УДК 517.929

Т. Б. Копейкина, кандидат физико-математических наук,
доцент, старший научный сотрудник (БГТУ)

УПРАВЛЯЕМОСТЬ РАЗНОТЕМПОВЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается проблема управляемости разнотемповой динамической системы, состоящей из трех векторных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + B_1 u \\ \mu\,\dot{y} = A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z + B_2 u \\ \mu^2\dot{z} = A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z + B_3 u \end{cases}$ (1), в которые в качестве множителей при производных входят различные степени малого параметра μ. С помощью метода пространства состояний доказан удобный в технических приложениях критерий, а также достаточные условия полной управляемости системы (1), которые выражены через решения рекуррентных матричных алгебраических уравнений, называемых определяющими уравнениями системы (1).

The controllability problem of time-invariant multi-temps singularly perturbed dynamic systems (1) is considered in this paper with the help of state space method. Some criteria as well as algebraic sufficient conditions of complete controllability are obtained. These criteria are obtained in terms of the solutions of the defining equations which are recurrence matrix algebraic equations.

Введение. При исследовании различных свойств многомерных и многоконтурных систем управления наиболее важными являются управляемость и наблюдаемость (неуправляемость и ненаблюдаемость могут быть причиной неустойчивости системы и отказа ее работы). Проблеме управляемости стационарных сингулярно возмущенных систем (СВС), т. е. объектов, поведение которых описывается системами дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и малым параметром при части производных, СВС с запаздыванием (СВСЗ) были посвящены работы [1–5] автора.

Многие задачи динамики полета, химической кинетики, автоматического управления и регулирования описываются *разнотемповыми* СВС (РСВС), в которые малый параметр входит в качестве множителей с различными степенями при переменных состояния системы. Впервые проблема управляемости разнотемповых СВС была рассмотрена в [6], где достаточные условия полной управляемости получены на основе разложения пространства состояний системы в прямую сумму подпространств меньшей размерности. В данной работе для исследования полной управляемости РСВС с постоянными коэффициентами с помощью метода пространства состояний развивается и *метод определяющих уравнений*, предложенный автором в [1] при изучении управляемости сингулярно возмущенных систем. Отметим, что впервые понятие определяющего уравнения для исследования управляемости линейных динамических систем управления с запаздывающим аргументом по состоянию и управлению было предложено и использовано в [7].

Постановка задачи. Определения. Рассмотрим проблему управляемости РСВС дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + B_1 u, \\ \mu\,\dot{y} = A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z + B_2 u, \\ \mu^2\dot{z} = A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z + B_3 u \end{cases} \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$x(0,\mu) = x_0,\ \ y(0,\mu) = y_0,\ \ z(0,\mu) = z_0, \qquad (2)$$

где $x(t) \in R^{n_1}$; $y(t) \in R^{n_2}$; $z(t) \in R^{n_3}$; $u(t) \in R^{r}$; u – вектор-функция управляющих воздействий из класса кусочно-непрерывных функций, называемых далее *допустимыми управлениями*; μ – малый положительный параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 << 1$; $x \in R^{n_1}$ – вектор медленных переменных; $y \in R^{n_2}, z \in R^{n_3}$ – векторы быстрых переменных с существенно различными скоростями $\dot{y} = O\left(\frac{1}{\mu}\right)$, $\dot{z} = O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$; A_{ij}, B_j, $i, j = \overline{1,3}$ – заданные постоянные матрицы соответствующих размеров; $n_1 + n_2 + n_3 \le r$; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ – производные соответствующих вектор-функций по времени t, $t > 0$.

