ФИЗИКА

УДК 539.12

Д. В. Кленицкий, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики (БГТУ)

СКОРОСТЬ ЗВУКА В РАВНОВЕСНОМ АДРОННОМ ГАЗЕ

Исследуется зависимость скорости звука от температуры в идеальном ультрарелятивистском адронном газе, принимая во внимание спектр масс адронов с плотностью состояний $\rho(m) \sim m^3$. Полученные результаты сравниваются со скоростью звука в газе π-мезонов. При низких температурах нет различия в скорости звука в этих газах. При высоких температурах, близких к критической T_c, когда вклад состояний с большой массой в плотность энергии становится определяющим, скорость звука в системе уменьшается и зависит от верхнего предела на значение массы адронов в спектре.

The dependence of speed of sound on temperature in ideal ultrarelativistic hadron gas is investigated, by taking into account the contribution of the massive states with the help of the hadron spectrum $\rho(m) \sim m^3$. The received results are compared to the speed of sound of pion gas. There is no difference in speed of a sound in these systems at low temperatures. At higher temperature close to critical T_c, when the contribution of massive states to density of energy becomes dominant, the speed of sound decreases and depends on the top limit on hadron mass in spectrum.

Введение. Равновесный адронный газ может быть создан в результате столкновения тяжелых ионов при высоких энергиях. Реально взаимодействующий газ адронов может быть хорошо приближен невзаимодействующим газом, в котором наряду со стабильными частицами учитываются резонансы, возбужденные состояния сильно взаимодействующих частиц [1]. При критической температуре $T_c \approx 180$ МэВ такой газ будет переходить в кварк-глюонную плазму. Цель данной работы заключается в вычислении скорости звука c_s в многокомпонентном идеальном адронном газе и исследовании ее температурной зависимости. По определению [2]

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon}\right)_V = \frac{s(T)}{C_V(T)}, \qquad (1)$$

где P – давление системы; ε – плотность энергии; $s(T)$ – плотность энтропии; $C_V(T)$ – теплоемкость при постоянном объеме

$$s(T) = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V, \quad C_V(T) = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_V. \qquad (2)$$

Мы используем систему единиц, в которой $c = \hbar = k = 1$, c – скорость света в вакууме; $\hbar$ – постоянная Планка; k – постоянная Больцмана.

Согласно (1), скорость звука определяет уравнение состояния системы, которое представляет собой функциональную зависимость давления от плотности энергии $P(\varepsilon)$. Хорошо известно уравнение состояния для идеального ультрарелятивистского газа, в котором пренебрегают массой частиц $P = \varepsilon / 3$ и $c_s^2 = 1/3$. Скорость звука играет важную роль в гидродинамической эволюции системы, а также рассматривается как чувствительный индикатор критического поведения системы.

Основная часть. Для идеального газа, находящегося в объеме V и состоящего из одинаковых частиц массой m, статистическая сумма системы $Z(T, V)$ определяется следующим выражением:

$$\ln Z(T,\ V) = \frac{gV}{(2\pi)^3}\int \exp\left\{-\frac{\sqrt{p^2+m^2}}{T}\right\} d^3\vec{p}, \qquad (3)$$

где g – число состояний, обладающих данной массой.

Интегрирование по импульсу в (3) приводится к виду

$$\ln Z(T,\ V) = g\frac{VTm^2}{2\pi^2} K_2\left(\frac{m}{T}\right), \qquad (4)$$

где $K_2(x)$ – модифицированная функция Бесселя второго порядка.

Если газ состоит из частиц различной массы, то статистическая сумма системы будет равна произведению статистических сумм отдельных частиц, так что

$$\ln Z(T,\ V) = \sum_i g_i \frac{VTm_i^2}{2\pi^2} K_2\left(\frac{m_i}{T}\right). \qquad (5)$$

Спектр адронов представляет практически непрерывный набор состояний. Для его характеристики вводят спектр масс $\rho(m)$, так что $\rho(m)dm$ определяет число состояний адронов в интервале $[m,\ m + dm]$. Заменяя в сумме (5) $g_i \to \rho(m)dm$ и переходя от суммирования к интегрированию по массе, найдем

$$\ln Z(T,\ V) = \frac{VT}{2\pi^2} \int_0^\infty m^2 \rho(m) K_2\left(\frac{m}{T}\right) dm. \qquad (6)$$

