь AB (рис. 2.17, а). Фронтальная прямая CD перпендикулярна фронтально-проецирующей плоскости β (проекция β'') (рис. 2.17, б). Горизонтально-проецирующая прямая EF является перпендикуляром к горизонтальной плоскости γ (проекция γ'') (рис. 2.17, в).

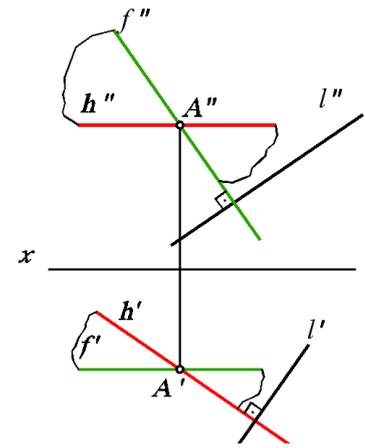


Рис. 2.16

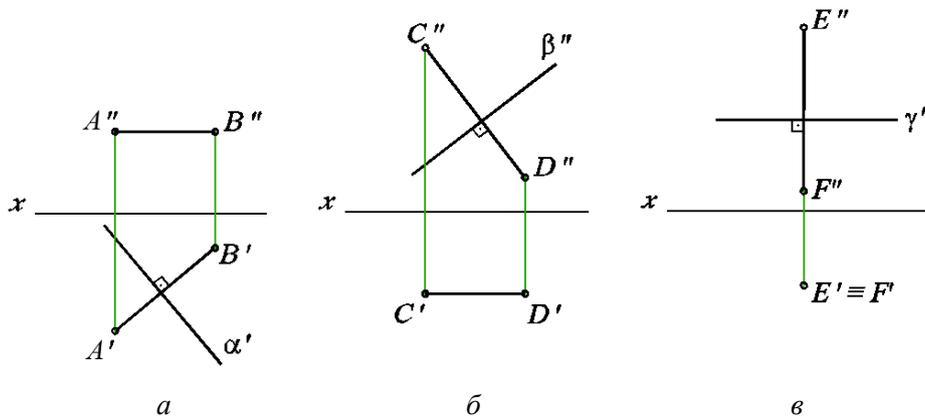


Рис. 2.17

2.8. Перпендикулярность двух прямых

Взаимно перпендикулярные прямые общего положения образуют прямой угол, который проецируется на плоскости проекций с искажением. В общем случае перпендикуляр к прямой можно построить с помощью плоскости, расположенной перпендикулярно к этой прямой.

На рис. 2.18 показано построение перпендикуляра из точки A к прямой BC . Сначала через точку A проводим плоскость, перпендикулярную к прямой BC . Эта плоскость задается двумя пересекающимися прямыми: горизонталью h и фронталью f (при этом горизонтальная проекция h' перпендикулярна к горизонтальной проекции $B'C'$, а фронтальная проекция f'' перпендикулярна к фронтальной проекции $B''C''$).

Затем определяем точку пересечения K прямой BC с проведенной плоскостью. Для этого через прямую BC проводим фронтально-проецирующую плоскость α (α''), которая пересекает плоскость, заданную горизонталью h и фронталью f , по линии 1-2 (проекции $1'-2'$, $1''-2''$).

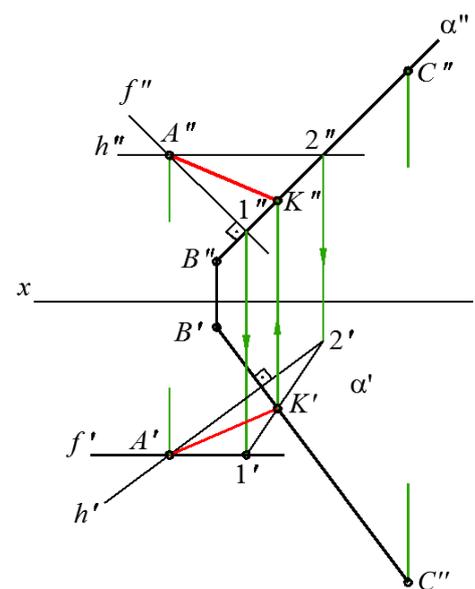


Рис. 2.18

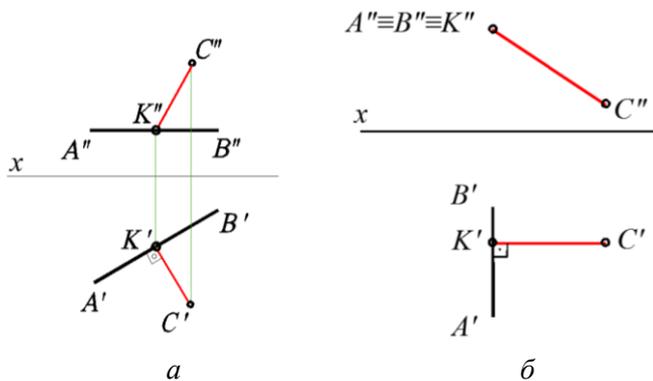


Рис. 2.19

В пересечении прямой 1-2 с прямой BC получается точка K . Прямая AK является искомым перпендикуляром, так как пересекает прямую BC и находится в плоскости, перпендикулярной прямой BC . При построении проекций перпендикуляра к прямой частного положения задача упрощается, так как одна из сторон прямого угла параллельна плоскости проекции и прямой угол на эту плоскость проецируется без искажения. Так на рис. 2.19, *а* показано построение проекций перпендикуляра, проведенного из точки C к горизонтали AB . Горизонтальная проекция $C'K'$ перпендикуляра CK располагается под прямым углом к горизонтальной проекции $A'B'$ прямой AB . Фронтальная проекция $C''K''$ определяется при помощи линий связи (точка K принадлежит прямой AB). На рис. 2.19, *б* показано построение проекций перпендикуляра, проведенного из точки C к фронтально-проецирующей прямой AB . Построение фронтальной проекции $C''K''$ перпендикуляра очевидно из рисунка, а его горизонтальная проекция $C'K'$ перпендикулярна к горизонтальной проекции $A'B'$ прямой AB .

2.9. Перпендикулярность двух плоскостей

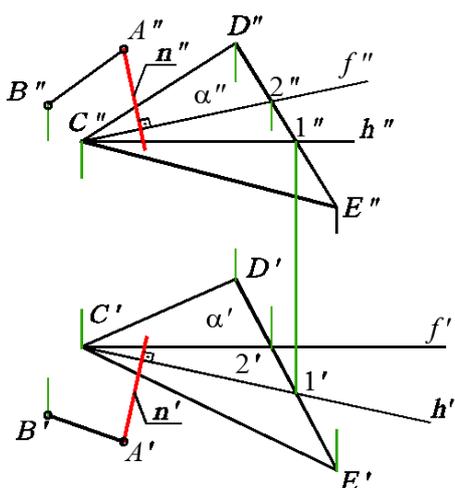


Рис. 2.20

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой. На рис. 2.20 показано построение плоскости, перпендикулярной к плоскости, заданной треугольником CDE . Дополнительным условием здесь служит то, что искомая плоскость должна проходить через прямую AB . Следовательно, искомая плоскость определяется прямой AB и перпендикуляром к плоскости треугольника. Для проведения этого перпендикуляра в плоскости CDE взяты горизонталь h ($C1$) и фронталь f ($C2$). Через точку A прямой AB проведены проекции перпендикуляра n к плоскости CDE ($n' \perp C'1', n'' \perp C''2''$).

Образованная пересекающимися прямыми AB и n плоскость перпендикулярна к плоскости CDE , так как проходит через перпендикуляр к этой плоскости.



Примеры решения задач

Задача 1. Построить фронтальную проекцию отрезка прямой MN , принадлежащую плоскости, заданной двумя параллельными прямыми AB и CD (рис. 2.21).

Решение. Обозначим горизонтальные проекции точек пересечения прямой MN с прямыми AB и CD соответственно K' и L' .

По линиям связи определяем их фронтальные проекции K'' и L'' и проводим искомую проекцию $M''N''$.

На видеопримере [здесь](#) можно проследить ход решения подобной задачи.

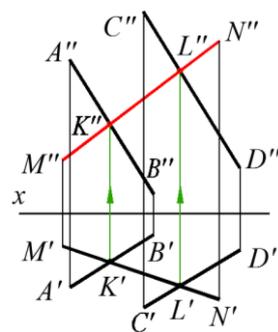


Рис. 2.21

Задача 2. В плоскости, заданной прямой AB и точкой C , провести горизонталь на расстоянии 15 мм от горизонтальной плоскости проекций π_1 (рис. 2.22).

Решение. Зададим исходную плоскость двумя пересекающимися прямыми. Для этого из точки C проведем прямую CK ($C'K'$, $C''K''$), пересекающую прямую AB в точке K (K' , K''). Затем на расстоянии 15 мм от оси x проведем фронтальную проекцию горизонтали ED ($E''D'' \parallel x$). По линиям связи определим горизонтальные проекции точек D и E и через них проведем горизонтальную проекцию $E'D'$ горизонтали.

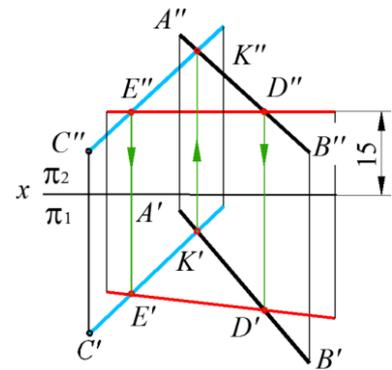


Рис. 2.22

Задача 3. Построить линию пересечения двух плоскостей, заданных треугольниками ABC и DEF (условие на рис. 2.23).

Решение. Для построения линии пересечения двух плоскостей общего положения используем вспомогательные плоскости. На рис. 2.24, а приведено построение линии пересечения MN .

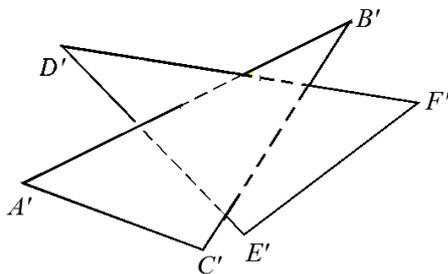
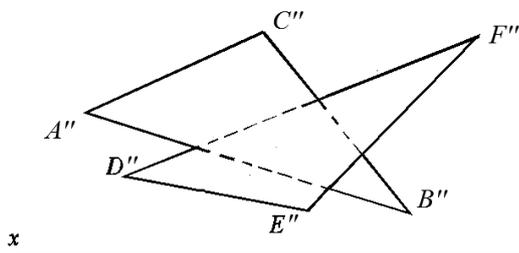


Рис. 2.23

Точка M найдена как точка пересечения прямой AB с плоскостью треугольника DEF . Для ее построения через сторону AB проведена фронтально-проецирующая плоскость γ_1 (на рисунке проекция γ_1'' совпадает с проекцией $A''B''$). Плоскость γ_1 пересекает плоскость треугольника DEF по прямой 1-2; точка M получается как точка пересечения прямых AB и 1-2. Сначала находим горизонтальную проекцию точки M' , затем по линии связи строим фронтальную проекцию M'' . Точка N линии пересечения треугольников получена с помощью второй плоскости γ_2 , которая проведена через прямую BC треугольника ABC .

Фронтальная проекция γ_2'' совпадает с проекцией $B''C''$. Плоскость γ_2 пересекает треугольник DEF по линии 3-4. На пересечении прямых BC и 3-4 получается точка N , принадлежащая линии пересечения двух треугольников. Сначала находится горизонтальная проекция точки N' , затем по линии связи определяется фронтальная проекция N'' .

Для определения видимости сторон треугольников надо сравнить положение двух точек, из которых одна принадлежит стороне треугольника ABC , вторая – стороне треугольника DEF и у которых совпадают либо горизонтальные, либо фронтальные проекции (конкурирующие точки). В первом случае устанавливается, какая из этих точек «закрывает» другую по отношению к горизонтальной плоскости проекций, во втором – относительно фронтальной плоскости проекций.

На рис. 2.24, б в качестве примера приведены две горизонтально-конкурирующие точки – K и L . У этих точек совпадают горизонтальные проекции ($K' \equiv L'$). Но точка K принадлежит стороне AB треугольника ABC и расположена выше, чем точка L , принадлежащая стороне DE треугольника DEF . Следовательно, для наблюдателя, смотрящего на плоскость π_1 сверху, точка K «закрывает» точку L , а это значит, что данная часть треугольника ABC , которой принадлежит точка K , закрывает треугольник DEF . Поэтому часть горизонтальной проекции $D'E'$ стороны, закрытой треугольником ABC , показывается штриховой линией.

Для определения видимости фронтальных проекций треугольников рассмотрим относительное положение двух фронтально-конкурирующих точек P и Q (рис. 2.24, б), у которых фронтальные проекции совпадают ($P'' \equiv Q''$).

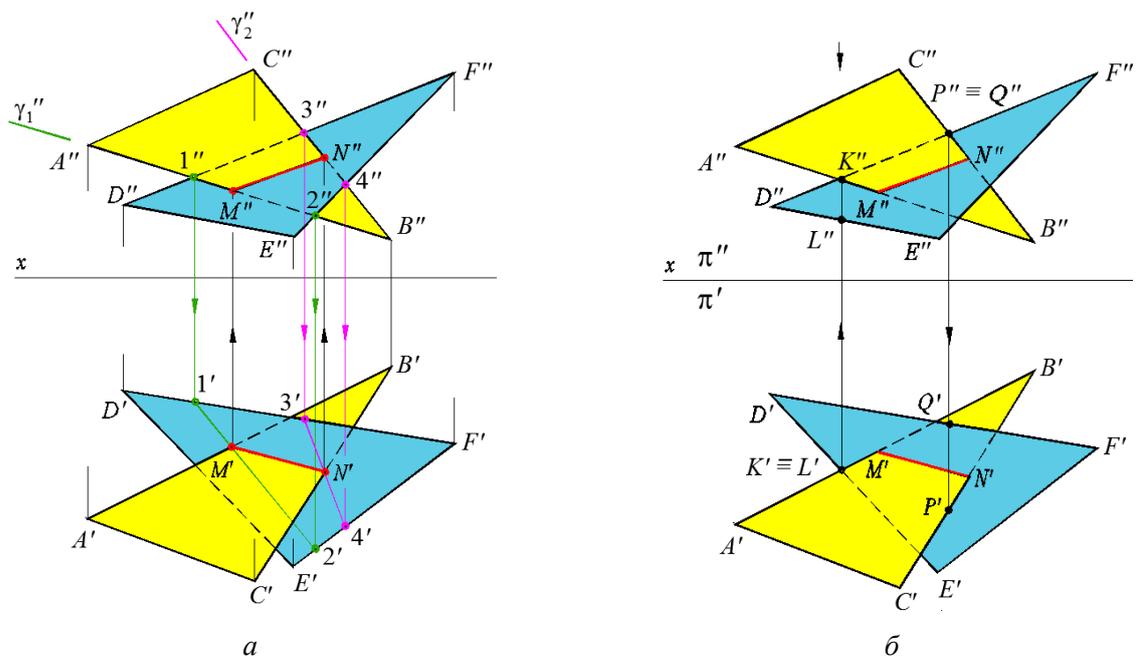


Рис. 2.24

Точка P , расположенная на стороне BC треугольника ABC , находится ближе к глазу наблюдателя, смотрящего на плоскость π_2 , чем точка Q , расположенная на стороне DF треугольника DEF . Это значит, что часть треугольника ABC , которой принадлежит точка P , закрывает треугольник DEF . Поэтому часть фронтальной проекции стороны DF , закрытой треугольником ABC , показывается штриховой линией.

Вопросы для контроля

1. Какая плоскость называется плоскостью общего положения?
2. Какая плоскость называется проецирующей?
3. Как проверить принадлежность точки плоскости?
4. Какие линии в плоскости называются горизонталями, фронталями?
5. Каковы признаки параллельности прямой и плоскости, двух плоскостей?
6. Как построить точку пересечения прямой с плоскостью общего положения?

Лекция 3

СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Решение задач значительно упрощается, если прямые линии и плоскости занимают частное положение относительно плоскостей проекций. В этом случае ответ получается или непосредственно по данному чертежу, или при помощи простейших построений.

Переход от общего положения геометрических элементов к частному выполняется следующими способами:

- введением дополнительных плоскостей проекций, расположенных либо параллельно, либо перпендикулярно рассматриваемому геометрическому элементу;
- изменением положения линии или плоской фигуры в пространстве при неизменной системе плоскостей проекций.

Основные задачи преобразования:

- 1) прямая общего положения становится прямой уровня;
- 2) прямая общего положения становится проецирующей прямой;
- 3) плоскость общего положения становится проецирующей плоскостью;
- 4) плоскость общего положения становится плоскостью уровня.

3.1. Способ замены плоскостей проекций

Сущность способа заключается в том, что положение заданных элементов (точек, линий, фигур, поверхностей) в пространстве остается неизменным, а система плоскостей проекций π_1 / π_2 дополняется новыми плоскостями, по отношению к которым элементы задачи (прямая, плоскость) занимают частное положение. На рис. 3.1 показана точка A , заданная в системе плоскостей проекций π_1 / π_2 . Заменяем π_2 другой вертикальной плоскостью π_4 и построим новую фронтальную проекцию A^{IV} на эту плоскость. Так как плоскость проекций π_1 является общей для систем π_1 / π_2 и π_1 / π_4 , то координата z точки A остается неизменной. Следовательно, расстояние от новой фронтальной проекции до новой оси x_1 равно расстоянию от заменяемой проекции до оси x . При этом проекция A^{IV} определена как основание перпендикуляра, опущенного из A на π_4 . Горизонтальная проекция A' остается прежней, а координата y в системе π_1 / π_4 будет теперь иной и определяется расстоянием от точки A до плоскости π_4 .

Для получения плоского чертежа плоскость π_4 вращением совмещается с π_1 . Также с π_1 совмещается новая фронтальная проекция A^{IV} , которая располагается на общем перпендикуляре с оставшейся без изменения горизонтальной проекцией A' (рис. 3.2).

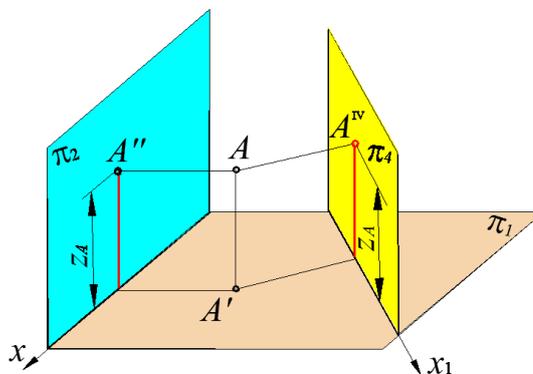


Рис. 3.1

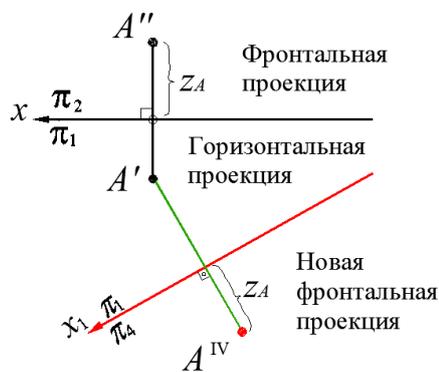


Рис. 3.2

Аналогично можно заменить горизонтальную плоскость проекций π_1 на новую, перпендикулярную π_2 . В этом случае измеряется величина координаты y , которая определяет расстояние от точки до общей для двух систем плоскости π_2 .

3.1.1. Преобразование прямой общего положения в положение прямой уровня

Для преобразования прямой AB в прямую уровня (т. е. параллельную плоскости проекций) (рис. 3.3) вводят новую плоскость проекций π_4 так, чтобы ось проекций x_1 была параллельна какой-либо проекции AB (в данном случае – $A'B'$). Затем проводятся линии связи перпендикулярно оси x_1 и откладываются координаты z для построения проекций A^{IV} и B^{IV} , равные координатам z проекций A'' и B'' . Новая проекция прямой $A^{IV}B^{IV}$ дает натуральную величину отрезка AB и позволяет определить угол наклона ϕ_1 этого отрезка к плоскости проекций π_1 . Угол наклона отрезка AB к фронтальной плоскости проекций ϕ_2 можно определить, построив его изображение на дополнительной плоскости проекций π_5 (рис. 3.4). Ось x_1 параллельна фронтальной проекции отрезка $A''B''$. Проекция A^VB^V также будет представлять собой натуральную величину отрезка AB .

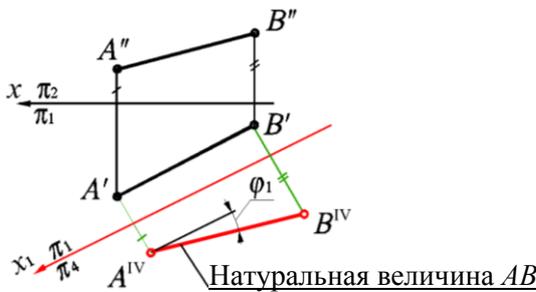


Рис. 3.3

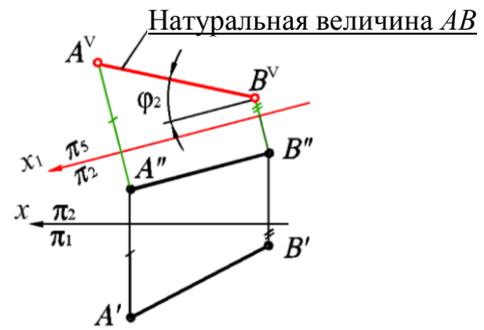


Рис. 3.4

На видеоприме [здесь](#) можно проследить последовательность построений при решении задачи с использованием способа замены плоскостей.

3.1.2. Преобразование прямой общего положения в проецирующую

Преобразование прямой общего положения в проецирующее положение требует двойной замены плоскостей проекций, так как плоскость, перпендикулярная прямой, не будет перпендикулярна ни к π_1 , ни к π_2 .

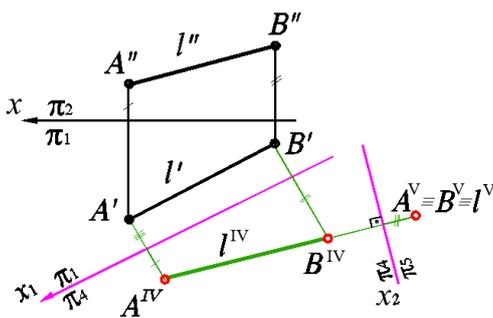


Рис. 3.5

На рис. 3.5 выполнено преобразование прямой AB общего положения в проецирующее. В результате первой замены происходит преобразование прямой AB в прямую, параллельную плоскости π_4 . Для этого проводится новая ось проекций $x_1 \parallel A'B'$ и находится проекция $A^{IV}B^{IV}$.

Затем выполняется вторая замена плоскостей проекций, переход к системе плоскостей π_4 / π_5 . При этом ось проекций x_2 проводится перпендикулярно к $A^{IV}B^{IV}$. В результате прямая AB располагается перпендикулярно к плоскости проекций π_5 и проецируется в виде точки.

3.1.3. Преобразование плоскости общего положения в проецирующее положение

Известно, что если одна плоскость перпендикулярна другой, то она должна содержать прямую, перпендикулярную этой плоскости. В качестве такой прямой для преобразований плоскости в проецирующее положение следует взять прямую уровня, например горизонталь $h(A1)$ (рис. 3.6).

Плоскость π_4 , перпендикулярная к горизонтали $A1$ и плоскости π_1 , является плоскостью, перпендикулярной к плоскости треугольника ABC . Новая ось проекций x_1 проводится перпендикулярно проекции горизонтали $A'1'$. Затем определяются проекции вершин треугольника на плоскость π_4 . Проекция $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$ вырождается в прямую, что свидетельствует о том, что плоскость треугольника перпендикулярна плоскости π_4 . При этом угол φ_1 наклона плоскости треугольника ABC к плоскости π_1 на плоскость π_4 проецируется без искажения.

Аналогичное преобразование выполнено на рис. 3.7, где плоскость π_1 заменена плоскостью π_4 , перпендикулярной π_2 и плоскости треугольника ABC . Для этого в плоскости ABC проведена фронталь $f(A1)$, перпендикулярно к которой располагается плоскость π_4 . Новая ось x_1 проведена перпендикулярно $A''1''$.

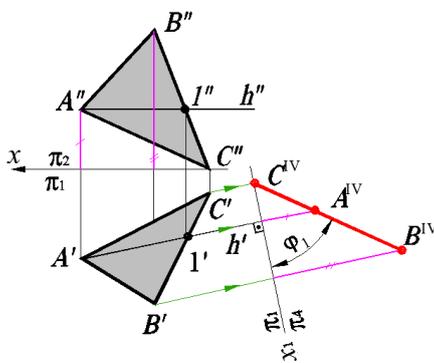


Рис. 3.6

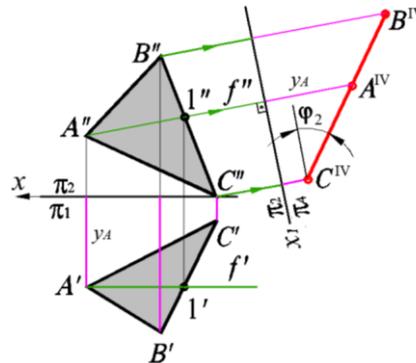


Рис. 3.7

На линиях связи, проведенных из вершин треугольника ABC перпендикулярно оси x_1 , откладывают отрезки, равные y_A, y_B, y_C . Плоскость треугольника относительно π_4 стала проецирующей. Угол φ_2 наклона плоскости треугольника ABC к плоскости π_2 на плоскости π_4 проецируется без искажения.

3.1.4. Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня

Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня требует двойной замены плоскостей проекций, так как плоскость, параллельная заданной плоскости, не будет перпендикулярна ни π_1 , ни π_2 , т. е. она не образует с плоскостью проекций ортогональной системы. На рис. 3.8 показано преобразование плоскости треугольника ABC общего положения в положение уровня.

При первой замене (π_2 на π_4) используется горизонталь треугольника $h(A1)$. Новая ось проекций x_1 проводится перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали $h'(A'1')$. Спроецировав треугольник ABC на новую плоскость проекций π_4 , получим проекцию $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$. Эти построения описаны выше.

На втором этапе преобразуем плоскость треугольника ABC в плоскость уровня. Для этого перейдем от системы π_1 / π_4 к системе π_4 / π_5 . Новая плоскость π_5 устанавливается параллельно треугольнику, а значит, новая ось x_2 на чертеже проводится параллельно прямой, на которой расположены точки A^{IV}, B^{IV}, C^{IV} .

