УДК 517.444

Л. Д. Яроцкая, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики (БГТУ)

НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЕВОГО ТИПА, СВЯЗАННЫЕ С ФУНКЦИЕЙ МАКДОНАЛЬДА

В настоящей работе изучаются свойства специальных функций бесселевого типа, связанных с функцией Макдональда. Для них установлены ряд оценок, асимптотические свойства, представления через интегралы Меллина – Барнса и в виде бесконечного ряда. Полученные результаты полезны при исследовании некоторых интегралов и интегральных преобразований по индексу с функциями бесселевого типа в ядрах.

Some special functions of Bessel type associated with the Macdonald function are studied. The estimates, asymptotic expansions, representations in terms of the Mellin – Barnes type integral and the series are obtained. These results are useful for investigations of index integral transforms and some classes of index integrals with the Bessel type functions as kernels.

Введение. Необходимость изучения свойств специальных функций по индексам или параметрам возникает в связи с исследованием некоторых классов индексных интегралов [1] и интегральных преобразований [2]. Установлено [2], что все известные в литературе преобразования по индексу композиционно связаны с преобразованием Конторовича – Лебедева в силу универсальной структуры их ядер. Отметим, что ядром преобразования Конторовича – Лебедева, простейшего в классе преобразований по индексу, является функция Макдональда мнимого параметра (функции Бесселя третьего рода) [3, 4]. Кроме того, физические приложения асимптотических формул для функций бесселевого типа с большими индексами относятся к задаче о распространении электрических волн над поверхностью земли [3].

Основная часть. В работе изучаются свойства специальных функций, представимых при $x>0$ определенными интегралами вида

$$C_s(x,\tau)=\int_0^\infty \cos(x\operatorname{sh}u)\sin(\tau u)\,du, \qquad (1)$$

$$S_c(x,\tau)=\int_0^\infty \sin(x\operatorname{sh}u)\cos(\tau u)\,du. \qquad (2)$$

Рассматриваемые функции (1), (2) введены в работах [5] и [6] в качестве ядер прямого и обратного интегральных преобразований по индексу. Кроме того, они встречаются в исследованиях дифракции на призме [7].

Заметим, что интегралы (1), (2) напоминают известные интегральные представления для функции Макдональда $K_{i\tau}(x)$ [3, 4]:

$$K_{i\tau}(x)\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)=\int_0^\infty \cos(x\operatorname{sh}u)\cos(\tau u)\,du,$$

$$K_{i\tau}(x)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)=\int_0^\infty \sin(x\operatorname{sh}u)\sin(\tau u)\,du.$$

Учитывая, что $C_s(x,-\tau)=-C_s(x,\tau)$ и $S_c(x,-\tau)=S_c(x,\tau)$, будем полагать $\tau>0$.

Лемма 1. При $x>0$ и $\tau>0$ справедливы оценки функций:

$$\left|C_s(x,\tau)\right|\le\frac{1}{x}\left(1+\frac{\pi\tau}{2}\right), \qquad (3)$$

$$\left|S_c(x,\tau)\right|\le\frac{1}{x}\left(2+\frac{\pi\tau}{2}\right). \qquad (4)$$

Доказательство. Интегрируя в (1) по частям, получим

$$C_s(x,\tau)=\int_0^\infty \frac{\sin(\tau u)}{\operatorname{ch}u}\,d\left(\frac{\sin(x\operatorname{sh}u)}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^\infty \sin(x\operatorname{sh}u)\frac{\sin(\tau u)\operatorname{sh}u-\tau\cos(\tau u)\operatorname{ch}u}{\operatorname{ch}^2 u}\,du.$$

Тогда

$$\left|C_s(x,\tau)\right|\le\frac{1}{x}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}u+\tau\operatorname{ch}u}{\operatorname{ch}^2 u}\,du.$$

Откуда и следует справедливость формулы (3). Доказательство неравенства (4) проводится интегрированием в (2) по частям аналогично доказательству неравенства (3).

