УДК 517.588

Л. Д. Яроцкая
Белорусский государственный технологический университет

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРАМ G-ФУНКЦИИ МЕЙЕРА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Проблема асимптотических разложений специальных функций по индексам или параметрам возникает в связи с исследованием некоторых классов индексных интегралов и преобразований по индексу. Наиболее общей функцией гипергеометрического типа, которая при соответствующих значениях параметров включает в себя элементарные функции, функции бесселевого типа и многие другие специальные функции, является G-функция Мейера. Для таких функций справедливо свойство иметь своим преобразованием Меллина отношение произведений гамма-функций Эйлера, асимптотика которых в соответствии с формулой Стирлинга известна.

Настоящая работа посвящена изучению асимптотических свойств G-функции Мейера специального вида – ядра интегрального преобразования по индексу. Записано представление G-функции в виде линейной комбинации обобщенных гипергеометрических рядов со степенными множителями. Представлена формула Стирлинга для гамма-функции Эйлера комплексного аргумента, у которого мнимая часть неограниченно увеличивается, а действительная фиксирована. Установлены асимптотические оценки G-функции Мейера специального вида при больших значениях параметра. Показано, что полученное разложение включает в себя в качестве частных случаев известные в литературе некоторые представления функций бесселевого типа.

Ключевые слова: асимптотическое разложение, G-функция Мейера, преобразования по индексу, функции бесселевого типа, формула Стирлинга.

L. D. Yarotskaya
Belarusian State Technological University

ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF SPECIAL MEIJER'S G-FUNCTION BY ITS PARAMETERS

The problem of asymptotic expansions of special functions with respect to indices or parameters arises in connection with the certain classes of index integrals and transformations with respect to the index. Meijer's G-function is the most common function of the hypergeometric type, which includes elementary functions, Bessel type functions and many other special functions. The Mellin transforms of such functions are the ratio of the products of the Euler gamma functions whose asymptotics are known in accordance to the Stirling formula.

This paper deals with some asymptotic expansions of G-function of a special kind related to the index integral transform. The representation of the G-function is written in the form of a linear combination of generalized hypergeometric series with power multipliers. We give the Stirling formula for the Euler gamma function of a complex argument, for which the imaginary part is unbounded and the real part is fixed. Asymptotic estimates for the Meijer's G-function of a special form with respect to large values of the parameter are established. It is shown that such expansion includes, as special cases, earlier known representations of Bessel type functions.

Key words: asymptotic expansion, Meijer's G-function, index transform, Bessel type functions, Stirling formula.

Введение. Проблема асимптотических разложений специальных функций по индексам или параметрам возникает в связи с исследованием некоторых классов индексных интегралов [1] и преобразований по индексу [2]. Асимптотические представления на бесконечности по параметрам функций Макдональда, Уиттекера, Лежандра, гипергеометрической функции Гаусса и некоторых других получены в работе [3], аналогичные вопросы для двух функций бесселевого типа рассмотрены в работе [4].

Общей функцией гипергеометрического типа, которая при соответствующих значениях параметров включает в себя элементарные функции, перечисленные выше специальные функции и многие другие функции, является G-функция Мейера. Элементы теории этой функции излагаются в справочнике [5].

Интегральные преобразования несверточного типа с G-функцией Мейера в ядре были введены в работе [6] и исследованы в [7] в пространстве функций $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$.

Настоящая работа посвящена изучению асимптотических свойств G-функции Мейера специального вида, введенной в работе [8] в качестве ядра интегрального преобразования по индексу в весовых пространствах суммируемых с квадратом функций.

Асимптотическое поведение функций гипергеометрического типа различно в зависимости от того, что стремится к бесконечности: параметры, независимая переменная или эти величины вместе. Исследования в этой области основаны или на интегральных представлениях, или же непосредственно на дифференциальном уравнении, или на подходящем разложении в бесконечный ряд [9].