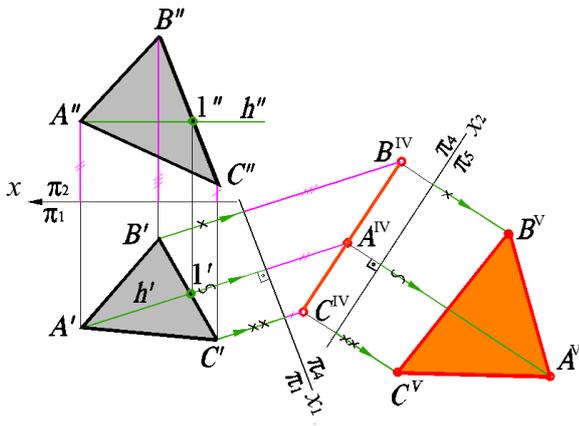


Рис. 3.8

Через указанные точки проводят перпендикуляры – линии связи к новой оси x_2 и откладывают на них в плоскости π_5 отрезки, равные по длине расстояниям от оси x_1 до вершин A', B' и C' соответственно. Полученная проекция $A^V B^V C^V$ определяет истинную величину треугольника.

Подобные двойные преобразования используются для решения задач на определение углов при вершинах треугольника, построение высот и биссектрис его углов, центра вписанной (описанной) окружности и т. п., так как эти задачи требуют определения натуральных величин треугольников.

3.2. Способ вращения

При вращении вокруг неподвижной прямой (оси вращения) каждая точка геометрического элемента перемещается в плоскости, перпендикулярной к оси вращения (плоскости вращения). Точка перемещается по окружности, центр которой находится в точке пересечения оси с плоскостью вращения, а радиус вращения равен расстоянию от вращаемой точки до центра. Если точка находится на оси вращения, то она остается неподвижной.

Вращение точки вокруг проецирующих прямых. На рис. 3.9 точка A , вращаясь вокруг оси i , описывает окружность, плоскость α которой перпендикулярна i . Центр окружности O (центр вращения) расположен в точке пересечения оси вращения i с плоскостью α , а радиус вращения R равен длине отрезка OA .

Так как плоскость вращения α параллельна плоскости π_1 , то проекция траектории вращающейся точки на плоскость π_1 представляет собой окружность радиуса R , а на плоскость π_2 – отрезок прямой, параллельной оси x . Через \bar{A} обозначено новое положение точки A , которое она занимает после поворота на угол φ .

На рис. 3.10 приведен ортогональный чертеж точки A , вращающейся вокруг горизонтально-проецирующей оси i . После поворота на угол φ точка A займет новое положение \bar{A} (α – плоскость вращения, O – центр вращения, R – радиус вращения).

Если ось вращения i расположена перпендикулярно плоскости π_2 (рис. 3.11), то фронтальная проекция точки A будет перемещаться по окружности, а горизонтальная – по прямой, перпендикулярной линиям связи. Новое положение точки, которое она занимает после поворота на угол φ – точка \bar{A} . Плоскость вращения – фронтальная плоскость α (α').

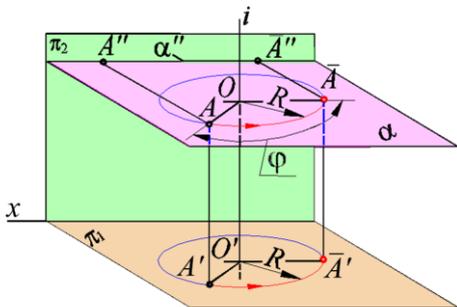


Рис. 3.9

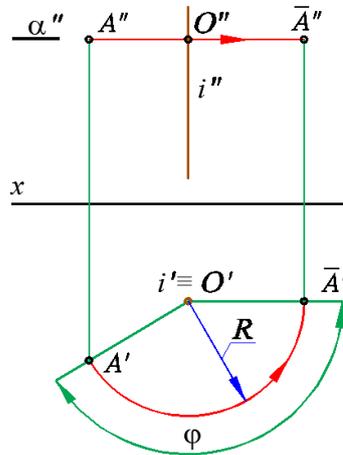


Рис. 3.10

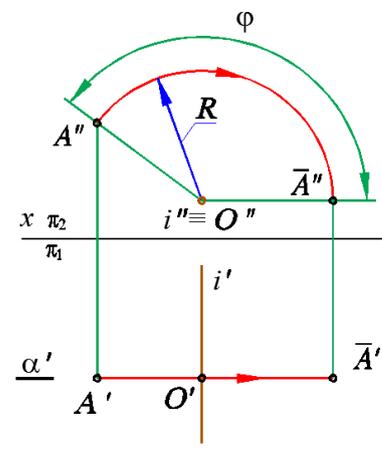


Рис. 3.11

Для поворота отрезка прямой на заданный угол необходимо повернуть на этот угол две точки, определяющие отрезок. Каждая из этих точек вращается в плоскости, перпендикулярной оси вращения, и будет иметь свой радиус вращения.

3.3. Плоскопараллельное перемещение отрезка

При плоскопараллельном перемещении все точки геометрической фигуры движутся в плоскостях, параллельных плоскости проекций, т. е. сохраняется основной принцип вращения вокруг проецирующих осей. На рис. 3.12 приведено наглядное изображение плоскопараллельного перемещения отрезка AB .

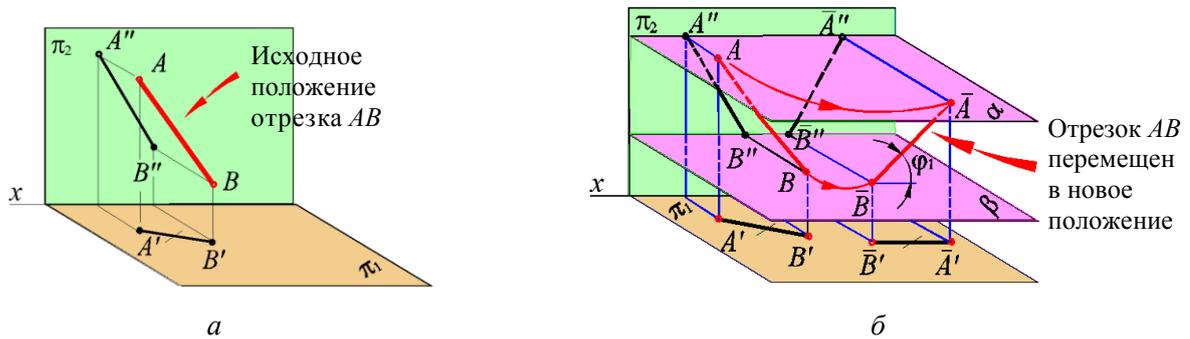


Рис. 3.12

На рис. 3.12, *a* дано исходное положение отрезка AB – прямой, занимающей относительно плоскостей проекций общее положение. На рис. 3.12, *б* отрезок AB перемещен в новое положение, при этом точка A движется в плоскости α , точка B – в плоскости β . Обе плоскости параллельны горизонтальной плоскости проекций.

При таком перемещении угол наклона φ_1 отрезка к плоскости π_1 сохраняется неизменным, поэтому не изменяется и длина горизонтальной проекции отрезка, т. е. $A'B' = \bar{A}'\bar{B}'$. Последнее свойство имеет важное значение для решения задач.

На рис. 3.13 приведен пример плоскопараллельного перемещения отрезка AB в новое положение, параллельное фронтальной плоскости проекций. На этом чертеже отрезок AB перемещается в новое положение параллельно фронтальной плоскости проекций. При этом сначала перемещается в новое положение, параллельное оси x , горизонтальная проекция отрезка, причем $A'B' = \bar{A}'\bar{B}'$. Затем по линиям связи строится фронтальная проекция $\bar{A}''\bar{B}''$.

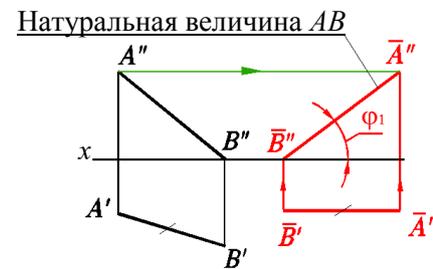


Рис. 3.13

После перемещения отрезка AB в новое положение \bar{AB} он станет параллельным плоскости π_2 и его новая фронтальная проекция будет равна натуральной величине. Соответственно, угол φ_1 наклона проекции $\bar{A}''\bar{B}''$ к оси проекций будет равен углу наклона отрезка AB к плоскости π_1 .

На рис. 3.14 приведено двойное плоскопараллельное перемещение отрезка AB с целью

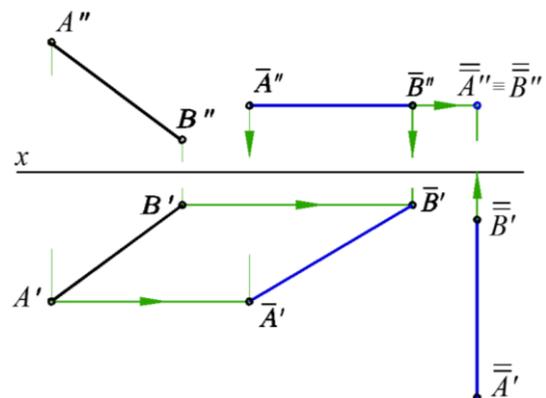


Рис. 3.14

преобразования его в фронтально-проецирующее положение. Вначале произведено перемещение фронтальной проекции в положение, параллельное оси x , причем $\overline{A'B'} = A''B''$. Отрезок AB занял положение, параллельное плоскости π_1 , и его горизонтальная проекция $\overline{A'B'}$ равна длине отрезка. Затем горизонтальная проекция перемещается в положение, перпендикулярное оси x , причем $\overline{\overline{A'B'}} = \overline{A'B'}$.

Отрезок AB занял фронтально-проецирующее положение и его фронтальная проекция $\overline{\overline{A''}} \equiv \overline{\overline{B''}}$.

На рис. 3.15 показано перемещение треугольника ABC , расположенного в плоскости общего положения, в положение плоскости уровня. При первом движении треугольник ABC переводится во фронтально-проецирующее положение. Для этого в плоскости треугольника строится горизонтальная прямая $A1$, затем горизонтальная проекция $A'1'$ перемещается в проецирующее положение (на свободном поле чертежа проводится отрезок $\overline{A'1'} = A'1'$ перпендикулярно оси x).

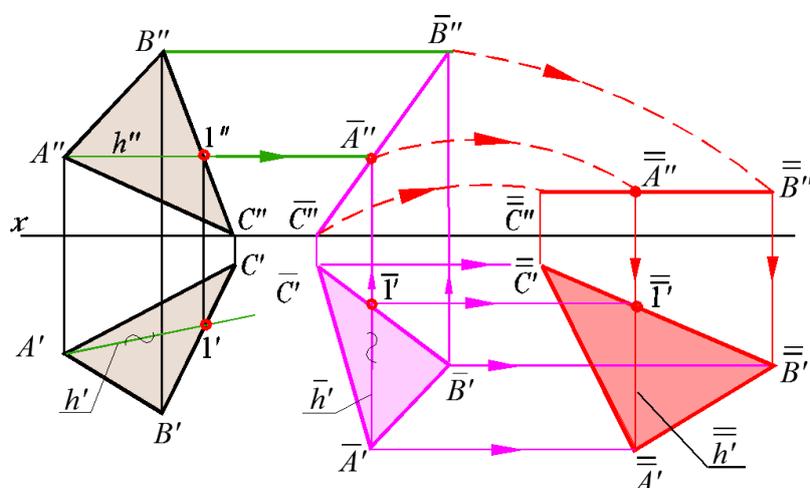


Рис. 3.15

В процессе перемещения размеры и форма горизонтальной проекции треугольника не изменяются. Построение вершин $\overline{C'}$ и $\overline{B'}$ выполняется засечками с помощью циркуля. Все вершины треугольника на фронтальной плоскости проекций перемещаются по горизонтальным линиям связи, пересечение которых с линиями связи, проведенными из соответствующих вершин новой горизонтальной проекции треугольника $\overline{A'B'C'}$, образует новую фронтальную проекцию $\overline{A''B''C''}$, перпендикулярную фронтальной плоскости проекций.

При втором движении все точки треугольника перемещаются в плоскостях, параллельных фронтальной плоскости проекций, в результате чего он займет положение горизонтальной плоскости уровня и его вырожденная фронтальная проекция $\overline{\overline{A''B''C''}}$ расположится перпендикулярно линиям связи, оставаясь неизменной по длине. Новая горизонтальная проекция $\overline{\overline{A'B'C'}}$ треугольника ABC будет равна его натуральной величине.



Примеры решения задач

Задача 1. Определить расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD (рис. 3.16).

Решение. Расстояние между скрещивающимися прямыми измеряется длиной перпендикуляра, общего к заданным прямым. Для решения задачи используем способ замены плоскостей проекций.

Если в результате преобразования одна из прямых займет положение проецирующей относительно какой-либо плоскости проекций, т. е. будет представлять собой точку, то перпендикуляр, опущенный из этой точки на другую прямую, будет параллелен этой плоскости проекций и спроецируется на нее в натуральную величину. Прямая CD преобразуется в проецирующую двойной заменой плоскостей проекций.

Сначала построим проекции $A^{IV}B^{IV}$ и $C^{IV}D^{IV}$ на плоскости π_4 , расположенной параллельно прямой CD (проводим $x_1 \parallel C'D'$).

Затем найдем проекции прямых A^VB^V и C^VD^V на плоскость π_5 , перпендикулярную прямой CD . На плоскость π_5 прямая CD спроецируется в точку ($C^V \equiv D^V$), а расстояние между нею и проекцией A^VB^V (отрезок M^VN^V) будет искомым натуральной величиной расстояния между заданными прямыми.

Далее путем обратного проецирования строим проекцию отрезка MN на плоскость π_4 , при этом точку M^{IV} находим, проведя перпендикуляр из точки N^{IV} к проекции $C^{IV}D^{IV}$. Прямой угол здесь на искажается, так как проекция $C^{IV}D^{IV}$ параллельна плоскости π_4 . С помощью линий связи находим проекции отрезка MN сначала на плоскости π_1 , а затем на плоскости π_2 .

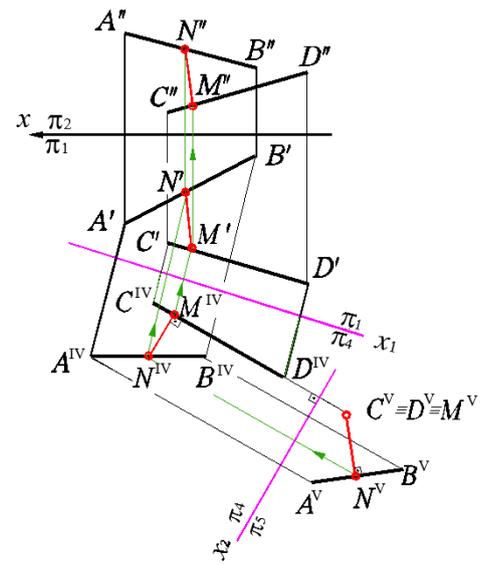


Рис. 3.16

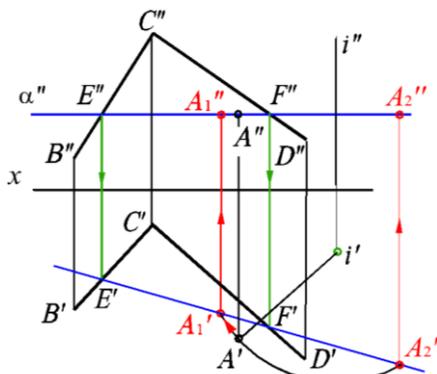


Рис. 3.17

Задача 2. Повернуть точку A вокруг оси i до совмещения ее с плоскостью α общего положения, заданной пересекающимися прямыми BC и CD (рис. 3.17).

Решение. Точка A вращается вокруг оси i , перпендикулярной к плоскости проекций π_1 . Через точку A проведена плоскость α (α''), перпендикулярная к оси вращения и, следовательно, параллельная π_1 . Горизонтальная плоскость α пересекает заданную ($BC \times CD$) по горизонтали EF ($E''F''$, $E'F'$). При вращении точка A описывает окружность радиуса $A'i'$, величина которого определяется длиной перпендикуляра, проведенного из точки A на ось.

Окружность проецируется на плоскость π_1 без искажения и пересекается с проекцией горизонтали $E'F'$ в точках A_1' и A_2' , которые являются горизонтальными проекциями точки A , т. е. задача имеет два решения.

По линиям связи находим фронтальные проекции точек A_1 и A_2 , лежащих на горизонтали EF .

Вопросы для контроля

1. Сформулируйте основные задачи преобразования чертежа.
2. Перечислите способы преобразования чертежа.
3. В чем заключается способ замены плоскостей проекций?
4. Как перемещаются проекции точки при вращении ее вокруг проецирующих осей?
5. В чем заключается способ плоскопараллельного перемещения?

Лекция 4

МНОГОГРАННИКИ

Одним из видов пространственных форм являются многогранники – замкнутые пространственные фигуры, ограниченные плоскими многоугольниками. Эти многоугольники образуют грани. Общие стороны многоугольников называются *ребрами*; вершины многогранных углов, образованных его гранями, сходящихся в одной точке, – *вершинами* многогранника. Наибольший практический интерес представляют собой призмы, пирамиды и правильные многогранники.

Призма – многогранник, две грани которого представляют равные многоугольники с взаимно параллельными сторонами (основаниями) (рис. 4.1). Ребра, не принадлежащие основаниям и параллельные друг другу, называют боковыми. Призму, ребра которой перпендикулярны к основаниям, называют *прямой*. Прямая призма называется *правильной*, если ее основаниями являются правильные многоугольники.

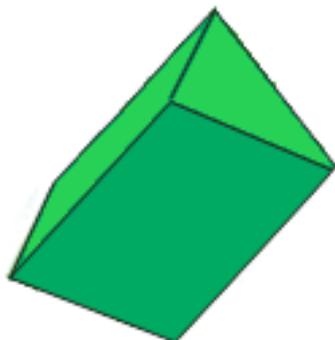


Рис. 4.1

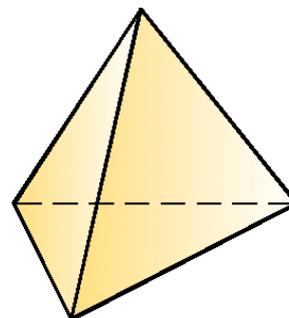


Рис. 4.2

Пирамида – многогранник, одна грань которого – плоский n -угольник (основание), а остальные грани – треугольники с общей вершиной (рис. 4.2). Если основанием пирамиды является правильный многоугольник и высота ее проходит через центр этого многоугольника, пирамиду называют *правильной*.

Многогранник называют *правильным*, если его грани представляют собой правильные и равные многоугольники.

4.1. Точка и прямая линия на поверхности многогранника

Точки на гранях призмы и пирамиды строятся при помощи вспомогательных прямых, принадлежащих соответствующим плоскостям граней. Чтобы определить по заданной фронтальной проекции $1''$ точки 1, лежащей на грани призмы AA_1B_1B , горизонтальную проекцию $1'$ (рис. 4.3), нужно провести через точку $1''$ фронтальную проекцию вспомогательной прямой DD_1 , параллельную ребрам призмы.

Фронтальная проекция $2''$ точки 2, лежащей на грани BB_1C_1C , построена с помощью вспомогательной прямой EF , проведенной через проекцию $2'$. Недостающую проекцию точки 3, расположенную на ребре AA_1 , определим с помощью линии связи.

На рис. 4.4 показано построение недостающих проекций точек, находящихся на боковой поверхности пирамиды $SABC$. Фронтальная проекция 1'' точки 1, расположенная на грани SBC , представляющей собой профильно-проецирующую плоскость, построена с помощью линий связи.

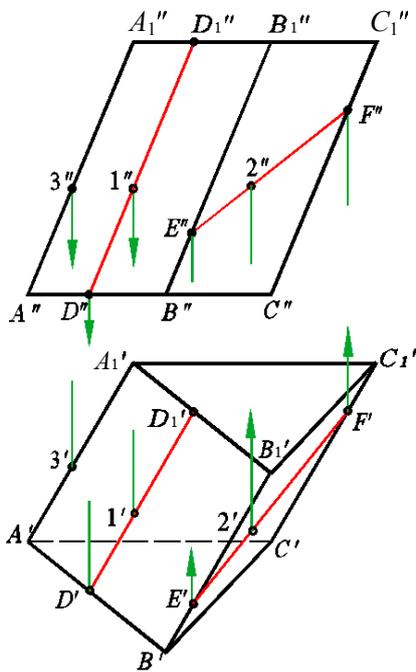


Рис. 4.3

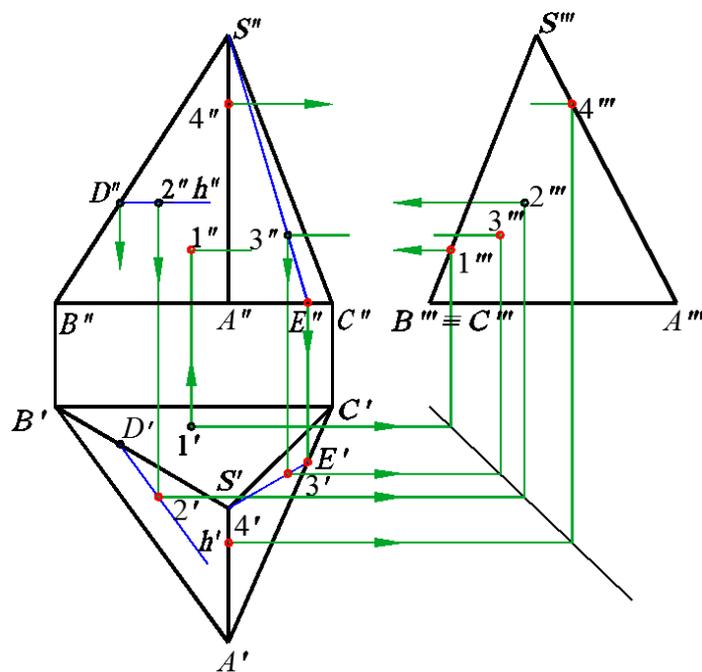


Рис. 4.4

Чтобы определить по заданной проекции 2'' точки 2, лежащей на грани SAB , проекцию 2' (рис. 4.4), используем горизонталь h .

Фронтальная проекция горизонтали h'' проведена через проекцию 2'' до пересечения с проекцией $B''S''$ ребра BS в точке D'' .

Горизонтальная проекция h'' горизонтали h проходит через точку D' параллельно проекции $A'B'$ стороны AB .

Чтобы определить по заданной проекции точки 3'', расположенной на грани SAC , проекцию 3', используем прямую SE . Фронтальная проекция 4'' точки 4, расположенной на ребре SA , построена с помощью линий связи.

4.2. Пересечение многогранников плоскостью

При пересечении многогранника плоскостью в сечении получается многоугольник.

Определение вершин многоугольника сводится к построению точек пересечения прямых (ребер многогранника) с плоскостью – *способ ребер*. При определении сторон многоугольника решаются задачи на пересечение двух плоскостей – *способ граней*.

На рис. 4.5 показано построение проекций линии пересечения прямой четырехугольной призмы фронтально-проецирующей плоскостью α (проекция α'').

Пересечение проекции α'' с фронтальными проекциями боковых ребер призмы дает проекции 1'', 2'', 3'', 4'' вершин многоугольника сечения. Горизонтальные проекции этих вершин совпадают с «вырожденными» проекциями соответствующих ребер, так как призма прямая. Профильные проекции 1''', 2''', 3''', 4''' вершин определим при помощи горизонтальных линий связи на соответствующих проекциях ребер призмы.

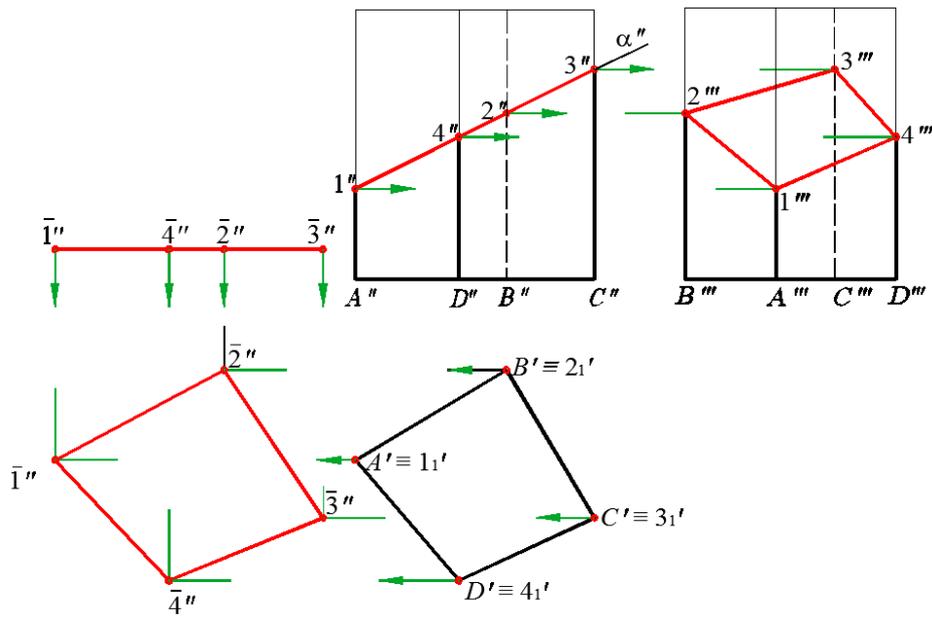


Рис. 4.5

Натуральная величина многоугольника сечения найдена способом плоскопараллельного перемещения. Переместим фронтальную проекцию сечения в горизонтальное положение. Проекция $\bar{1}'\bar{2}'\bar{3}'\bar{4}'$ – натуральная величина многоугольника сечения.

4.3. Развертка поверхности призмы

Разверткой называется фигура, полученная при совмещении поверхности геометрического тела с плоскостью (без наложения элементов поверхности друг на друга).

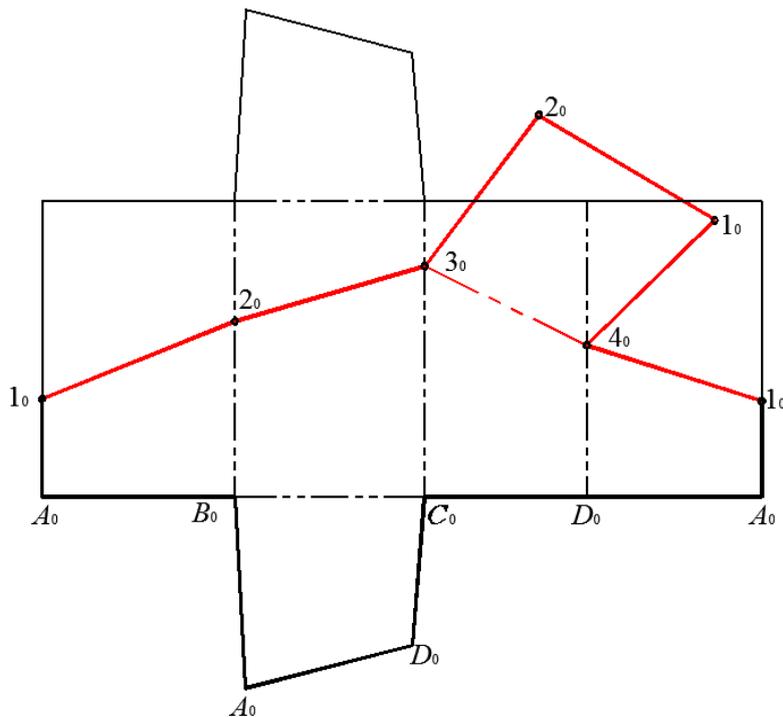


Рис. 4.6

Развертки необходимы при изготовлении изделий из листового материала. Построение разверток поверхностей многогранников рассмотрим на примерах призмы и пирамиды.