Определение. РСВС (1) полностью управляема при заданном μ, если для любых $(n_1+n_2+n_3)$-векторов $\{x_0, y_0, z_0\}$, $\{x_1, y_1, z_1\}$ существуют момент времени $t_1, t_1 > 0$, и допустимое управление $u(t)$ такие, что соответствующая им в силу (1), (2) траектория $\{x(t;\ x_0,\ u(t),\ \mu), y(t;\ y_0,\ u(t),\ \mu), z(t;\ z_0,\ u(t),\ \mu)\}$ удовлетворяет условиям

$$x(0;\ x_0,\ u(t),\ \mu) = x_0,\ y(0;\ y_0,\ u(t),\ \mu) = y_0,$$
$$z(0;\ z_0,\ u(t),\ \mu) = z_0,$$
$$x(t_1;\ x_0,\ u(t),\ \mu) = x_1,\ y(t_1;\ y_0,\ u(t),\ \mu) = y_1, \quad (3)$$
$$z(t_1;\ z_0,\ u(t),\ \mu) = z_1.$$

Метод исследования. Вспомогательные результаты. Для вывода необходимых и достаточных условий управляемости РСВС (1) введем расширенный вектор $w = (x, y, z)' \in \in R^{n_1+n_2+n_3}$ – вектор состояния РСВС (1), $(n_1 + n_2 + n_3) \times (n_1 + n_2 + n_3)$-матрицу $A(\mu)$, $(n_1 + n_2 + n_3) \times r$-матрицу $B(\mu)$:

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \frac{A_{21}}{\mu} & \frac{A_{22}}{\mu} & \frac{A_{23}}{\mu} \\ \frac{A_{31}}{\mu^2} & \frac{A_{32}}{\mu^2} & \frac{A_{33}}{\mu^2} \end{pmatrix},\ B(\mu) = \begin{pmatrix} B_1 \\ \frac{B_2}{\mu} \\ \frac{B_3}{\mu^2} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

В силу (4) РСВС (1) примет вид

$$\dot{w} = A(\mu)w + B(\mu)u \quad (5)$$

с начальным условием

$$w(0, \mu) = w_0. \quad (6)$$

Согласно критерию Калмана [8], система (5) полностью управляема в том и только том случае, если

$$rank\{A(\mu)^k B(\mu), k = \overline{0, n_1 + n_2 + n_3 - 1}\} = = n_1 + n_2 + n_3. \quad (7)$$

Критерий полной управляемости (7) для РСВС (1) содержит в знаменателе большие степени (до порядка $\mu^{n_1+n_2+n_3-1}$) малого параметра μ и на практике является труднопроверяемым. Цель данной работы – получить эффективные необходимые и достаточные условия управляемости РСВС (1), выраженные в терминах ее параметров $A_{ij}, B_j, i, j = \overline{1,3}$ и не содержащие малый параметр μ.

Пусть $p \equiv \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования функций по времени t, т. е. для любой дифференцируемой функции $f(t)$ справедливо $pf(t) \equiv \frac{df}{dt}$. Тогда РСВС (1) с помощью оператора p может быть представлена в виде

$$\begin{cases} px(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(t) + A_{13}z(t) + B_1u(t), \\ \mu\, py(t) = A_{21}x(t) + A_{22}y(t) + A_{23}z(t) + B_2u(t), \\ \mu^2 pz(t) = A_{31}x(t) + A_{32}y(t) + A_{33}z(t) + B_3u(t). \end{cases} \quad (8)$$

Каждой вектор-функции $x(t), y(t), z(t), u(t)$, входящей в РСВС (8), поставим в соответствие постоянные матрицы

$$X_k^i \in R^{n_1\times r}, Y_k^i \in R^{n_2\times r}, Z_k^i \in R^{n_3\times r}, U_k^i \in R^{r\times r}$$

с двумя индексами k, i, а оператору p и малому параметру μ – операторы сдвига Δ_+, Δ^+ на единицу вправо соответственно нижнего и верхнего индекса у этих матриц:

$$x(t) \to X_k^i,\ y(t) \to Y_k^i,\ z(t) \to Z_k^i,$$
$$u(t) \to U_k^i,\ p \to \Delta_+,\ \mu \to \Delta^+. \quad (9)$$

Таким образом, согласно (9), для некоторой матрицы Q_k^i: $\Delta_+ Q_k^i = Q_{k+1}^i, \Delta^+ Q_k^i = Q_k^{i+1}$, а выражению $\mu^2 pz(t)$ соответствует операторная форма $\Delta^+(\Delta^+(\Delta_+ Z_k^i)) \equiv Z_{k+1}^{i+2}$.