Метод исследования в настоящей работе основан на представлении G-функции Мейера в виде линейной комбинации обобщенных гипергеометрических рядов и применении формулы Стирлинга для гамма-функции Эйлера.

Основная часть.

1. Предварительные сведения. G-функция Мейера определяется контурным интегралом Меллина – Барнса

$$\mathrm{G}_{p,q}^{m,n}\left(z\left|\begin{matrix}(a)_p\\(b)_q\end{matrix}\right.\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \Psi(s)z^{-s}ds \qquad (1)$$

для целых неотрицательных m, n, p, q, $0\le m\le q$, $0\le n\le p$, комплексных a_i и b_j при $z\ne 0$, где

$$\Psi(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+s)\prod_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i-s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-s)\prod_{i=n+1}^{p}\Gamma(a_i+s)}, \qquad (2)$$

при этом пустые произведения в (2) (если таковые имеются) считаются равными единице. Здесь L – специально выбранный замкнутый контур, проходящий через бесконечно удаленную точку и разделяющий все левые полюсы $s=-b_j-k$, j = 1, …, m, числителя от правых $s=1-a_i+k$, i = 1, …, n, k = 0, 1, 2,….

Важным свойством G-функции является то, что ее преобразование Меллина, определяемое равенством

$$(\mathfrak{M}f)(s)=\int_0^{\infty} f(t)t^{s-1}dt,\ s\in\mathbb{C}, \qquad (3)$$

является отношением произведений гамма-функций Эйлера и совпадает с функцией (2):

$$\left(\mathfrak{M}\,\mathrm{G}_{p,q}^{m,n}\left(z\left|\begin{matrix}(a)_p\\(b)_q\end{matrix}\right.\right)\right)(s)=\Psi(s)$$

при определенных условиях на параметры.

Замена переменной в интеграле (1) дает формулу симметрии:

$$\mathrm{G}_{p,q}^{m,n}\left(z\left|\begin{matrix}(a)_p\\(b)_q\end{matrix}\right.\right)=\mathrm{G}_{q,p}^{n,m}\left(\frac{1}{z}\left|\begin{matrix}1-(b)_q\\1-(a)_p\end{matrix}\right.\right). \qquad (4)$$

Свойство (4) позволяет преобразовать G-функцию, для которой $p > q$, в G-функцию, где $p<q$. Поэтому, не теряя общности, можно считать, что $p\le q$.

Важным рядом в приложениях и теории специальных функций является обобщенный гипергеометрический ряд

$${}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\b_1,\ldots,b_q\end{matrix};z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\ldots(a_p)_k}{(b_1)_k\ldots(b_q)_k}\frac{z^k}{k!}, \qquad (5)$$

содержащий в числителе p, а в знаменателе q параметров, коэффициенты которого определяются символом Похгаммера

$$(a)_k=a(a+1)\ldots(a+k-1),\ (a)_0=1.$$

Ряд в правой части (5) абсолютно сходится при всех z, если $p\le q$. Функции, представимые в виде линейной комбинации обобщенных гипергеометрических рядов, а также функции, которые можно непрерывно получить из такой линейной комбинации предельными переходами по параметрам, принято относить к классу функций гипергеометрического типа.

Отметим, что функции Бесселя являются частными случаями G-функции Мейера. Укажем некоторые представления [1], [10]:

1) функция Макдональда:

$$K_\nu(2\sqrt{x})=\frac{1}{2}\mathrm{G}_{0,2}^{2,0}\left(x\left|\nu/2,-\nu/2\right.\right); \qquad (6)$$

2) линейная комбинация функций Бесселя первого рода и функции Макдональда:

$$\left[J_{-\nu}\left(2\sqrt{2}x^{\frac{1}{4}}\right)-J_{\nu}\left(2\sqrt{2}x^{\frac{1}{4}}\right)\right]K_\nu\left(2\sqrt{2}x^{\frac{1}{4}}\right)=$$
$$=\frac{\sin(\pi\nu/2)}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{G}_{0,4}^{3,0}\left(x\left|0,\nu/2,-\nu/2,1/2\right.\right); \qquad (7)$$