Интегральные представления через контурные интегралы Меллина – Барнса.

Лемма 2. Справедливы следующие представления:

$$C_s(x,\tau)=\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi\tau}{2}}{4\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma\left(s+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{i\tau}{2}\right)\times$$

$$\times\frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}\left(\frac{x^2}{4}\right)^{-s}ds, \qquad (5)$$

$$S_c(x,\tau)=\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi\tau}{2}}{4\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma\left(s+\frac{\pi\tau}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{\pi\tau}{2}\right)\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}\left(\frac{x^2}{4}\right)^{-s}ds, \qquad (6)$$

где $0<\gamma<1/2$.

Доказательство. Осуществляя в (1) замену $t = \mathrm{sh}^2 u$, имеем

$$C_s(x,\tau) = \frac{1}{4i}\int_0^\infty \frac{\cos\left(x\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}} \times$$

$$\times\left(\frac{\left(\sqrt{t+1}+\sqrt{t}\right)^{i\tau}}{\sqrt{t+1}} - \frac{\left(\sqrt{t+1}-\sqrt{t}\right)^{i\tau}}{\sqrt{t+1}}\right)dt.$$

Выражение в скобках в последнем интеграле представим как обратное преобразование Меллина произведения гамма-функций Эйлера, согласно формуле (8.4.2.13) из [1]. Получим

$$C_s(x,\tau) = \frac{1}{4i}\int_0^\infty \frac{\cos\left(x\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}} \frac{1}{2\pi^{3/2}i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\Gamma\left((1-i\tau)/2-s\right)}{\Gamma\left((1-i\tau)/2+s\right)} - \frac{\Gamma\left((1+i\tau)/2-s\right)}{\Gamma\left((1+i\tau)/2+s\right)}\right)t^{-s}ds\,dt,$$

где $0<\gamma<1/2$. Условие для γ выбрано так, чтобы контур отделял левую серию полюсов подынтегрального выражения от правых. Используя формулу дополнения для гамма-функции Эйлера

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)},$$

вычислим выражение в скобках

$$\frac{\Gamma\left((1-i\tau)/2-s\right)}{\Gamma\left((1-i\tau)/2+s\right)} - \frac{\Gamma\left((1+i\tau)/2-s\right)}{\Gamma\left((1+i\tau)/2+s\right)} =$$

$$= 2i\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\frac{\Gamma\left((1-i\tau)/2-s\right)\Gamma\left((1+i\tau)/2+s\right)}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}.$$

Далее, поменяв порядок интегрирования в последнем интеграле и применяя формулу (8.4.5.2) из [1], получим (5). Формула (6) доказывается аналогично.

Следствие. Функции $C_s(x,\tau)$ и $S_c(x,\tau)$ являются частными случаями *G*-функции Мейера [1]. Причем

$$C_s\left(2\sqrt{x},\tau\right) = \frac{1}{2}\mathrm{sh}\frac{\pi\tau}{2}G_{2,4}^{3,1}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}0,\frac{1}{2}\\ \frac{\pi\tau}{2},-\frac{\pi\tau}{2},0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right), \quad (7)$$

$$S_c\left(2\sqrt{x},\tau\right) = \frac{1}{2}\mathrm{ch}\frac{\pi\tau}{2}G_{2,4}^{3,1}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2},0\\ \frac{\pi\tau}{2},-\frac{\pi\tau}{2},\frac{1}{2},0\end{matrix}\right). \quad (8)$$

Связь функций $C_s(x,\tau)$, $S_c(x,\tau)$ и функции Макдональда $K_{i\tau}(x)$ посредством преобразований типа Гильберта [8].

