2. Воднев, В. Т. Математический словарь высшей школы / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович. – Минск: «Вышэйшая школа», 1984. – 527 с.

3. Кудрявцев, Л. Д. Сборник задач по математическому анализу / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. – М.: «Наука», 1984. – 592 с.

УДК 339.138

Студ. Д. Д. Тарасенко
Науч. рук. доц. И.Ф. Соловьева
(кафедра высшей математики, БГТУ)

КРАСОТА МНОГОГРАННИКОВ В МАТЕМАТИКЕ, ИСКУССТВЕ И АРХИТЕКТУРЕ

Трехмерные многогранники значительно отличаются от более привычных нам плоских фигур. Рассмотрим хорошо известный пример: на плоскости существует бесконечно много правильных многоугольников, в пространстве – всего пять правильных многогранников. И тот факт, что при переходе из двухмерного в трехмерном пространстве число вариантов уменьшается с бесконечности всего до пяти, настораживает.

Рассмотрим правильные пятиугольники: из них невозможно составить мозаику (их углы не стыкуются друг с другом), однако из двенадцати правильных пятиугольников в пространстве можно составить прекрасный многогранник – додекаэдр.

Формула Эйлера

Леонард Эйлер (1707-1783)

Эйлер был одним из величайших математиков всех времен. Он родился в Швейцарии, но большую часть жизни проработал в Берлинской и Петербургской академии наук. Ему принадлежит 886 трудов, полное собрание его сочинений насчитывает 87 томов. Особо важны его работы по алгебре, теории чисел, геометрии, математическому анализу, механике, астрономии и физике.

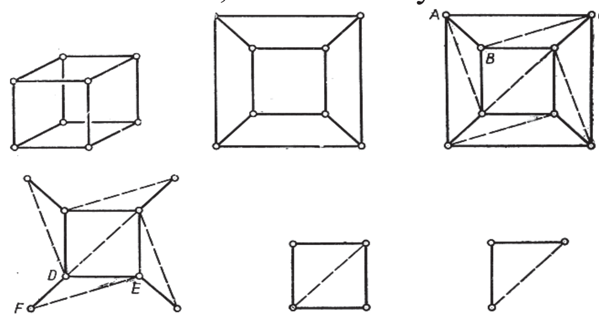
Что общего у куба, пирамиды, шестиугольной призмы, додекаэдра и ромбододекаэдра? Да, все эти фигуры многогранники, но их характеристики заметно отличаются. Существует удивительное соотношение, которое выполняется для всех этих фигур:

Грани + **В**ершины = **Р**ебра + 2

Эта формула справедлива для всех выпуклых многогранников.

Рассмотрим выпуклый n-угольник с вершинами $\upsilon_1,\upsilon_2 ,\ldots,\upsilon_n$ и советующими ребрами $v_1v_2,\ldots,v_n,v_1$. Вне зависимости от длин сторон, величин углов, кривизны ребер и т.д. число ребер будет всегда равно числу вершин многоугольника.

Перейдем в трехмерное пространство и рассмотрим произвольный выпуклый многогранник, который имеет В вершин, Р ребер и Граней. Если посмотреть на этот многогранник изнутри и спроецировать его на большую сферу, внутри которой он находится, то его линии и соответствующие вершины окажутся нанесены на эту сферу так, что его значения В, Р и Г останутся неизменными.



Многограннику также можно поставить в соответствие плоский граф, который будет иметь то же число ребер Р, то же число вершин В и то же число граней Г: Г-1 – число многоугольников, 1 – внешняя часть плоскости (грань, состоящая из части плоскости, ограничивающей плоскости, ограничивающей граф). Тогда, по индукции, видим, что при Г=2 получится единственный многоугольник и В=Р, или, что аналогично, Г+В = Р+2.

Если при Г=n число вершин = В, число ребер = Р, и мы предположим (по индукции), что $n+B_n=P_n+2$, тогда при Г=n+1 нужно заострить внимание на (n+1)-й грани. Когда число граней станет равным n+1, к графу с n гранями добавится некоторое число вершин K и K+1 ребро. Следовательно,

$$Г+B_{n+1}=n+1+B_n+K=(n+B_n) \quad +(K+1) \quad =(P_n+2) \quad +(K+1) =(P_n+K+1)+2=P_{n+1}+2.$$

Получили знаменитую теорему: <u>В любом выпуклом многограннике выполняется формула Эйлера: Г+В=Р+2.</u>

Эта теорема означает, что соотношение выполняется для любого выпуклого многогранника независимо от формы его граней, углов на гранях и углов между гранями, от длин ребер и т.д.

Формула, которая корректна для бесконечно большого числа разнообразных фигур, не может не привлекать внимание. Подобных формул, справедливых для столь непохожих фигур, практически не существует.

Формула Эйлера и Декарта

Рене Декарт (1596-1650)

Французский философ, математик, механик и физик, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики, автор метода радикального сомнения в философии, механицизма в физике. Главный философско-математический труд Декарта, «Рассуждение о методе». В приложении «Геометрия» к этой книге излагались аналитическая геометрия, многочисленные результаты в алгебре и геометрии.