В силу соответствий (9) с учетом свойств операторов Δ_+, Δ^+ РСВС (8) может быть представлена как алгебраическая система рекуррентных по k, i матричных уравнений:

$$\begin{cases} X_{k+1}^i = A_{11}X_k^i + A_{12}Y_k^i + A_{13}Z_k^i + B_1U_k^i, \\ Y_{k+1}^{i+1} = A_{21}X_k^i + A_{22}Y_k^i + A_{23}Z_k^i + B_2U_k^i, \\ Z_{k+1}^{i+2} = A_{31}X_k^i + A_{32}Y_k^i + A_{33}Z_k^i + B_3U_k^i, \end{cases} \quad (10)$$

которые при $i, k \geq 0$ будем решать с начальными условиями

$$U_0^0 = E_r, U_k^i = 0_r, k \neq 0 \wedge i \neq 0,$$
$$X_k^i = 0_{n_1\times r}, Y_k^i = 0_{n_2\times r}, Z_k^i = 0_{n_3\times r}, k \leq 0,\ i \leq 0. \quad (11)$$

Алгебраические уравнения (10) назовем *определяющими уравнениями* РСВС (1), тройку матриц $\left\{X_k^i, Y_k^{i+1}, Z_k^{i+2}\right\}$, $i, k \geq 1$ – *решением* определяющих уравнений (10), а каждую из матриц $X_k^i, Y_k^{i+1}, Z_k^{i+2}$ – *компонентой решения* определяющих уравнений (10).

Лемма. Для любого целого $l \geq 0$ справедливо равенство

$$A^l(\mu)B(\mu) = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{2l} \frac{X_{l+1}^i}{\mu^i} \\ \sum_{i=0}^{2l} \frac{Y_{l+1}^{i+1}}{\mu^{i+1}} \\ \sum_{i=0}^{2l} \frac{Z_{l+1}^{i+2}}{\mu^{i+2}} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Доказательство леммы проведем методом математической индукции по индексу $l.$ При $l = 0$ равенство (12) справедливо, так как с одной стороны, в силу (4) имеем

$$B(\mu) = \begin{pmatrix} B_1 \\ \dfrac{B_2}{\mu} \\ \dfrac{B_3}{\mu^2} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, из правой части (12) при $l = 0$ следует тождество

$$\begin{pmatrix} X_1^0 \\ \dfrac{1}{\mu} Y_1^1 \\ \dfrac{1}{\mu^2} Z_1^2 \end{pmatrix} \overset{(10),(11)}{=\!=\!=} \begin{pmatrix} B_1 \\ \dfrac{B_2}{\mu} \\ \dfrac{B_3}{\mu^2} \end{pmatrix}.$$

Предположив, что (12) выполняется для некоторого $l = j$, т. е.

$$A^j(\mu)B(\mu) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{2j} \dfrac{X_{j+1}^i}{\mu^i} \\ \sum\limits_{i=0}^{2j} \dfrac{Y_{j+1}^{i+1}}{\mu^{i+1}} \\ \sum\limits_{i=0}^{2j} \dfrac{Z_{j+1}^{i+2}}{\mu^{i+2}} \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

