

УДК 621.391.26

А. А. Дятко, кандидат технических наук, доцент (БГТУ);

С. М. Костромицкий, доктор технических наук, профессор (КБ «Радар»);

П. Н. Шумский, кандидат технических наук, доцент (КБ «Радар»)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ, ОТРАЖЕННЫХ ОТ ОБЪЕМНО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ОТРАЖАТЕЛЕЙ

В работе рассмотрена математическая модель облака объемно-распределенных отражателей и получены алгоритмы задания его местоположения в пространстве в координатной системе радиолокационной станции. Разработан алгоритм определения принадлежности этому облаку выбранной точки пространства. Получены алгоритмы математического моделирования радиолокационных сигналов, отраженных от облака объемно-распределенных отражателей, и определены требования к их параметрам. Разработанные алгоритмы могут быть использованы при проектировании радиолокационных систем различного назначения на этапе имитационного моделирования их работы на ЭВМ.

The article describes a mathematical model of a cloud of volume-distributed reflectors and algorithms specifying its location in the coordinate system of radar stations. Developed an algorithm for determining whether this cloud of a selected point of space and algorithms for mathematical modeling of radar signals reflected from the cloud volume-distributed reflectors, established the requirements to their parameters. The developed algorithms can be used in designing radar systems for various applications during simulation of their work on a computer.

Введение. Радиолокационные сигналы, отраженные от наблюдаемых объектов, принимаются, как правило, на фоне различных помех [1]. Источником таких помех могут быть облака гидрометеоров и поверхность земли.

Для имитационного моделирования принятого антенной радиолокационной станции (РЛС) сигнала необходимо уметь получать временные реализации таких сигналов помех. При этом алгоритмы формирования временных реализаций помеховых сигналов должны быть достаточно быстрыми, чтобы обеспечить разумные временные затраты на их моделирование при помощи ЭВМ.

Данная работа посвящена вопросам разработки быстрых алгоритмов формирования сигналов, отраженных от облаков объемно-распределенных отражателей (ОРО), и реализации их в виде программного обеспечения для ЭВМ.

Основная часть. Рассмотрим форму и положение в пространстве облака ОРО.

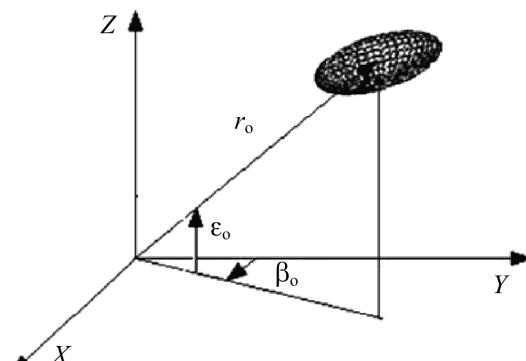
Будем представлять форму облака ОРО в виде эллипсоида вращения, уравнение которого в собственной системе координат (СК) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1)$$

Предусмотрим возможность изменения ориентации облака ОРО в собственной системе координат путем его последовательных поворотов вокруг оси X на угол φ_x , вокруг оси Y на угол φ_y и вокруг оси Z на угол φ_z . При этом ось, относительно которой выполняется поворот, должна быть направлена в сторону глаза наблюдателя. Угол вращения считается положитель-

ным при повороте против часовой стрелки и отрицательным при повороте по часовой стрелке.

Расположение облака ОРО в пространстве будем задавать в системе координат РЛС положением его центра, для которого определим дальность r_o , азимут β_o и угол места ε_o (рисунок). Систему координат РЛС будем считать правой, азимут отсчитывается от направления оси Y по часовой стрелке.



Расположение облака ОРО в пространстве

Таким образом, для задания ориентации и положения в пространстве облака ОРО необходимо определить следующие параметры:

- 1) a, b, c – геометрический размер облака;
- 2) $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ – углы для последовательного поворота вокруг соответствующих осей координат в собственной СК облака;
- 3) $r_o, \beta_o, \varepsilon_o$ – соответственно дальность, азимут и угол места центра облака в системе координат РЛС.

