$W(G_5)=16$, а индекс Рандича – $\chi(G_3)=2{,}414$, $\chi(G_4)=2{,}270$, $\chi(G_5)=2{,}000$ соответственно.

Таким образом, сравнивая топологические индексы бутана, пентана и их изомеров, мы видим, что с увеличением степени разветвленности углеродного скелета индексы уменьшаются: наибольшие значения соответствуют наименее разветвленным углеводородам. С увеличением длины углеродного скелета топологические индексы увеличиваются, так как в матрице расстояний становится больше элементов. Рассчитав какой-либо топологический индекс, можно описать физико-химические свойства вещества, так как энергия межмолекулярных взаимодействий зависит от корректных оценок размеров молекулы и степени их разветвлённости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерёмин В.В. Математика в химии. М.: МЦНМО, 2011. 64 с.

2. Химические приложения топологии и теории графов. Пер. с англ. Под ред. Р. Кинга. М.: Мир, 1987. 560 с.

3. Станкевич М. И., Станкевич И. В., Зефиров Н. С. Топологические индексы в органической химии // Успехи химии. 1988. Т. 57, вып. 3. С. 337–366.

УДК 51-7:635

Магистрант А.А.Ярошук
Науч. рук. доц. В.В.Игнатенко
(кафедра высшей математики, БГТУ)

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ РАСТЕНИЙ ПРИ ПОСАДКЕ

В последнее время всё больше земельных площадей отводится для выращивания различных культурных растений. С учётом того, что для этого необходимы очень плодородные почвы, найти эти площади не всегда представляется лёгкой задачей. В связи с этим, следует стремиться к рациональному использованию плодородных площадей. Необходимо использовать их максимально эффективно. Один из приёмов, позволяющих осуществить такое пользование – оптимальное расположение растений.

Под оптимальным расположением растений (при посадке) мы будем понимать такое расположение растений, при котором площадь, занимаемая некоторым количеством растений, будет минимальной и при этом достаточной для их нормального роста и развития. Здесь и далее мы будем рассматривать сплошную посадку без междурядий.

Для нахождения площади, которую занимают растения при посадке, необходимо составить математическую модель расположения растений. Важным является следующий факт: при однородном распределении питательных веществ в почве, растение развивается с одинаковой скоростью во всех направлениях, параллельных плоскости земли. Это даёт нам основание считать, что минимальная площадь, необходимая для нормального роста и развития отдельного растения может быть представлена в виде круга, где в центре находится само растение. Можно сказать, что для нормального роста и развития растений, эти круги не должны пересекаться друг с другом.

Таким образом, мы приходим к математической модели расположения растений. При обычной посадке, растения располагаются в рядах, которые можно считать перпендикулярными (рисунок 1).

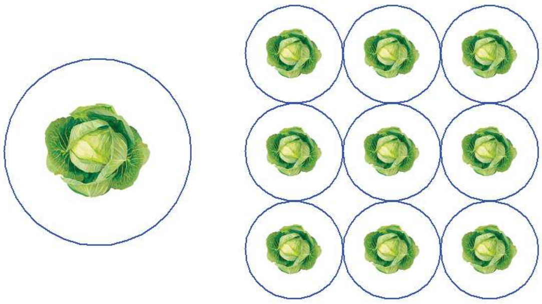

Рисунок 1 – Модель расположения растений при обычной посадке

Т. е. каждое растение находится в узле прямоугольной сетки. Для максимально эффективного использования площади следует стремиться к наиболее плотному заполнению плоскости кругами. Для этого число кругов, соприкасающихся с одним конкретным кругом (контактное число) должно быть максимальным. Возникает вопрос: «Как много одинаковых кругов

можно разместить вокруг одного, того же диаметра?» Ответ – 6. Потому что 1 круг «занимает» 60 градусов дуги, а окружность имеет 360 градусов. Т. е. 360:60 = 6, что показано на рисунке 2. Таким образом, данное расположение растений будет являться оптимальным.

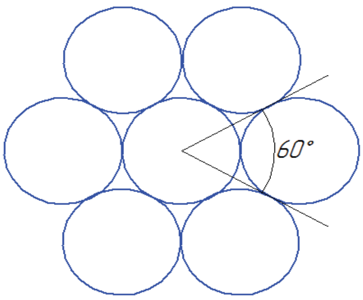

Рисунок 2 – Оптимальное расположение растений

Возникают следующие вопросы:

1) Какова величина экономии площади при посадке с оптимальным расположением растений по сравнению с обычной посадкой?

2) Какова степень использования площади при различных схемах посадки?

Располагать растения можно по-разному. Рассмотрим несколько форм посадки: квадрат, ромб, треугольник, шестиугольник (рисунок 3).

