

УДК 621.319

Н. М. Богослав, ассистент (БГТУ); **Д. А. Гринюк**, кандидат технических наук, доцент (БГТУ);
И. О. Оробей, кандидат технических наук, доцент (БГТУ)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА СМАЧИВАНИЯ ПРИ РАДИАЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

Статья посвящена вопросам моделирования процессов смачивания, которые широко распространены в природе. Для оптимального управления такими процессами необходимо получение законов, описывающих явление смачивания. В работе представлено устройство, которое позволяет по динамике изменения емкости конденсатора определять время капиллярного впитывания тестовой бумагой. Для интерпретации показаний данного прибора необходима математическая модель, которая отображает зависимость изменения площади поверхности смоченной бумаги от времени. При разработке модели было использовано упрощенное представление о построении порового пространства бумаги, а также принято условие о квазистационарном течении жидкости. Особенностью данной модели является то, что рассматривается радиальное движение жидкости по поверхности материала.

Article is devoted questions of modeling of processes of the wetting, which widespread in the nature. For optimum control of such processes it is necessary reception the laws describing the phenomenon of wetting. In article the device which allows to define on increase of capacity of the condenser time of capillary absorption by a test paper is presented. The mathematical model, which displays dependence of change of the area of a surface of the moistened paper on time, is necessary for interpretation of indications of the given device. By model working out the simplified representation about construction pores space of paper and as the condition about a quasistationary current of a liquid is accepted has been used. Feature of the given model is that radial movement of a liquid on a material surface is considered.

Введение. На современном этапе развития техники и технологий все большее значение приобретает исследование процессов, протекающих на границе раздела «твердое тело – жидкость». Среди них важная роль принадлежит явлениям смачивания и растекания на поверхности твердого тела. Смачивание и растекание являются начальными и существенными стадиями различных технологических процессов. Разработка математических моделей данных систем открывает новые возможности управления этими процессами [1, 2].

Другим аспектом применения математических моделей впитывания является оценка физико-химических свойств среды, которая пропитывается или которой пропитывают. Дисперсные среды имеют различную геометрию. При движении жидкости в системе капилляров могут доминировать различные физические явления, которые определяют параметры распространения фронта. По этой причине не ослабевает внимание к теоретическому и практическому исследованию динамики впитывания.

Первое решение по динамике капиллярного впитывания получено Уошбурном в 20-х гг. прошлого столетия [3] для распространения фронта в одиночном капилляре. С тех пор было несколько попыток уточнения результатов этой работы путем учета какого-либо сопутствующего явления. Отдельно следует упомянуть работу Дерягина [4], в которой было получено решение для системы капилляров при однонаправленном движении жидкости.

Для исследования физико-химических процессов при пропитке фильтровальной бумаги разработано устройство, структурная схема которого приведена на рис. 1 [5].

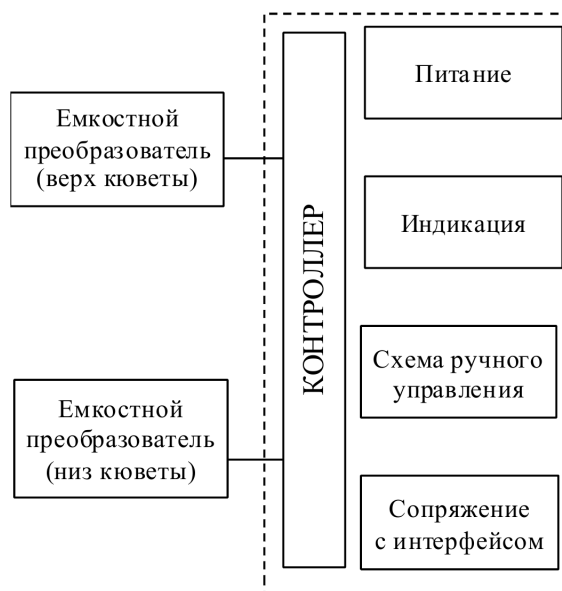


Рис. 1. Функциональные блоки преобразователя

Для использования результатов наблюдения за распространением фронта в прикладных задачах необходимо получить связь между геометрическими параметрами устройства, физическими характеристиками среды и параметрами движения математических зависимостей. В разработанном устройстве движение жидкости

происходит в радиальном направлении, что не учитывается ни в одной из известных моделей. Экспериментальные данные указывают, что при круговом растекании наблюдается иной характер движения [1].