Идентификация элементов ОРО. При моделировании сигнала, принимаемого антенной

РЛС с некоторой точки пространства, необходимо уметь идентифицировать эту точку на предмет принадлежности ее тому или иному объекту, порождающему отраженный сигнал, либо определить, что в данной точке пространства отсутствует объект, способный порождать отраженный сигнал. В рассматриваемом случае важно идентифицировать точку пространства на принадлежность ее облаку ОРО. Рассмотрим алгоритм такой идентификации.

Пусть некоторая точка пространства в системе координат РЛС имеет сферические координаты $r_i, \beta_i, \varepsilon_i$, которым соответствуют декартовы координаты x_i, y_i, z_i . Декартовы координаты центра ОРО в СК РЛС обозначим через x_o, y_o, z_o .

Переход от сферических координат к декартовым выполняется по соотношениям

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varepsilon \sin \beta, \\ y &= r \cos \varepsilon \cos \beta, \\ z &= r \sin \varepsilon, \end{aligned} \quad (2)$$

где r, β, ε – соответственно дальность, азимут и угол места некоторой точки в сферической СК.

В собственной системе координат облака ОРО принадлежность точки пространства облаку определяется проверкой на истинность неравенства

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \quad (3)$$

выполнение которого говорит о том, что точка пространства с координатами x, y, z находится внутри облака. Отсюда следует, что для проверки точки пространства на принадлежность облаку ОРО необходимо совместить СК РЛС с собственной СК облака ОРО и воспользоваться неравенством (3). При этом соответствующим образом должны быть пересчитаны координаты точки x_i, y_i, z_i .

Воспользуемся аффинным преобразованием координат для перехода от декартовой СК РЛС к собственной СК облака ОРО [2].

Пусть

$$V_i = (x_i, y_i, z_i, 1)^T - \quad (4)$$

вектор координат точки пространства, определяемой на принадлежность облаку ОРО.

Совместим начало СК РЛС с центром облака ОРО. Далее последовательно выполняя повороты СК РЛС вокруг осей Z, Y и X соответственно на углы φ_z, φ_y и φ_x , получим координаты W_i тестируемой точки пространства в собственной СК облака ОРО:

$$W_i = M V_i,$$

где

$$M = R_X R_Y R_Z T, \quad (5)$$

а матрицы R_X, R_Y, R_Z и T представляют собой соответствующие матрицы аффинных преобразований координат.

Таким образом, получен вектор координат

$$W_i = (x'_i, y'_i, z'_i, 1)^T \quad (6)$$

тестируемой точки пространства в собственной СК облака ОРО.

Теперь можно воспользоваться неравенством (3) для определения принадлежности точки пространства облаку ОРО, используя при этом координаты вектора W :

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} \leq 1. \quad (7)$$

Модель сигнала, отраженного от облака ОРО. Для формирования модели сигнала, отраженного от облака ОРО, представим его в виде набора элементарных слоев по дальности протяженностью Δr . Обозначим расстояние до начала облака ОРО как R_0 , а его протяженность по дальности – ΔR . Протяженность фрагмента облака, который участвует в формировании отраженного сигнала, по азимуту и углу места определяется шириной диаграммы направленности (ДН) антенны соответственно по азимуту $\Delta\beta$ и углу места $\Delta\varepsilon$.

Будем полагать, что $\Delta r = \frac{c\Delta t}{2}$, где Δt – интервал дискретизации зондирующего сигнала во времени; c – скорость света.