Лемма 3. Справедливы представления:

$$C_s(x,\tau) = \frac{2}{\pi}\mathrm{sh}\frac{\pi\tau}{2}\int_0^\infty \frac{t K_{i\tau}(t)}{t^2-x^2}dt, \quad (9)$$

$$S_c(x,\tau) = \frac{2}{\pi}x\,\mathrm{sh}\frac{\pi\tau}{2}\int_0^\infty \frac{K_{i\tau}(t)}{x^2-t^2}dt. \quad (10)$$

Доказательство. Произведение гамма-функций $\Gamma(s+i\tau/2)\Gamma(s-i\tau/2)$ в формуле (5) заменим интегралом [1, (8.4.23.1)]:

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(s+\frac{i\tau}{2}, s-\frac{i\tau}{2}\right) = \int_0^\infty K_{i\tau}\left(2\sqrt{u}\right)u^{s-1}du, \quad \mathrm{Re}\,s>0.$$

Тогда, поменяв в (5) порядок интегрирования и вычислив внутренний интеграл по формуле (8.4.2.6) из [1]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}x^{-s}ds = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1-x},$$

где $0<\mathrm{Re}\,s<1$, найдем

$$C_s(x,\tau) = \frac{1}{\pi}\mathrm{sh}\frac{\pi\tau}{2}\int_0^\infty \frac{K_{i\tau}\left(2\sqrt{u}\right)}{1-\frac{x^2}{4u}}\frac{du}{u}.$$

Откуда с помощью замены $t=2\sqrt{u}$ получим (9). Формула (10) доказывается аналогично.

Представление в виде линейных комбинаций функций гипергеометрического типа. Вычислив интегралы (5), (6) по теореме Слейтер (формула (8.4.51.10) из [1]), с учетом формулы (7.13.1.1) из [1], получим

$$C_s(x,\tau) = \frac{1}{\tau}{}_1F_2\left(1;1-\frac{i\tau}{2},1+\frac{i\tau}{2};\frac{x^2}{4}\right) -$$

$$-\frac{\pi}{4\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\left[I_{i\tau}(x)+I_{-i\tau}(x)\right], \quad (11)$$

где ${}_1F_2$ – гипергеометрическая функция, определенная рядом

$${}_1F_2\left(1;1-\frac{i\tau}{2},1+\frac{i\tau}{2};\frac{x^2}{4}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\left(1-\frac{i\tau}{2}\right)_k\left(1+\frac{i\tau}{2}\right)_k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \quad (12)$$

и

$$I_{i\tau}(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\Gamma(k+i\tau+1)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+i\tau} - \quad (13)$$

модифицированная функция Бесселя первого рода.

Аналогично выводится формула

$$S_c(x,\tau)=\frac{\pi}{4\operatorname{ch}(\pi\tau/2)}\left[I_{i\tau}(x)+I_{-i\tau}(x)\right]-$$

$$-\frac{x}{1+\tau^2}\,{}_1F_2\left(1;\frac{3}{2}-\frac{i\tau}{2},\frac{3}{2}+\frac{i\tau}{2};\frac{x^2}{4}\right). \qquad (14)$$

Асимптотические свойства.

Лемма 4. Справедливы следующие представления при $x\to+0$ и при $\tau<T<\infty$:

$$C_s(x,\tau)=\frac{2}{\tau}\sin^2\left(\frac{\tau\ln(x/4)}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{\tau}\operatorname{Re}_{i\tau}\left[\left(1-\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(1+i\tau)}{\Gamma(1/2-i\tau)}\right)\left(\frac{x}{4}\right)^{i\tau}\right]+O\left(x^2\right), \quad (15)$$

$$S_c(x,\tau)=\frac{1}{2}\cos\left(\tau\ln\frac{x}{4}\right)-\frac{x}{1+\tau^2}-$$

$$-\frac{1}{4}\operatorname{Re}_{i\tau}\left[\left(1-\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(1+i\tau)}{\Gamma(1/2-i\tau)}\right)\left(\frac{x}{4}\right)^{i\tau}\right]+O\left(x^2\right). \quad (16)$$