Развертка боковой поверхности призмы, представленной на рис. 4.5, состоит из четырех прямоугольников, у которых одна сторона равна высоте призмы, а другие стороны равны сторонам основания призмы (рис. 4.6).

Для построения развертки боковой поверхности усеченной призмы наносим на развертку точки $1_0, 2_0, 3_0, 4_0$, расположенные на соответствующих ребрах. Чтобы получить полную развертку усеченной части призмы, к одному из участков линии пересечения ($3_0 4_0$) пристраиваем натуральную величину сечения.

Развертку усеченной части призмы обводим сплошной толстой основной линией, линии сгиба – штрихпунктирной с двумя точками линией. Достроив к сторонам прямоугольника верхнее и нижнее основание призмы, получим полную развертку ее поверхности.

4.4. Пересечение пирамиды проецирующей плоскостью

На рис. 4.7 приведено построение проекций линии пересечения четырехугольной пирамиды $SABC$ фронтально-проецирующей плоскостью α (α'').

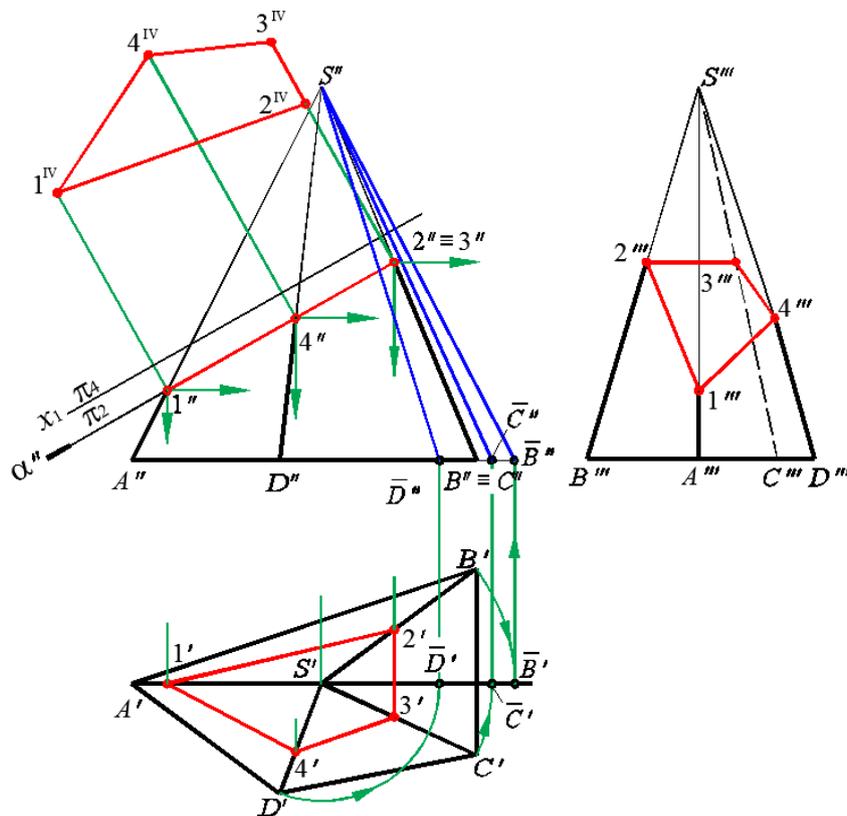


Рис. 4.7

Фронтальные проекции $1'' 2'' 3'' 4''$ вершин многоугольника сечения находятся в пересечении следа-проекции α'' плоскости α с фронтальными проекциями боковых ребер пирамиды. Проекция $2''$ и $3''$ точек 2 и 3, лежащих на ребрах SB и SC , совпадают, так как грань SBC является фронтально-проецирующей плоскостью. Горизонтальные и профильные проекции точек 1, 2, 3, 4 определяются по линиям связи на соответствующих ребрах пирамиды. Натуральная величина многоугольника сечения найдена способом перемены плоскостей проекций. Это четырехугольник $1^{IV} 2^{IV} 3^{IV} 4^{IV}$.

4.5. Развертка поверхности пирамиды

Развертка боковой поверхности пирамиды состоит из четырех треугольников – боковых граней пирамиды (рис. 4.8). Для построения развертки необходимо знать натуральную величину всех фигур, составляющих развертку. В данном случае одна из сторон боковых граней определяется натуральной величиной горизонтальной проекции ребра основания пирамиды, поскольку основание пирамиды занимает горизонтальное положение. На рис. 4.7 видно, что ребро AS параллельно фронтальной плоскости, следовательно проекция $A''S''$ – его истинная величина. Для определения натуральной величины других боковых ребер используем способ вращения вокруг оси, проходящей через вершину S перпендикулярно плоскости π_1 .

Поворачиваем ребра SB , CS , SD до положения, параллельного плоскости π_2 . Длины проекций $S''B''$, $C''S''$, $S''D''$ являются натуральными длинами соответствующих ребер.

На рис. 4.8 представлено построение полной развертки усеченной пирамиды. Вначале на плоскости чертежа строим треугольники – боковые грани пирамиды – по трем сторонам, последовательно достраивая треугольники друг к другу боковыми ребрами. Пристроив к стороне A_0B_0 одного из треугольников четырехугольное основание пирамиды, получим полную развертку ее поверхности.

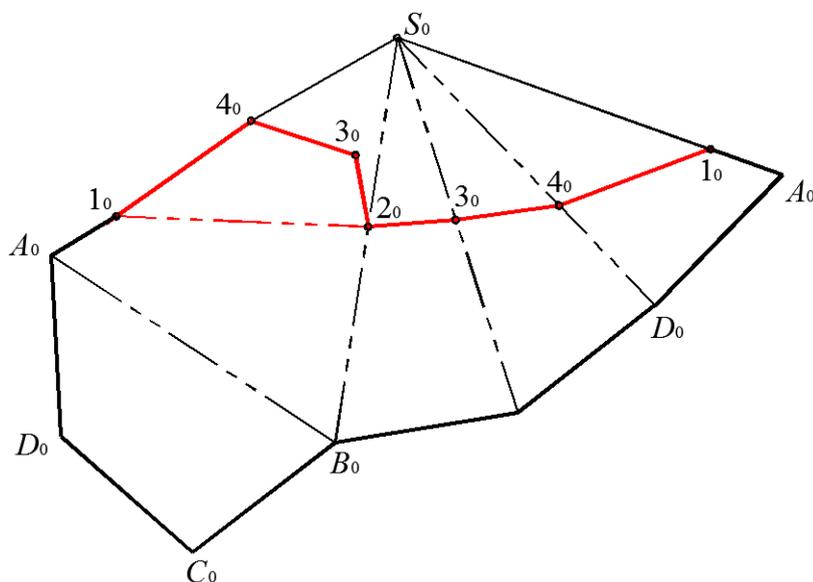


Рис. 4.8

Чтобы выделить на развертке усеченную часть пирамиды, находим положение вершины 1_0 фигуры сечения на ребре A_0S_0 . Зная натуральную величину многоугольника сечения $1^{IV}2^{IV}3^{IV}4^{IV}$, последовательно засекаем на ребрах развертки точки 2_0 , 3_0 и 4_0 , используя величину сторон многоугольника сечения. Полученные на развертке точки соединяем отрезками прямых. Пристраиваем затем натуральную величину сечения $1^{IV}2^{IV}3^{IV}4^{IV}$ к одному из участков линии пересечения (1_02_0) . Полученную полную развертку поверхности усеченной пирамиды обводим сплошной толстой основной линией, а линии сгиба – штрихпунктирной с двумя точками линией.



Примеры решения задач

Задача 1. Правильная треугольная пирамида усечена двумя плоскостями: фронтально-проецирующей α (α'') и профильной β (β'') (рис. 4.9). Построить недостающие проекции усеченной пирамиды.

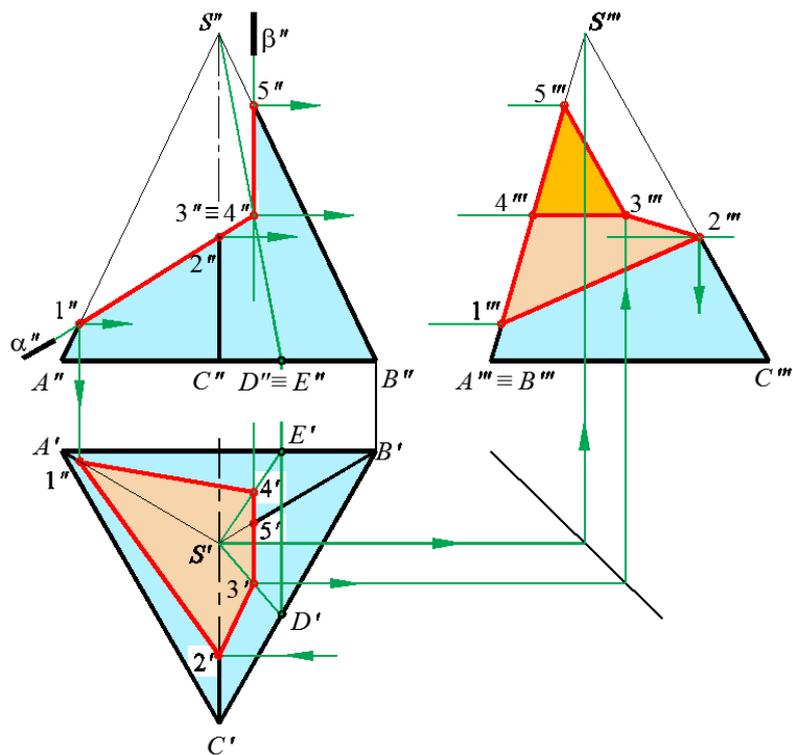


Рис. 4.9

Решение. Плоскость α пересекает грань SAC по отрезку 1-2, грань SBC по отрезку 2-3, грань SAB по отрезку 1-4.

Плоскость β пересекает грань SBC по отрезку 3-5, а грань SAB по отрезку 4-5. При построении проекций точек, принадлежащих линии пересечения, следует учитывать, что профильные проекции $S'''A'''$ и $S'''B'''$ совпадают, так как грань SAB пирамиды является профильно-проецирующей плоскостью.

Недостающие проекции точки 1, расположенной на ребре SA , и точки 5, расположенной на ребре SB , построены при помощи линий связи. Проекция точки 2, расположенной на ребре SC , определены при помощи линий связи сначала на профильной проекции ребра, а затем на горизонтальной.

Горизонтальные проекции точек 3 и 4 получены с помощью вспомогательной прямой SD , принадлежащей грани SBC , и прямой SE , принадлежащей грани SAB .

Построив горизонтальные проекции $S'D'$ и $S'E'$ этих прямых, по линии связи определим горизонтальные проекции точек 3 и 4, а затем их профильные проекции.

Плоскости α и β пересекаются по фронтально-проецирующей прямой 3-4. Соединив построенные проекции точек, получим проекции линии пересечения.

Вопросы для контроля

1. Какая фигура называется многогранником?
2. Дайте определение призмы, пирамиды, правильного многогранника.
3. Как определить недостающую проекцию точки на поверхности многогранника?
4. Что представляет собой сечение многогранника плоскостью?
5. В чем различие способов ребер и граней?
6. Как используется способ перемены плоскостей проекций при построении сечения многогранника плоскостью?

Лекция 5 ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Поверхность вращения (рис. 5.1) получается вращением прямолинейной или криволинейной образующей l вокруг неподвижной прямой i – оси поверхности. За ось вращения обычно принимается вертикальная прямая. Каждая точка образующей (например, точка A) описывает при своем вращении окружность с центром на оси i . Эти окружности называются *параллелями*. Наибольшая из этих параллелей – *экватор*, наименьшая – *горло*.

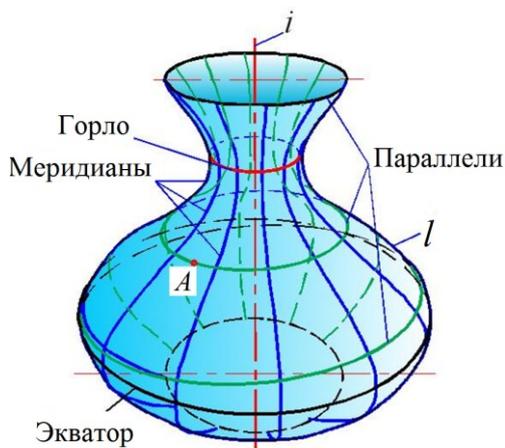


Рис. 5.1

Плоскости, проходящие через ось вращения, пересекают поверхность по *меридианам*. Меридиан, расположенный в плоскости, параллельной π_2 , называется *главным*.

Поверхность вращения называют *замкнутой*, если криволинейная образующая пересекает ось поверхности в двух точках. Если образующая – прямая линия, то получается *линейчатая поверхность вращения*, если кривая – *нелинейчатая*.

Замкнутую область пространства вместе с ее границей (поверхностью) называют *геометрическим телом*.

Цилиндр вращения (рис. 5.2) образуется вращением прямой l вокруг параллельной ей оси i . Все точки образующей l (например, точка A) описывают окружности (параллели), равные окружностям оснований цилиндра.

Конус вращения (рис. 5.3) образуется вращением прямой l вокруг пересекающейся с ней оси i . Все точки образующей l описывают окружности различных радиусов (для точки A – радиус R_a). Величина радиуса изменяется от нуля до радиуса окружности основания конуса.

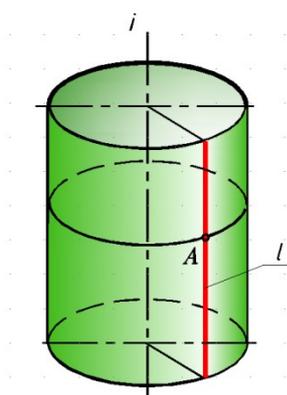


Рис. 5.2

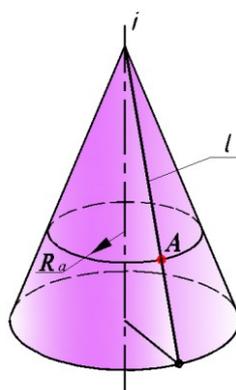


Рис. 5.3

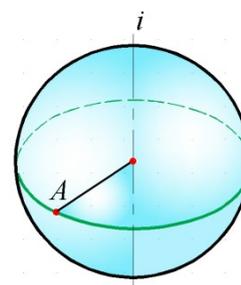


Рис. 5.4

Сфера (рис. 5.4) образуется вращением окружности вокруг ее оси i . Каждая точка образующей сферы при таком перемещении описывает свою окружность, радиус которой уменьшается при перемещении точки к полюсам. Например, точка A описывает параллель наибольшего радиуса (экватор). Для сферы экватор и меридианы – равные между собой окружности.

5.1. Построение точек, лежащих на поверхности вращения

Точка принадлежит поверхности, если она находится на линии, лежащей на этой поверхности. В качестве таких линий могут быть выбраны образующие, параллели, меридианы и др. На рис. 5.5 показано построение проекций точек A и B , принадлежащих боковой поверхности цилиндра.

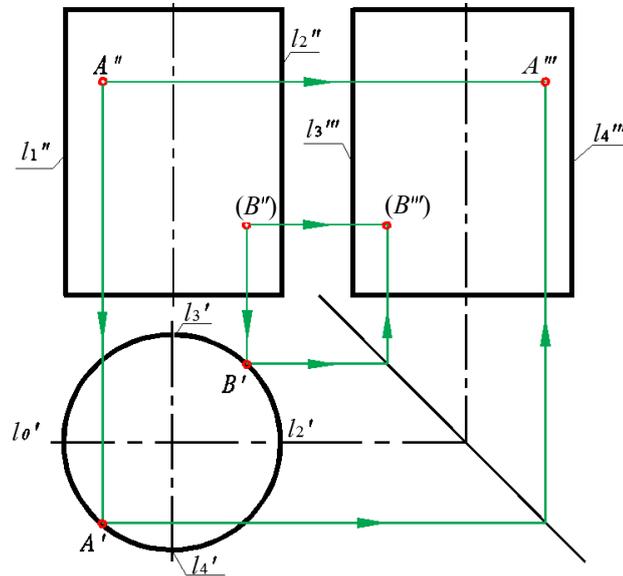


Рис. 5.5

Горизонтальные проекции точек A и B (A' и B') лежат на окружности. Профильные проекции этих точек A''' и B''' находятся при помощи линий связи.

Очерковые (крайние) образующие цилиндра разделяют фронтальную и профильные проекции на видимую и невидимые части. Так, образующие l_1 и l_2 делят цилиндрическую поверхность на видимую спереди и невидимую, образующие l_3 и l_4 – на видимую слева и невидимую. Невидимые проекции точки B указаны в скобках.

На рис. 5.6, а показано построение горизонтальной A' и профильной A''' проекций точки A по заданной фронтальной проекции A'' на поверхности конуса.

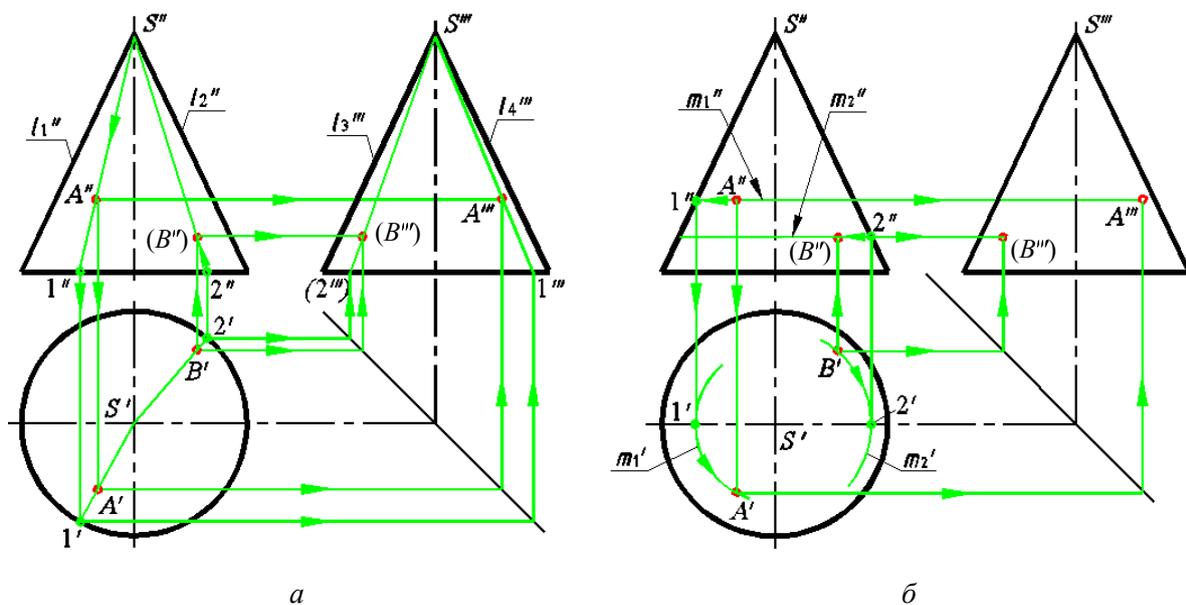


Рис. 5.6

Если задана горизонтальная проекция B' точки B (рис. 5.6, а), то построение начинается с проведения горизонтальной проекции $S'2'$ образующей $S2$, на которой находится точка B . Определив фронтальную проекцию $S''2''$ этой образующей, по линиям связи находим фронтальную проекцию B'' точки B , а затем и профильную B''' .

Образующие l_1 и l_2 разделяют коническую поверхность на видимую спереди и невидимую, а образующие l_3 и l_4 – на видимую слева и невидимую.

Проекции B'' и B''' находятся на невидимой части конуса. Горизонтальная проекция поверхности конуса является видимой.

На рис. 5.6, б показано построение недостающих проекций точек A и B при помощи параллелей. Через заданные проекции A'' и B' проводятся проекции m_1'' и m_2' параллелей m_1 и m_2 . Используя точки 1 и 2, лежащие на очерковых образующих, определим положение проекций m_1' и m_2'' проведенных параллелей. По линиям связи найдем положение проекций A' и A''' точки A и проекций B'' и B''' точки B .

На рис. 5.7 приведены проекции сферы, которые ограничены экватором k , фронтальным меридианом m и профильным n . Каждый из них проецируется на соответствующую плоскость проекций в виде окружности, на остальные – в виде отрезков прямых длиной, равной диаметру сферы. На этом же рисунке показано построение недостающих проекций точек A , B и C по заданным фронтальным проекциям этих точек. Точка A находится на экваторе k , точка B – на фронтальном меридиане m , точка C – на профильном меридиане n . Недостающие проекции определяются по линиям связи. Направление построений указано стрелками.

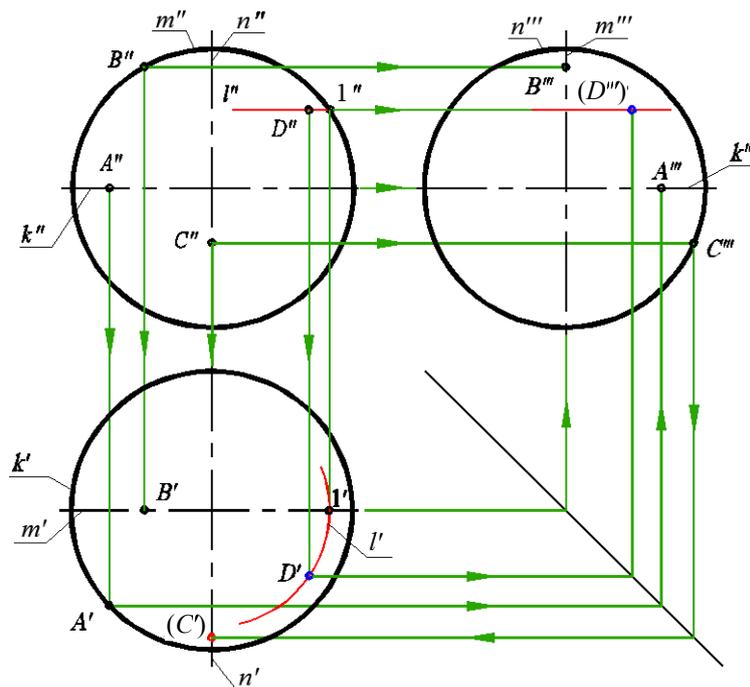


Рис. 5.7

Экватор k разделяет сферу на видимую (верхняя половина на фронтальной проекции) и невидимую части на горизонтальной проекции. Фронтальный меридиан m разделяет сферу на видимую (нижняя половина горизонтальной проекции) и невидимую части на фронтальной проекции.

Профильный меридиан n разделяет сферу на видимую (левая половина на фронтальной проекции) и невидимую части на профильной проекции.

Так, на рис. 5.7 горизонтальная проекция C' точки C невидимая (взята в скобки), так как находится на нижней (невидимой) половине сферы. На поверхности сферы можно провести

множество параллелей, соответствующих плоскостям проекций. Эти параллели используются для построения проекций точек на сфере.

По фронтальной проекции D'' точки D найдена горизонтальная D' как принадлежащая горизонтальной параллели l . Для построения горизонтальной проекции l' использована точка 1, принадлежащая фронтальному меридиану. Профильная проекция D''' точки D построена при помощи линий связи и находится на невидимой (правой половине) части сферы.

5.2. Пересечение поверхностей вращения плоскостью

Линия пересечения кривой поверхности с плоскостью представляет собой плоскую кривую. Для построения этой кривой линии на чертеже находят проекции ее отдельных точек, соединяемых с помощью лекала.

Для нахождения точек линии пересечения применяются вспомогательные секущие плоскости (проецирующие или плоскости уровня). Вспомогательные плоскости выбираются так, чтобы в пересечении с кривой поверхностью получались простейшие линии – прямые и окружности. Задача на построение линии пересечения кривой поверхности плоскостью значительно упрощается, если заданные секущие плоскости являются плоскостями частного положения.

5.2.1. Пересечение цилиндра плоскостью

При пересечении цилиндра вращения плоскостью возможны случаи:

- 1) секущая плоскость параллельна оси – в сечении цилиндрической поверхности получаются две прямые (образующие) (рис. 5.8, а);
- 2) секущая плоскость перпендикулярна оси – в сечении получается окружность, равная окружностям оснований (рис. 5.8, б);
- 3) секущая плоскость наклонна к оси – в сечении получается эллипс, малая ось которого всегда равна диаметру цилиндра, а большая зависит от угла φ (рис. 5.8, в).

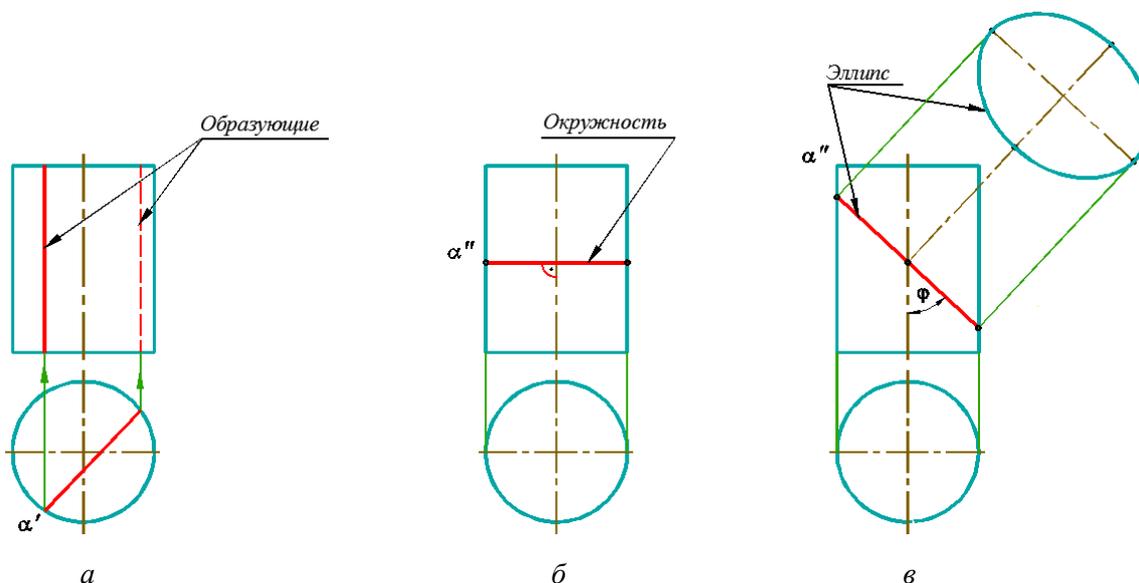


Рис. 5.8

Видеопример модели цилиндра, усеченного плоскостями, приведен [здесь](#). 

На рис. 5.9 показано построение проекций цилиндра вращения, усеченного плоскостями частного положения α , β , γ .