Сигнал от совокупности отражателей, находящихся в разрешаемом объеме, ограниченном по углу места шириной диаграммы направленности антенны $\Delta\varepsilon$, по азимуту шириной ДН антенны $\Delta\beta$, и принадлежащих одному слою протяженностью Δr , можно представить в следующем виде:

$$s_i(t) = E_i u_i(t), \quad (8)$$

где

$$E_i = \sqrt{\frac{2P_0 G_1 G_2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r_i^4}} \sigma_i^{\Delta V}, \quad (9)$$

здесь P_0 – импульсная мощность зондирующего сигнала; $G_1(G_2)$ – коэффициент усиления передающей (приемной) антенны; λ – длина волны; r_i – наклонная дальность до центра разрешаемого объема; $\sigma_i^{\Delta V} = \alpha_V \Delta V_i$ – эффективная отражающая поверхность (ЭОП) элементарного объема облака ОРО; α_V – удельная эффективная отражающая поверхность (удельная ЭОП) объемно-распределенных отражателей; ΔV_i – величина элементарного объема, относящегося к i -му слою;

$$u_i(t) = U_L(t)e^{j\left[\omega_0(t-t_i)+4\pi\frac{v_h^i(t-t_i)}{\lambda}(t-t_i)+4\pi\frac{r_i}{\lambda}+\phi_i\right]}, \quad (10)$$

где $U_L(t) = U_L(t-t_i)$ – функция, описывающая комплексный закон модуляции пачки зондирующих импульсов;

$$U_L(t) = \sum_{l=1}^L U_0(t-(l-1)T_p), \quad (11)$$

где $U_0(t)$ – функция, описывающая закон модуляции одиночного радиоимпульса [2]; T_p – период повторения импульсов в пачке; L – число импульсов в пачке; $t_i = \frac{2r_i}{c}$ – задержка сигнала, отраженного от i -го слоя; ω_0 – частота принимаемого сигнала, при моделировании будем полагать $\omega_0 = 0$; ϕ_i – случайная начальная фаза.

Выражение

$$r_i = R_0 + (i-1)\Delta r + \frac{\Delta r}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

определяет дальность до центра i -го слоя, здесь

$$N = \frac{\Delta R}{\Delta r} \text{ – число элементарных слоев.}$$

Функция

$$v_h^i(t) = [v_0 + G_h r_i \sin \epsilon + v_i(t)] \cos \phi_v \cos \epsilon \quad (13)$$

описывает скорость ветра в элементарном слое, где v_0 – средняя скорость ветра на уровне РЛС; G_h – градиент скорости ветра по высоте, $v_i(t)$ – компонента, характеризующая медленные изменения скорости ветра; ϵ – угол места ДН антенны; ϕ_v – угол между осью ДН антенны и вектором скорости ветра.

Вектор скорости ветра определим как единичный вектор \vec{r}_v , параллельный земле и имеющий азимут β_v , а \vec{r}_d – единичный вектор, совпадающий с осью ДН антенны и направленный в сторону цели:

$$\begin{aligned} \vec{r}_v &= (\cos \beta_v, \sin \beta_v, 0), \\ \vec{r}_d &= (\cos \epsilon \cos \beta, \cos \epsilon \sin \beta, \sin \epsilon). \end{aligned}$$

Тогда

$$\cos \phi_v = \frac{\vec{r}_v \cdot \vec{r}_d}{|\vec{r}_v| |\vec{r}_d|} = \cos \epsilon \cos(\beta_v - \beta),$$

где ϵ, β – соответственно угол места и азимут оси ДН антенны.

Вычислим теперь величину элементарного объема ΔV_i , относящегося к i -му слою ОРО:

$$\Delta V_i = \int_{r_i}^{r_i + \Delta r} r^2 dr \int_{\epsilon - \frac{\Delta \epsilon}{2}}^{\epsilon + \frac{\Delta \epsilon}{2}} \cos \epsilon d\epsilon \int_{\beta - \frac{\Delta \beta}{2}}^{\beta + \frac{\Delta \beta}{2}} d\beta =$$

$$= \frac{2}{3} r_i^3 \left[\left(1 + \frac{\Delta r}{r_i} \right)^3 - 1 \right] \cos \epsilon \sin \left(\frac{\Delta \epsilon}{2} \right) \Delta \beta, \quad (14)$$

где $r_i = R_0 + i\Delta r, \quad i = 0, 1, 3, \dots, N$.