докажем его для $l = j+1$. Для этого рассмотрим произведение $A^{j+1}(\mu)B(\mu)$, которое представим в виде

$$A^{j+1}(\mu)B(\mu) = A(\mu)(A^j(\mu)B(\mu)) =$$

$$\overset{(4),(13)}{=\!=\!=} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \dfrac{A_{21}}{\mu} & \dfrac{A_{22}}{\mu} & \dfrac{A_{23}}{\mu} \\ \dfrac{A_{31}}{\mu^2} & \dfrac{A_{32}}{\mu^2} & \dfrac{A_{33}}{\mu^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{2j} \dfrac{X_{j+1}^i}{\mu^i} \\ \sum\limits_{i=0}^{2j} \dfrac{Y_{j+1}^{i+1}}{\mu^{i+1}} \\ \sum\limits_{i=0}^{2j} \dfrac{Z_{j+1}^{i+2}}{\mu^{i+2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}\sum\limits_{i=0}^{2j} \dfrac{X_{j+1}^i}{\mu^i} + A_{12}\sum\limits_{i=0}^{2j} \dfrac{Y_{j+1}^{i+1}}{\mu^{i+1}} + A_{13}\sum\limits_{i=0}^{2j} \dfrac{Z_{j+1}^{i+2}}{\mu^{i+2}} \\ \dfrac{A_{21}}{\mu}\sum\limits_{i=0}^{2j} \dfrac{X_{j+1}^i}{\mu^i} + \dfrac{A_{22}}{\mu}\sum\limits_{i=0}^{2j} \dfrac{Y_{j+1}^{i+1}}{\mu^{i+1}} + \dfrac{A_{23}}{\mu}\sum\limits_{i=0}^{2j} \dfrac{Z_{j+1}^{i+2}}{\mu^{i+2}} \\ \dfrac{A_{31}}{\mu^2}\sum\limits_{i=0}^{2j} \dfrac{X_{j+1}^i}{\mu^i} + \dfrac{A_{32}}{\mu^2}\sum\limits_{i=0}^{2j} \dfrac{Y_{j+1}^{i+1}}{\mu^{i+1}} + \dfrac{A_{33}}{\mu^2}\sum\limits_{i=0}^{2j} \dfrac{Z_{j+1}^{i+2}}{\mu^{i+2}} \end{pmatrix} = \otimes.$$

В каждой матричной строке полученной $(n_1 + n_2 + n_3) \times r$-матрицы соберем слагаемые при одинаковых отрицательных степенях малого параметра μ и получим:

$$\otimes = \begin{pmatrix} A_{11}X_{j+1}^0 + \dfrac{1}{\mu}\left(A_{11}X_{j+1}^1 + A_{12}Y_{j+1}^1\right) + \dfrac{1}{\mu^2}\left(A_{11}X_{j+1}^2 + A_{12}Y_{j+1}^2 + A_{13}Z_{j+1}^2\right) + \ldots + \\ \dfrac{A_{21}}{\mu^2}X_{j+1}^0 + \dfrac{1}{\mu^3}\left(A_{21}X_{j+1}^1 + A_{22}Y_{j+1}^1\right) + \dfrac{1}{\mu^3}\left(A_{21}X_{j+1}^2 + A_{22}Y_{j+1}^2 + A_{23}Z_{j+1}^2\right) + \ldots + \\ \dfrac{A_{31}}{\mu^4}X_{j+1}^0 + \dfrac{1}{\mu^5}\left(A_{31}X_{j+1}^1 + A_{32}Y_{j+1}^1\right) + \dfrac{1}{\mu^6}\left(A_{31}X_{j+1}^2 + A_{32}Y_{j+1}^2 + A_{33}Z_{j+1}^2\right) + \ldots + \end{pmatrix.}$$