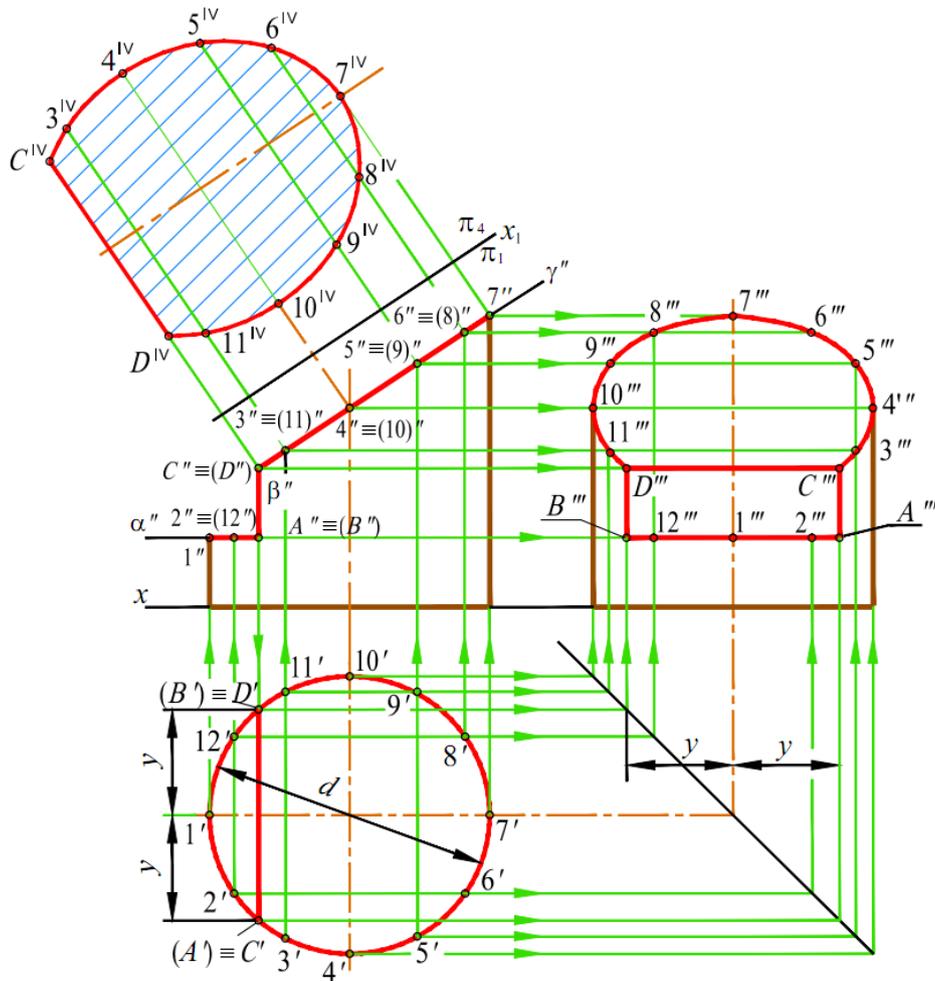


Рис. 5.9

Горизонтальная плоскость α (α'') пересекает поверхность цилиндра по части окружности, профильная плоскость β (β'') – по прямым AB и CD (образующим цилиндра), фронтально-проецирующая плоскость γ (γ'') – по части эллипса. Фронтальная проекция линий пересечения совпадает со следами-проекциями секущих плоскостей (α'' , β'' , γ''), а горизонтальная – с окружностью основания цилиндра.

Построение профильной проекции сводится к построению профильных проекций точек по двум заданным (направление линий связи указано стрелками).

Обычно для построения точек линий сечения пользуются образующими, равноотстоящими друг от друга. Поэтому горизонтальная проекция цилиндра (окружность) разделена на 12 частей (точки 1, 2, ..., 12). Этой равномерной «разметкой» удобно пользоваться для создания не только проекций сечений, но и развертки.

5.2.2. Развертка поверхности цилиндра

Для построения развертки поверхности вращения, усеченной плоскостями, используется соответствующая многогранная фигура, вписанная в эту поверхность. Развертка получается приближенной, погрешность определяется количеством сторон многоугольника, вписанного в основание поверхности.

Построение развертки боковой поверхности цилиндра, приведенного на рис. 5.9, начинают с вычерчивания горизонтальной прямой, на которой откладывают длину окружности основания πd и делят ее, например, на 12 равных частей. Из точек деления проводят перпендикуляры к отрезку πd (рис. 5.10) и на них откладывают длины образующих от основания цилиндра до секущих плоскостей α и β .

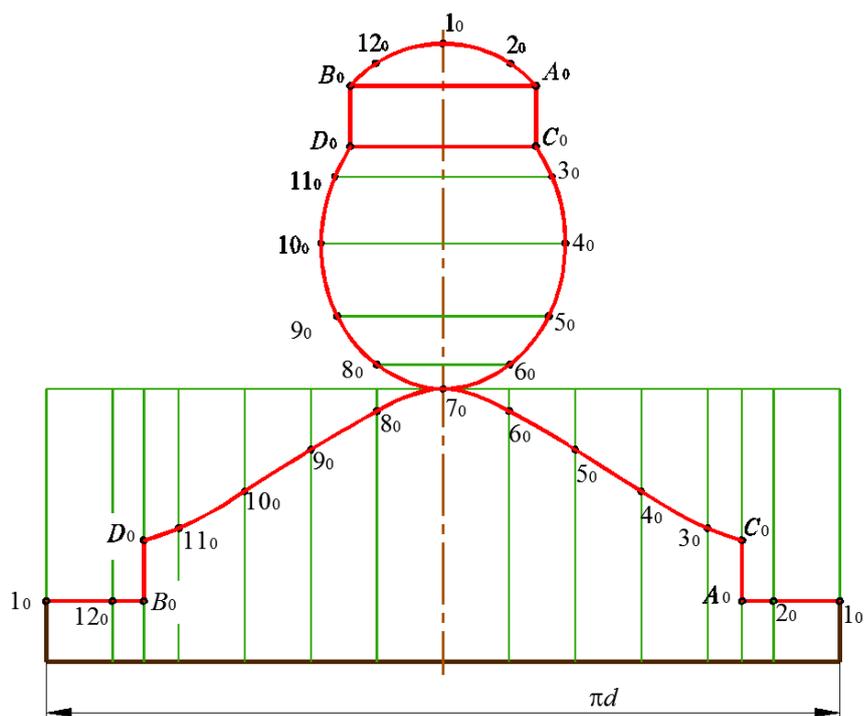


Рис. 5.10

Для построения точек A_0, B_0, C_0, D_0 на развертке использовано расположение этих точек на горизонтальной проекции цилиндра (от точек деления откладывают длины дуг $2A$ и $12B$). Точки $1_0, A_0, C_0$ и $1_0, B_0, D_0$ соединены прямыми линиями. Точки $C_0, 3_0, \dots, 11_0, D_0$ соединяют плавной линией. К верхней части боковой развертки достраивают натуральные фигуры сечения плоскостями (часть эллипса, прямоугольник, сегмент окружности).

5.2.3. Пересечение конуса плоскостью

При пересечении конуса получают различные виды кривых второго порядка.

1. Эллипс ($\varphi > \sigma$) – секущая плоскость α (α'') пересекает весь конус (рис. 5.11).
2. Окружность – секущая плоскость перпендикулярна оси конуса (рис. 5.12).
3. Парабола – секущая плоскость α (α'') параллельна образующей конуса (рис. 5.13).

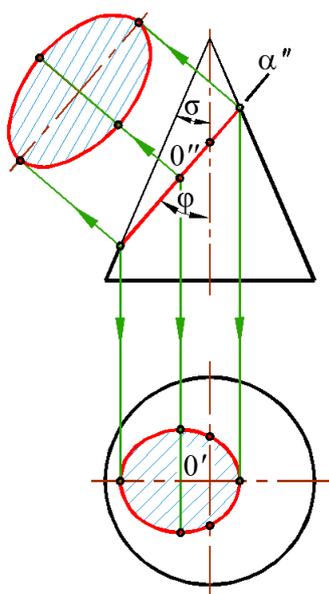


Рис. 5.11

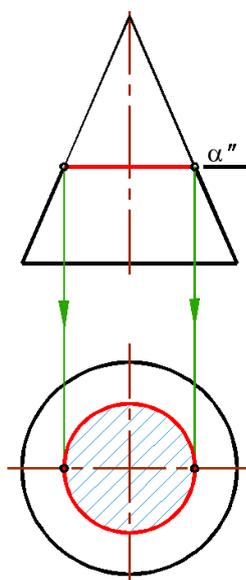


Рис. 5.12

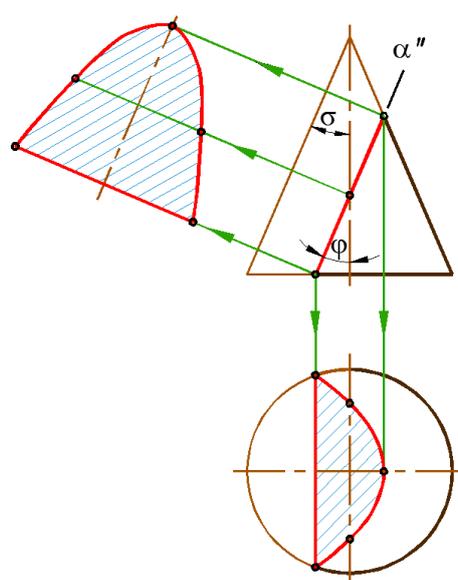
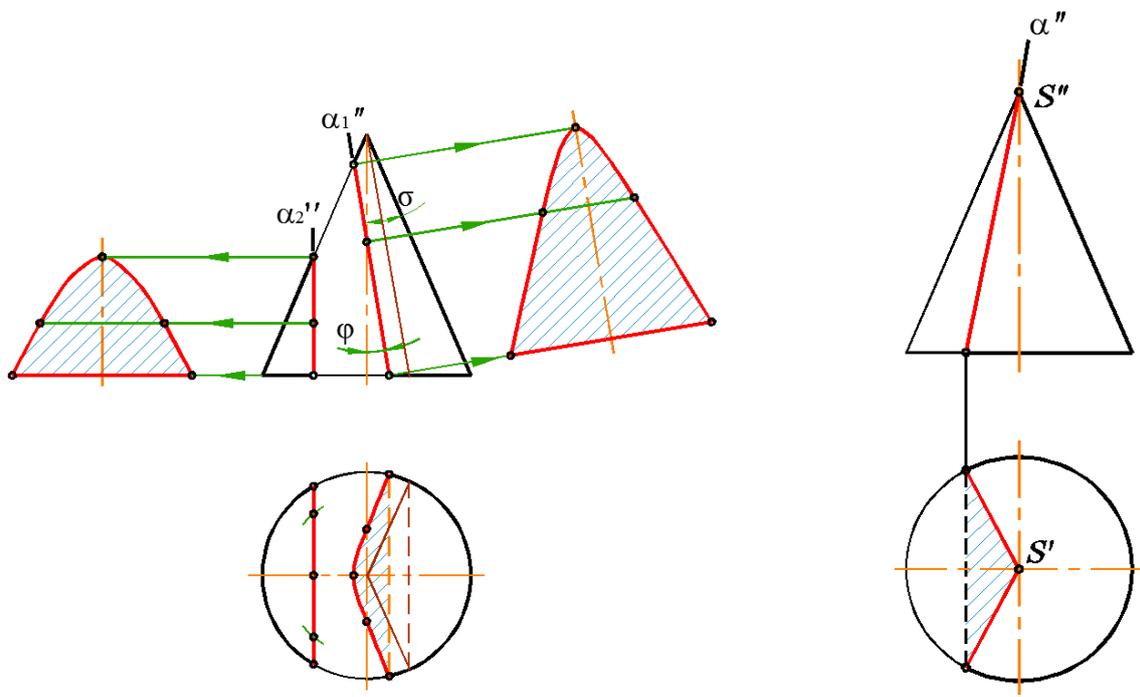
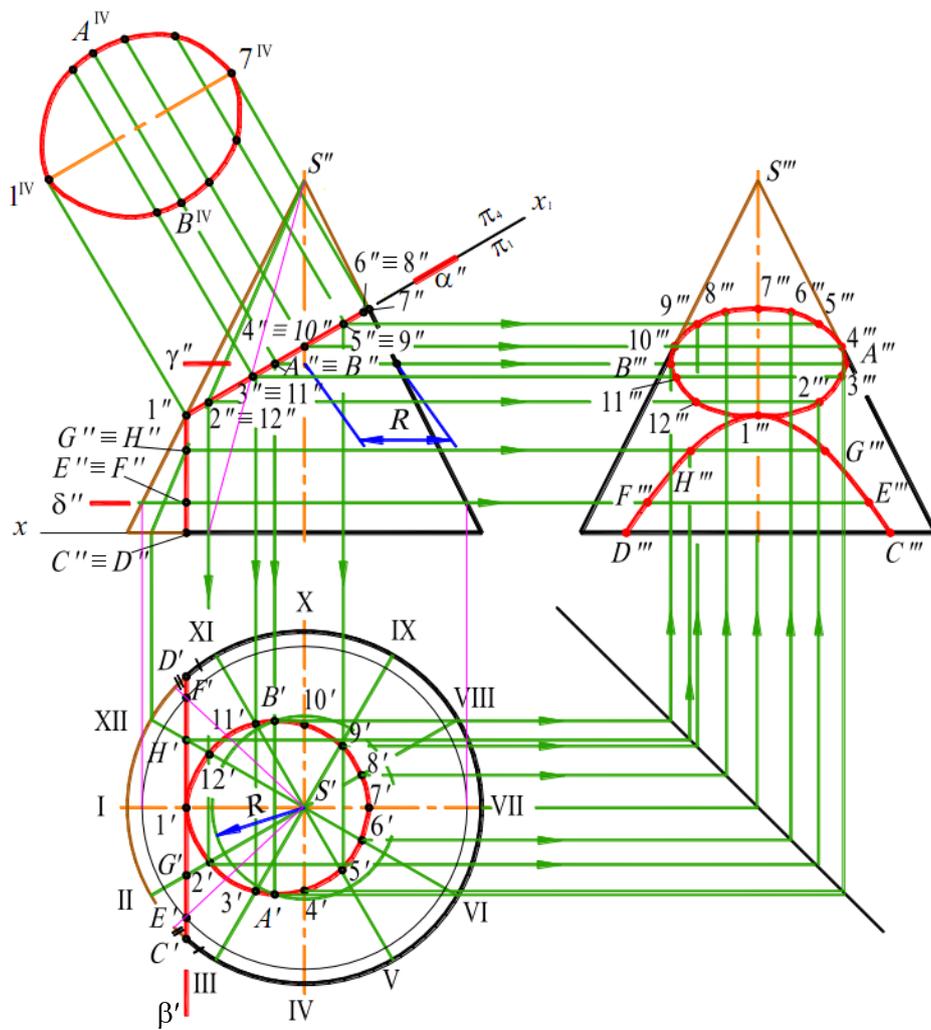


Рис. 5.13



Puc. 5.14

Puc. 5.15



Puc. 5.16

4. Гипербола – плоскость α_1 (α_1'') параллельна двум образующим конуса (рис. 5.14).

5. Прямые линии – секущая плоскость проходит через вершину конуса (рис. 5.15).

На видеоприме [здесь](#)  показана последовательность построения линий пересечения конуса плоскостями.

На рис. 5.16 показано построение проекций усеченного конуса вращения плоскостями частного положения α и β .

Конус пересекают фронтально-проецирующие плоскости α (α'') и β (β''). Фронтальная проекция линий пересечения совпадает с проекциями этих плоскостей.

Для построения точек линий сечения использованы образующие, равноотстоящие друг от друга. Поэтому горизонтальная проекция основания конуса (окружность) разделена на 12 равных частей (точки I, II, ..., XII). Это позволяет использовать равноотстоящие образующие для построения развертки конуса.

Фронтальные проекции образующих пересекают проекцию α'' в точках $1''$, $2''$, ..., $12''$. Эти точки по линиям связи находятся на горизонтальных проекциях образующих, причем точки 4 и 10 определяются на профильной проекции, а затем на горизонтальной.

Вспомогательная плоскость γ (γ'') пересекает плоскость α по фронтально-проецирующей прямой, а конус – по окружности радиуса R . В пересечении прямой и дуги радиуса R определим горизонтальные проекции A' и B' .

Построения профильных проекций точек эллипса ($1''$, $2''$, ..., $12''$) сводится к построению проекций точек по двум заданным (по линиям проекционной связи).

Для построения точек, принадлежащих гиперболе, использованы точки G и H , находящиеся на образующих II и XII, а также точки E и F , принадлежащие вспомогательной горизонтальной плоскости δ (δ'').

5.2.4. Построение развертки конуса

Построение развертки начинают с проведения из точки S_0 (рис. 5.17) дуги окружности радиусом, равным длине образующей конуса l .

Длина дуги определяется центральным углом φ :

$$\varphi = 180 \frac{d}{l},$$

где d – диаметр окружности основания конуса; l – длина образующей.

Дугу делят на 12 частей и полученные точки соединяют с точкой S . От вершины S_0 на образующих откладывают действительные длины отрезков образующих от вершины конуса до секущих плоскостей. Действительные длины данных отрезков находят способом вращения их вокруг оси конуса. Для этого достаточно из фронтальных проекций точек фигур сечений провести горизонтальную прямую до пересечения с контурной образующей конуса, являющейся действительной ее длиной.

Для построения точек C_0 и D_0 , лежащих на основании конуса, следует отложить от точек III и XI соответствующие дуги (эти дуги на рис. 5.16 и 5.17 отмечены одной черточкой-штрихом).

Для построения точек E_0 и F_0 на развертке находят положения образующих, на которых есть эти точки, откладывая от точек II и XII соответствующие дуги (эти дуги отмечены двумя черточками-штрихами). Положение точек E_0 и F_0 на образующих находим, используя действительные длины отрезков SE и SF .

Для получения полной развертки пристраивают к развертке боковой поверхности часть основания конуса и натуральные величины сечений.

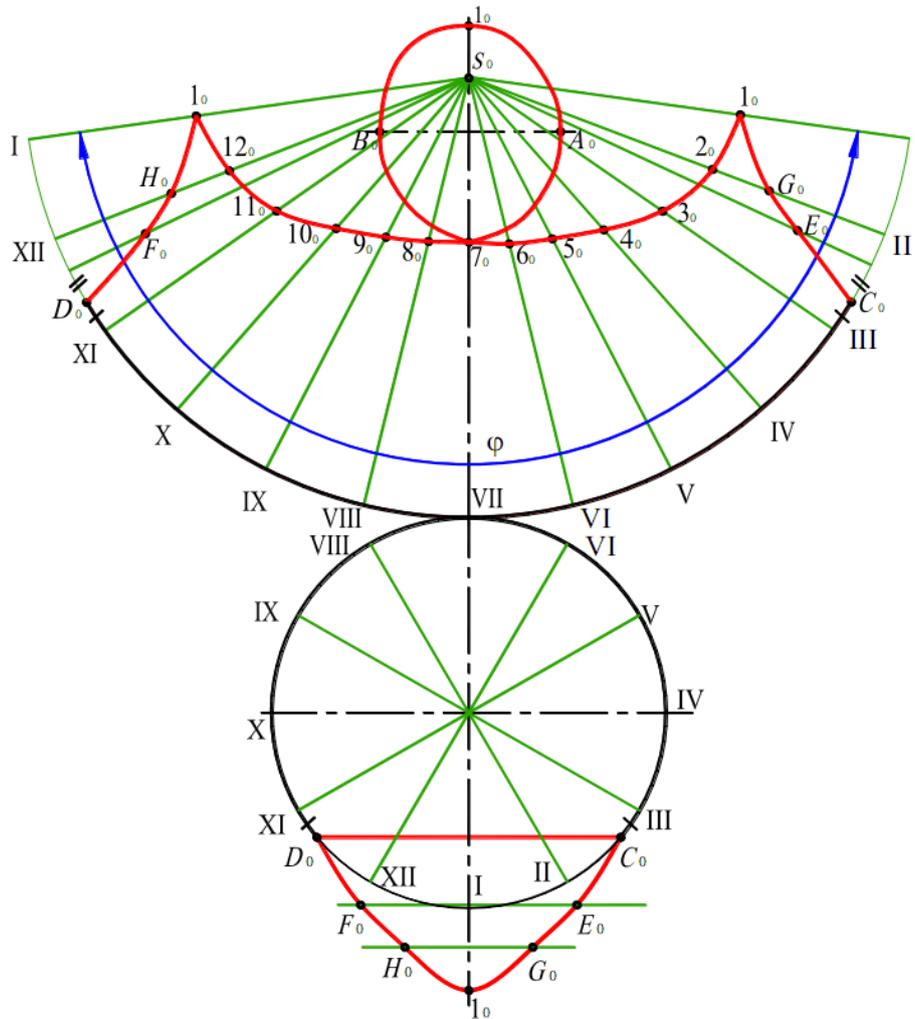


Рис. 5.17

Натуральная величина эллипса построена по его осям (использован способ перемены плоскостей проекций), натуральная величина сечения профильной плоскостью β находится на профильной проекции (рис. 5.16).

Вопросы для контроля

1. Какие линии получаются при пересечении цилиндра плоскостью?
2. Какие линии получаются при пересечении конуса плоскостью?
3. Какие поверхности вращения являются развертывающимися?
4. Как построить развертку цилиндра?
5. Какой метод используется для построения развертки конуса?

Лекция 6

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С МНОГОГРАННИКАМИ И ПОВЕРХНОСТЯМИ ВРАЩЕНИЯ

Точки пересечения прямой линии с геометрическими телами называют также точками встречи, одна из них является точкой входа, другая – точкой выхода.

6.1. Частные случаи определения точек пересечения

Частный способ определения указанных точек основывается на том, что пересекаемая грань перпендикулярна плоскости проекций, т. е. ее проекция представлена на этой плоскости в виде прямой и проекция искомой точки пересечения совпадает с проекцией точки пересечения этой прямой и заданной прямой. Другая проекция определяется по линиям связи из условия принадлежности точки прямой.

На рис. 6.1 показано построение точек пересечения прямых a и b с поверхностью четырехугольной прямой призмы. Боковая поверхность призмы – проецирующая (грани перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций). Поэтому горизонтальные проекции K_1', K_2', K_3' точек пересечения находятся на «вырожденных» проекциях боковых граней, представляющих собой прямые линии. Фронтальные проекции этих точек определяются по линиям связи на фронтальных проекциях прямых a'' и b'' . Вторая точка пересечения (точка K_4) прямой b находится на пересечении с верхним основанием призмы, которое является горизонтальной плоскостью. Сначала отмечаем фронтальную проекцию K_4'' , а затем по линии связи находим горизонтальную K_4' .

Видимость фронтальных проекций точек пересечения прямых a и b определяется видимостью граней, на которых лежат указанные точки. Так, точка K_1 лежит на невидимой грани ABB_1A_1 , и поэтому участок прямой a от проекции K_1 до ребра AA_1 невидим. Участки прямых, расположенных внутри тел, изображаются невидимыми. Участок горизонтальной прямой b от точки K_4' видим, так как точка K_4 расположена на верхнем основании призмы.

На рис. 6.2 показано построение точек пересечения прямых a и b с поверхностью цилиндра вращения.

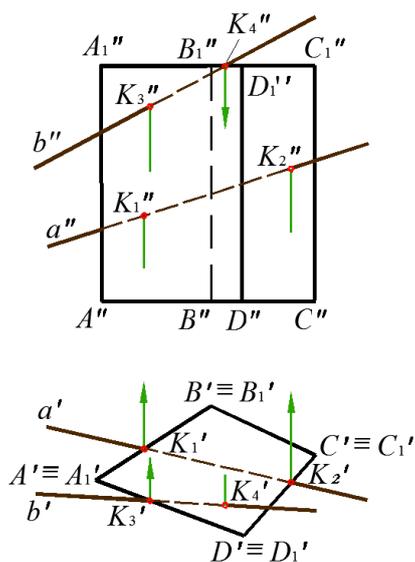


Рис. 6.1

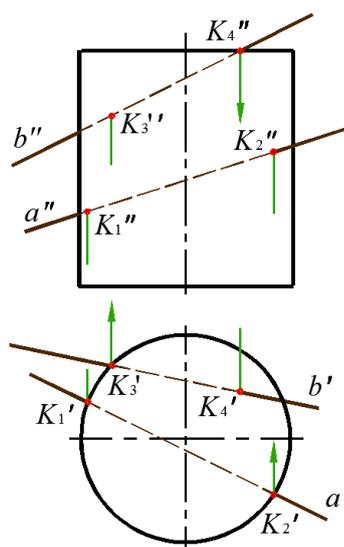


Рис. 6.2

Горизонтальные проекции точек K_1, K_2, K_3 находятся на пересечении окружности (горизонтальной проекции боковой поверхности цилиндра) с проекциями прямых, фронтальная проекция точки K_4 – на пересечении горизонтальной плоскости верхнего основания с проекцией прямой.

При определении видимости фронтальных проекций прямых a и b следует учесть, что проекции K_1'' и K_3'' расположены на невидимой части цилиндра и поэтому участки прямых a и b от проекций K_1'' и K_3'' до очерковой образующей невидимы.

Горизонтальная проекция точки K_4 расположена на верхнем основании цилиндра, поэтому проекция b' до точки K_4' видима.

На рис. 6.3 показано построение точек пересечения проецирующих прямых a и b с поверхностью пирамиды. Фронтальные проекции K_1'' и K_2'' точек пересечения фронтально-проецирующей прямой a совпадают с «вырожденной» проекцией прямой, а горизонтальные проекции находятся на прямых $S1$ и $S2$ граней SAD и SAB .

Горизонтальные проекции точек пересечения K_3 и K_4 горизонтально-проецирующей прямой b совпадают с «вырожденной» проекцией прямой, фронтальная проекция точки K_3 находится на прямой $S3$ грани SCD . Точка K_4 находится на горизонтальной плоскости основания пирамиды.

На рис. 6.4 показано построение точек пересечения проецирующих прямых a и b с поверхностью конуса вращения. Проекции K_1' и K_2' определяются с помощью параллели (окружности радиуса R) конуса, проекция K_3'' – с помощью образующей $S2$. Точка K_4 расположена на горизонтальной плоскости основания конуса.