Поскольку $\Delta r \ll R_0$, то $\Delta r \ll r_i$ и $\Delta \epsilon$ мало, то выражение (14) можно упростить

$$\begin{aligned} \Delta V_i &\approx \frac{2}{3} r_i^3 \cdot 3 \frac{\Delta r}{r_i} \cos \epsilon \frac{\Delta \epsilon}{2} \Delta \beta = \\ &= (R_0 + i\Delta r)^2 \Delta r \Delta \epsilon \Delta \beta \cos \epsilon \approx \\ &\approx R_0^2 \left(1 + i \frac{2\Delta r}{R_0} \right) \Delta r \Delta \epsilon \Delta \beta \cos \epsilon. \end{aligned} \quad (15)$$

В силу того, что $\max\{i\Delta r\} = N\Delta r = \Delta R$ и обычно $\Delta R \ll R_0$, то

$$\Delta V_i = \Delta V \approx R_0^2 \Delta r \Delta \epsilon \Delta \beta \cdot \cos \epsilon. \quad (16)$$

Из (16) следует, что в рамках принятых допущений все элементарные объемы ΔV_i можно считать одинаковыми и равными ΔV . Отсюда следует, что и ЭОП элементарных объемов

$$\sigma_i^{\Delta V} = \alpha_V \Delta V_i = \alpha_V \Delta V = \sigma_0^{\Delta V} \quad (17)$$

имеют одинаковое значение $\sigma_0^{\Delta V}$.

Объем ОРО внутри ДН антенны можно приближенно найти по формуле

$$V \approx N \Delta V. \quad (18)$$

Далее можно упростить выражение (9), учитывая, что $G_1 = G_2 = G$. В результате получим

$$E_i = \frac{1}{4\pi} \frac{G\lambda}{r_i^2} \sqrt{\frac{P_0}{2\pi}} \sigma^{\Delta V}. \quad (19)$$

Флуктуации скорости ветра в (13) будем считать пренебрежимо малыми по сравнению со средней скоростью ветра v_0 и положим $v_i(t) = 0$. Тогда выражение (13) приобретает вид

$$v_h^i(t) = v_h^i = [v_0 + G_h r_i \sin \epsilon] \cos \phi_v \cos \epsilon. \quad (20)$$

С учетом (20) формулу (10) можно записать в виде

$$u_i(t) = U_L(t-t_i) e^{j\left[\omega_0(t-t_i)+\Omega_d^i(t-t_i)+4\pi\frac{r_i}{\lambda}+\phi_i\right]}, \quad (21)$$

где $\Omega_d^i = 4\pi \frac{v_h^i}{\lambda}$ – частота Доплера для i -го слоя ОРО.

В силу взаимных перемещений и изменений отражательных свойств отражателей внутри элементарного объема облака ОРО, а также в результате смены их состава за счет движения значение ЭОП не будет оставаться постоянным во времени. Будем моделировать поведение ЭОП элементарного объема медленным случайнym процессом:

$$\sigma_i^{\Delta V}(t) = \sigma_0^{\Delta V} [1 + \xi_i(t)]. \quad (22)$$

Заметим, что случайные процессы $\xi_i(t)$ являются безразмерными и независимыми.

Сформулируем требования, необходимые для физически правильной реализации рассматриваемых случайных процессов.