$$\begin{pmatrix} + \dfrac{1}{\mu^{2j}}\left(A_{11}X_{j+1}^{2j} + A_{12}Y_{j+1}^{2j} + A_{13}Z_{j+1}^{2j}\right) + \dfrac{1}{\mu^{2j+1}}\left(A_{12}Y_{j+1}^{2j+1} + A_{13}Z_{j+1}^{2j+1}\right) + \dfrac{1}{\mu^{2j+2}}A_{13}Z_{j+1}^{2j+2} \\ + \dfrac{1}{\mu^{2j+1}}\left(A_{21}X_{j+1}^{2j} + A_{22}Y_{j+1}^{2j} + A_{23}Z_{j+1}^{2j}\right) + \dfrac{1}{\mu^{2j+2}}\left(A_{22}Y_{j+1}^{2j+1} + A_{23}Z_{j+1}^{2j+1}\right) + \dfrac{1}{\mu^{2j+3}}A_{23}Z_{j+1}^{2j+2} \\ + \dfrac{1}{\mu^{2j+2}}\left(A_{31}X_{j+1}^{2j} + A_{32}Y_{j+1}^{2j} + A_{33}Z_{j+1}^{2j}\right) + \dfrac{1}{\mu^{2j+3}}\left(A_{32}Y_{j+1}^{2j+1} + A_{33}Z_{j+1}^{2j+1}\right) + \dfrac{1}{\mu^{2j+4}}A_{33}Z_{j+1}^{2j+2} \end{pmatrix} \overset{(10),(11)}{=\!=\!=}$$

$$= \begin{pmatrix} X_{j+2}^0 + \dfrac{1}{\mu}X_{j+2}^1 + \ldots + \dfrac{1}{\mu^{2(j+1)}}X_{j+2}^{2(j+1)} \\ \dfrac{1}{\mu}Y_{j+2}^1 + \dfrac{1}{\mu^2}Y_{j+2}^2 + \ldots + \dfrac{1}{\mu^{2(j+1)+1}}Y_{j+2}^{2(j+1)+1} \\ \dfrac{1}{\mu^2}Z_{j+2}^2 + \dfrac{1}{\mu^3}Z_{j+2}^3 + \ldots + \dfrac{1}{\mu^{2(j+1)+2}}Z_{j+2}^{2(j+1)+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{2(j+1)} \dfrac{X_{j+2}^i}{\mu^i} \\ \sum\limits_{i=0}^{2(j+1)} \dfrac{Y_{j+2}^{i+1}}{\mu^{i+1}} \\ \sum\limits_{i=0}^{2(j+1)} \dfrac{Z_{j+2}^{i+2}}{\mu^{i+2}} \end{pmatrix},$$

что совпадает с (12) при $l = j+1$. Лемма доказана.

Основные результаты. Используя равенство (12) леммы при $l = 0, 1, ..., n_1 + n_2 + n_3 - 1$, представим необходимое и достаточное условие (7) полной управляемости РСВС (1) в виде

$$rank\begin{bmatrix} X_1^0, & \sum_{i=0}^{2}\frac{X_2^i}{\mu^i}, ..., & \sum_{i=0}^{2(n_1+n_2+n_3-1)}\frac{X_{n_1+n_2+n_3}^i}{\mu^i} \\ \frac{Y_1^1}{\mu}, & \sum_{i=0}^{2}\frac{Y_2^{i+1}}{\mu^{i+1}}, ..., & \sum_{i=0}^{2(n_1+n_2+n_3-1)}\frac{Y_{n_1+n_2+n_3}^i}{\mu^{i+1}} \\ \frac{Z_1^2}{\mu^2}, & \sum_{i=0}^{2}\frac{Z_2^{i+2}}{\mu^{i+2}}, ..., & \sum_{i=0}^{2(n_1+n_2+n_3-1)}\frac{Z_{n_1+n_2+n_3}^i}{\mu^{i+2}} \end{bmatrix} = $$

$$= n_1 + n_2 + n_3. \quad (14)$$

Таким образом, доказана теорема 1.