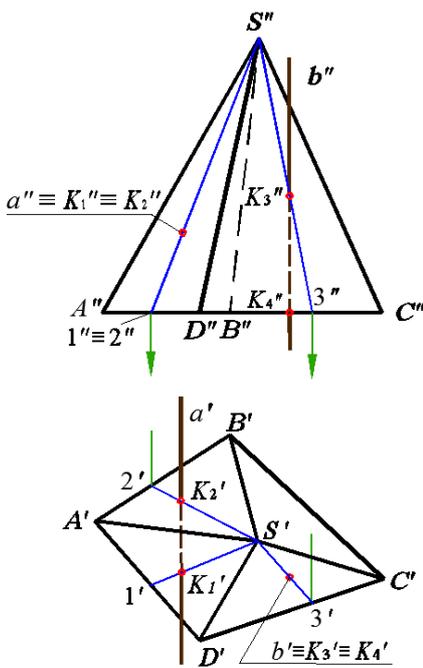


Рис. 6.3

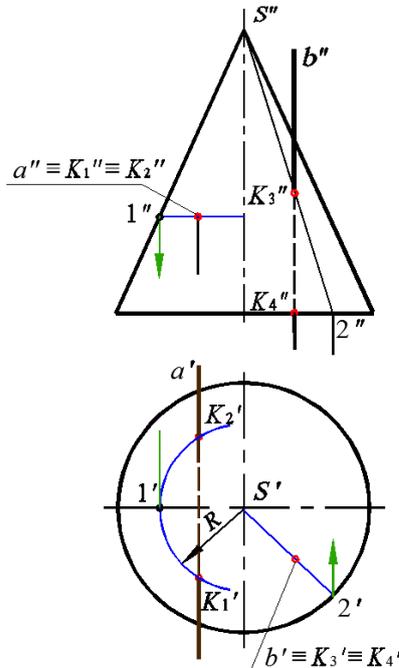


Рис. 6.4

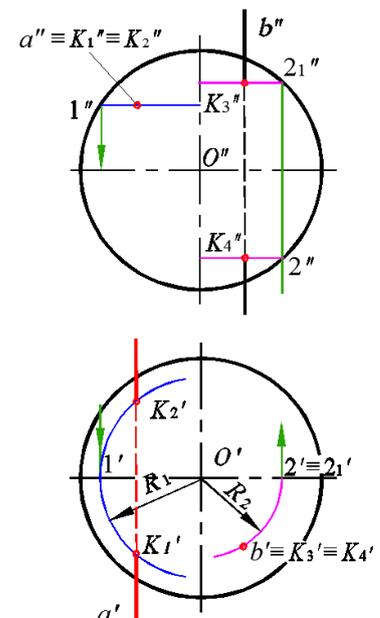


Рис. 6.5

На рис. 6.5 для нахождения горизонтальных проекций точек пересечения K_1, K_2, K_3, K_4 проецирующих прямых a и b с поверхностью сферы использованы параллели (окружности) сферы. Точки K_1 и K_2 находятся на параллели радиуса R_1 , а точки K_3 и K_4 – на параллели радиуса R_2 . Точки пересечения K_1, K_2, K_3, K_4 расположены на видимых участках проекций сферы.

6.2. Определение точек пересечения прямой с поверхностью

В общем случае точки пересечения прямой линии с поверхностью геометрических тел находятся следующим образом:

- через данную прямую проводится вспомогательная плоскость;

- строится линия пересечения геометрического тела вспомогательной плоскостью;
- определяются точки пересечения построенной линии и заданной прямой. Эти точки являются искомыми;
- определяется видимость участков прямой линии.

Вспомогательную секущую плоскость выбирают так, чтобы она пересекала поверхность геометрического тела по линии, легко определяемой на чертеже, например состоящей из прямых или окружностей. Обычно в качестве вспомогательной плоскости выбирают проецирующую плоскость, проходящую через заданную прямую.

На рис. 6.6 показано нахождение точек пересечения прямой общего положения AB с поверхностью пирамиды $SCDE$.

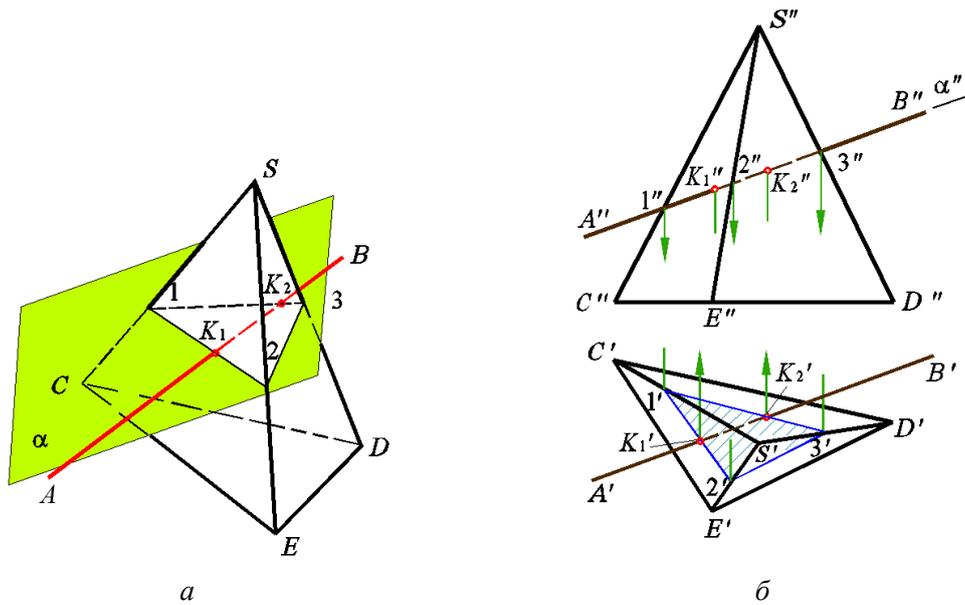


Рис. 6.6

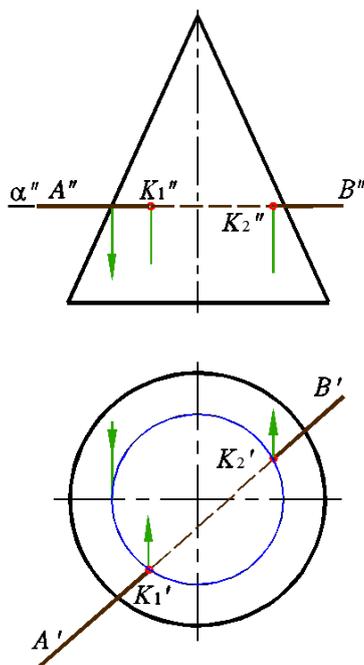


Рис. 6.7

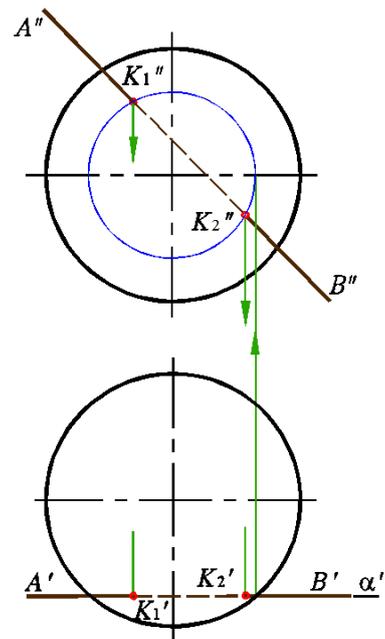


Рис. 6.8

Через прямую AB проведена вспомогательная фронтально-проецирующая плоскость α , пересекающая поверхность пирамиды по линии 1-2-3. На пересечении этой линии с прямой AB находятся искомые точки пересечения. Видимость участков прямой линии определяется видимостью граней, на которых лежат точки пересечения K_1 и K_2 . Так, на горизонтальной проекции (рис. 6.6, б) точки K_1 и K_2 расположены на видимых проекциях $S'C'E'$ и $S'C'D'$ граней SCE и SCD , а на фронтальной проекции точка K_2 лежит на невидимой грани SCD . Поэтому участок фронтальной проекции AB от K_2 до ребра SD невидим.

Для нахождения точек пересечения конуса вращения с горизонтальной прямой AB (рис. 6.7) использована вспомогательная горизонтальная плоскость α (α'), пересекающая конус по окружности. На рис. 6.8 для определения точек пересечения сферы с фронтальной прямой AB использована фронтальная плоскость α (α'). В заключение определяется видимость участков прямых относительно точек пересечения.

Вопросы для контроля

1. Поясните способ определения точек пересечения прямой с поверхностью геометрических тел.
2. С помощью каких преобразований можно упростить задачу построения точек пересечения прямой общего положения с конусом?

Лекция 7

ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

Линия пересечения поверхностей геометрических тел в общем случае является пространственной и может распадаться на две и более частей. Линию пересечения строят по точкам, которые подразделяются на характерные (опорные) и промежуточные.

Общим способом построения этих точек является способ *вспомогательных секущих плоскостей*. При пересечении заданных поверхностей вспомогательной плоскостью определяются линии пересечения ее с данными поверхностями, а в пересечении этих линий получают точки, принадлежащие искомой линии пересечения.

В качестве вспомогательных секущих плоскостей чаще всего используют плоскости, параллельные одной из плоскостей проекций. Положение их выбирают такое, чтобы они пересекали заданные поверхности по простейшим линиям – прямым или окружностям.

7.1. Построение линии пересечения многогранников

При решении задач используется один из следующих способов:

- 1) способ ребер (пересечение прямой линии с плоскостью);
- 2) способ граней (взаимное пересечение плоскостей).

Преимущество отдается тому из способов, который дает более простое решение.

Рассмотрим построение линии пересечения пирамиды с призмой (рис. 7.1).

Грань AA_1B_1B призмы – горизонтальная плоскость α (α''), пересекающая боковую поверхность пирамиды по ломаной линии, звенья которой параллельны сторонам основания DEF пирамиды. По фронтальной проекции точки $1''$, расположенной на ребре SD пирамиды, найдем ее горизонтальную проекцию $1'$ и, проведя звено ломаной линии, определим точки $2'$, $3'$, $4'$ ($1'2' \parallel D'E'$, $2'3' \parallel E'F'$, $1'4' \parallel D'F'$).

Горизонтальные проекции $5'$ и $6'$ точек пересечения ребер SE и SD с гранями призмы определяются с помощью линий связи. Горизонтальные проекции $7'$ и $8'$ точек пересечения ребра CC_1 призмы с поверхностью пирамиды определим с помощью горизонтальной плоскости β , проведенной через ребро CC_1 призмы. Плоскость β (β') пересекает поверхность пирамиды по линиям, параллельным сторонам основания пирамиды. Спроецировав точку K , лежащую на ребре SD пирамиды, через проекцию K' проведем линии, параллельные $D'E'$

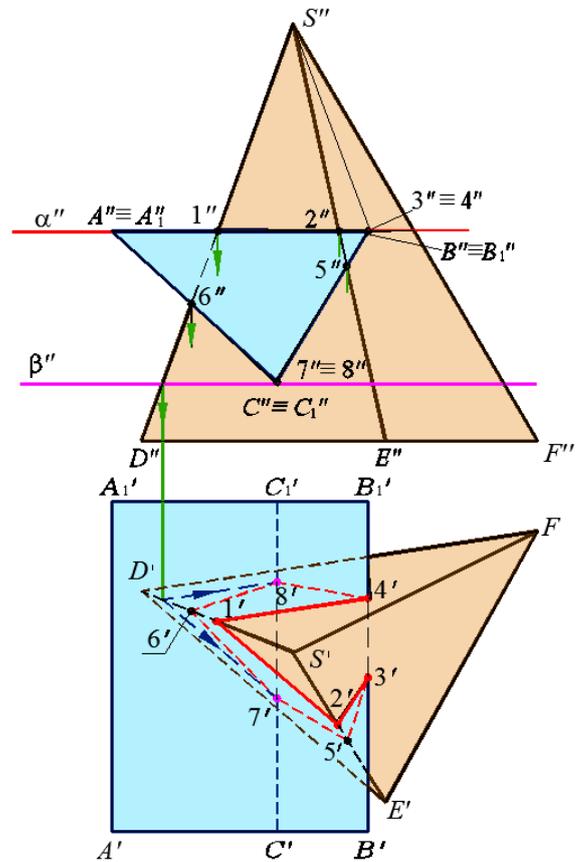


Рис. 7.1

и $D'F'$. Эти линии пересекаются с горизонтальной проекцией ребра CC_1 призмы в точках $7'$ и $8'$.

На рис. 7.2 показано построение линии пересечения двух призм, боковые поверхности которых являются проецирующими.

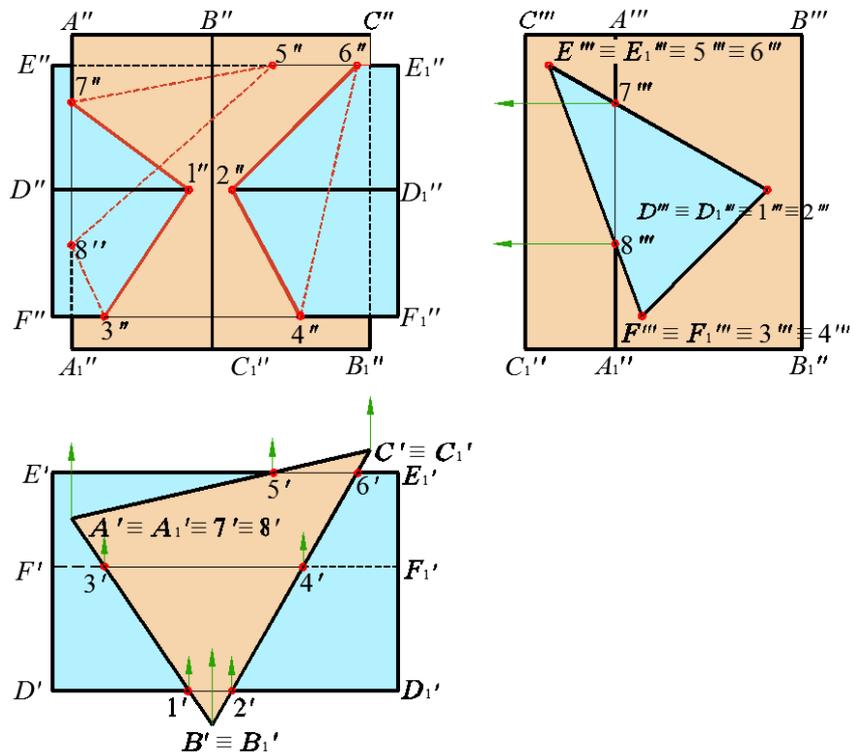


Рис. 7.2

Рассматривая положение горизонтальных и профильных проекций многогранников, отмечаем, что призма $DEFD_1E_1F_1$ пересекает боковую поверхность призмы $ABCA_1B_1C_1$. При пересечении получаются две замкнутые ломаные линии: одна из них – пространственная (пересекаются две грани призмы $ABCA_1B_1C_1$), другая – плоская (пересекается одна грань).

Горизонтальная проекция линий пересечения совпадает с горизонтальной проекцией вертикальной призмы, а профильная – с профильной проекцией горизонтальной призмы. Отмечая точки пересечения $1' 2' 3' 4' 5' 6'$ горизонтальных проекций ребер $D'D_1'$, $E'E_1'$, $F'F_1'$ с горизонтальной проекцией призмы $ABCA_1B_1C_1$, при помощи линий связи находим их фронтальные проекции.

Фронтальные проекции $7''$, $8''$ точек пересечения ребра AA_1 с боковой поверхностью призмы $DEFD_1E_1F_1$ определим по линиям связи, используя их профильные проекции $7'''$ и $8'''$. Последовательно соединяя найденные точки пересечения, принадлежащие одним и тем же граням, построим две ломаные линии 1-3-8-5-7-1 и 2-4-6-2.

7.2. Построение линии пересечения поверхностей вращения с многогранниками

Линия пересечения многогранника с телом вращения в общем случае состоит из отдельных участков кривых линий, получающихся при пересечении граней многогранника с поверхностью вращения. Точки перехода от одного участка к другому находятся на пересечении ребер многогранника с телом вращения.

Видеопример пространственной модели конуса, пересекающегося с треугольной призмой, приведен [здесь](#). 

Последовательность операций при построении линии пересечения на чертеже следующая:

- определяются точки пересечения ребер многогранника с поверхностью вращения;
- находятся точки, принадлежащие линиям пересечения отдельных граней многогранника с телом вращения. Построение начинают с определения характерных (опорных) точек линии – высшие и низшие, ближайшие и наиболее удаленные, крайние слева и справа и т. д. Точки определяются визуально по чертежу;
- определяется видимость проекций участков линии пересечения.

Рассмотрим построение линии пересечения поверхности прямой трехгранной призмы с поверхностью цилиндра вращения (рис. 7.3). Боковые грани призмы являются горизонтально-проецирующими плоскостями, а ось цилиндра перпендикулярна профильной плоскости проекций.

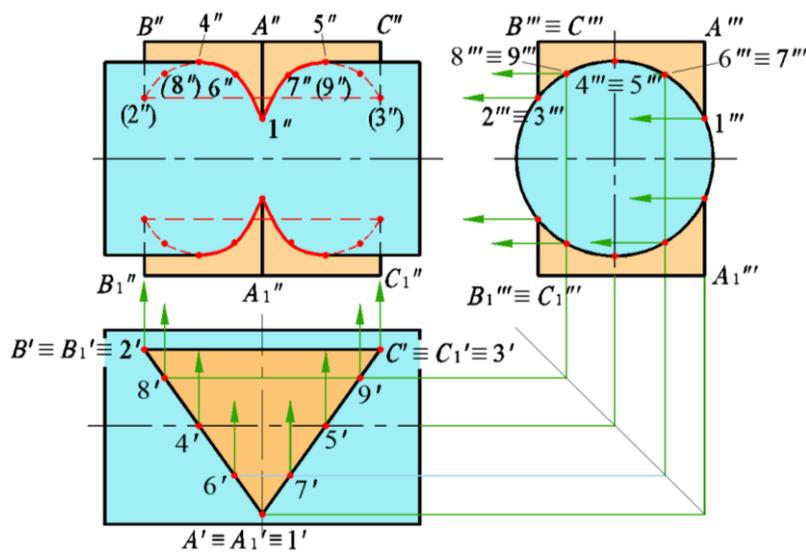


Рис. 7.3

При построении точек линии пересечения многогранников с телами вращения используют вспомогательные секущие плоскости. Их располагают так, чтобы они пересекали данные поверхности по простым линиям (прямым или окружностям).

Грань призмы BB_1C_1C параллельна оси цилиндра и пересекает поверхность цилиндра по прямой 2-3 (образующая цилиндра).

Грани AA_1B_1B и AA_1C_1C наклонены к оси цилиндра и пересекают его поверхность по кривым (частям эллипсов).

Горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с проекцией боковой поверхности призмы, а профильная проекция совпадает с проекцией боковой поверхности цилиндра.

Характерными точками линии пересечения являются точки пересечения 1, 2, 3 ребер призмы с поверхностью цилиндра (фронтальные проекции этих точек определяем с помощью линий связи, проведенных через их профильные проекции). Точки 4 и 5 разделяют фронтальную проекцию линии пересечения на видимую и невидимую части.

Построение промежуточных точек 6, 7, 8, 9 выполняем следующим образом. На одной из имеющихся проекций линии пересечения (горизонтальной или профильной) намечаем проекции точек и с помощью линий связи строим недостающие проекции.

По построенным точкам проводим фронтальную проекцию линии пересечения. Видимой является часть $4''6''1''7''5''$, расположенная на видимой проекции цилиндра. Часть фронтальных проекций ребер BB_1 и CC_1 закрывается очерком цилиндра.

На рис. 7.4 приведено построение линии пересечения сферы с прямой трехгранной призмой. Боковые ребра призмы перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций. Характерными точками линии пересечения являются точки 1 и 2 – точки пересечения ребер призмы со сферой (обозначение точек линии пересечения приведено лишь на одной симметричной части). Для построения этих точек использованы фронтальные плоскости α и β , проведенные через ребра призмы и пересекающие сферу по окружностям радиусов R и R_1 .

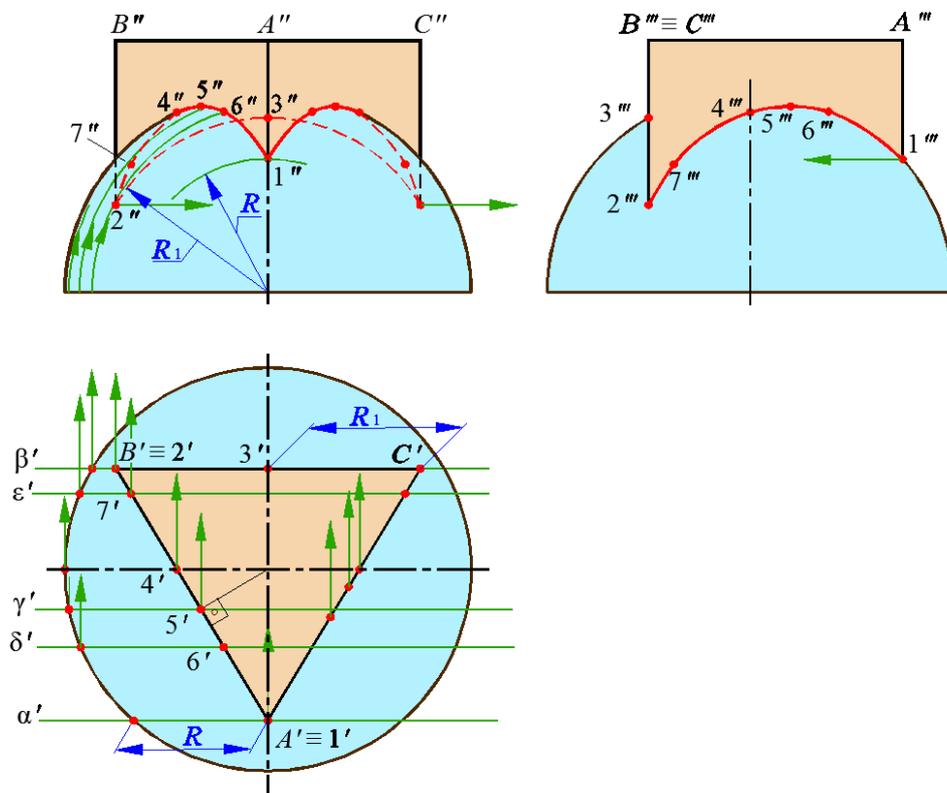


Рис. 7.4

Фронтальную проекцию $1''$ точки 1 можно определить и по профильной проекции с помощью линий связи. Так как грань призмы BC является фронтальной плоскостью, то плоскость β (β') позволяет определить дугу окружности, по которой она пересекает сферу. Точка 3 – высшая точка этой дуги.

Грани AB и AC призмы пересекают сферу по дугам окружностей, которые на фронтальную и профильную плоскости проекций проецируются в виде частей эллипсов. Фронтальная проекция линии пересечения этих граней представляет собой две симметричные части, а профильные проекции совпадают.

Характерными точками фронтальной проекции линии пересечения являются также точки $4''$ и $5''$. Точка 4 разделяет линию на видимую и невидимую части, точка 5 – высшая точка линии пересечения. Проекция $4''$ находится на очерке сферы – фронтальном меридиане, проекция $5''$ определена с помощью фронтальной плоскости γ (γ').

Для построения промежуточных точек $6''$ и $7''$ фронтальной проекции использованы фронтальные плоскости δ (δ') и ϵ (ϵ'). Каждая из фронтальных плоскостей пересекает сферу по окружности определенного радиуса, а призму – по горизонтально-проецирующим прямым.

Видимой частью фронтальной проекции линии пересечения является часть эллипса $1''6''5''4''$, на профильной проекции симметричные части линии пересечения изображаются видимой линией. На фронтальной проекции части ребер B и C закрываются контуром сферы.

7.3. Построение линии пересечения поверхностей вращения

Линия пересечения двух поверхностей вращения в общем случае представляет пространственную кривую. *Здесь*  приведен видеопример модели пересекающихся конуса и цилиндра. Линию пересечения поверхностей на чертеже строят по точкам. Общим способом построения является способ *вспомогательных секущих поверхностей*. В качестве поверхностей-посредников применяются плоскости или сферы.

7.3.1. Способ вспомогательных секущих плоскостей

Если одна из поверхностей является цилиндрической проецирующей поверхностью, то построение линии пересечения упрощается, так как в этом случае одна проекция линии пересечения совпадает с окружностью – проекцией цилиндра на перпендикулярную плоскость проекций.

На рис. 7.5 показано построение линии пересечения двух цилиндров вращения, оси которых скрещиваются. Ось горизонтального цилиндра – профильно-проецирующая, а ось вертикального – горизонтально-проецирующая.

Линией пересечения цилиндров является пространственная кривая, горизонтальная проекция которой совпадает с окружностью – горизонтальной проекцией вертикального цилиндра. Отметим на этой окружности точки, принадлежащие линии пересечения: опорные 1, 2, 3, 4, лежащие на крайних образующих цилиндров, и промежуточную 5. Точки обозначены только на одной симметричной части линии пересечения.

Фронтальные проекции точек 1, 3, 3₁, лежащие на ближней, верхней и нижней образующих горизонтального цилиндра, определяем с помощью линий связи.

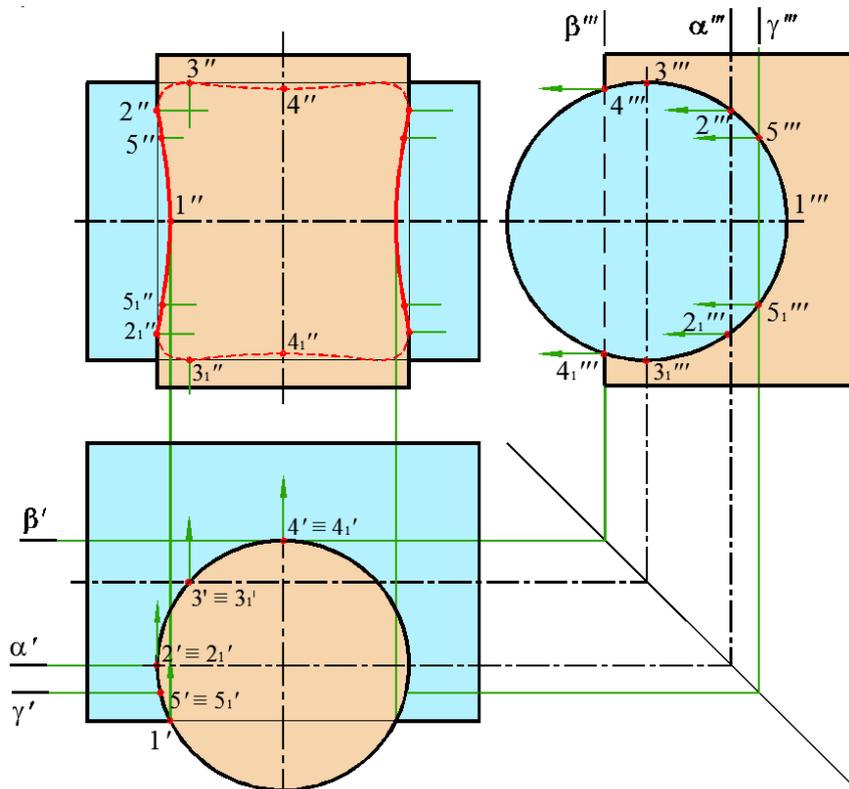


Рис. 7.5

Для построения фронтальных проекций точек 2, 2₁, 4, 4₁, 5, 5₁ использованы вспомогательные фронтальные плоскости α (α'), β (β'), γ (γ'), пересекающие оба цилиндра по образующим. Положение образующих вертикального цилиндра найдем по их горизонтальным

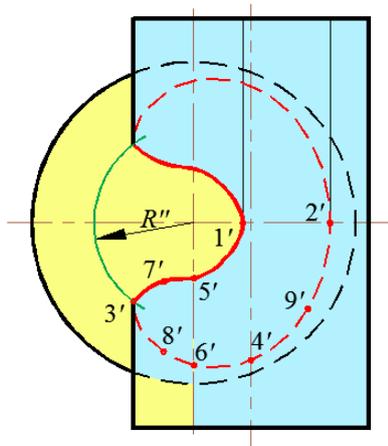
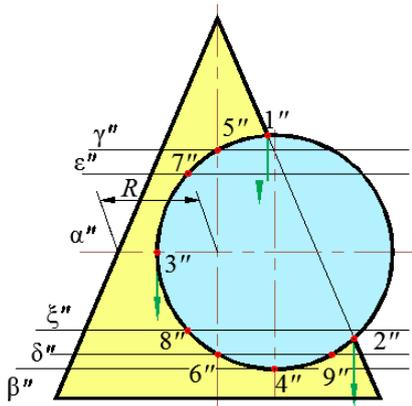


Рис. 7.6

На рис. 7.7 показано построение линии пересечения полусферы с цилиндром вращения. Поскольку ось цилиндра перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций, то горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с окружностью – горизонтальной проекцией цилиндра. Отметим на этой окружности опорные точки линии пересечения $A, B, C, D, E, F, G, H, K, L$ и промежуточные M, N, P .