3) линейная комбинация функций гипергеометрического типа [4]:

$$C_s(2\sqrt{x},2\tau)=\frac{1}{2\tau}\,{}_1F_2(1;1-i\tau,1+i\tau;x)-$$
$$-\frac{\pi}{4\,\mathrm{sh}(\pi\tau)}\left[I_{2i\tau}(2\sqrt{x})+I_{-2i\tau}(2\sqrt{x})\right]=$$
$$=\frac{\mathrm{sh}(\pi\tau)}{2}\mathrm{G}_{2,4}^{3,1}\left(x\left|\begin{matrix}0,1/2\\i\tau,-i\tau,\ 0,1/2\end{matrix}\right.\right). \qquad (8)$$

2. Постановка задачи. Изучить асимптотические свойства G-функции Мейера специального вида действительного аргумента

$$\mathrm{G}(x)=\mathrm{G}_{2n,2m+2}^{m+2,n}\left(x^2\left|\begin{matrix}1/2+(a)_n,(a)_n\\i\tau,-i\tau,(b)_m,1/2-(b)_m\end{matrix}\right.\right). \qquad (9)$$

Функция (9) рассматривалась в работе [8] в качестве ядра интегрального преобразования по индексу.

Предположим, что

$$m \geq n, a_j, b_k \in \mathbb{R}, j = 1,\ldots,n, k = 1,\ldots,m, \quad (10)$$

и никакие из параметров $b_1,\ldots,b_m$ не совпадают и не отличаются на целое число.

Выражение G-функции Мейера через линейные комбинации обобщенных гипергеометрических рядов (5) со степенными множителями следует из теоремы Слейтер [10].

Теорема 1. Пусть выполнены условия (10) и условия

$$a_j > -\frac{1}{2},\ a_j > -\frac{1}{2} - b_k,$$
$$j = 1,\ldots,n,\ \ k = 1,\ldots,m. \quad (11)$$

Тогда для действительных значений x G-функцию Мейера (9) можно представить следующим выражением:

$$2\,\mathrm{Re}_{i\tau}\left[x^{2i\tau}\Gamma\begin{pmatrix}-2i\tau,(b)_m - i\tau, 1/2-(a)_n + i\tau\\ -(a)_n - i\tau, 1/2+(b)_m + i\tau\end{pmatrix}\times\right.$$
$$\times {}_{2n}F_{2m+1}\left(\begin{matrix}1/2-(a)_n + i\tau, 1+(a)_n + i\tau\\ 1+2i\tau, 1-(b)_m + i\tau, 1/2+(b)_m + i\tau\end{matrix};\right.$$
$$\left.\left.(-1)^{n-m}x^2\right)\right] + \sum_{j=1}^{m} x^{2b_j}\Gamma\left(i\tau - b_j, -i\tau - b_j\right)\times$$
$$\times\Gamma\begin{pmatrix}(b)'_m - b_j, 1/2-(a)_n + b_j\\ -(a)_n - b_j, 1/2+(b)_m + b_j\end{pmatrix}\times$$
$$\times {}_{2n}F_{2m+1}\left(\begin{matrix}1/2-(a)_n + b_j\\ 1-i\tau + b_j, 1+i\tau + b_j, 1-(b)'_m + b_j,\end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix}1+(a)_n + b_j\\ 1/2+(b)_m + b_j\end{matrix};(-1)^{n-m}x^2\right), \quad (12)$$

где $(b)'_m - b_j$ означает

$$b_1 - b_j,\ldots,b_{j-1} - b_j, b_{j+1} - b_j,\ldots,b_m - b_j.$$

Из формул (12) и (4) непосредственно вытекают асимптотические оценки для G-функции (9) действительного аргумента:

$$\mathrm{G}(x) = \begin{cases} O\left(x^{2\beta}\right), x \to 0, \beta = \min\limits_{1\leq j\leq m}\left\{b_j\right\}, \\ O\left(|x|^{2\alpha-2}\right), x \to \infty, \alpha = \max\limits_{1\leq j\leq n}\left\{a_j\right\}. \end{cases} \quad (13)$$

Метод нахождения асимптотических выражений функции (9) при фиксированных x и больших τ основан на применении формулы Стирлинга для гамма-функции Эйлера [5]:

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right), \quad (14)$$

когда $z \to \infty$ и $|\arg z| < \pi$.