Рассмотрим выпуклый многогранник Р. Декарта. Для каждой вершины υ_i рассчитывается угловой дефект Δ_i, определяемый как разность между 2π и суммой углов, сходящихся в вершине B_i, которую мы обозначим через S. В произвольной вершине тетраэдра угловой дефект будет равен $2\pi - 3\frac{\pi}{3} = \pi$, в вершине куба – $2\pi - 3\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Через $\Delta=\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots$ если P имеет n вершин V_1 , V_2 …. Чему равно Δ? Рене обнаружил, что Δ неизменно равняется 4π радианам. Отсюда следует справедливость соотношения: ***Δ=2π*(Г+В-Р).***

Обратим внимание, что если теорема Декарта верна, но $\Delta=4\pi$ и, исходя из вышеизложенного, Г+В-Р=2, то $\Delta=4\pi$. Таким образом, Эйлера и Декарт независимо друг от друга доказали эквивалентные утверждения.

Представим в виде таблицы следующие закономерности вершин, ребер и граней для некоторых многогранников.

Закономерность Рене Декарта:
В-Р+Г=2.

Тела Платона	В	Р	Г
Тетраэдр	4	6	4
Куб	8	12	6
Октаэдр	6	12	8
Додекаэдр	20	30	12
Икосаэдр	12	30	20

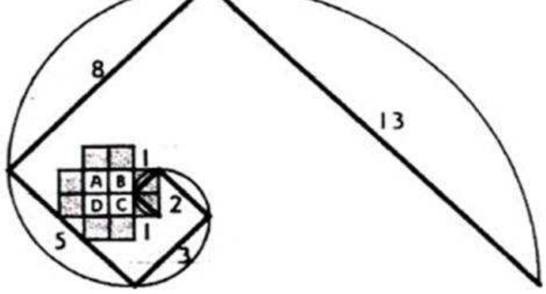
В 1755 г. Л. Эйлер доказал, что это замечательное равенство справедливо для произвольного выпуклого многогранника. χ=В-Р+Г – эйлерова характеристика многогранника.

Золотое сечение и правильные многоугольники

Золотое сечение (золотая пропорция, деление в крайнем и среднем отношении, гармоническое деление) — соотношение двух величин b и a, a > b, когда справедливо a/b = (a+b)/a .

Золотое сечение, величина которого равна $\Phi=(1+\frac{\sqrt{5}}{2})=1{,}618\ldots$ – это отношение между диагональю правильного пятиугольника и его стороной. Это объясняет, почему золотому сечению подчиняются размеры икосаэдров и додекаэдров.

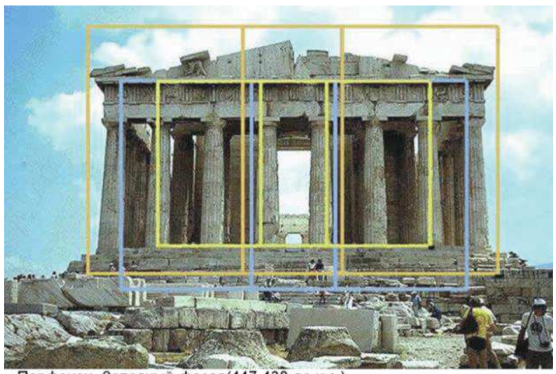
Спираль Фибоначчи



С древних времен золотое сечение считалось одним из красивейших соотношений. Знаменитая последовательность Фибоначчи, в свою очередь определяется так: два ее первых члена равны 1, а каждый последующий равен сумме двух предыдущих (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13…). Отношение между соседними числами Фибоначчи стремиться к числу, равному величине золотого сечения. Сегодня золотое сечение можно встретить во множестве объектов, например в строительстве домов, футбольных мечах, пачках для сигарет и банковских картах.

Приложение метода «Золотого сечения»

Понятие сущности «Золотого сечения» заключается в делении целого предмета на две части таким образом, что весь предмет так относится к большей своей части, как большая часть – к меньшей. «Золотое сечение» – это



Парфенон. Западный фасад(447-438 до н.э.)

иррациональное число, приблизительно равное 1, 618.

Существует так же понятие о втором «Золотом сечении», которое вытекает из основного сечения, дает другое отношение 44:56. Такая пропорция обнаружена в архитектуре, а также имеет место при построении композиций изображений удлиненного горизонтального формата.

Принцип «Золотого сечения» – высшее проявление структурного и функционального совершенства целого и его частей в искусстве, науке, технике и природе.

Понятие о «Золотом сечении» впервые было введено Пифагором (VI в. до н.э.). Любой предмет, геометрическая фигура, вещь, построение которых соответствует «Золотому сечению», отличаются строгой пропорциональностью, и производят приятное зрительное впечатление.

Замечательными примерами «Золотого сечения» в живописи, архитектуре и скульптуре являются статуи Аполлона Бельведерского, статуя Зевса Олимпийского, статуя Афины, Парфенон, Собор Парижской Богоматери, «Черный квадрат» Малевича, «Джоконда» Леонардо да Винчи и т.д.