Точки A и B (низшая и высшая точки) расположены в горизонтально-проецирующей плоскости α , горизонтальный след-проекция α' которой пройдет через горизонтальные проекции O' и O_1' осей тел вращения.

Чтобы определить фронтальные проекции A'' и B'' этих точек, повернем плоскость α с лежащими на ней линиями сечения сферы и цилиндра вокруг оси сферы до фронтального положения. Новое положение образующих цилиндра и контура сферы на плоскости проекций π_2 дает точки \bar{A}'' и \bar{B}'' , по которым определяем проекции A'' и B'' .

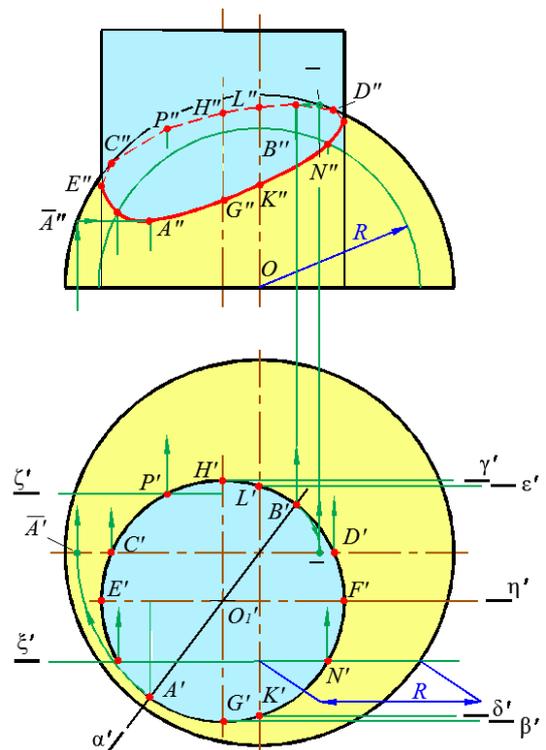


Рис. 7.7

проекциям при помощи вертикальных линий связи. Для построения образующих горизонтального цилиндра использована его профильная проекция.

На рис. 7.6 показано построение линии пересечения конуса вращения и цилиндра вращения, у которых оси скрещиваются под прямым углом. Линией пересечения указанных тел является пространственная кривая, фронтальная проекция которой совпадает с окружностью цилиндра. Отметим здесь точки линии пересечения: опорные (1, 2, 3, 4, 5, 6) и промежуточные (7, 8, 9). Горизонтальные проекции точек 1 и 2 определим с помощью линий связи. Для построения горизонтальных проекций точек 3 и 4 использованы вспомогательные плоскости α и β .

Плоскость α (α'') пересекает цилиндр по крайней левой образующей, а конус – по окружности (параллели) радиуса R , пересечение которых определяет горизонтальную проекцию $3'$ точки 3.

Плоскость β (β''), касающаяся цилиндра по его нижней образующей, позволяет построить горизонтальную проекцию $4'$ точки 4. Подобным образом с помощью горизонтальных плоскостей γ, δ, ϵ и ξ находятся горизонтальные проекции точек 5 и 6, расположенных на ближней образующей конуса, а также горизонтальные проекции промежуточных точек 7, 8, 9.

Видимой частью горизонтальной проекции линии пересечения является линия $1'5'7'3'$, принадлежащая верхней части цилиндра.

На видеопримере [здесь](#) приведена пространственная модель конуса с цилиндрическим отверстием.

Фронтальные проекции точек C и D , расположенных на фронтальном меридиане сферы, определим с помощью линий связи.

Для построения фронтальных проекций опорных точек E, F, G, H , размещенных на крайних образующих цилиндра, и точек K, L , находящихся на профильном меридиане сферы, использованы вспомогательные фронтальные плоскости $\beta (\beta'), \gamma (\gamma'), \delta (\delta'), \varepsilon (\varepsilon'), \eta (\eta')$. Фронтальные проекции промежуточных точек M, N, P построены с помощью фронтальных плоскостей $\zeta (\zeta')$ и $\xi (\xi')$. Эти плоскости пересекают цилиндр по образующим – прямым, а полусферу – по полуокружности. Так, вспомогательная плоскость $\xi (\xi')$ пересекает цилиндр по образующим, а полусферу – по дуге радиуса R .

Пересечение фронтальных проекций указанных линий сечения и дает точки M'' и N'' . Видимой частью фронтальных проекции является линия $E''M''A''G''K''N''F''$, принадлежащая видимой (передней) части цилиндра.

7.3.2. Способ вспомогательных сфер

В некоторых случаях для построения линии пересечения двух поверхностей вращения целесообразно применять в качестве секущих поверхностей сферы. Этот способ основан на свойстве сферы пересекаться с любой поверхностью вращения, ось которой проходит через центр сферы, по окружности.

Чтобы сфера одновременно пересекала две поверхности по окружностям, необходимо выполнить следующие условия:

- 1) оси поверхностей вращения должны пересекаться (точку пересечения принимают за центр вспомогательных концентрических сфер);
- 2) оси поверхностей вращения должны располагаться параллельно какой-либо плоскости проекций.

На рис. 7.8 показано построение линии пересечения двух конусов с пересекающимися осями, параллельными плоскости π_2 .

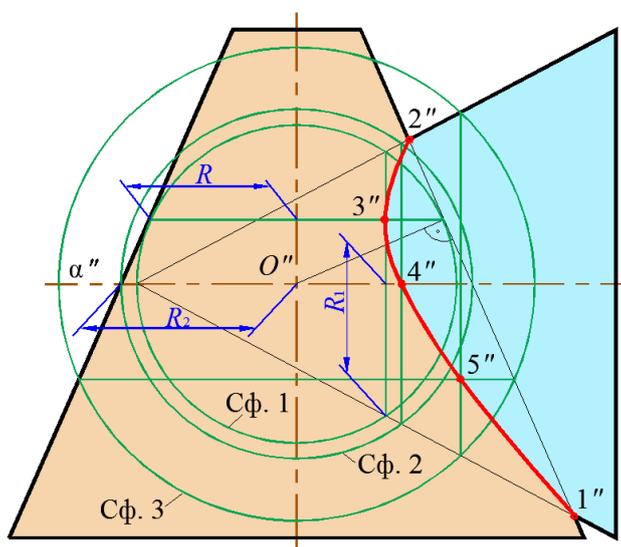


Рис. 7.8

Линия пересечения – симметричная пространственная кривая. Фронтальные проекции симметричных половин совпадают и образуют кривую 2-го порядка. Точки 1 и 2, находящиеся в пересечении образующих конусов, очевидны. Остальные точки определены с помощью вспомогательных сфер с центром в точке O'' – точке пересечения осей конусов. С помощью сферы Сф. 1 (наименьшей из всех возможных) построена крайняя левая точка фронтальной проекции линии пересечения. Эта сфера касается поверхности

конуса с вертикальной осью по окружности радиуса R и пересекает другой конус по окружности радиуса R_1 . В пересечении этих окружностей получается фронтальная проекция $3''$. Для определения фронтальной проекции точки 4, расположенной на ближайшей образующей конуса с горизонтальной осью, использована сфера Сф. 2. Радиус R_2 этой сферы подобран так, чтобы окружность пересечения ее с поверхностью вертикального конуса лежала в плоскости α (α''). С помощью сферы Сф. 3 определена фронтальная проекция $5''$ точки 5.

Применение способа сфер позволяет построить линию пересечения поверхностей вращения, пользуясь только одной проекцией.

7.4. Особые случаи пересечения

При пересечении между собой кривых поверхностей линиями пересечения являются пространственные кривые, которые в ряде случаев могут распадаться на более простые линии. Рассмотрим несколько таких примеров.

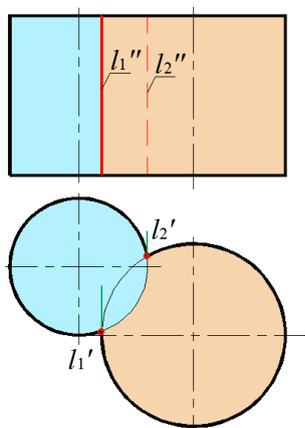


Рис. 7.9

1. Два цилиндра с параллельными осями пересекаются по образующим.

На рис. 7.9 изображены пересекающиеся между собой цилиндры вращения с параллельными осями. Линиями пересечения являются общие образующие l_1 и l_2 .

2. Если две поверхности второго порядка описаны около третьей или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка. Плоскости этих кривых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания.

На рис. 7.10 изображены пересекающиеся между собой цилиндр и конус, касающиеся сферы радиуса R . Линии касания – окружности, плоскости которых параллельны фронтальной и профильной плоскостям проекций.

Плоскости касания пересекаются между собой по фронтально-проецирующей прямой AB . Фронтальная проекция линии пересечения – два эллипса, плоскости которых проходят через прямую AB и являются фронтально-проецирующими плоскостями. Большие оси эллипсов – отрезки 1-2 и 3-4, а малые равны диаметру цилиндра. Горизонтальная проекция линии пересечения находится из условия принадлежности ее точек поверхности конуса.

3. Соосные поверхности вращения (т. е. поверхности с общей осью) пересекаются по окружностям.

Если ось вращения соосных поверхностей перпендикулярна к какой-либо плоскости проекций, то линия их пересечения проецируется на эту плоскость в виде окружности, а на другую плоскость проекций – в прямую линию.

На рис. 7.11 даны примеры пересечения соосных поверхностей вращения (ось вращения перпендикулярна плоскости π_1). На рис. 7.11, а приведены цилиндр и конус, б – конус и сфера, в – две сферы. За ось сферы можно принять любой ее диаметр. Поэтому сфера, центр которой находится на оси поверхности вращения, пересекается с этой поверхностью по окружности.

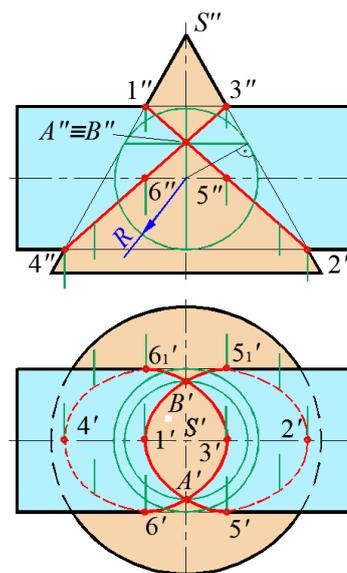


Рис. 7.10

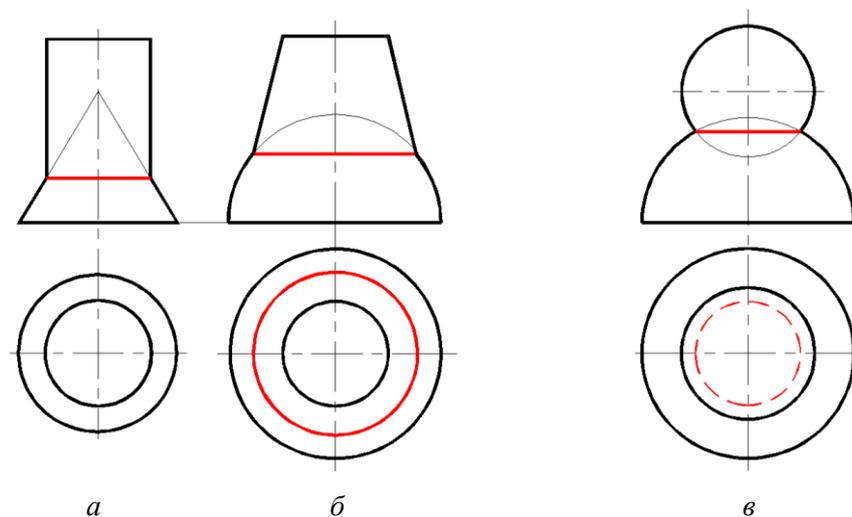


Рис. 7.11

Вопросы для контроля

1. Поясните общий способ построения линии пересечения двух поверхностей.
2. Какие точки линии пересечения являются характерными (опорными)?
3. Как определяется видимость линии пересечения?
4. Что представляет собой линия пересечения тела вращения с многогранником?
5. При каком взаимном положении поверхностей вращения возможно применение вспомогательных секущих сфер?
6. Какие линии образуются при взаимном пересечении: а) цилиндров с параллельными осями; б) конусов с общей вершиной?

Лекция 8

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

8.1. Теоретические основы построения аксонометрических проекций

Аксонометрическая проекция, или просто аксонометрия, дает наглядное изображение предмета на одной плоскости. Слово аксонометрия означает осеизмерение.

Способ аксонометрического проецирования состоит в том, что данную фигуру вместе с осями прямоугольных координат, к которым она отнесена в пространстве, параллельно проецируют на некоторую плоскость, принятую за плоскость аксонометрических проекций (ее называют также картинной плоскостью). При различном взаимном расположении осей координат в пространстве и плоскости аксонометрической проекции, а также при разном направлении проецирования можно получить множество аксонометрических проекций, отличающихся одна от другой направлением аксонометрических осей и масштабами по ним.

В конструкторской документации аксонометрические проекции стандартизованы в ГОСТ 2.317-69. Он предусматривает три вида аксонометрических проекций:

- прямоугольная изометрия;
- прямоугольная диметрия;
- фронтальная косоугольная диметрия.

Рассмотрим, как будут направлены аксонометрические оси, а также как будет осуществляться масштабирование по ним в случае направления проецирования, перпендикулярного аксонометрической плоскости проекций, т. е. для прямоугольной аксонометрической проекции. На рис. 8.1 изображена пространственная система прямоугольных координат Ox, Oy, Oz , а также единичные отрезки e на осях координат и их проекции в направлении S на некоторую (картинную) плоскость ϵ , являющуюся аксонометрической плоскостью проекций.

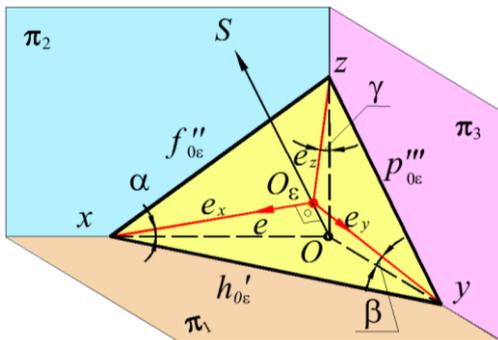


Рис. 8.1

Проекции e_x, e_y, e_z отрезка e на соответствующих аксонометрических осях $O_\epsilon x, O_\epsilon y, O_\epsilon z$ в общем случае не равны отрезку e и не равны между собой. Эти проекции являются единицами измерения по аксонометрическим осям – аксонометрическими масштабами.

Отношения: $e_x / e = k; e_y / e = m; e_z / e = n$ называют коэффициентами искажения по аксонометрическим осям.

В частном случае положение картинной плоскости можно выбрать таким, что аксонометрические единицы – отрезки e_x, e_y, e_z – будут равны между собой или будет равна между собой пара этих отрезков.

При $e_x = e_y = e_z$ ($k = m = n$) аксонометрическую проекцию называют изометрической, искажения по всем осям в ней одинаковы. При равенстве аксонометрических единиц по двум осям, обычно при $e_x = e_y \neq e_z$ ($k = m \neq n$), имеем диметрическую проекцию.

Отрезки $O_\epsilon x, O_\epsilon y, O_\epsilon z$ являются аксонометрическими проекциями отрезков Ox, Oy, Oz . Обозначим углы между осями координат и их проекциями на плоскости ϵ через α, β, γ . Тогда $O_\epsilon x / Ox = \cos\alpha; O_\epsilon y / Oy = \cos\beta; O_\epsilon z / Oz = \cos\gamma$. Эти отношения являются коэффициентами искажения, т. е. $k = \cos\alpha; m = \cos\beta; n = \cos\gamma$. Поскольку треугольники $O_\epsilon xO, O_\epsilon yO$ и $O_\epsilon zO$ прямоугольные, то сумма квадратов направляющих косинусов равна единице:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) = 1.$$

Отсюда $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$, или $1 - \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\beta + 1 - \cos^2\gamma = 1$, следовательно, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$. Таким образом: $k^2 + m^2 + n^2 = 2$, т. е. сумма квадратов коэффициентов искажения равна 2.

8.2. Прямоугольная изометрическая проекция

Прямоугольная (ортогональная) изометрическая проекция образуется при прямоугольном проецировании предмета и его координатных осей на плоскость аксонометрических проекций, одинаково наклоненную к каждой координатной оси.

При таком проецировании все три коэффициента искажений будут равны между собой: $k = m = n$; $k^2 + m^2 + n^2 = 2$, тогда $3k^2 = 2$, откуда $k = \sqrt{2/3} \approx 0,82$. Углы между аксонометрическими осями будут равны 120° .

При построении изометрической проекции размеры предмета, откладываемые по аксонометрическим осям, необходимо умножать на 0,82. ГОСТ 2.317–69 допускает для упрощения построений принимать коэффициенты искажений равными единице. При этом увеличение изображения предмета составляет 22% ($1 / 0,82 = 1,22$). Каждый отрезок, направленный по осям x , y , z или параллельно им, сохраняет свою величину.

Расположение осей изометрической проекции показано на рис. 8.2, а.

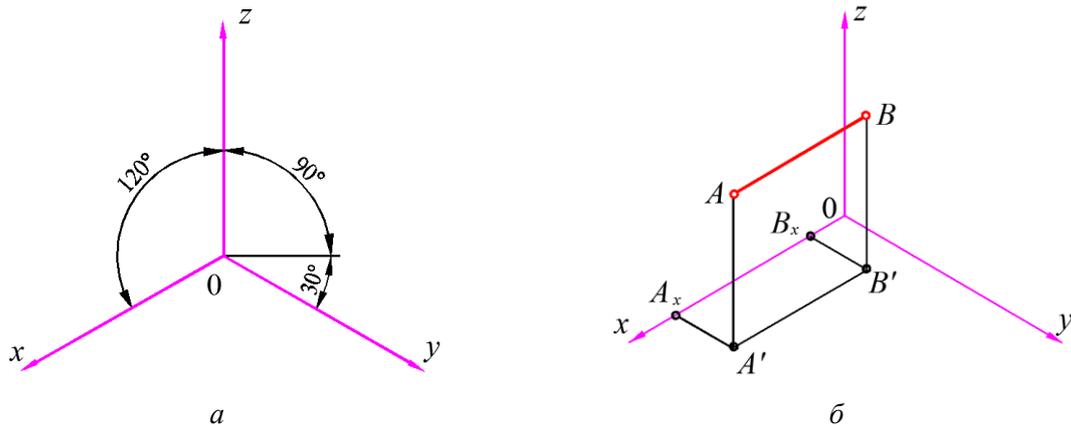


Рис. 8.2

Все отрезки прямых, которые были параллельны осям x , y и z на комплексном чертеже, останутся параллельными соответствующим осям в изометрической проекции. На рис. 8.2, б приведена изометрическая проекция отрезка AB , расположенного перпендикулярно профильной плоскости проекций.

На рис. 8.3 показано построение эллипсов, в которые проецируются окружности, лежащие в плоскостях проекций или в плоскостях, параллельных им. Размер большой оси эллипса равен $1,22d$, малой – $0,71d$, где d – диаметр исходной окружности.

В учебных чертежах рекомендуется вместо эллипсов применять овалы, очерченные дугами окружностей. На этом же рисунке показано расположение осей овалов и один из способов построения овалов в прямоугольной изометрической проекции.

На рис. 8.4, а приведен чертеж цилиндра, усеченного несколькими плоскостями, и его изометрическая проекция (рис. 8.4, б), на которой показано построение точки A , принадлежащей одной из линий сечения.

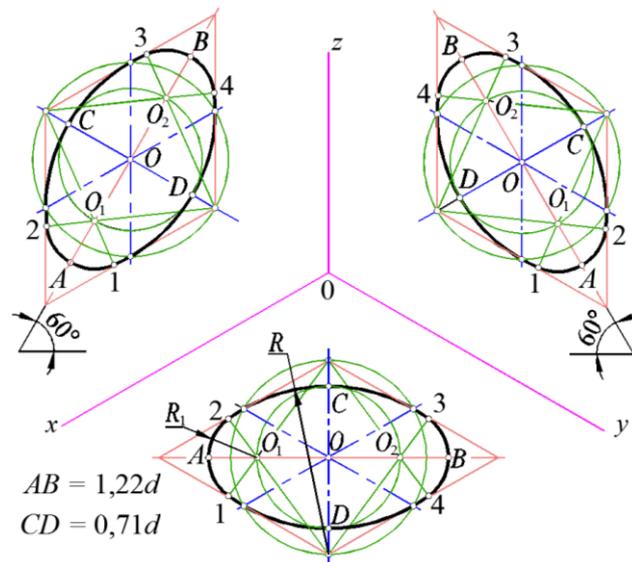


Рис. 8.3

Здесь используются все три оси координат. Сначала по оси x откладывается значение x_A , измеренное на горизонтальной проекции цилиндра, далее из этой точки проводится линия, параллельная оси y , на которой откладывается величина y_A , измеренная также на горизонтальной проекции. В конечной точке этого отрезка проводится вертикальная линия длиной z_A , измеренной на фронтальной проекции цилиндра. Аналогично находят остальные точки сечения цилиндра в количестве, необходимом для получения качественной линии пересечения.

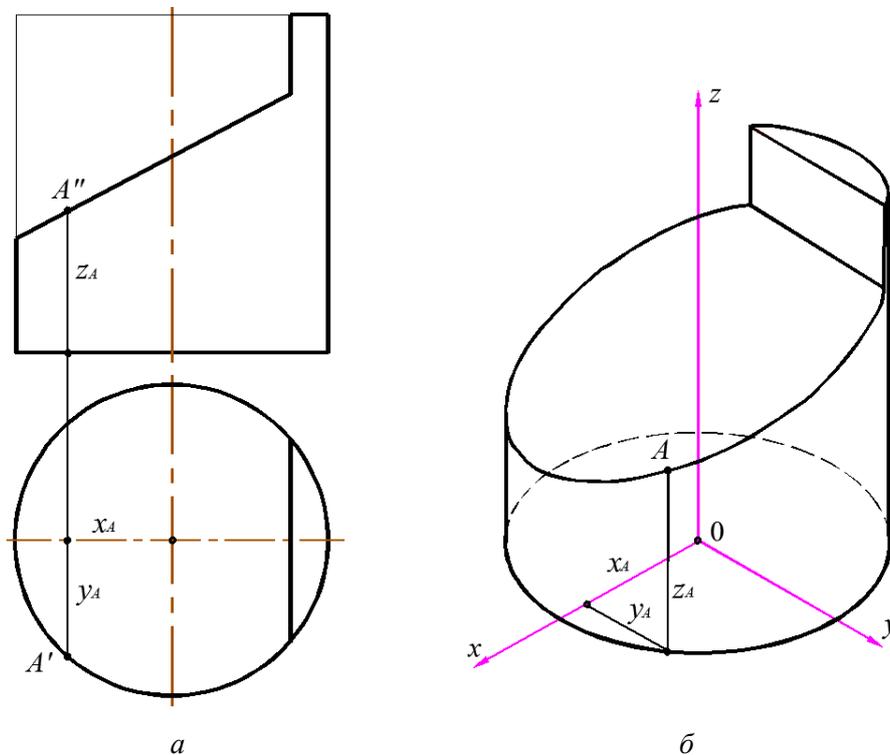


Рис. 8.4

Видеопример с пошаговым построением изометрической проекции усеченного цилиндра можно посмотреть [здесь](#). 

8.3. Прямоугольная диметрическая проекция

Прямоугольная (ортогональная) диметрическая проекция образуется при прямоугольном проецировании предмета и связанных с ним координатных осей на плоскость аксонометрических проекций, одинаково наклоненную к двум координатным осям.

Коэффициенты искажений в диметрической проекции имеют следующие значения: $k = n$; $m = 1 / 2k$. Тогда $2k^2 + 1 / 4k^2 = 2$; $k = \sqrt{1,06} \approx 0,94$; $m \approx 0,47$.

В целях упрощения построений в соответствии с ГОСТ 2.317 приведенные коэффициенты искажений по осям x и z принимают равными единице; а по оси y коэффициент искажения равен 0,5. Следовательно, по осям x и z или параллельно им все размеры откладывают в натуральную величину, а по оси y размеры уменьшают вдвое. Увеличение в этом случае составляет 6% (выражается числом $1,06 = 1 / 0,94$).

Расположение осей в диметрической проекции показано на рис. 8.5. Ось x наклонена по отношению к горизонтальной линии под углом $7^\circ 10'$, а ось y – под углом $41^\circ 25'$.

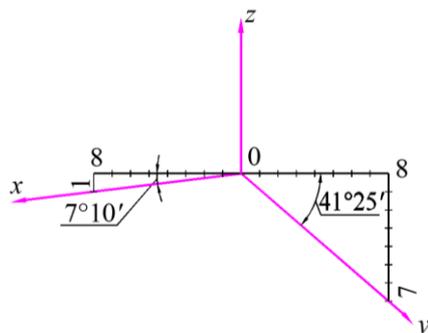


Рис. 8.5

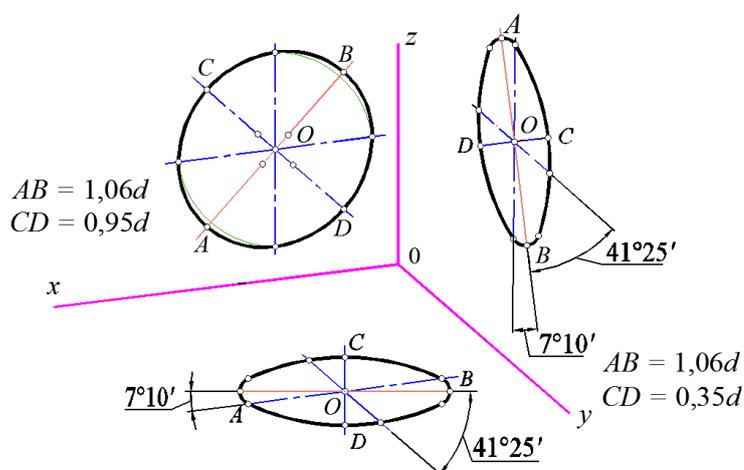


Рис. 8.6

В диметрической проекции изображения геометрических тел строят так же, как в изометрической, с учетом коэффициента искажений по оси y , вдоль которой размеры уменьшаются вдвое. Все отрезки прямых, которые были параллельны осям x , y и z на комплексном чертеже, останутся параллельными соответствующим осям в диметрической проекции.