Лемма. При $\tau \to +\infty$ справедливо равенство

$$\Gamma(\alpha \pm i\tau) = \sqrt{2\pi}\tau^{\tau-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi\tau}{2}}\times$$
$$\times\exp\left[\pm i\left\{\frac{\pi}{2}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \tau\ln\tau - \tau\right\} - O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]. \quad (15)$$

Доказательство основано на оценке остаточного члена формулы (14), исходя из формулы Бине:

$$\ln\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln(2\pi) +$$
$$+\int_0^\infty\left[\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right]\frac{e^{-zt}}{t}dt, \quad \mathrm{Re}\, z > 0. \quad (16)$$

Пусть $z = \alpha + i\tau$, $\alpha > 0$. Без потери общности будем считать, что α и τ – действительные числа. Обозначим

$$\varphi(\alpha + i\tau) = \int_0^\infty\left[\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right]\frac{e^{-(\alpha+i\tau)t}}{t}dt =$$
$$= \int_0^\infty \phi(t)t^{-\gamma}e^{-i\tau t}dt, \quad 0 < \gamma < 1,$$

где

$$\phi(t) = \left[\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right]e^{-\alpha t}t^{-\beta}, \quad \beta = 1 - \gamma.$$

Очевидно, что $\phi(t)$ – функция ограниченной вариации на интервале $(0; +\infty)$. Более того, имеют место асимптотические соотношения:

$$\phi(t) = O(t^{\gamma}), \quad t \to +0,$$
$$\phi(t) = O(t^{-\beta}e^{-\alpha t}), \quad t \to +\infty.$$

Отсюда, согласно теореме 126 из [11], получим

$$\varphi(\alpha + i\tau) = \int_0^\infty \phi(t)t^{-\gamma}\cos(\tau t)dt +$$
$$+ i\int_0^\infty \phi(t)t^{-\gamma}\sin(\tau t)dt = O\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad \tau \to +\infty. \quad (17)$$

В силу (16) и (17), запишем формулу (14) в виде

$$\Gamma(\alpha \pm i\tau) = \sqrt{2\pi}\exp\left[\left(\alpha - \frac{1}{2} \pm i\tau\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left\{\ln\sqrt{\tau^2 + \alpha^2} \pm i\,\mathrm{arctg}\frac{\tau}{\alpha}\right\} - \alpha \mp i\tau - O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{2\pi}\tau^{\alpha-1/2} e^{-\pi\tau/2} \times$$
$$\times \exp\left[\pm\left\{ \frac{\pi}{2}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \tau\ln\tau - \tau \right\} - O\left(\frac{1}{\tau}\right) \right].$$

Отсюда после непосредственных преобразований следует формула (15).

Теорема 2. Пусть выполняются условия (10). Тогда справедливо асимптотическое разложение функции (9) при $\tau \to +\infty$:

$$G(x) = 2\pi e^{-\pi\tau}\tau^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}\tau^{(m-n-1)/2}} \cos\left((2m-2n+2)\times \right.\right.$$
$$\left. \times (\tau\ln\tau - \tau) - 2\tau\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2\tau^{2(m-n)+1}} + \frac{\pi}{2}\chi \right) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} C_j \left(\frac{x}{\tau}\right)^{2b_j} {}_{2n}F_{2m-1}\left(\begin{matrix} 1/2-(a)_n+b_j \\ 1-(b)'_m+b_j \end{matrix} \right.$$
$$\left. \left. \begin{matrix} 1+(a)_n+b_j \\ 1/2+(b)_m+b_j \end{matrix} ;\, (-1)^{n-m}\left(\frac{x}{\tau}\right)^2 \right) \right]\left(1+O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right), \quad (18)$$