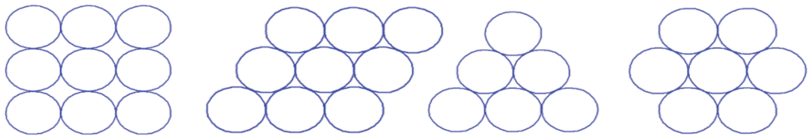

Рисунок 3 – Формы посадки

Площадь данных фигур представляет собой сумму площадей кругов и площадей лунок, т. е. фигур, которые располагается между кругами, площадь которых растениями не используется. Далее будем называть эти фигуры лунками: четырёхугольными лунками, в случае квадрата и треугольными лунками, в случае треугольника, ромба, шестиугольника. Как известно, площадь круга вычисляется по формуле 1.

$$S_{\text{круга}} = \pi r^2 \qquad (1)$$

Где r – радиус круга. Можем записать формулы для вычисления площади лунок через радиусы образующих их окружностей. Для лунки в квадратной форме участка, площадь можно найти вычитанием площади четырёх секторов с центральным углом в 90° и радиусом r, из площади квадрата со стороной $2r$. В результате всех необходимых преобразований получим формулу 2.

$$S_{\text{кв.лунки}} = r^2(4-\pi) \qquad (2)$$

Для треугольной лунки площадь находим вычитанием площади трёх секторов с центральным углом в 60° и радиусом r, из площади равностороннего треугольника со стороной $2r$. В результате всех необходимых преобразований получим формулу 3.

$$S_{\text{тр.лунки}} = r^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right) \qquad (3)$$

Зная число рядов n в каждой из фигур, можем записать выражения для нахождения числа кругов и числа лунок в каждой конкретной фигуре. Зная число кругов и число лунок, можем найти площадь всей фигуры. Для квадрата эти формулы будут иметь следующий вид:

$$n_{\text{кругов(к.)}} = n^2, \qquad (4)$$

$$n_{\text{лунок(к.)}} = (n-1)^2, \qquad (5)$$

$$S_{\text{квадрата}} = \pi r^2 n^2 + r^2(n-1)^2(4-\pi). \qquad (6)$$

Где n – число рядов в фигуре.

Для ромба имеем следующие формулы:

$$n_{\text{кругов(р.)}} = n^2, \tag{7}$$

$$n_{\text{лунок(р.)}} = 2(n-1)^2, \tag{8}$$

$$S_{\text{ромба}} = \pi r^2 n^2 + 2r^2 (n-1)^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right). \tag{9}$$

Для треугольника получаем:

$$n_{\text{кругов(т.)}} = \frac{1}{2}(n^2 + n), \tag{10}$$

$$n_{\text{лунок(т.)}} = (n-1)^2, \tag{11}$$

$$S_{\text{треугольника}} = \frac{1}{2} \pi r^2 (n^2 + n) + r^2 (n-1)^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right). \tag{12}$$

И для шестиугольника:

$$n_{\text{кругов(ш.)}} = \frac{1}{2}(n^2 + n) + 2(n^2 - n) + \frac{1}{2}(n-1)(n-2), \tag{13}$$

$$n_{\text{лунок(ш.)}} = 6(n-1)^2, \tag{14}$$

$$S_{\text{шестиугольника}} = \pi r^2 n_{\text{кругов(ш.)}} + 6r^2 (n-1)^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right). \tag{15}$$

Далее найдём площадь, которая приходится на одно растение в каждой фигуре:

$$S_{1\text{к.}} = \frac{S_{\text{квадрата}}}{n_{\text{кругов(к.)}}}, \tag{16}$$

$$S_{1\text{р.}} = \frac{S_{\text{ромба}}}{n_{\text{кругов(р.)}}}, \tag{17}$$

$$S_{1\text{т.}} = \frac{S_{\text{треугольника}}}{n_{\text{кругов(т.)}}}, \tag{18}$$

$$S_{1\text{ш.}} = \frac{S_{\text{шестиугольника}}}{n_{\text{кругов(ш.)}}}. \tag{19}$$

Тогда можем найти величину экономии площади E для каждой из фигур, по сравнению с обычной квадратной посадкой:

$$E_{\text{р.}} = \frac{S_{1\text{к.}} - S_{1\text{р.}}}{S_{1\text{к.}}} \cdot 100\ \%, \tag{20}$$

$$E_{\text{т.}} = \frac{S_{1\text{к.}} - S_{1\text{т.}}}{S_{1\text{к.}}} \cdot 100\ \%, \tag{21}$$

$$E_{\text{ш.}} = \frac{S_{1\text{к.}} - S_{1\text{ш.}}}{S_{1\text{к.}}} \cdot 100\ \%. \tag{22}$$

Становится интересным вопрос: «Какова максимальная величина экономии площади при неограниченном возрастании числа рядов (растений)?»