Будем полагать $\xi_i(t)$ – гауссовыми нормальными стационарными процессами с равными нулю средними значениями, т. е. $m_{\xi}^i = M[\xi_i(t)] = 0$. Поскольку ЭОП (22) представляет собой некоторую площадь и, следовательно, не может быть отрицательным, то для любого момента времени должно выполняться условие

$$\sigma_0^{\Delta V} [1 + \xi_i(t)] \geq 0, \quad (23)$$

откуда получим, что

$$\xi_i(t) \geq -1. \quad (24)$$

Потребуем, чтобы процессы $\xi_i(t)$ изменились в симметричных пределах относительно своего среднего значения. Это требование приводит к необходимости выполнения условия

$$\xi_i(t) \leq 1. \quad (25)$$

Объединив (24) и (25), получим, что процессы $\xi_i(t)$ должны удовлетворять условию

$$|\xi_i(t)| \leq 1. \quad (26)$$

С другой стороны, согласно правилу трех сигм: если случайная величина распределена по нормальному закону, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания с вероятностью 0,9973 не превосходит ее утроненного среднего квадратического отклонения, получим, что

$$|\xi_i(t)| \leq 3sko_{\xi_i}, \quad (27)$$

где sko_{ξ_i} – СКО процесса $\xi_i(t)$.

Из (26) и (27) следует условие для выбора sko_{ξ_i} :

$$sko_{\xi_i} \leq \frac{1}{3}. \quad (28)$$

Вычислим теперь дисперсию ЭОП:

$$\begin{aligned} D_{\sigma}^{\Delta V_i} &= D[\sigma_i^{\Delta V}(t)] = \\ &= D\left\{ \sigma_0^{\Delta V} [1 + \xi_i(t)] \right\} = \left(\sigma_0^{\Delta V} \right)^2 D_{\xi_i}. \end{aligned} \quad (29)$$

Переходя в (29) с СКО, получим, что

$$sko_{\sigma}^{\Delta V_i} = \sqrt{D_{\sigma}^{\Delta V_i}} = \sigma_0^{\Delta V} sko_{\xi_i}, \quad (30)$$

откуда находим

$$sko_{\xi_i} = \frac{sko_{\sigma}^{\Delta V_i}}{\sigma_0^{\Delta V}}. \quad (31)$$

Таким образом, СКО процесса $\xi_i(t)$ есть отношение СКО эффективной отражающей поверхности к среднему значению ЭОП. Это значение следует выбирать согласно (28). При реализации процесса $\xi_i(t)$ его значения, превышающие единицу, можно ограничить единичным уровнем.

Нормированную корреляционную функцию процессов $\xi_i(t)$ будем принимать экспоненциальной

$$\rho_{\sigma}(\tau) = e^{-\frac{|\tau|}{\tau_{\sigma}}} \quad (32)$$

или экспоненциально-параболической

$$\rho_{\sigma}(\tau) = \left(1 + 2 \frac{|\tau|}{\tau_{\sigma}} \right) e^{-2 \frac{|\tau|}{\tau_{\sigma}}}, \quad (33)$$

где τ_{σ} – время корреляции флуктуаций мешающих отражений от ОРО,

$$\tau_{\sigma} = \frac{1}{2\Delta f_{\sigma}}, \quad (34)$$

здесь Δf_{σ} – ширина спектра флуктуаций мешающих отражений от ОРО.

Подставив в выражение (19) для E_i значение (22) для $\sigma_i^{\Delta V}(t)$, получим

$$E_i(t) = E_i^0 \sqrt{1 + \xi_i(t)}, \quad (35)$$

где

$$E_i^0 = \frac{1}{4\pi} \frac{G\lambda}{r_i^2} \sqrt{\frac{P_0}{2\pi}} \sigma_0^{\Delta V}. \quad (36)$$

Таким образом, выражение (8) для отраженного сигнала от элементарного слоя облака ОРО приобретает вид

$$s_i(t) = E_i(t) u_i(t) = E_i^0 \sqrt{1 + \xi_i(t)} u_i(t). \quad (37)$$

Сигнал, отраженный от всех элементарных ОРО на участке протяженностью ΔR , можно представить следующим образом:

$$S(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t) = \sum_{i=1}^N E_i^0 \sqrt{1 + \xi_i(t)} u_i(t). \quad (38)$$

Для окончательного формирования модели сигнала, отраженного от облака ОРО, учтем, что процесс $\xi_i(t)$ является медленным и его изменениями за время длительности импульса можно пренебречь. Другими словами, можно считать, что флуктуации ЭОП оказывают действие на отраженный импульс в целом, т. е. флуктуации $\xi_i(t)$ учитываются один раз за период импульса, например при $t = t_k^i = t_r^i + kT_p$, $k = 0, 1, 2, \dots, L-1$, где t_r^i – задержка зондирующего импульса от i -го слоя.