где

$$\chi = 2\sum_{j=1}^{m} b_j + 2\sum_{j=1}^{n} a_j - \frac{m-n+1}{2},$$

$$C_j = \Gamma\left(\begin{matrix} (b)'_m - b_j, 1/2-(a)_n+b_j \\ -(a)_n - b_j, 1/2+(b)_m+b_j \end{matrix} \right).$$

Доказательство основано на применении леммы для гамма-множителей в представлении (12) функции (9). Оценим символ Похгаммера при $\tau \to +\infty$:

$$(a+i\tau)_k = \frac{\Gamma(a+i\tau+k)}{\Gamma(a+i\tau)} = (i\tau)^k\left(1+O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right).$$

Тогда первый гипергеометрический ряд в формуле (12) оценим следующим образом:

$${}_{2n}F_{2m+1}\left(\begin{matrix} 1/2-(a)_n+i\tau,\ 1+(a)_n+i\tau \\ 1+2i\tau, 1-(b)_m+i\tau,\ 1/2+(b)_m+i\tau \end{matrix} ;\right.$$
$$\left. (-1)^{n-m}x^2 \right) = \lim_{M\to\infty}\sum_{k=0}^{M} \frac{\left(1/2-(a)_n+i\tau\right)_k}{(1+2i\tau)_k\left(1-(b)_m+i\tau\right)_k} \times$$
$$\times \frac{\left(1+(a)_n+i\tau\right)_k}{\left(1/2+(b)_m+i\tau\right)_k} \frac{\left((-1)^{n-m}x^2\right)^k}{k!} =$$
$$= \lim_{M\to\infty}\sum_{k=0}^{M} \frac{(-1)^{n-m}(i\tau)^{2n-2m-1}}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k\left(1+O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right) =$$
$$= \exp\left(-\frac{ix^2}{2\tau^{1+2(m-n)}}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right), \tau\to+\infty.$$

Аналогичные рассуждения для второго слагаемого в (12) приводят к соотношению (18).

Из формулы (18) следуют следующие асимптотические разложения для функций (6)–(8):

$$K_{i\tau}(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{\tau}} e^{-\pi\tau/2}\sin\left(\tau\ln\left(\frac{2\tau}{x}\right) - \tau + \frac{\pi}{4} + \frac{x^2}{4\tau}\right)\times$$
$$\times\left(1+O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right), \tau\to+\infty, \quad (19)$$

$$\left[J_{-2i\tau}\left(2\sqrt{2x}\right) - J_{2i\tau}\left(2\sqrt{2x}\right)\right]K_{2i\tau}\left(2\sqrt{2x}\right) =$$
$$= \frac{i}{2\tau}\left[\cos\left(\tau\left(\ln\frac{4\tau^4}{x^2} - 4\right) + \frac{x^2}{2\tau^3}\right) + \cos\frac{2x}{\tau}\right]\times$$
$$\times\left(1+O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right), \tau\to+\infty, \quad (20)$$

$$C_s(2x,2\tau) = \left[\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\cos\left(\tau\ln\frac{4\tau^2}{x} - \tau - \frac{3\pi}{4} + \frac{x^2}{2\tau^5}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\tau}{\tau^2 - x^2}\right]\left(1+O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right), \tau\to+\infty. \quad (21)$$

Отметим, что формула (19) уточняет асимптотическое разложение, полученное в монографии [12, с. 182].