Мы используем параметризацию для спектра масс адронов $\rho(m)$, которая хорошо описывает спектр мезонов в интервале $0 < m < 2$ ГэВ [3]:

$$\rho(m) = 3\delta(m - m_\pi) + Cm^3 \theta(m - m_1)\theta(M - m), \qquad (7)$$

где первое слагаемое учитывает три зарядовых состояния π-мезона массой $m_\pi = 0{,}14$ ГэВ, $C = 90$ ГэВ$^{-4}$ и θ-функции во втором слагаемом учитывают, что оно отлично от нуля в интервале $m_1 < m < M$, здесь $m_1 = 0{,}5$ ГэВ и $M = 2$ ГэВ.

С учетом (7) логарифм статистической суммы (6) примет вид

$$\ln Z(T,\ V) = \ln Z_\pi(T,\ V) + \frac{VTC}{2\pi^2} \int_{m_1}^{M} m^5 K_2\left(\frac{m}{T}\right) dm, \qquad (8)$$

где первое слагаемое учитывает вклад π-мезонов в статистическую сумму:

$$\ln Z_\pi(T,\ V) = 3\frac{VTm_\pi^2}{2\pi^2} K_2\left(\frac{m_\pi}{T}\right). \qquad (9)$$

Используя (8), (9), находим давление, плотность энергии и плотность энтропии системы:

$$P(T) = T\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_T = P_0(T) + \Delta P, \qquad (10)$$

$$\varepsilon(T) = \frac{T^2}{V}\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V = \varepsilon_0(T) + \Delta\varepsilon, \qquad (11)$$

$$s(T) = \frac{\varepsilon(T) + P(T)}{T} = s_0(T) + \Delta s, \qquad (12)$$

где P_0, ε_0, s_0 – давление, плотность энергии и плотность энтропии газа π-мезонов соответственно; ΔP, $\Delta\varepsilon$, Δs обусловлены спектром адронов в интервале масс от $m_1 = 0{,}5$ ГэВ до $M = 2$ ГэВ:

$$P_0(T) = \frac{3m_\pi^2 T^2}{2\pi^2} K_2\left(\frac{m_\pi}{T}\right), \qquad (13)$$

$$\varepsilon_0(T) = \frac{3m_\pi^2 T^2}{2\pi^2}\left(3K_2\left(\frac{m_\pi}{T}\right) + \frac{m_\pi}{T} K_1\left(\frac{m_\pi}{T}\right)\right), \qquad (14)$$

$$s_0(T) = \frac{3m_\pi^2 T}{2\pi^2}\left(4K_2\left(\frac{m_\pi}{T}\right) + \frac{m_\pi}{T} K_1\left(\frac{m_\pi}{T}\right)\right), \qquad (15)$$

$$\Delta P = \frac{CT^2}{2\pi^2} \int_{m_1}^{M} m^5 K_2\left(\frac{m}{T}\right) dm, \qquad (16)$$

$$\Delta\varepsilon = \frac{CT^2}{2\pi^2} \int_{m_1}^{M} m^5 \left[3K_2\left(\frac{m}{T}\right) + \frac{m}{T} K_1\left(\frac{m}{T}\right)\right] dm, \qquad (17)$$

$$\Delta s = \frac{CT}{2\pi^2} \int_{m_1}^{M} m^5 \left[4K_2\left(\frac{m}{T}\right) + \frac{m}{T} K_1\left(\frac{m}{T}\right)\right] dm. \qquad (18)$$

Здесь $K_1(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого порядка.

Давление смеси (10) идеальных газов равно сумме их парциальных давлений, а плотности энергии (11) и энтропии (12) равны сумме этих величин для компонентов смеси. Вклад различных компонент смеси в результирующее давление, плотности энергии и энтропии зависит от соотношения массы частиц компоненты и температуры. На рис. 1 показана зависимость плотности энергии от температуры адронного газа, вычисленная по формулам (11), (14), (17). Она сравнивается с плотностью энергии газа π-мезонов (14). Видно, что при температуре $T \approx 0{,}6T_c$ начинает проявлять себя адронный спектр, так что $\varepsilon(T)$ увеличивается по отношению к плотности энергии $\varepsilon_0(T)$ для газа π-мезонов. Вблизи критической температуры T_c спектр адронов дает доминирующую часть плотности энергии.