На рис. 8.6 приведены окружности в диметрической проекции с указанием соответствующих значений величин осей эллипсов.

Большая ось AB эллипсов во всех случаях равна $1,06d$, где d – диаметр окружности. Малые оси CD эллипсов, расположенных на плоскостях, параллельных плоскостям проекций π_1 и π_3 , равны $0,35d$, а на плоскости, параллельной фронтальной плоскости π_2 , – $0,95d$.

8.4. Косоугольная фронтальная диметрия

Если аксонометрическая проекция параллельна одной из координатных плоскостей, то изображения, лежащие в этой плоскости, на аксонометрической проекции не искажаются. При этом ортогональное проецирование недопустимо, так как координатная ось, перпендикулярная указанной координатной плоскости, изобразится точкой и изображение будет лишено наглядности. Поэтому пользуются косоугольным проецированием, при котором направление оси y выбирают так, чтобы углы между ней и осями x и z равнялись бы 135° (рис. 8.7), а показатель искажения – 0,5. Такая косоугольная аксонометрия называется фронтальной диметрией.

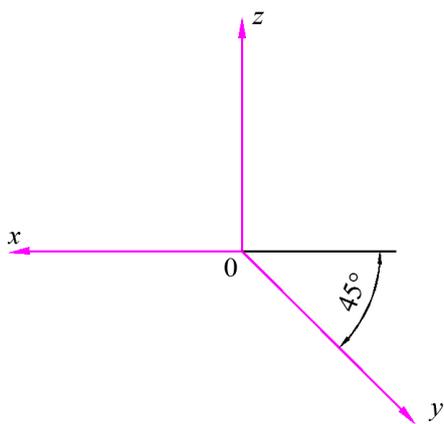


Рис. 8.7

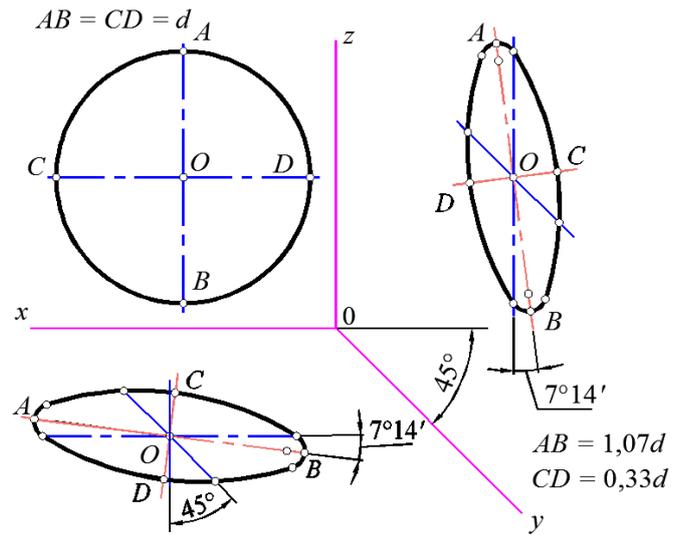


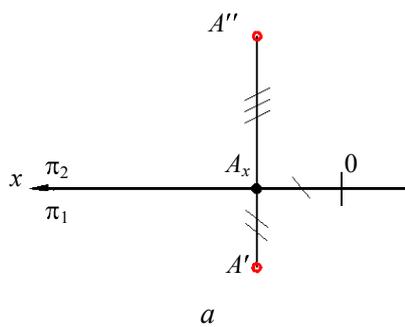
Рис. 8.8

На рис. 8.8 показаны проекции окружностей, расположенных в плоскостях, параллельных координатным. Окружность, расположенная в плоскости xOz , проецируется на плоскость проекций без искажения, а окружности, расположенные в плоскостях, параллельных координатным плоскостям xOy и xOz , спроецируются в виде эллипсов. Эти эллипсы обычно строят по сопряженным диаметрам. Большая ось эллипсов равна $1,07d$, а малая ось – $0,33d$ (d – диаметр окружности).

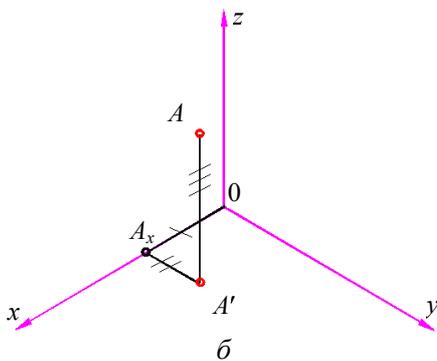
Примеры решения задач

Задача 1. Построить изометрическую проекцию точки A , представленной проекциями A' и A'' (рис. 8.9, а).

Решение. Если даны прямоугольные проекции точки, то это значит, что известны все три координаты x , y и z , позволяющие построить изометрическую проекцию. Построение начинаем с изометрических осей, которые проводим под углом 120° друг к другу (рис. 8.9, б). Далее от начала координат 0 по оси x откладываем отрезок OA_x . Из полученной точки A_x проводим прямую, параллельную оси y , и на ней откладываем отрезок A_xA' . Из точки A' проводим прямую, параллельную оси z , на которой откладываем отрезок, равный координате z точки A , – A_xA'' . Полученная точка A – искомая изометрическая проекция точки A .



а



б

Рис. 8.9

Задача 2. Построить изометрическую проекцию куба.

Решение. Центр нижнего основания куба размещается в точке 0 пересечения изометрических осей (рис. 8.10). В направлении осей x , y откладываем расстояния, равные половине длины стороны куба $a / 2$. Из полученных точек проводим стороны основания куба, равные полной длине a . Линии проводим параллельно осям. Затем из точки 0 вдоль оси z откладываем расстояние a и строим верхнее основание куба.

Задача 3. По заданным проекциям построить изометрическую проекцию цилиндра и точки M , лежащей на его боковой поверхности (рис. 8.11).

Решение. Проводим изометрические оси x, y, z и строим эллипс нижнего основания. Затем определяем центр верхнего основания цилиндра и строим второй эллипс. Оба эллипса соединяем вертикальными образующими. Для построения точки M отмечаем точку M' на нижнем основании цилиндра (откладывая координаты x_M и y_M точки M). Затем на вертикальной образующей, проходящей из точки M' , на высоте z_M отмечаем точку M .

Задача 4. Построить прямоугольную диметрическую проекцию куба со стороной, равной a .

Решение. Начало координат разместим на пересечении граней куба. Нижнее основание куба размещаем в плоскости xOy (рис. 8.12). В направлении оси x откладываем расстояние, равное полной длине куба a . В направлении оси y откладываем расстояние, равное половине длины стороны куба $a/2$. Из полученных точек проводим стороны основания куба параллельно осям x и y . Затем из точки O вдоль оси z вверх откладываем расстояние a и строим верхнее основание куба аналогично нижнему. Вершины нижнего и верхнего оснований соединяем вертикальными линиями.

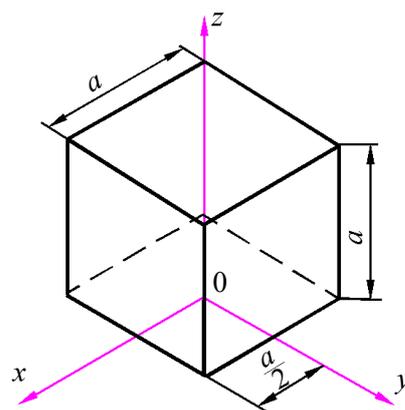


Рис. 8.10

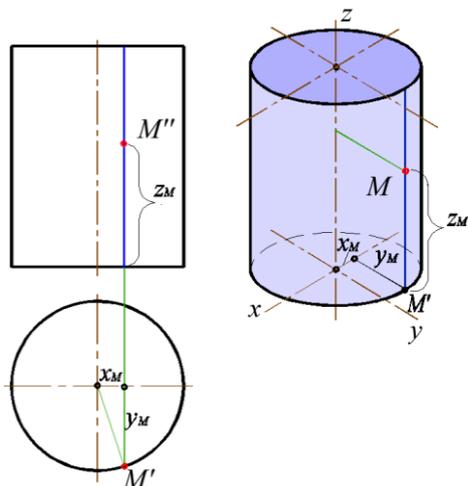


Рис. 8.11

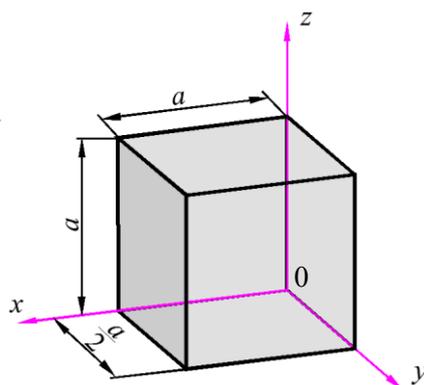


Рис. 8.12

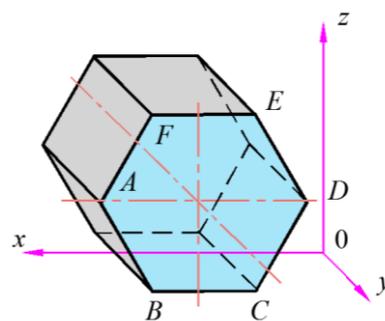


Рис. 8.13

Задача 5. Построить фронтальную косоугольную диметрическую проекцию шестигранника.

Решение. Разместим основание шестиугольной призмы $ABCDEF$ параллельно плоскости xOz (рис. 8.13). В этом случае шестиугольник проецируется на аксонометрическую плоскость проекций без искажений. Затем из вершин шестиугольника $ABCDEF$ проводим прямые, параллельные оси y . На этих прямых откладываем отрезки, равные половине длине боковых ребер призмы. Соединив полученные точки, получаем второе основание призмы. В заключение определяем видимые и невидимые линии призмы.

Вопросы для контроля

1. Дайте определение аксонометрической проекции.
2. Что называется коэффициентом искажения?
3. Какие виды аксонометрии вы знаете?
4. Как располагаются оси прямоугольной изометрии?

Лекция 9

ИНТЕРАКТИВНЫЕ ГРАФИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ. ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

9.1. Этапы развития систем проектирования. 3D-моделирование

Современный инженер должен быть знаком и уметь применять в своей деятельности новые технологии. В условиях динамично развивающихся систем автоматизированного проектирования знание основ трехмерного моделирования, параметризации, технологии создания чертежей в САД-системе является необходимым для студентов, получающих высшее техническое образование.

В основе 3D-моделирования заложен математический аппарат, реализованный в ядре графической системы и производящий трехмерные изображения. Математические зависимости, описывающие формирование цифровой модели реальных объектов, а также алгоритмы для расчета виртуального пространства, были разработаны еще в 1960-х годах. Со временем геометрические формы создаваемых на экране моделей усложнялись: наряду с простыми геометрическими примитивами и их комбинациями (куб, сфера, тор, различные тела, описываемые несложными алгебраическими уравнениями) появилась возможность поверхностного моделирования. При этом формируемая модель представляет собой поверхность, которая может состоять из множества полигонов (чаще всего треугольников). Развитие поверхностного моделирования стало большим шагом вперед и позволило создавать модели практически любой формы.

Стабильный рост производительности персональных компьютеров в 90-х годах прошлого века дал толчок развитию относительно недорогих приложений для трехмерного моделирования. Появление таких программных пакетов сделало 3D доступным для простых пользователей. Легкость в освоении, относительно небольшие требования к аппаратному обеспечению и широкие возможности таких систем обеспечили им быстрое распространение.

Следом за дизайном трехмерная графика проникла и в инженерное проектирование. Исторически сложилось так, что сфера промышленного проектирования жестко ограничена требованиями стандартов, которые касаются лишь плоского черчения. По этой причине переход на трехмерное моделирование в машиностроительном проектировании не был безболезненным. Однако большие возможности по созданию моделей сложных форм, легкость в проектировании и планировке, намного лучшие возможности для выявления ошибок на этапе проектирования и, самое главное, более наглядное представление объекта проектирования сделали свое дело. С середины 1990-х годов трехмерная графика стала широко применяться в инженерии.

Чертежи, выполняемые вручную карандашом на кульмане, ушли в прошлое. Точность таких чертежей невысока, времени на их изготовление затрачивается много, а редактирование невозможно. По мере совершенствования компьютерных технологий развивалась и сфера конструирования. В графических редакторах появилась возможность создавать библиотеки типовых элементов, оформлять чертежи и другую документацию в соответствии со стандартами ЕСКД.

Постепенно в промышленном проектировании стало применяться трехмерное моделирование. Кроме лучшего визуального представления проектируемых изделий, 3D-графика на порядок повышает точность проектирования составных объектов, позволяет легко редактировать трехмерную модель. Ассоциативная связь, устанавливаемая в инженерных 3D-системах

между моделью изделия, его чертежами, а также документацией на изделие (например, спецификацией), позволяет при внесении изменений в 3D-модель автоматически отобразить все эти изменения в других документах, связанных с моделью.

В данной лекции в рамках курса «Инженерная геометрия и графика» рассматривается применение 3D-моделирования только для решения геометрических задач.

Материал лекции рассчитан на студентов, прошедших ознакомительные лабораторные работы в объеме 10 часов и освоивших графический редактор и приемы плоского черчения в системе КОМПАС.

В связи с ограниченностью объема данного издания рассматривается порядок построения моделей лишь простых геометрических фигур – призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, сферы, а также моделей взаимно пересекающихся фигур. Конечной целью построений является создание чертежа, содержащего 3 проекции смоделированного объекта со всеми линиями пересечений.

9.2. Основные команды построения трехмерных моделей

Система КОМПАС-3D является наиболее приближенной к требованиям стандартов ЕСКД, изучаемых в курсе «Инженерная геометрия и графика», поэтому вопросы трехмерного моделирования далее рассматриваются на основе этой системы. Все операции по созданию и редактированию трехмерных моделей системы КОМПАС-3D предназначены для работы с твердыми телами.

Твердое тело – область трехмерного пространства, состоящая из однородного материала и ограниченная замкнутой поверхностью, которая сформирована из одной или нескольких граней. Любое твердое тело состоит из базовых трехмерных элементов: граней, ребер и вершин (рис. 9.1).

Контур формы тела определяется плоской фигурой, называемой *эскизом*, а сама форма создается путем перемещения этого эскиза в пространстве (вращение вокруг оси, выдавливание перпендикулярно плоскости эскиза, перемещение по траектории и пр.).

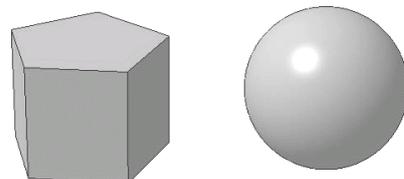


Рис. 9.1

Эскиз – это обычное двухмерное изображение, размещенное на плоскости в трехмерном пространстве. В эскизе могут присутствовать любые графические элементы.

Последовательность построения эскиза для формообразующей операции такова.

1. Выделяется в дереве построения плоскость, на которой планируется разместить эскиз (плоскость может быть стандартной или вспомогательной).

2. Открывается эскиз (кнопка ) на панели инструментов Текущее состояние. Модель изменит ориентацию таким образом, чтобы выбранная плоскость разместилась параллельно экрану (т. е. по нормали к линии взгляда).

3. После запуска процесса создания эскиза компактная панель инструментов изменит свой вид. На ней будут доступны панели инструментов с командами для двухмерных построений. В этом режиме создается эскиз изображения. Для завершения еще раз нажимается кнопка Эскиз.

Все команды для построения и редактирования объемной детали расположены на панели инструментов Редактирование детали (рис. 9.2).



Рис. 9.2

Все трехмерные операции в КОМПАС-3D делятся на основные (формообразующие) и дополнительные. Основные операции включают команды для добавления и удаления материала детали, булевы операции. Дополнительные операции представляют собой команды для реализации конструкторских элементов на детали (фаски, скругления, отверстия, ребра жесткости и т. д.).

Существует три основных способа формирования трехмерных элементов.

1. **Выдавливание.** Форма трехмерного элемента образуется путем смещения эскиза операции (рис. 9.3) строго по нормали к его плоскости. Эскизом может быть один замкнутый контур;

2. **Вращение.** Формообразующий элемент является результатом вращения эскиза (рис. 9.4) в пространстве вокруг произвольной оси. Вращение может происходить на угол 360° или меньше. *Ось вращения не должна пересекать изображение эскиза!*

3. **Кинематическая операция.** Поверхность элемента формируется в результате перемещения эскиза операции вдоль произвольной трехмерной кривой (рис. 9.5). Эскиз должен содержать обязательно замкнутый контур, а траектория перемещения начинаться в плоскости эскиза.

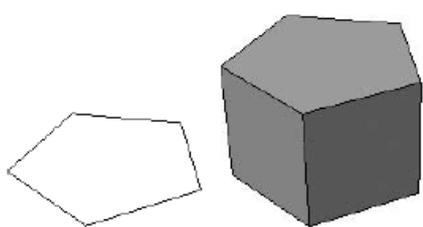


Рис. 9.3

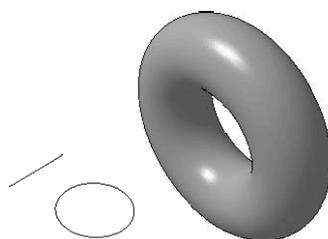


Рис. 9.4

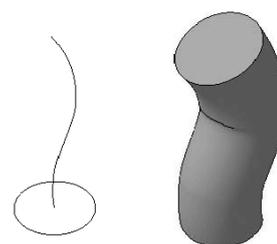


Рис. 9.5

В контекстном меню (правая клавиша мыши) для каждой операции с трехмерными элементами есть несколько полезных команд:

- Удалить – удаляет трехмерный элемент из модели и дерева построения. При удалении определенного элемента из детали его эскиз не удаляется, но удаляются все зависящие от него трехмерные элементы (операции);

- Скрыть – управляет отображением элемента детали, выбранного в дереве построения. После выполнения данной команды элемент будет скрыт в модели;

- Исключить из расчета – исключает из расчета выбранную операцию, вследствие чего модель перестраивается так, как будто исключенной операции вообще нет в модели.

При редактировании эскиза трехмерная операция, в которую он входит, а также все операции в модели, следующие за этой операцией в дереве построения, блокируются (становятся недоступными). Данные операции нельзя выделить, изменить до тех пор, пока не будет завершено редактирование эскиза. После выхода из режима редактирования эскиза все эти операции будут перестроены с учетом изменений в эскизе.

9.3. Построение модели призмы

Рассмотрим построение трехмерной модели призмы, часть которой отсечена несколькими плоскостями частного положения. На рис. 9.6 в качестве исходных данных приведены две проекции призмы с необходимыми размерами.

Сразу после запуска программы КОМПАС появляется окно Выбор типа создаваемого документа (рис. 9.7).

В диалоговом окне Новый документ выбирается тип файла Деталь . Этот документ содержит трехмерное изображение (3D-модель) объекта, сформированного при помощи формообразующих операций (выдавливание, вырезание, булевы операции).

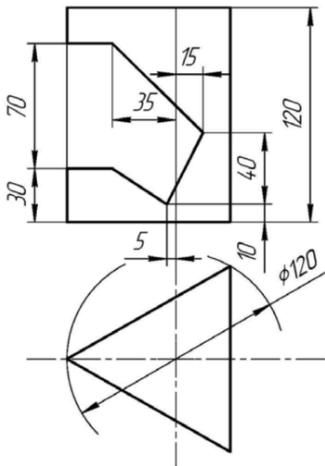


Рис. 9.6

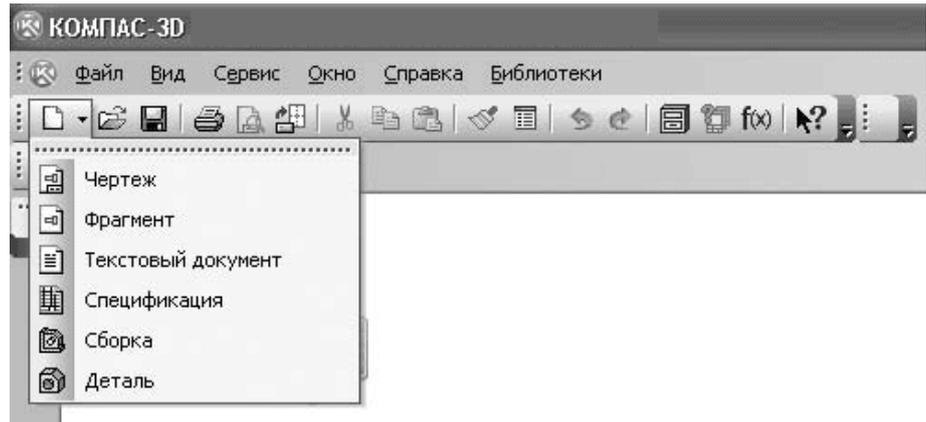


Рис. 9.7

Система создает новый документ, при этом главное меню и панели инструментов будут иметь вид, представленный на рис. 9.8.

Команды, необходимые для моделирования, можно выбирать в главном меню (Системное меню – Операции на рис. 9.8) или на компактной панели инструментов под кнопкой .

Расположение инструментальных панелей на рис. 9.8 дано для режима настройки «по умолчанию», т. е. как предлагают разработчики системы. Пользователь может перемещать панели в любое удобное для него место экрана, но в этом случае расположение кнопок выполняемых в дальнейшем команд не будет совпадать с приведенными в лекции примерами.

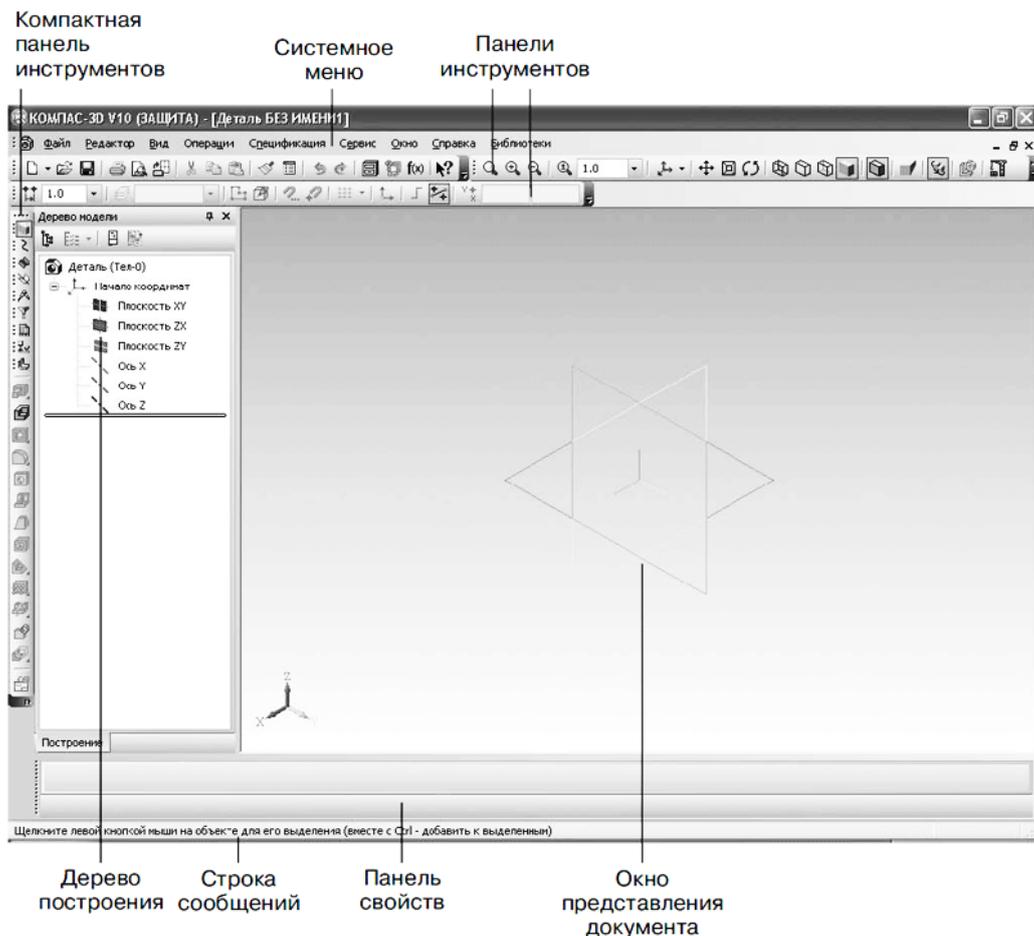


Рис. 9.8

Кратко рассмотрим этапы построения модели призмы.

1. Открыть в дереве модели Начало координат.
3. Выбрать плоскость ZX.

4. Перейти в режим Эскиза .

5. Построить **тонкой** линией окружность диаметром 120 мм. Ориентацию эскиза не трогать и не менять!

6. Построить **основной** линией равносторонний треугольник, вписанный в эту окружность. Окружность удалить.

7. Выйти из режима Эскиза (повторно нажать на знак .

8. В дереве модели указать этот эскиз, выбрать команду Редактирование детали  и операцию Выдавливание .

9. В строке Свойства задать Направление Прямое и размеры призмы: Расстояние 1 (высота): 120 мм.

10. Завершить операцию, нажав на кнопку  в строке Свойства.



11. Указать команду Ориентация  и установить Вид Спереди. Закрыть окно, нажав Выход.

12. В дереве модели выбрать Плоскость XY.

13. Перейти в режим Эскиз .

14. Открыть инструментальную панель Геометрия , выбрать Непрерывную линию и построить на призме контур сечения, соблюдая размеры, указанные в задании (рис. 9.9). В этом режиме деталь можно уменьшать (увеличивать) колесиком мыши, а для перемещения **дополнительно** нажимать клавишу Shift. Контур обязательно должен быть замкнутым.

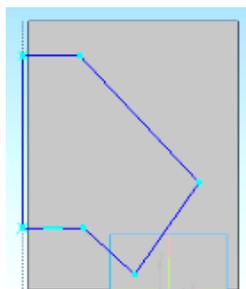


Рис. 9.9

15. Выйти из режима Эскиз (повторно нажать на знак .

16. В дереве модели указать этот эскиз, а на панели Редактирование детали выбрать Вырезать выдавливанием (кнопка .

17. В строке Свойства указать Направление Два направления и размеры: Расстояние 1: 60 мм, Расстояние 2: 60 мм. Модель можно повернуть, наблюдая за изменениями текущих плоскостей.

18. Завершить операцию, нажав на кнопку  в строке Свойства.