Основная часть. Движущие силы определяются теми составляющими свободной энергии системы, которые уменьшаются при смачивании. Во всех случаях обязательно уменьшается свободная поверхностная энергия. В ряде случаев значительный вклад в создание движущей силы растекания вносят и другие факторы – уменьшение потенциальной энергии капли при понижении ее центра тяжести, изменение поверхностных натяжений вследствие химических и физико-химических взаимодействий между веществами, которые участвуют в смачивании, и т. д.

В зависимости от природы движущих сил различают неравновесное и равновесное (квазистатическое) растекание [1].

При неравновесном растекании все три поверхностных натяжения на границах фаз не изменяются во время смачивания. Движущая сила определяется в основном уменьшением свободной поверхностной энергии системы при изменении площадей контакта между фазами. Краевые углы в каждый момент времени отличны от равновесного.

При равновесном (квазистатическом) растекании хотя бы одно из поверхностных натяжений не остается постоянным, а изменяется в результате какого-либо физико-химического процесса (адсорбции, растворения, химической реакции и т. д.). Если эти изменения происходят медленно, краевые углы в каждый данный момент времени будут квазиравновесными.

Сопrotивление процессу растекания можно разделить на две части: сопротивление, которое сосредоточено непосредственно возле линии смачивания (кинетическое сопротивление), и сопротивление в объеме растекающейся жидкости.

Режим растекания, скорость которого лимитируется сопротивлением возле линии смачивания, называется кинетическим. Кинетический режим реализуется на начальной стадии растекания при малом расстоянии. По мере увеличения смоченной поверхности возрастают силы сопротивления в объеме жидкости. Поэтому на более поздней стадии растекание обычно происходит в гидродинамическом режиме. В конце кинетического режима динамические краевые углы изменяются сравнительно мало, вместе с тем значительно уменьшается скорость перемещения линии смачивания.

Инерционный режим растекания наступает после кинетического режима, когда сопротивление растеканию определяется в основном силами инерции, действующими в объеме жидко-

сти. Инерционный режим представляет одну из форм гидродинамического режима растекания.

Вязкий режим представляет вторую форму гидродинамического режима растекания, которая сменяет инерционный режим. Основная сила сопротивления при растекании в этом режиме – сила вязкого (внутреннего) трения в объеме жидкости. Растекание в вязком режиме может происходить как при ограниченном, так и при полном смачивании. При растекании маловязких жидкостей закономерности вязкого режима проявляются наиболее отчетливо при полном смачивании, когда капля растекается по твердой поверхности в виде тонкой пленки, и смоченная площадь значительно превышает начальную поверхность капли.

Предложенная структура измерительного прибора предполагает радиальное движение жидкости под действием силы тяжести столба жидкости и сил поверхностного натяжения. Бумага, которая располагается между двумя пластинами, имеет толщину h с основным эффективным размером капилляра r . Пусть согласно пористости Π , на l м длины помещается n капилляров радиусом r .

Вклад силы поверхностного натяжения одного капилляра имеет следующий вид [5]:

$$f_{1,r} = 2\pi r(\sigma_{12} - \sigma_{13}), \quad (1)$$

где σ_{12} , σ_{13} – межфазное натяжение «твердое тело – газ» и «твердое тело – жидкость» соответственно. Эта сила зависит от значения координаты x и определяется количеством капилляров, приходящимся на периметр текущего пространства фронта, т. е.

$$f_1 = 2\pi r(\sigma_{12} - \sigma_{13})n, \quad (2)$$

где n – количество капилляров по фронту распространения жидкости. n через величину пористости материала Π выражается в виде

$$\Pi = \frac{V_{n,\Pi}}{V_0},$$

где $V_{n,\Pi} = nV_n = n\pi r^2 x_0$ – объем порового пространства по фронту распространения жидкости; x_0 – длина поры. $V_0 = \pi(x + R_0)^2 h$ – объем образца, смоченного жидкостью. Тогда

$$\Pi = \frac{n\pi r^2 x_0}{\pi(x + R_0)^2 h} = \frac{nr^2 x_0}{(x + R_0)^2 h}.$$

Исходя из этого параметр n рассчитывается по формуле

$$n = \frac{\Pi(x + R_0)^2 h}{r^2 x_0}. \quad (3)$$

Подставив (3) в (2), получим

$$f_1 = 2\pi r(\sigma_{12} - \sigma_{13}) \frac{\Pi(x + R_0)^2 h}{r^2 x_0} = \frac{2\pi\Pi(\sigma_{12} - \sigma_{13})h}{rx_0} (x + R_0)^2 = A(x + R_0)^2, \quad (4)$$

где

$$A = \frac{2\pi\Pi(\sigma_{12} - \sigma_{13})h}{rx_0} -$$

коэффициент, который определяется параметрами бумаги (толщиной, пористостью и размерами пор), а также коэффициентами межфазного натяжения «твердое тело – газ» и «твердое тело – жидкость».