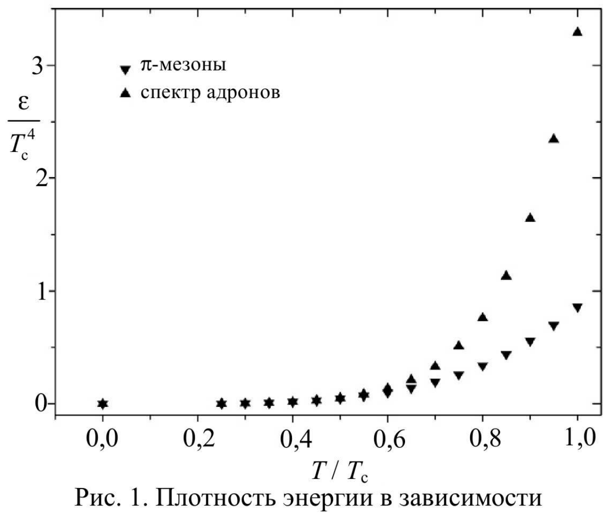

Рис. 1. Плотность энергии в зависимости от температуры для идеального газа π-мезонов и спектра адронов

Из уравнений (2), (11), (14), (17) найдем теплоемкости газа π-мезонов C_{0V} и газа, содержащего спектр адронов C_V:

$$C_{0V}(T) = 3s_0(T) + \frac{3m_\pi^4}{2\pi^2 T} K_2\left(\frac{m_\pi}{T}\right), \qquad (19)$$

$$C_V(T) = 3s(T) + \frac{1}{2\pi^2 T}\left[3m_\pi^4 K_2\left(\frac{m_\pi}{T}\right) + \right.$$

$$\left. + \, C\int_{m_1}^{M} m^7 K_2\left(\frac{m}{T}\right) dm\right]. \qquad (20)$$

Подставив (15), (19) и (12), (20) в определение (1), получим соотношение для скорости звука газа π-мезонов и газа, содержащего спектр адронов:

$$\frac{1}{c_s^2} = 3 + D(T), \qquad (21)$$

где функция $D(T)$ определяет различие между данной скоростью звука и скоростью звука релятивистского идеального газа, в котором пренебрегают массой частиц $c_s^2 = 1/3$.

Для газа π-мезонов

$$D(T) = \frac{m_\pi^2 K_2(m_\pi / T)}{4T^2 K_2(m_\pi / T) + m_\pi T K_1(m_\pi / T)} \qquad (22)$$

и для газа, содержащего спектр адронов

$$D(T) = \frac{F(T)}{2\pi^2 T s_0 + G(T)}, \qquad (23)$$

где

$$F(T) = 3m_\pi^4 K_2\left(\frac{m_\pi}{T}\right) + \int_{m_1}^{M} K_2\left(\frac{m}{T}\right) m^7 dm, \qquad (24)$$

$$G(T) = C\int_{m_1}^{M}\left[4T^2 K_2\left(\frac{m}{T}\right) + mTK_1\left(\frac{m}{T}\right)\right] m^5 dm. \qquad (25)$$

На рис. 2 представлена зависимость c_s^2 от температуры для газа π-мезонов и газа, содержащего спектр адронов с различными значениями верхнего предела массы M адронов в спектре.

Для газа π-мезонов c_s^2 быстро увеличивается с возрастанием температуры и при температурах, близкиких к критической T_c, насыщается к значению $c_s^2 \approx 1/3$. Для газа, содержащего спектр адронов, скорость звука до температуры $T \approx 0{,}4T_c$ совпадает со скоростью звука газа π-мезонов, а затем уменьшается, выходя на постоянное значение, зависящее от верхнего предела массы M адронов в спектре.