19. На призме должен сформироваться вырез, соответствующий построенному контуру (рис. 9.10). Проверить правильность полученных видов, выбрав в команде Ориентация Вид Спереди (установить), Сверху (установить), Слева (установить). Выйти из команды (Выход) и сохранить модель. После того как получена модель призмы, можно перейти к автоматизированному построению чертежа, содержащему три стандартных вида призмы – спереди, сверху и слева. Для получения этого чертежа необходимо выполнить следующие команды.

1. Выбрать в основном меню: Файл – Создать – Чертеж.

2. Изменить формат чертежа с А4 на А3 с помощью менеджера документа .

3. Открыть окно Виды или выбрать в меню Вставка – Вид – Вид с модели – Стандартные.

4. В открывшемся окне выбрать файл с моделью призмы и открыть его.

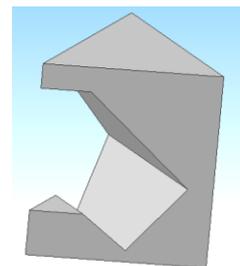


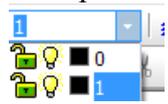
Рис. 9.10

5. В строке Свойства выбрать схему видов и изменить расстояние между видами с 15 мм (по умолчанию) на 50 мм по горизонтали и 25 мм по вертикали (рис. 9.11).

6. В этой же строке Свойства нажать кнопку Линии и включить Невидимые линии и Линии переходов.

7. Разместить виды в центре чертежа (рис. 9.12) и нажать .

8. Достроить оси на всех видах. Номер вида выбирается в строке Текущее состояние

 (обычно находится в верхней части экрана). Виды являются ассоциативно связанными и никакие изменения на них не допускаются. Можно редактировать только модель.

9. Обозначить точки на линиях пересечения на всех проекциях, подписать вершины основания призмы. Заполнить основную надпись.

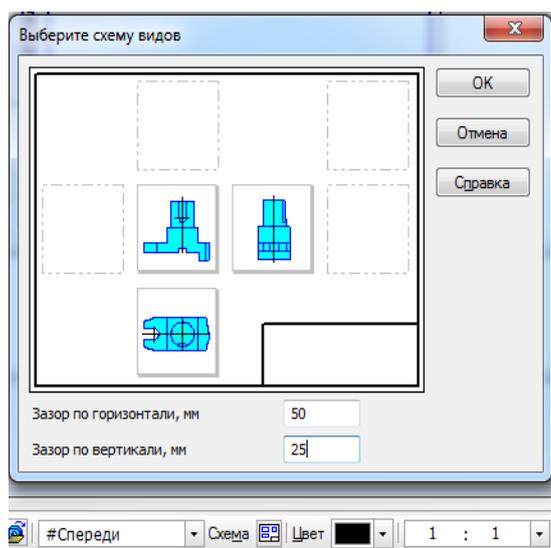


Рис. 9.11

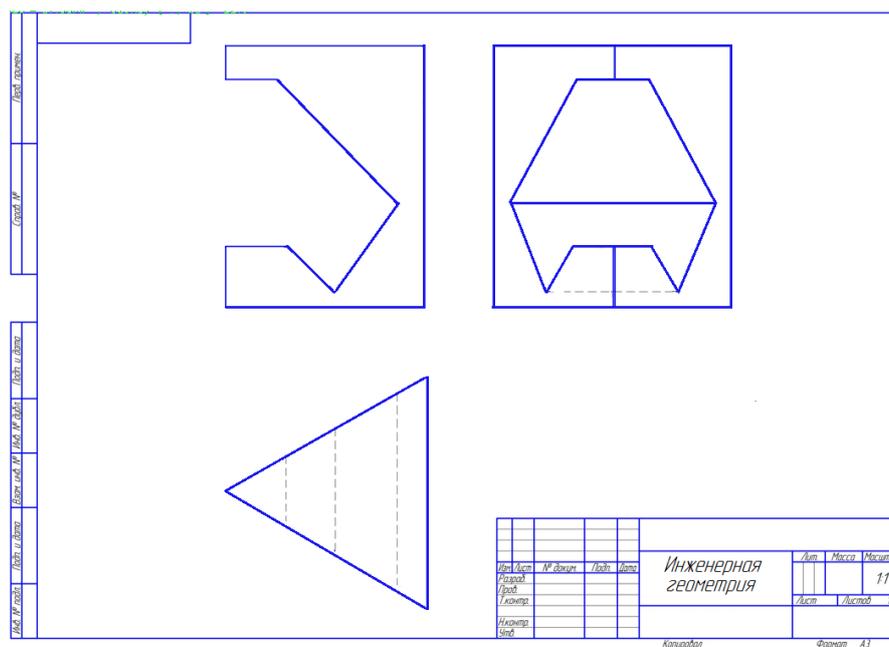


Рис. 9.12

Построение развертки боковой поверхности призмы

Компьютерные системы проектирования позволяют строить развертки различными способами. Здесь рассмотрим один из возможных вариантов.

1. Построить модель призмы.
2. Создать новый чертеж. Для этого выбрать команды Файл – Создать – Чертеж.
3. Изменить формат чертежа с А4 на А3 с помощью менеджера документа .
4. Вернуться к модели призмы.
5. Выбрать боковую грань и построить относительно ее смещенную плоскость: Операции – Плоскости – Смещенная плоскость – Расстояние 1 мм.
6. Завершить операцию, нажав на кнопку  в строке Свойства.



Рис. 9.13

7. Указать в дереве построений эту плоскость и перейти в режим Эскиз .

8. Построить **основной** линией контур этой грани со всеми вырезами (рис. 9.13).

9. Обвести контур рамкой и скопировать его в буфер, указав точку привязки на этой грани (в любом месте, потом эта точка будет использоваться для вставки на чертеже развертки).

10. Выйти из режима Эскиз (повторно нажать на кнопку .

11. Перейти в окно с чертежом развертки и выполнить вставку скопированной грани на поле чертежа.

12. Вернуться к модели призмы.

13. Выбрать следующую боковую грань и построить относительно ее еще одну смещенную плоскость: Операции – Плоскости – Смещенная плоскость – Расстояние 1 мм.

14. Завершить операцию, нажав на  в строке Свойства.

15. Указать в дереве построений эту плоскость и перейти в режим Эскиз .

16. Открыть инструментальную панель Геометрия , выбрать Непрерывную линию и построить основной линией контур грани. В этом режиме деталь можно уменьшать или увеличивать колесиком мыши, а для перемещения необходимо *дополнительно* нажимать клавишу Shift.

17. Обвести контур рамкой и скопировать его в буфер, указав точку привязки на этой грани (в любом месте).

18. Выйти из режима Эскиз (повторно нажать на кнопку .

19. Перейти в окно с чертежом развертки и выполнить вставку скопированной грани на поле чертежа.

20. Повторить приведенные выше операции столько раз, сколько граней на призме.

21. На чертеже должна сформироваться развертка, содержащая столько прямоугольников, сколько боковых граней в призме (рис. 9.14).

Линии, разделяющие внутренние сгибы развертки должны иметь специальную форму – штрихпунктирные с двумя точками, как показано на рис. 9.14.

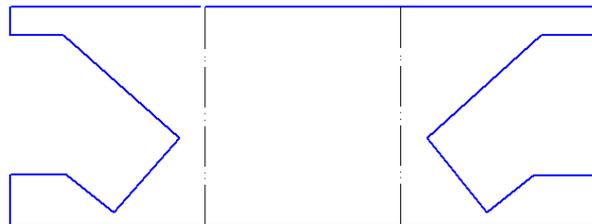


Рис. 9.14

В завершении необходимо обозначить точки на линии пересечения граней плоскостями и подписать вершины основания призмы.

Построение развертки боковой поверхности любой фигуры в системах КОМПАС-3D версий 15 и выше возможно с помощью команд библиотеки Машиностроение (Механика) – Оборудование – Развертки . Эта библиотека входит в отдельный пакет MCAD, устанавливаемый вместе с системой КОМПАС.

9.4. Построение модели пирамиды, усеченной плоскостями

На рис. 9.15 представлен чертеж-задание пирамиды, усеченной плоскостями.

Порядок построения модели пирамиды следующий.

1. Выбрать Файл – Создать – Деталь.

2. Открыть в дереве модели Начало координат и выбрать Плоскость ZX.

3. Создать эскиз на этой плоскости, для этого нажать кнопку , построить треугольник основания, вписанный в окружность диаметром 120 мм.

4. Выйти из эскиза .

5. Выделить этот эскиз в дереве построений, включить Выдавливание  и выдавить треугольник на высоту 120 мм. Направление Прямое. Расстояние 1: 120 мм. Угол внутрь: 14–15°. Угол может быть другой, надо следить за вершиной, чтобы получить одну точку (рис. 9.16).

6. В верхнем меню Ориентация выбрать Вид Спереди (нажать Установить и Выход).

7. В дереве модели выбрать плоскость XY.

8. Включить Эскиз  и на этой плоскости построить контур сечения пирамиды плоскостями (по заданным размерам). Контур строить Непрерывной линией. Линия контура должна быть замкнутой (рис. 9.17).

9. Выйти из эскиза .

10. Выбрать этот эскиз в дереве модели и указать операцию Вырезать выдавливанием .

11. Для выдавливания выбрать Два направления, расстояния примерно 30 мм. Завершить операцию, нажав  на строке Свойства.

12. Проверить соответствие видов: в меню Ориентация выбрать Вид Сверху (установить), Слева (установить).

13. Сохранить модель.

Теперь создадим чертеж построенной модели. Для этого следует выполнить следующие действия.

1. Выбрать в основном меню: Файл – Создать – Чертеж. Установить формат чертежа А3.

2. Выбрать Вставка – Вид – Вид с модели – Стандартные. В открывшемся окне выбрать файл модели пирамиды и открыть его.

3. Графический редактор КОМПАС-3D предложит стандартную схему построения чертежа из 3 видов: Спереди, Сверху и Слева. Изменять схему не нужно, надо только расширить расстояние между проекциями: в строке Свойства (в нижней части экрана) выбрать кнопку Схема и задать расстояния по горизонтали 50 мм, а по вертикали 25 мм.

4. Выбрать отрисовку невидимых линий: для этого на панели свойств открыть вкладку Линии и включить Невидимые. Завершить построение, нажав . Начертить оси.

5. Обозначить вершины пирамиды, точки на линии сечения на всех проекциях.

6. Заполнить основную надпись и сохранить чертеж.

7. Распечатать чертеж, используя масштаб 99 (режим Обрезать по размеру страницы).

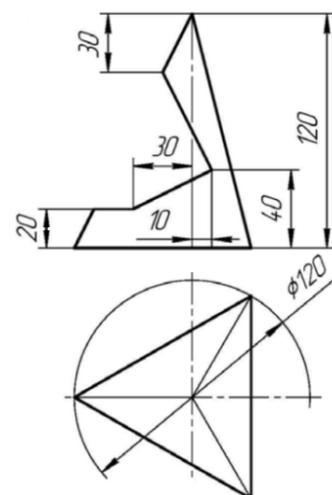


Рис. 9.15

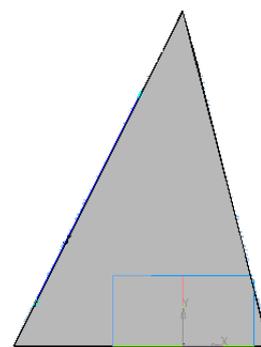


Рис. 9.16

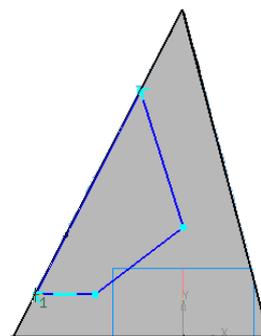


Рис. 9.17

9.5. Построение модели цилиндра, пересеченного плоскостями

На рис. 9.18 приведен чертеж-задание для построения модели цилиндра. Процедура построения модели цилиндра состоит из следующих этапов.

1. Выбрать в основном меню: Файл – Создать – Деталь.

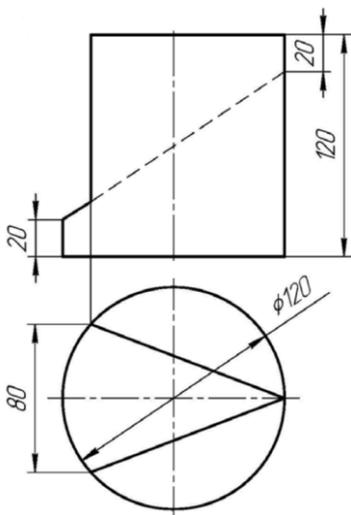


Рис. 9.18

2. Открыть в дереве модели Начало координат.
3. Выбрать плоскость ZX.
4. Перейти в режим Эскиз .
5. Построить окружность диаметром 120 мм. *Ориентацию не трогать и не менять!*
6. Выйти из режима Эскиз (нажать на кнопку .
7. В дереве модели указать этот эскиз, затем выбрать команду Редактирование детали  и Выдавливание .
8. В строке Свойства задать Направление Прямое и размеры цилиндра: Расстояние 1 (высота): 120 мм.
9. Завершить операцию, нажав на  в строке Свойства.
10. Указать команду Ориентация  **Ориентация** и установить Вид Спереди. Закрыть окно, нажав Выход.
11. В дереве модели выбрать плоскость XY.
12. Перейти в режим Эскиз .

13. Открыть инструментальную панель Геометрия , выбрать тип линии Непрерывные и построить на цилиндре контур сечения, соблюдая размеры, указанные в задании (рис. 9.19). В этом режиме деталь можно уменьшать или увеличивать колесиком мыши, а для перемещения *дополнительно* нажимать клавишу Shift. Контур обязательно должен быть замкнутым.

14. Выйти из режима Эскиз (нажать на знак .

15. На панели Редактирование детали выбрать команду Вырезать выдавливанием (кнопка ). В дереве модели указать последний эскиз.

16. В строке свойств указать Направление Два направления, Расстояние 1: 60 мм и Расстояние 2: 60 мм. Модель можно повернуть, рассматривая вырез со всех сторон.

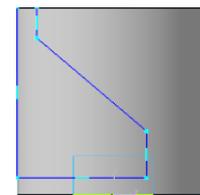


Рис. 9.19

17. Завершить операцию, нажав .

18. На цилиндре должен сформироваться вырез, соответствующий заданному контуру (рис. 9.20). Проверить правильность полученных видов, выбрав в команде Ориентация Вид Спереди (установить), Сверху (установить), Слева (установить). Выйти из команды (Выход) и сохранить модель.

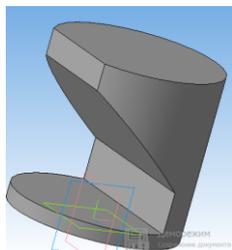


Рис. 9.20

После того как построена модель цилиндра, можно приступить к формированию чертежа, содержащего 3 стандартных вида объекта.

1. Выбрать в основном меню: Файл – Создать – Чертеж. Изменить формат чертежа с А4 на А3 с помощью менеджера документа .
2. Открыть окно Виды или выбрать в меню Вставка – Вид – Вид с модели – Стандартные.
3. В открывшемся окне выбрать файл с моделью цилиндра и открыть его.
4. В строке свойств выбрать схему видов и изменить расстояние между видами с 15 мм (по умолчанию) на 50 мм по горизонтали и 25 мм по вертикали.

5. В этой же строке свойств нажать кнопку Линии и включить Невидимые линии и Линии переходов.

6. Расставить виды на поле чертежа и нажать .

7. Доростить оси на каждом виде и обозначить точки на линиях пересечения на всех проекциях. Номер вида выбирается из строки Текущее состояние . Виды являются ассоциативно связанными и никакие изменения на видах не допускаются. Можно редактировать только модель.

9.6. Построение трехмерной модели конуса с горизонтальным и вертикальным отверстиями

Большинство реальных технических деталей имеет форму в виде взаимно пересекающихся геометрических тел – конических, призматических, цилиндрических и др. Построению таких тел посвящено много задач дисциплины «Инженерная геометрия и графика». Здесь рассмотрим один из способов построения подобных тел на примере модели усеченного конуса с двумя взаимно перпендикулярными сквозными отверстиями (рис. 9.21).

Процедура построения следующая.

1. Выбрать в основном меню: Файл – Создать – Деталь.
2. Открыть в дереве модели Начало координат и выбрать плоскость ZX.

3. Перейти в режим Эскиз .

4. Построить окружность диаметром 110 мм. *Ориентацию не трогать и не менять!*

5. Выйти из режима Эскиз (повторно нажать кнопку .

6. В дереве модели указать этот эскиз, выбрать команду Редактирование детали  и Выдавливание .

7. В строке Свойства задать Направление Прямое и размеры конуса: Расстояние 1 (высота): 120 мм, Уклон внутрь: 12°.

8. Завершить операцию, нажав на  в строке свойств.

9-1. Проверить полученное верхнее основание конуса (оно должно иметь диаметр 60 мм). Для этого построить смещенную плоскость относительно плоскости ZX на расстоянии 120 мм. На этой плоскости построить эскиз , содержащий окружность диаметром 60 мм.

9-2. Выйти из эскиза, нажав .

9-3. При необходимости изменить диаметр верхнего основания конуса, подвести курсор в дереве модели к ранее выполненной операции выдавливания – Операция выдавливания: 1, нажать правую кнопку мыши, выбрать в контекстном меню команду Редактировать и изменить угол выдавливания, чтобы диаметр основания соответствовал диаметру окружности на смещенной плоскости.

9-4. Завершить операцию, нажав на  в строке свойств.

10. Указать команду Ориентация  и установить Вид Спереди. Закрыть окно, нажав Выход.

11. В дереве модели выбрать плоскость XY.

12. Перейти в режим Эскиз (нажать кнопку .

13. Открыть инструментальную панель Геометрия , построить на этой плоскости окружность диаметром 70 мм (рис. 9.22).

14. Выйти из режима Эскиза (нажать кнопку .

15. На панели Редактирование детали выбрать Вырезать выдавливанием (кнопка .

16. В строке свойств указать Направление Два направления, Расстояние 1: 70 мм и Расстояние 2: 70 мм. Модель можно повернуть, наблюдая за линией пересечения.

17. Завершить операцию, нажав на  в строке свойств.

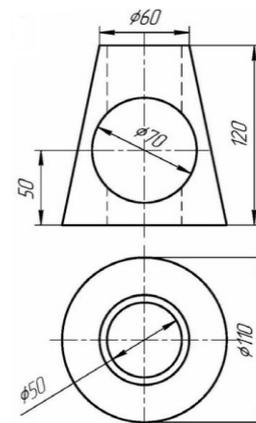


Рис. 9.21

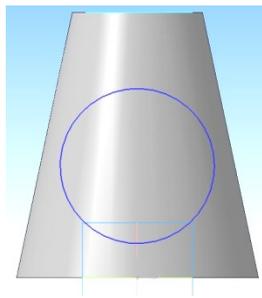


Рис. 9.22

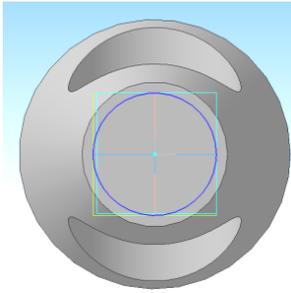


Рис. 9.23

18. На конусе образуется сквозное горизонтальное отверстие.

19. Осталось построить сквозное вертикальное отверстие. Для этого выбрать построенную ранее смещенную плоскость относительно основания на 120 мм. На этой плоскости в режиме эскиза построить окружность диаметром 50 мм (рис. 9.23).

20. Выйти из эскиза и вырезать выдавливанием  сквозное вертикальное отверстие в конусе.

21. Завершить операцию, нажав на  в строке свойств.

22. Проверить правильность полученных видов, выбрав команду Ориентация и Вид Спереди (установить), Сверху (установить), Слева (установить).

23. Выйти из команды (Выход) и сохранить модель.

Создание чертежа из модели конуса

1. Выбрать в основном меню: Файл – Создать – Чертеж.
2. Изменить формат чертежа с А4 на А3 с помощью менеджера документа.
3. Открыть окно Виды или выбрать в меню Вставка – Вид – Вид с модели – Стандартные.
4. В открывшемся окне выбрать файл с моделью конуса и открыть его.
5. В строке свойств выбрать Схему видов и изменить расстояние между видами с 15 мм (по умолчанию) на 50 мм по горизонтали и 25 мм по вертикали.
6. В этой же строке свойств нажать кнопку Линии и включить Невидимые линии и Линии переходов.
7. Расставить виды на поле чертежа и нажать .
8. Достроить оси на каждом виде и обозначить точки на линиях пересечения на всех проекциях. Виды являются ассоциативно связанными и никакие изменения на видах не допускаются. Можно редактировать только трехмерную модель.
9. Заполнить основную надпись.

Вопросы для контроля

1. Какую роль выполняет эскиз при построении трехмерных моделей?
2. На какой плоскости располагается эскиз?
3. Перечислите основные команды создания объемных моделей и их свойства.
4. Из каких геометрических элементов можно построить сферу? Какие операции используются для построения сферы?

ЛИТЕРАТУРА

1. Гордон, В. О. Курс начертательной геометрии: учеб. пособие / В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Огиевский. – 26-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2004. – 272 с.
2. Георгиевский, О. В. Основы начертательной геометрии: метод. пособие / О. В. Георгиевский. – М.: Стройиздат, 2002. – 96 с.
3. Михненко, Л. В. Основы начертательной геометрии: учеб. пособие / Л. В. Михненко. – М.: КолосС, 2004. – 112 с.
4. Гордон, В. О. Сборник задач по курсу начертательной геометрии: учеб. пособие / В. О. Гордон, Ю. Б. Иванов, Т. Е. Солнцева. М.: Высшая школа, 2002. – 320 с.
5. Жарков Н. И. Начертательная геометрия: учеб. пособие / Н. И. Жарков, А. Л. Калтыгин, Ю. Н. Мануков. – Минск, БГТУ, 2010. – 152 с.
6. Черчение и моделирование в системе КОМПАС: лабораторный практикум / А. Л. Калтыгин [и др.]: Минск, БГТУ, 2016. – 75 с.
7. Бочков, А. Л. Начертательная геометрия: электрон. учеб.-метод. комплекс / А. Л. Бочков, Л. А. Голдобина // CADInstructor [Электронный ресурс]. – 2011. – Режим доступа: <http://cadinstructor.org/ng/>. – Дата доступа: 25.10.2016.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛЫ	3
Лекция 1. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ. ОБРАЗОВАНИЕ ПРОЕКЦИОННОГО ЧЕРТЕЖА ТОЧКИ, ПРЯМОЙ, ПЛОСКОСТИ	4
1.1. Метод проекций	4
1.2. Центральное и параллельное проецирование	4
1.3. Свойства прямоугольного проецирования	5
1.4. Точка в системе двух и трех плоскостей проекций	6
1.5. Проекция отрезка прямой линии	9
1.6. Прямые общего и частного положения	9
1.7. Определение натуральной величины отрезка прямой и углов наклона прямой к плоскостям проекций	10
1.8. Относительное положение точки и прямой	11
1.9. Задание плоскости на чертеже	11
1.10. Плоскости общего и частного положения	12
1.11. Прямая и точка в плоскости	13
1.12. Прямые особого положения в плоскости	13
<i>Примеры решения задач</i>	14
<i>Вопросы для контроля</i>	14
Лекция 2. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ	15
2.1. Относительное положение двух прямых в пространстве	15
2.2. Параллельность прямой и плоскости	16
2.3. Параллельность двух плоскостей	17
2.4. Пересечение двух плоскостей	17
2.5. Пересечение прямой линии с плоскостью частного положения	19
2.6. Пересечение прямой с плоскостью общего положения	19
2.7. Перпендикулярность прямой и плоскости	20
2.8. Перпендикулярность двух прямых	21
2.9. Перпендикулярность двух плоскостей	22
<i>Примеры решения задач</i>	22
<i>Вопросы для контроля</i>	24
Лекция 3. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ	25
3.1. Способ замены плоскостей проекций	25
3.1.1. Преобразование прямой общего положения в положение прямой уровня	26
3.1.2. Преобразование прямой общего положения в проецирующую	26
3.1.3. Преобразование плоскости общего положения в проецирующее положение	27
3.1.4. Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня	27
3.2. Способ вращения	28
3.3. Плоскопараллельное перемещение отрезка	29
<i>Примеры решения задач</i>	30
<i>Вопросы для контроля</i>	31

Лекция 4. МНОГОГРАННИКИ	32
4.1. Точка и прямая линия на поверхности многогранника	32
4.2. Пересечение многогранников плоскостью	33
4.3. Развертка поверхности призмы	34
4.4. Пересечение пирамиды проецирующей плоскостью	35
4.5. Развертка поверхности пирамиды	36
<i>Примеры решения задач</i>	36
<i>Вопросы для контроля</i>	37
Лекция 5. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ	38
5.1. Построение точек, лежащих на поверхности вращения	39
5.2. Пересечение поверхностей вращения плоскостью	41
5.2.1. Пересечение цилиндра плоскостью	41
5.2.2. Развертка поверхности цилиндра	42
5.2.3. Пересечение конуса плоскостью	43
5.2.4. Построение развертки конуса	45
<i>Вопросы для контроля</i>	46
Лекция 6. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С МНОГОГРАННИКАМИ И ПОВЕРХНОСТЯМИ ВРАЩЕНИЯ	47
6.1. Частные случаи определения точек пересечения	47
6.2. Определение точек пересечения прямой с поверхностью	48
<i>Вопросы для контроля</i>	50
Лекция 7. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ	51
7.1. Построение линии пересечения многогранников	51
7.2. Построение линии пересечения поверхностей вращения с многогранниками	52
7.3. Построение линии пересечения поверхностей вращения	55
7.3.1. Способ вспомогательных секущих плоскостей	55
7.3.2. Способ вспомогательных сфер	57
7.4. Особые случаи пересечения	58
<i>Вопросы для контроля</i>	59
Лекция 8. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ	60
8.1. Теоретические основы построения аксонометрических проекций	60
8.2. Прямоугольная изометрическая проекция	61
8.3. Прямоугольная диметрическая проекция	63
8.4. Косоугольная фронтальная диметрия	63
<i>Примеры решения задач</i>	64
<i>Вопросы для контроля</i>	65
Лекция 9. ИНТЕРАКТИВНЫЕ ГРАФИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ. ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ	66
9.1. Этапы развития систем проектирования. 3D-моделирование	66
9.2. Основные команды построения трехмерных моделей	67
9.3. Построение модели призмы	68
9.4. Построение модели пирамиды, усеченной плоскостями	72
9.5. Построение модели цилиндра, пересеченного плоскостями	73
9.6. Построение трехмерной модели конуса с горизонтальным и вертикальным отверстиями	75
<i>Вопросы для контроля</i>	76
ЛИТЕРАТУРА	77

Учебное издание

Калтыгин Александр Львович
Красковский Станислав Владимирович
Ращупкин Сергей Вячеславович

**ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ГРАФИКА**

Тексты лекций

Редактор *Т. Е. Самсанович*
Компьютерная верстка *Е. В. Ильченко*
Корректор *Т. Е. Самсанович*

Издатель:

УО «Белорусский государственный технологический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/227 от 20.03.2014.

Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.