Теорема 1. Для полной управляемости РСВС (1) для любого $\mu \in \left(0,\ \mu^0\right]$, $\mu^0 << 1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$rank\left\{\begin{matrix} \sum_{j=0}^{2s}\frac{1}{\mu^j}X_{s+1}^j \\ \sum_{j=0}^{2s}\frac{1}{\mu^{j+1}}Y_{s+1}^{j+1}, \quad s = \overline{0, n_1+n_2+n_3-1} \\ \sum_{j=0}^{2s}\frac{1}{\mu^{j+2}}Z_{s+1}^{j+2} \end{matrix}\right\} =$$

$$= n_1 + n_2 + n_3. \quad (15)$$

Условие (15) представляет компактную форму записи условия (14), но оно не является эффективным, так как содержит отрицательные степени малого параметра μ и потому достаточно большие по абсолютной величине слагаемые. Представим (15) в другом виде. Пусть S – матрица в левой части (15), т. е.

$$S = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{2s}\frac{1}{\mu^j}X_{s+1}^j \\ \sum_{j=0}^{2s}\frac{1}{\mu^{j+1}}Y_{s+1}^{j+1}, \quad s = \overline{0, n_1+n_2+n_3-1} \\ \sum_{j=0}^{2s}\frac{1}{\mu^{j+2}}Z_{s+1}^{j+2} \end{pmatrix}.$$

Преобразуем левую часть критерия (15), представив его в виде произведения трех матриц: $(n_1+n_2+n_3)\times(n_1+n_2+n_3)$-матрицы P, $(n_1+n_2+n_3)\times r(n_1+n_2+n_3)^2$-матрицы Q и $r(n_1+n_2+n_3)^2\times r(n_1+n_2+n_3)$-матрицы R:

$$P = \begin{pmatrix} E_{n_1} & 0_{n_1\times n_2} & 0_{n_1\times n_3} \\ 0_{n_2\times n_1} & \frac{E_{n_2}}{\mu} & 0_{n_2\times n_3} \\ 0_{n_3\times n_1} & 0_{n_3\times n_2} & \frac{E_{n_3}}{\mu^2} \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} X_k^i \\ Y_k^{i+1}, k = \overline{1, n_1+n_2+n_3}, i = \overline{0, 2(k-1)} \\ Z_k^{i+2} \end{bmatrix},$$

$$R = diag\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu^k}E_r \\ l = \overline{0, n_1+n_2+n_3-1},\ k = \overline{0, 2l} \end{pmatrix},$$

где E_l – единичная $l\times l$-матрица. Поскольку $\det P = \frac{1}{\mu^{n_2+2n_3}} \neq 0$ для всех $\mu > 0$, то, согласно [9], $rank\{PQR\} = rank\{QR\}$. Из [9] также следует, что так как ранг произведения двух прямоугольных матриц не превосходит ранга любого из сомножителей, то $rank\{QR\} \leq$ $\leq \{rank\,Q, rank\,R\}$. В силу представления матрицы R в блочно-диагональной форме нетрудно заметить, что $rank\ R = r(n_1+n_2+n_3)$. Таким образом, из (15) получим следующую цепочку соотношений:

$$n_1 + n_2 + n_3 = rank\ S = rank\ \{PQR\} =$$
$$= rank\ \{QR\} \leq rank\ \{Q, r(n_1+n_2+n_3)\}. \quad (16)$$

Поскольку $r(n_1+n_2+n_3) \geq n_1+n_2+n_3$ для любого $r \geq 1$, то из (16) следует $rank\,Q \geq$ $\geq n_1+n_2+n_3$, что для $(n_1+n_2+n_3)\times r(n_1+$ $+n_2+n_3)^2$-матрицы Q возможно лишь при условии $rank\,Q = n_1+n_2+n_3$. Таким образом, доказан основной результат данной работы – критерий полной управляемости РСВС (1).

Теорема 2. Для полной управляемости РСДУ (1) при любом $\mu \in \left(0, \mu^0\right]$, $\mu^0 << 1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$rank\ Q \equiv$$

$$\equiv rank\begin{bmatrix} X_k^i \\ Y_k^{i+1}, k = \overline{1, n_1+n_2+n_3}, i = \overline{0, 2(k-1)} \\ Z_k^{i+2} \end{bmatrix} =$$

$$= n_1 + n_2 + n_3. \quad (17)$$

Из критерия (17) следует ряд достаточных условий полной управляемости РСДУ (1). Так, например, при $r \geq 1$ справедливо следствие 1.