Действие силы тяжести будет определять давление жидкости ρgz в центральном цилиндре, где ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения. Это давление будет действовать на кольцо радиусом R_0 , высотой h , которое будет состоять из количества капилляров (рис. 2):

$$n_1 = \frac{R_0^2 \Pi h}{r^2 x_0}.$$

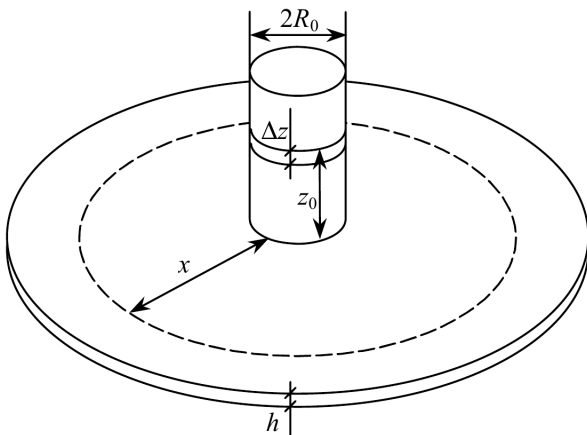


Рис. 2. Геометрические параметры измерительного преобразователя

Суммарная площадь этих капилляров вычисляется из выражения

$$S = n_1 \pi r^2 = \frac{R_0^2 \Pi h}{r^2 x_0} \pi r^2 = \frac{\pi R_0^2 \Pi h}{x_0}.$$

Тогда вклад силы от столба жидкости будет

$$f_2 = PS = \frac{\rho gz \pi R_0^2 \Pi h}{x_0}. \quad (5)$$

Найдем связь между z и x . При возникновении фронта на координате x высота уменьшается на Δz . Исходя из закона сохранения массы, можно записать:

$$\pi(x + R_0)^2 h \Pi = \pi R_0^2 \Delta z, \quad (6)$$

откуда

$$\Delta z = \frac{h \Pi (x + R_0)^2}{R_0^2}. \quad (7)$$

Тогда величину z можно представить в виде

$$z = z_0 - \Delta z = z_0 - \frac{h \Pi (x + R_0)^2}{R_0^2}, \quad (8)$$

где z_0 – начальное значение уровня.

Окончательно выражение для действия силы тяжести примет вид

$$f_2 = PS = \rho g \left(z_0 - \frac{(x + R_0)^2}{R_0^2} h \Pi \right) \frac{\pi R_0^2 \Pi h}{x_0} = C_1 - C_2 (x + R_0)^2, \quad (9)$$

где

$$C_1 = \frac{\rho g \pi R_0^2 \Pi h z_0}{x_0}, \quad C_2 = \frac{\pi \Pi^2 g \rho h^2}{x_0}.$$

При расчете динамики впитывания для учета влияния движения жидкости в капиллярах принимают условие о квазистационарном течении (т. е. для больших времен t) и пользуются формулой Пуазейля [6]:

$$f_3 = -8\pi \eta x \dot{x}. \quad (10)$$

Используем следующую систему построения капилляров в бумаге, которая приведена на рис. 3.

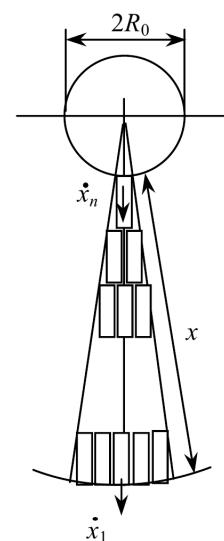


Рис. 3. Принятая система построения капилляров при радиальном распространении жидкости

Отдельные капилляры одинаковы, имеют длину x_0 и сечение S_r [7]. При данном значении x помещается $n_2 = x/x_0$ рядов капилляров. В прифронтовом ряде содержится также n_2 капилляров. Исходя из закона сохранения массы

$$n_2 S_r \dot{x}_1 = S_r \dot{x}_n,$$

скорость жидкости \dot{x}_1 в n_2 раз меньше скорости в начальном капилляре \dot{x}_n . В то же время, исходя из формулы Пуазейля для одиночного капилляра

$$f_{3,r} = -8\pi\eta x_0 \dot{x}. \quad (11)$$

При таком соотношении скоростей вклад начального капилляра будет равен сумме вкладов фронтальных капилляров:

$$f_{3,r,n} = -8\pi\eta x_0 \dot{x}_n = -8\pi\eta x_0 n_2 \dot{x}, \quad (12)$$

$$f_{3,r,1} = \sum_n -8\pi\eta x_0 \dot{x} = -8\pi\eta x_0 n_2 \dot{x}. \quad (13)$$

