

УДК 519.86

Н. Н. Буснюк¹, В. А. Новиков²¹Белорусский государственный технологический университет²Белорусская государственная академия связи**МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ
ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ТРУДОВЫХ РЕСУРСАХ**

В практических задачах ценность представляет формирование сетевого плана, основанного на выборе из возможных альтернативных вариантов самого оптимального. В качестве исходных данных в таких задачах задается матрица времен выполнения каждой работы каждым рабочим. Данная задача представляет собой комбинацию задачи о назначении и задачи сетевого планирования. В общем случае можно сделать предположение о возможности выполнения двух и более работ одним рабочим. Решение этой задачи на математическом уровне позволяет выполнять минимизацию сетевого графика по критерию трудовых ресурсов.

В статье предложен метод решения задачи оптимального назначения в сетевом планировании с ограничением на количество работ, выполняемых одновременно. Предлагаемый алгоритм позволяет строить локально-оптимальный план за линейное время от количества дуг в сетевом графе. Рассмотренная задача помогает оптимизировать стоимость проекта по сумме времени, затраченного работниками на выполнение работ.

Ключевые слова: сетевой график, критический путь, дуга графа, вершина графа, задача о назначениях, задача сетевого планирования, алгоритм.

N. N. Busnyuk¹, V. A. Novikov²¹Belarusian State Technological University²Belarusian State Academy of Communications**SOLUTION METHOD OF NETWORK PLANNING TASK
WITH RESTRICTED MANPOWER**

In practice, the formation of a network plan based on the selection of the best possible alternatives is of special value. As the source data in such tasks the performance time matrix of each work done by each worker is set. This is a combination of task assignments and task network planning. Generally it is possible to make the assumption about the ability to run two or more jobs by one worker. The solution to this problem on a mathematical level allows you to carry out the network chart according to the criterion of minimizing manpower.

The optimal solution method of task assignments in network planning with the restriction on the amount of work performed at the same time is received in this article. The proposed algorithm allows us to build locally optimal plan in linear time from the number of arcs in a network graph. Reviewed task allows you to optimize the cost of the project for the amount of time spent by employees to execute works.

Key words: network chart, critical path, arc graph, a vertex of a graph, task assignments, task network planning, algorithm.

Введение. В [1] была рассмотрена задача, представляющая собой синтез задачи о назначении и задачи сетевого планирования. Веса дуг сетевого графа являлись переменными величинами, и была предложена методика назначений работников на работы в случае, если работников меньше, чем работ.

От правильно спланированного сетевого графика рабочих процессов во многом зависит эффективность функционирования предприятия. Классические математические методики не позволяют алгоритмизировать процесс модификации сетевого графа, например, из условия оптимизации логистических цепочек по критерию трудовых ресурсов.

Основная часть. В классической задаче сетевого планирования задана последовательность выполнения работ некоторого проекта и их продолжительность [2]. В соответствующем ориентированном взвешенном по дугам графе отыскивается наиболее длинный путь из исходного узла в завершающий узел. Этот путь задает время выполнения всего проекта. Алгоритм нахождения такого пути определяет и график выполнения всех работ проекта. При фиксированных весах дуг оптимальный (критический) путь в сетевом графе определяется за время, линейно зависящее от количества дуг в графе [3].

На практике часто бывает, что сроки выполнения работ не определены. Можно строить

некоторые предположения о времени выполнения каждой работы, но нельзя предусмотреть все возможные задержки выполнения. В более общей задаче сетевого планирования предполагаются продолжительности работ переменными величинами; задаются нижняя, верхняя оценки длительности работ и наиболее вероятная средняя оценка. Для управления проектами с неопределенным временем выполнения работ разрабатываются вероятностные методы. По переменным оценкам рассчитывают наиболее ожидаемое время выполнения всего проекта. По такой схеме работает известный метод оценки и пересмотра проектов (PERT) [4].

В [5] рассмотрен имитационный метод оценки срока завершения проекта на основе анализа его вероятностной сетевой модели. Под вероятностными сетевыми графиками понимают такие сетевые модели, которые обладают детерминированной структурой, а продолжительности работ задаются некоторыми случайными величинами. При этом предполагается, что законы распределения этих случайных величин должны быть установлены на основе анализа аналогичных работ, проводившихся ранее. Применение имитационного метода позволяет использовать любой закон вероятностного распределения для каждой работы сетевого графика, не требует предположений о неизменности критического пути и не накладывает ограничений на структуру сетевого графика.

Такие оценки характерны для типовых проектов и типичных работ. Но может оказаться так, что работники индивидуальны, каждый обладает присущей ему производительностью для различных работ проекта. Сетевой график допускает одновременное выполнение работ, не лежащих на одном пути, т. е. не предшествующих друг другу. Когда проект включает много работ, а исполнителей – ограниченное количество, то не исключено, что некоторые из работ будут простаивать. Для сведения решения к классическому методу в таких ситуациях вводят понятия фиктивных работ и событий.

На практике особую ценность представляет формирование сетевого плана, основанного на выборе из возможных альтернативных вариантов самого оптимального. В качестве исходных данных в таких задачах задается матрица времен выполнения каждой работы каждым рабочим. В общем случае можно сделать предположение о возможности выполнения двух и более работ одним рабочим. Решение этой задачи на математическом уровне позволяет автоматически выполнять минимизацию сетевого графика по критерию трудовых ресурсов.

При ограниченных трудовых ресурсах одновременно может выполняться лишь столько ра-

бот, сколько в наличии работников. Естественно, что любой работник выполняет не более одной работы в один и тот же промежуток времени.