Следствие 1. Если

$$rank\begin{bmatrix} X_1^0, X_2^0, ..., X_{n_1+n_2+n_3}^0 \\ Y_1^1, \ Y_2^1, ..., \ Y_{n_1+n_2+n_3}^1 \\ Z_1^2, \ Z_2^2, ..., \ Z_{n_1+n_2+n_3}^2 \end{bmatrix} = n_1 + n_2 + n_3,$$

то РСВС (1) полностью управляема для любого $\mu \in \left(0, \ \mu^0\right], \ \mu^0 << 1.$

Из теоремы 2 при $k = \overline{2, n_1 + n_2 + n_3}$ нетрудно доказать следствие 2.

Следствие 2. Если хотя бы для одного $k, \ k = \overline{2, n_1 + n_2 + n_3},$

$$rank\begin{bmatrix} X_k^i \\ Y_k^{i+1}, i = \overline{0, 2(k-1)} \\ Z_k^{i+2} \end{bmatrix} = n_1 + n_2 + n_3,$$

то РСВС (1) полностью управляема для любого $\mu \in \left(0, \ \mu^0\right], \ \mu^0 << 1.$

В частном случае этого следствия при $i = k = n_1 + n_2 + n_3$ получим достаточное условие полной управляемости РСВС (1) в виде

$$rank\begin{bmatrix} X_{n_1+n_2+n_3}^{n_1+n_2+n_3-1} \\ Y_{n_1+n_2+n_3}^{n_1+n_2+n_3} \\ Z_{n_1+n_2+n_3}^{n_1+n_2+n_3+1} \end{bmatrix} = n_1 + n_2 + n_3, \qquad (18)$$

которое для $(n_1 + n_2 + n_3) \times r$-матрицы, входящей в условие (18), очевидно, может выполняться лишь при условии $r = n_1 + n_2 + n_3$ и означает невырожденность данной матрицы.

Заключение. Заметим, что из основного результата данной работы – критерия полной управляемости РСВС (1) нетрудно получить условия относительной управляемости [7] этой системы (x-управляемости, y-управляемости, z-управляемости), выраженные непосредственно через ее параметры – матрицы $A_{ij}, B_j, \ i, j = \overline{1, 3}.$

Литература

1. Копейкина, Т. Б. О критериях управляемости линейных стационарных сингулярно возмущенных систем / Т. Б. Копейкина // Труды Ин-та математики НАН Беларуси. – 2006. – Т. 14, № 2. – С. 71–82.

2. Копейкина, Т. Б. Определяющие уравнения в проблеме управляемости стационарных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием / Т. Б. Копейкина // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. – 2009. – Вып. XVII. − С. 11−13.

3. Kopeikina, T. B. Some approaches to the controllability investigation of singularly perturbed dynamic systems / T. B. Kopeikina // Systems Science. – 1995. – Vol. 21, № 1. – P. 17−36.

4. Копейкина, Т. Б. Об управляемости линейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием / Т. Б. Копейкина // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25, № 9. – С. 1508–1518.

5. Копейкина, Т. Б. Управляемость стационарных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием / Т. Б. Копейкина, А. С. Гусейнова // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. – 2008. – Вып. XVI. − С. 9−14.

6. Курина, Г. А. О полной управляемости разнотемповых сингулярно возмущенных систем / Г. А. Курина // Математические заметки. – 1992. – Т. 52. – Вып.4. – С. 56–61.

7. Габасов, Р. Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – М.: Наука, 1971. – 508 с.

8. Калман, Р. Е. Об общей теории систем управления / Р. Е. Калман // Труды I Международного конгресса ИФАК по автоматическому управлению. – М.: Наука: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 521–547.

9. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

Поступила 01.03.2011