Многогранники в архитектуре

Антонио Гауди (1852-1926)

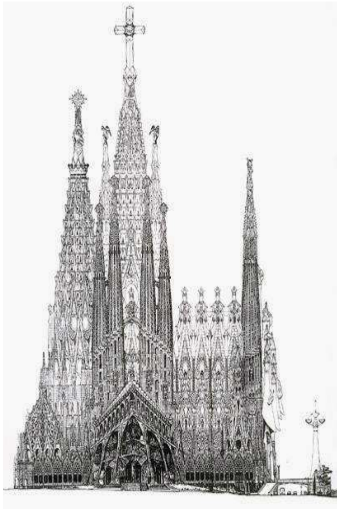
Известнейший архитектор XX века родом из Испании. Преодолев нелегкий путь от простого чертежника, он становится одним из самых дорогих, модных и востребованных зодчих своего времени.

Все богачи Барселоны мечтали владеть необыкновенной усадьбой, созданной Антонио Гауди. Ориентируясь на опыт неоготики, архитектор приходит к своему особому, ни на что не похожему стилю, который лишь приближенно можно отнести к модерну.

Последний и самый значимый для автора - проект Собора Саграда Фамилия, который он так и не заканчивает.

Храм Святого Семейства

Антонио Гауди познакомился с многогранниками, изучая архитектуру, начертательную геометрию и естественные науки, а также читая книгу Леруа, где они подробно описывались.



Соотношение всех архитектурных элементов храма Святого Семейства описываются делителями числа 12 (1:1, 1:4, 1:2, 3:4, 1:3, 2:3). Неудивительно, что при проектировании двенадцати колоколен храма Гауди выдвинул на первый план некоторые правильные многогранники, так как у куба и октаэдра двенадцать ребер, у додекаэдра – двенадцать граней, а у икосаэдра – двенадцать вершин. Кроме того, двенадцать колоколен оканчиваются изображениями епископских перстней, так как Гауди было прекрасно известно, что ювелиры при огранке бриллиантов и драгоценных камней всегда использовали как образец правильные многогранники.

Логично думать, что Гауди, любитель оригами, конструировал модели многогранников из бумаги. В его мастерской, а также в крипте храма Святого Семейства и соборе Пальма-де-Майорка можно увидеть модели многогранников, подвешенных к потолку.

Удивительным образом Гауди использовал многоугольники в колоннах нефа храма Святого семейства. Колонны – результат тонкой геометрической игры, состоящей в перемещении многоугольников и пересечении фигур. Два равных правильных многоугольника смещены вверх и повернуты в противоположных направлениях, образуя колонну, сечениями которой на разной высоте являются последовательности многоугольников со все большим числом сторон.

Многогранники в искусстве

Кубизм (фр. Cubisme) — модернистское направление в изобразительном искусстве, прежде всего в живописи, зародившееся в начале XX века во Франции и характеризующееся использованием подчёркнуто геометризованных условных форм, стремлением «раздробить» реальные объекты на стереометрические примитивы.

I стадия: сезанновский кубизм (1907 - 1909) – выделение геометрических форм фигур и предметов, отделение формы от пространства и плоскости.

II стадия: аналитический кубизм (1909-1912) – дробление форм на грани и срезы, построение композиции при помощи коллажа из пересекающихся срезов и плоскостей, стирание граней между формой и пространством, визуальное взаимодействие формы и пространства.

III стадия: синтетический кубизм (1913 – 1914) – с помощью геометрических форм и их фрагментов конструируются новые объекты, которые обладают реальностью сами по себе. Коллажи создаются, в том числе, с помощью аппликаций, которые наиболее часто представляют собой фрагменты газетного листа, вклеенного в композицию.

По словам Холлингсворт, "изображение дробится на мелкие плоскости, объемность вообще не принимается в расчет, а объем существует как бы параллельно плоскости изображения. Таков по определению испанского художника Хуана Гриса, этап "аналитического кубизма". Изображение перестает быть представлением, а становится самоценной вещью".

Многогранники в архитектуре Беларуси
Национальная библиотека Беларуси

В 1989 году был проведен всесоюзный конкурс на лучший проект будущего сооружения. Его победители – архитекторы Виктор Крамаренко и Михаил Виноградов – предложили модель "белорусского алмаза", в котором сочетались функциональность и современный дизайн.

Идея предполагала возведение оригинального здания в виде *ромбокубооктаэдра* – сложного многогранника из 18 квадратов и 8 треугольников, расположенного на подставке-подиуме (стилобат).

Окружающий нас мир полон изумительно красивых и необычайно сложных фигур. Примерами их можно считать обычный цветок, звезды, листья, горы камней, каждый из которых имеет свою уникальную форму. Среди них отдельное место занимают многогранники, которые на протяжении веков привлекали внимание художников, скульпторов и ювелиров.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Альсина / Тысяча граней геометрической красоты. Москва 2014. С.143.
2. Аракелян Г. Б. Математика и история золотого сечения. — М.: Логос, 2014, 404 с.
3. Шмигевский Н. В. Формула совершенства // Страна знаний. — 2010. — № 4. — С. 2-7.