Сформулируем задачу в общем виде. Допустим, что сетевой график содержит n работ, и в наличии у исполнителя имеется m работников:

$$m < n.$$

Каждому работнику присуща своя производительность для каждой из работ. Эти производительности (длительности выполнения работ) определены матрицей назначений A . Строки этой матрицы соответствуют рабочим, столбцы – работам, а элементы a_{ij} – трудоемкостям работ. Веса дугам выбираются из матрицы назначений A .

Целевой функцией данной задачи является критический путь сетевого графика.

Для описания алгоритма нахождения локального оптимума введем следующие обозначения:

G – сетевой граф проекта;

n – количество работ; j – номер работы; l – текущая (рассматриваемая) работа;

e_l – длина частичного пути из источника и заканчивающегося дугой l ;

m – количество работников; i – номер работника; k – текущий работник (назначенный на работу l);

A – матрица времен выполнения работы j работником i , a_{ij} – элемент матрицы A ;

t_j – метка работы под номером j ; означает ранний срок ее начала;

p_i – метка для работника под номером i ; означает ранний срок, к которому работник i освободится после выполнения порученных ему работ.

Вначале работы алгоритма все метки равны нулю.

Предлагаемый алгоритм позволяет строить локально-оптимальный план за один проход графа, т. е. за линейное время от количества дуг. Для этого дуги сетевого графа G нумеруются следующим образом.

Вначале все узлы графа G нумеруются по возрастанию в соответствии с методом поиска в ширину. На основании этой нумерации затем нумеруются дуги графа от 1 до n таким образом, чтобы работа с меньшим номером предшествовала работе с большим номером, если они лежат на одном пути. Дуги, исходящие из одного и того же узла, получают соседние номера по порядку.

Общий шаг 1. Назначаем на работу $j = l$ работника $k = i$, определив его порядковый номер i из соотношения

$$e_l = \min_{1 \leq i \leq m} \{ \max \{ p_i, t_l \} + a_{ij} \}. \quad (*)$$

Для всех дуг j графа, начало которых совпадает с концом дуги l , корректируем метки

$$t_j = \max\{t_j, e_l\}.$$

Корректируем метку, соответствующую рабочему k , назначенному на работу l :

$$p_k = e_l.$$

Для учета времени выполнения всего проекта (длины критического пути) введем фиктивную работу $n + 1$, исходящую из стока. Значение метки t_{n+1} , найденное на последнем шаге, будет определять длину критического пути. По расставленным меткам можно восстановить сам путь.

Найденный алгоритмом локальный оптимум будет глобальным, если каждой дуге сетевого графа будет присвоен в качестве веса наи-

меньший элемент соответствующего столбца матрицы A , и в формуле (*) всегда

$$t_l = \max\{p_i, t_l\}.$$

Заключение. Классическая задача о назначениях не допускает одному рабочему выполнять несколько работ. В то же время сетевой график это позволяет. Более того, может оказаться, что при меньшем числе задействованных рабочих искомый критический путь окажется меньше.

В такой задаче необходимо учесть возможности выполнения нескольких работ одним рабочим.

По величине критического пути определяют длительность выполнения проекта и его стоимость. Рассмотренная задача позволяет оценивать стоимость проекта по сумме времени, затраченного m работниками на выполнение n работ.

Литература

1. Буснюк Н. Н., Новиков В. А. Метод оптимального решения задачи о назначениях в сетевом планировании // Труды БГТУ. 2016. № 6 (188): Физ.-мат. науки и информатика. С. 170–172.
2. Конвей Р. В., Максвелл В. Л., Миллер Л. В. Теория расписаний. М.: Наука, 1975. 360 с.
3. Буснюк Н. Н., Черняк А. А. Математическое моделирование. Минск: Беларусь, 2014. 216 с.
4. Смелов В. В., Брусенцова Т. П. Основы сетевого планирования. Минск: БГТУ, 2010. 212 с.
5. Еськова О. И., Кикоть И. И. Планирование кредитных условий на основе метода имитационного моделирования вероятностного сетевого графика // Проблемы физики, математики и техники. 2010. № 3 (4). С. 74–80.

References

1. Busnyuk N. N., Novikov V. A. Optimal solution method of assignment problem in network planning. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6 (188): Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 170–172 (In Russian).
2. Conway R. W., Maxwell W. L., Miller L. W. *Teoriya raspisaniy* [Theory of scheduling]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 360 p.
3. Busnyuk N. N., Chernyak A. A. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling]. Minsk, Belarus Publ., 2014. 216 p.
4. Smelov V. V., Brusentsova T. P. *Osnovy setevogo planirovaniya* [Basics of network planning]. Minsk, BGTU Publ., 2010. 212 p.
5. Es'kova O. I., Kikot' I. I. Planning of the credit condition based on simulation of probabilistic net diagram. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki* [Problems of physics, mathematics and technique], 2010, no. 3 (4), pp. 74–80 (In Russian).

Информация об авторах

Буснюк Николай Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: busnnn@belstu.by

Новиков Василий Алексеевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения сетей телекоммуникаций. Белорусская государственная академия связи (220114, г. Минск, ул. Ф. Скорины, 8/2, Республика Беларусь). E-mail: vanovikov@tut.by

Information about the authors

Busnyuk Nikolay Nikolaevich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: busnnn@belstu.by

Novikov Vasily Alekseevich – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Communications Nets Software. Belarusian State Academy of Communications (8/2, F. Skoriny str., 220114, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vanovikov@tut.by

Поступила 25.04.2017