Просуммировав вклад каждого ряда в силу вязкого течения, получим

$$f_{3,r} = -8\pi\eta x \dot{x}. \quad (14)$$

Сила вязкого течения для всего круга определяется количеством капилляров, непосредственно связанных с вертикальной емкостью, т. е. n_3 . Тогда для силы вязкого течения получим

$$f_3 = n_3 f_{3,r} = -8\pi\eta x \dot{x} \frac{2hR_0\Pi}{r^2} = -Dx\dot{x}, \quad (15)$$

где

$$D = \frac{16\pi\eta h R_0 \Pi}{r^2}.$$

Равнодействующая трех сил находится по формуле

$$f = f_1 + f_2 + f_3 = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \frac{dm}{dt}\dot{x} + m\ddot{x}. \quad (16)$$

Величина m будет определяться количеством жидкости в капиллярах:

$$\begin{aligned} m &= \rho h S = \rho h \pi ((R_0 + x)^2 - R_0^2) \Pi = \\ &= F_1 (R_0 + x)^2 - F_2, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$F_1 = \rho h \pi, \quad F_2 = \rho h \pi R_0^2.$$

Тогда

$$\frac{dm}{dt} = 2F_1 (R_0 + x) \dot{x}. \quad (18)$$

Подставив (2), (9), (15), (17), (18) в (16), получим

$$\begin{aligned} &A(x + R_0)^2 + C_1 - C_2(x + R_0)^2 + Dx\dot{x} = \\ &= 2F_1(R_0 + x)\dot{x} + (F_1(R_0 + x)^2 - F)\dot{x}, \\ &(F_1(R_0 + x)^2 - F)\dot{x} + 2F_1(R_0 + x)\dot{x}^2 - Dx\dot{x} - \\ &- 2(A - C_2)R_0x - (A - C_2)x^2 - K = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$K = ((A - C_2)R_0^2 - C_1).$$

Решение данного нелинейного дифференциального уравнения позволяет получить зависимость фронта распространения смоченной поверхности бумаги от времени.

Заключение. Для разработанного устройства измерения времени капиллярного впитывания тестовой бумагой получено дифференциальное уравнение, которое учитывает основные сопутствующие физические явления. При разработке модели использовано упрощенное представление о построении порового пространства бумаги как о совокупности прямых цилиндрических и параллельных капилляров постоянного радиуса с одинаковой толщиной стенок. Кроме того, принято условие о квазистационарном течении жидкости. Полученное уравнение отличается от известных для одиночных капилляров. Уравнение имеет нелинейный характер и не решается аналитически. Численное решение удовлетворительно описывает характер изменения радиуса растекания, который представлен в литературе [1]. Несовпадение в основном наблюдается на начальном этапе движения фронта.

Литература

1. Сумм, Б. Д. Физико-химические основы смачивания и растекания / Б. Д. Сумм, Ю. В. Горюнов. – М.: Химия, 1976. – 232 с.
2. Быховский, А. И. Растекание / А. И. Быховский. – Киев: Наукова думка, 1983. – 192 с.
3. Washburn, E. W. The dynamics of capillary flow / E. W. Washburn. – Phys. Rev. – 1921. – № 17. – P. 273–283.
4. Дерягин, Б. В. Скольжение жидкостей в капиллярах / Б. В. Дерягин, Н. Н. Федякин // Докл. АН СССР. – 1968. – № 6. – С. 1300–1302.
5. Гринюк, Д. А. Устройство непрерывного измерения процесса смачивания / Д. А. Гринюк, И. О. Оробей, Н. М. Богослав // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. – 2010. – Вып. XVIII. – С. 108–112.
6. Аксельруд, Г. А. Введение в капиллярно-химическую технологию / Г. А. Аксельруд, М. А. Альтшулер. – М.: Химия, 1983. – 264 с.
7. Макрокинетика процессов в пористых средах / Ю. А. Чизмаджев [и др.]. – М.: Наука, 1971. – 364 с.

Поступила 01.03.2011