Доказательство. Свойства (15), (16) следуют из разложения функций (1), (2) в степенной ряд по возрастающим степеням x. Действительно, подставляя (12), (13) в (11) и учитывая формулы дополнения и удвоения для гамма-функции Эйлера [3, 4], имеем

$$C_s(x,\tau)=\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x/2)^{2k}}{\left(1+\tau^2/4\right)\ldots\left(k^2+\tau^2/4\right)}-$$

$$-\frac{\operatorname{ch}(\pi\tau/2)}{2\tau}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{i\tau}\Gamma(1-i\tau)+\left(\frac{x}{2}\right)^{-i\tau}\Gamma(1+i\tau)\right)-$$

$$-\frac{\pi}{4\operatorname{sh}(\pi\tau/4)}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(x/2)^{2k}}{\Gamma(k+1-i\tau)\Gamma(k+1+i\tau)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{i\tau}\Gamma(k+1-i\tau)+\left(\frac{x}{2}\right)^{-i\tau}\Gamma(k+1+i\tau)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\tau}+O\left(x^2\right)-\frac{1}{2\tau}\left[\left(\frac{x}{4}\right)^{i\tau}+\left(\frac{x}{4}\right)^{-i\tau}+\right.$$

$$+\left(\frac{x}{4}\right)^{i\tau}\left(\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(1-i\tau/2)}{\Gamma(1/2+i\tau/2)}-1\right)+$$

$$\left.+\left(\frac{x}{4}\right)^{-i\tau}\left(\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(1+i\tau/2)}{\Gamma(1/2-i\tau/2)}-1\right)\right].$$

Отсюда и следует формула (15).

Асимптотические выражения функций (1) и (2) при фиксированных x и больших τ получены в работе [9]. Используется метод, основанный на применении классической формулы Стирлинга для гамма-функции Эйлера к представлению соответствующей функции в виде бесконечного ряда.

Теорема. Справедливы следующие асимптотические представления по индексу при $x>0$ и $\tau\to+\infty$:

$$C_s(x,\tau)=\left[\frac{\tau}{\tau^2-x^2}-\sqrt{\frac{\pi}{2\tau}}\times\right.$$

$$\left.\times\cos\left(\tau\ln\left(\frac{2\tau}{x}\right)-\tau+\frac{\pi}{4}+\frac{x^2}{4\tau}\right)\right]\left(1+O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right),$$

$$S_c(x,\tau)=\left[\sqrt{\frac{\pi}{2\tau}}\cos\left(\tau\ln\left(\frac{2\tau}{x}\right)-\tau+\frac{\pi}{4}+\frac{x^2}{4\tau}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{x}{\tau^2-x^2}\right]\left(1+O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right).$$

Заключение. Показано, что функции (1), (2) относятся к функциям бесселевого типа. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях специальных функций, интегральных преобразований и их приложений при решении интегральных уравнений.

Литература

1. Прудников, А. П. Интегралы и ряды: в 3 т. / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М.: Наука, 1981–1986. – Т. 3: Дополнительные главы. – 1986. – 800 с.

2. Yakubovich, S. B. Index transforms / S. B. Yakubovich. – Singapore: World Scientific Publishing Company, 1996. – 252 p.

3. Ватсон, Г. Н. Теория бесселевых функций / Г. Н. Ватсон. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 799 с.

4. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1965–1967. – Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – 1966. – 295 с.

5. Yakubovich, S. B. Integral transformation associated with the Macdonald type kernels / S. B. Yakubovich, L. D. Yarotzkaya // East-West Journ. of Math. – 2000. – Vol. 2, № 1 (June). – P. 73–84.

6. Яроцкая, Л. Д. Об интегральном преобразовании с ядром, связанным с функцией Макдональда / Л. Д. Яроцкая // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2000. – № 4. – С. 32–37.

7. Whipple, F. J. W. Diffraction by a wedge and kindred problems / F. J. W. Whipple // Proc. London Math. Soc. – 1917. – Vol. 26, № 2. – P. 94–111.

8. Титчмарш, Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титчмарш. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 334 с.

9. Яроцкая, Л. Д. Асимптотические представления по индексу функций бесселевого типа / Л. Д. Яроцкая // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. – 2004. – Вып. XII. – С. 18–21.

Поступила 26.02.2011