Заключение. Для G-функции Мейера записано представление в виде линейной комбинации обобщенных гипергеометрических рядов со степенными множителями. Представлена формула Стирлинга для гамма-функции Эйлера комплексного аргумента, у которого мнимая часть неограниченно увеличивается, а действительная фиксирована. Установлены асимптотические оценки G-функции Мейера специального вида при больших значениях параметра. Показано, что полученное разложение включает в качестве частных случаев известные в литературе представления функций бесселевого типа.

Литература

1. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 800 с.

2. Yakubovich S. B. Index transforms. Singapore: World Scientific Publ., 1996. 252 p.

3. Yakubovich S. B., Saigo M., Gusarevich L. D. Some asymptotic expansions of special functions by their indices // Fukuoka Univ. Sci. Reports. 1995. Vol. 25, no. 1. P. 23–32.

4. Яроцкая Л. Д. Асимптотические представления по индексу функций бесселевого типа // Труды БГТУ, Сер. VI: Физ.-мат. науки и информатика. 2004. Вып. XII. С. 18−21.

5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973. 295 с.

6. Wimp J. A class of integral transforms // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1964. Vol. 14, no. 2. P. 33–40.

7. Yakubovich S. B., Luchko Yu. F. The hypergeometric approach to integral transforms and convolutions. Ser. Mathematics and its Applications. Vol. 287. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994. 336 p.

8. Yarotskaya L. D. On index transforms with Meijer's G-function kernels // Integral Transforms and Special Functions. 2000. Vol. 10, no. 3−4. P. 309–320.

9. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990. 528 с.

10. Маричев О. И. Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). Минск: Наука и техника, 1978. 312 с.

11. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 334 с.

12. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.; Л.: Физматгиз, 1963. 379 с.

References

1. Prudnikov A. P., Brychkov Ju. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. Spetsial'nye funktsii* [Integrals and Series. Special functions]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 800 p.

2. Yakubovich S. B. Index transforms. Singapore, World Scientific Publ., 1996. 252 p.

3. Yakubovich S. B., Saigo M., Gusarevich L. D. Some asymptotic expansions of special functions by their indices. *Fukuoka Univ. Sci. Reports*, 1995, vol. 25, no. 1, pp. 23–32.

4. Yarotskaya L. D. Asymptotic representations of the Bessel type functions by their indices. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series VI, Physical-mathematical sciences and informatics, 2004, issue XII, pp. 31–33 (In Russian).

5. Beytmen G., Erdeyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. Gipergeometricheskaya funktsiya. Funktsii Lezhandra* [Higher Transcendental Functions. Hypergeometric function. Legendre functions]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 295 p.

6. Wimp J. A class of integral transforms. *Proc. Edinburgh Math. Soc*., 1964., vol. 14, no. 2, pp. 33–40.

7. Yakubovich S. B., Luchko Yu. F. The hypergeometric approach to integral transforms and convolutions. Ser. Mathematics and its Applications. Vol. 287. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1994. 336 p.

8. Yarotskaya L. D. On index transforms with Meijer's G-function kernels. *Integral Transforms and Special Functions*, 2000, vol. 10, no. 3−4, pp. 309–320.

9. Olver F. *Asimptotika i spetsial'nye funktsii* [Asymptotics and special functions]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 528 p.

10. Marichev O. I. *Metod vychisleniya integralov ot spetsial'nykh funktsiy (teoriya i tablitsy formul)* [The method of calculating integrals of special functions (theory and tables of formulas)]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1978. 312 p.

11. Titchmarsh Ye. *Vvedenie v teoriyu integralov Fur'ye* [Introduction to the theory of Fourier integrals]. Moscow; Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1948. 334 p.

12. Lebedev N. N. *Spetsial'nye funktsii i ikh prilozheniya* [Special functions and their applications]. Moscow; Leningrad, Fizmatgiz Publ., 1963. 379 p.

Информация об авторе

Яроцкая Людмила Дмитриевна − кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yarockaya@belstu.by

Information about the author

Yarotskaya Lyudmila Dmitrievna − PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yarockaya@belstu.by

Поступила 27.04.2017