Таким образом, значения функций $\xi_i(t)$ берутся только для моментов времени $t = t_k^i$ и остаются неизменными до момента времени t_{k+1}^i . Другими словами,

$$\xi_i(t_k^i) = \xi_i(t = t_r^i + kT_p) \quad (39)$$

при $t_r^i + kT_p \leq t < t_r^i + (k+1)T_p$.

С учетом последнего замечания выражение (38) можно записать в виде

$$S(t, k) = \sum_{i=1}^N s_i(t, k) = \sum_{i=1}^N E_i^0 \sqrt{1 + \xi_i(t_k^i)} u_i(t). \quad (40)$$

Рассмотрим ситуацию, когда флуктуации ЭОП элементарных объемов облака ОРО являются дружными, или синхронными. Это означает, что ЭОП облака, заключенного внутри ДН антенны, флуктуирует как единое целое. При таком подходе к флуктуациям ЭОП в выражениях (38) и (40) следует положить

$$\xi_i(t) = \xi(t) \text{ для } i = 1, 2, \dots, N.$$

Соответственно, (39) приобретает вид

$$\xi_i(t_k) = \xi_i(t = t_k + kT_p) \quad (41)$$

при $t_r + kT_p \leq t < t_r + (k+1)T_p$, где t_r – задержка зондирующего импульса от одного слоя.

В результате получим

$$S(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t) = \sqrt{1 + \xi(t)} \sum_{i=1}^N E_i^0 u_i(t), \quad (42)$$

$$S(t, k) = \sum_{i=1}^N s_i(t, k) = \sqrt{1 + \xi(t_k)} \sum_{i=1}^N E_i^0 u_i(t). \quad (43)$$

Рассмотрим вопрос о моделировании случайной фазы ϕ_i из (10) при переходе от одного элементарного слоя облака ОРО к другому. Будем полагать, что эти изменения происходят в диапазоне $[-\pi, \pi]$. Значение ϕ_i будем представлять выборкой с интервалом T_p из гауссового случайного процесса с математическим ожиданием $m_{\phi_i} = 0$ и среднеквадратичными значениями sko_{ϕ_i} , которые примем одинаковыми, т. е. $sko_{\phi_i} = sko_{\phi}$. Положим, что

$$sko_{\phi} = \sqrt{D_{\phi}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \text{ что соответствует СКО фазы,}$$

равномерно распределенной на отрезке $[-\pi, \pi]$. Нормированную корреляционную функцию процесса примем экспоненциальной:

$$\rho_{\phi}(\tau) = e^{-\frac{|\tau|}{\tau_{\phi}}}. \quad (44)$$

Заключение. Рассмотренные в работе математические модели облака объемно-распределенных отражателей позволяют реализовать на ЭВМ имитационное моделирование временных реализаций радиолокационных сигналов, отраженных от пространственных образований, как в виде облаков гидрометеоров, так и искусственно созданных облаков отражателей. Предложенные алгоритмы позволяют выполнить тестирование работоспособности радиолокационных комплексов различного назначения на ЭВМ уже на этапе их разработки, не прибегая к натурным испытаниям.

Литература

1. Сколник, М. Справочник по радиолокации: в 3 т. / М. Сколник; пер. с англ.; под ред. К. Н. Трофимова. – М.: Сов. радио, 1976. – Т. 1. – 456 с.
2. Охрименко, А. Е. Основы радиолокации и радиоэлектронная борьба / А. Е. Охрименко. – М.: Изд-во МО СССР, 1983. – 456 с.

Поступила 02.03.2011