Для ответа на него, найдём предельные значения величин экономии площади E_{max}:

$$E_{(max)\text{р.}} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_{1\text{к.}} - S_{1\text{р.}}}{S_{1\text{к.}}} \cdot 100\ \%, \tag{23}$$

$$E_{(max)\text{т.}} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_{1\text{к.}} - S_{1\text{т.}}}{S_{1\text{к.}}} \cdot 100\ \%, \tag{24}$$

$$E_{(max)\text{ш.}} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_{1\text{к.}} - S_{1\text{ш.}}}{S_{1\text{к.}}} \cdot 100\ \%. \tag{25}$$

Получаем следующий результат:

$$E_{(max)\text{р.}} = E_{(max)\text{т.}} = E_{(max)\text{ш.}} = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{2} \cdot 100\ \%. \approx 13{,}4\ \%.$$

Оценим степень использования площади при различных схемах посадки. Под степенью использования площади мы будем понимать отношение площади, используемой растениями, ко всей площади участка, выраженное в процентном отношении. Найдём формулы, которые выражают площадь используемых участков, через количество рядов растений. А затем найдём отношение площади, необходимой растениям, к общей площади участков. Схемы участков для различных форм представлены на рисунке 4.

Находим выражения для площади этих участков $S_{\text{у.}}$, площади, используемой растениями (полезной площади) $S_{\text{пол.}}$ и степени использования пло-

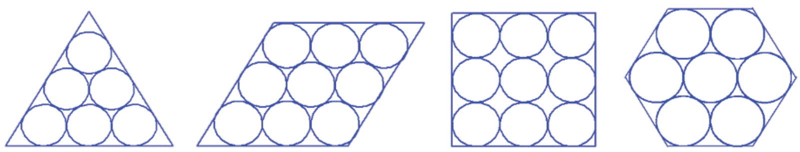

Рисунок 4 – Схемы участков для посадки

щади D. Для квадрата эти выражения будут иметь следующий вид:

$$S_{\text{к.у.}} = 4r^2n^2, \tag{26}$$

$$S_{\text{пол.к.}} = \pi r^2 n^2, \tag{27}$$

$$D_{\text{к.}} = \frac{S_{\text{пол.к.}}}{S_{\text{к.у.}}} \cdot 100\ \%. \tag{28}$$

Следует отметить, что для квадратного участка эта величина постоянна и равна $\frac{\pi}{4} \cdot 100\ \% \approx 79\ \%$. Выражения для участка в форме ромба принимают вид:

$$S_{\text{р.у.}} = \frac{2\sqrt{3}\left(2r + r\sqrt{3}(n-1)\right)^2}{3}, \tag{29}$$

5 ‹ L ŁN6 J6 Æ (30)

& L 5/5 ‹ fisr ¤ (31)

Для участка треугольной формы:

5 L (u @t uN E tN:J F s;A)6 / v Æ (32)

5 ‹ L s/t ŁN6 :J6 E J;Æ (33)

& L 5/5 ‹ fisr ¤ (34)

И для участка шестиугольной формы имеем:

5 L (u um t uN/u E tN:J F s;q)6 / t Æ (35)

5 ‹ L ŁN6 ± s/t :J6 E J; E t:J6 F J; E s/t :J F s;:J F t;pÆ (36)

& L 5/5 ‹ fisr ¤ (37)

Найдём предельные значения степени использования площади & ;:

&: ; L Æ\¶ 5/5 ‹ fisr ¤ Æ (38)

&: ; L Æ\¶ 5/5 ‹ fisr ¤ Æ (39)

&: ; L Æ\¶ 5/5 ‹ fisr ¤ (40)

Получаем следующий результат:

$$D_{(max)\text{р.}} = D_{(max)\text{т.}} = D_{(max)\text{ш.}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \cdot 100\ \%. \approx 90{,}7\ \%.$$

Вывод: При оптимальном расположении растений можно сэкономить до 13,4 % площади. Степень использования участка может достигать до 90,7 %. При достаточно большом числе растений, степень использования и экономия площади не зависят от геометрии используемого участка.

С точки зрения экологии благоприятно такое размещение, при котором конкуренция между растениями возникает как можно позже. Это возможно при равном расстоянии между растениями и квадратном или ромбовидном размещении. Однородное распределение семян с помощью сеялок точного высева обеспечивает равную силу роста отдельных растений [1]. Помимо применения для выращивания различных овощей, таких как свёкла, репа, морковь, лук, капуста, тыква и многие другие, данная модель может быть применена и при лесопосадке: такая модель считается самой лучшей для выращивания деревьев [2]. Эта модель может эффективно применяться при выращивании зерновых с помощью сеялок точного высева.

Модель также может использоваться и в ряде других случаев: в логистике, при размещении грузов цилиндрической формы, в экологии, при проектировании очистных сооружений, когда аппараты для очистки имеют круглое поперечное сечение (циклоны, отстойники).

ЛИТЕРАТУРА

1. Круг, Г. Овощеводство / Г. Круг ; пер. с нем. В. И. Леунова. - Москва : Колос, 2000. - 574 с.

2. Мирон, К. Ф. Посев и посадка леса / К. Ф. Мирон ; Общественный университет лесного хозяйства ВНИТОЛЕС. – Ленинград : Государственное лесотехническое издательство, 1947. - 80 с.