Особенно чувствительной к присутствию массивных состояний в газе является так называемая мера взаимодействия [1]:

$$I(T) = \frac{\varepsilon(T) - 3P(T)}{T^4}. \qquad (26)$$

Для идеального газа, в котором пренебрегают массой частиц, $P = \varepsilon / 3$ и $I(T) = 0$.

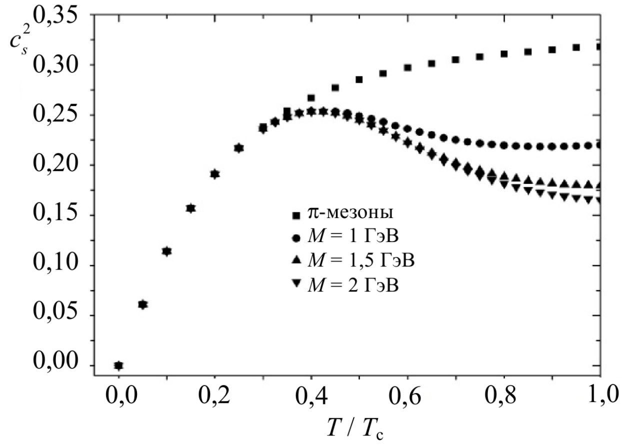

Рис. 2. Скорость звука в зависимости от температуры для газа π-мезонов и газа, содержащего спектр адронов

Из уравнений (10), (11), (13), (14), (16), (17) находим $I(T)$ для газа, содержащего спектр адронов:

$$I(T) = I_0(T) + \frac{C}{2\pi^2 T^3}\int_{m_1}^{M} K_1\left(\frac{m}{T}\right) m^6 dm, \qquad (27)$$

где $I_0(T)$ – мера взаимодействия для газа π-мезонов, равная

$$I_0(T) = \frac{3m_\pi^3}{2\pi^2 T^3} K_1\left(\frac{m_\pi}{T}\right). \qquad (28)$$

На рис. 3 показана зависимость $I(T)$ (27) и $I_0(T)$ (28) от температуры. При $T \approx 0{,}4T_c$ различие между $I(T)$ и $I_0(T)$ начинает быстро увеличиваться, достигая больших значений при критической температуре T_c.

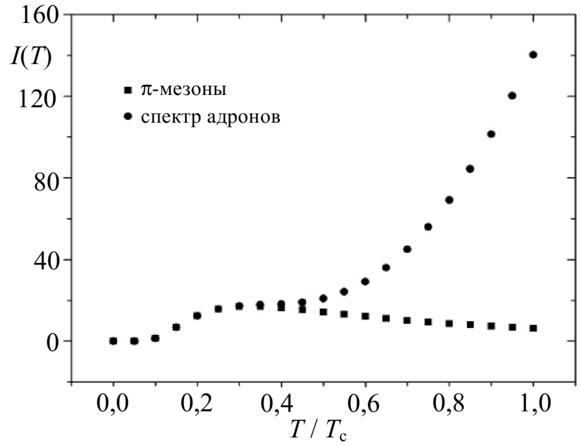

Рис. 3. Мера взаимодействия для газа π-мезонов и газа, содержащего спектр адронов

Заключение. Мы вычислили скорость звука в равновесном многокомпонентном адронном газе со спектром масс (7) и полученные результаты сравнили со скоростью звука в газе π-мезонов. При высоких температурах, близких к критической T_c, когда вклад массивных состояний в плотность энергии становится определяющим, скорость звука в системе уменьшается по сравнению со скоростью звука в газе π-мезонов.

Литература

1. Huovinen, P. QCD equations of state and hadron resonance gas / P. Huovinen, P. Petreczky // Nucl. Phys. – 2010. – Vol. A837, № 1/2. – P. 26–53.

2. Gavai, R. A new method for computation of QCD thermodynamics: EOS, specific heat and speed of sound / R. Gavai, S. Gupta, S. Mukherjee // In Proc. XXIII Int. Symp. on Lattice Field Theory, Ireland, 25–30 july 2005. – Ireland, 2005. – P. 173–177.

3. Burakovsky, L. On the thermodynamics of hot hadron matter / L. Burakovsky, L. P. Horwitz // Nucl. Phys. – 1997. – Vol. A614, № 3. – P. 373–399.

Поступила 25.02.2011