УДК 517.977

А. А. Якименко
Белорусский государственный технологический университет

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМОЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В ОБЩЕЦИКЛИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

В статье рассматривается решение задачи модального управления в общециклическом случае для двумерной стационарной динамической системы с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию. Дается определение задачи модального управления для исследуемой системы. При решении задачи модального управления используются линейные регуляторы по типу обратной связи, содержащие как линейную, так и интегральную части. Регуляторы получены в явной форме как элементарные функции параметров исходной системы и ее вектора состояния.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, модальное управление, регуляторы, обратная связь, запаздывание.

A. A. Yakimenka
Belarusian State Technological University

MODAL CONTROL FOR ONE NEUTRAL TYPE SYSTEM IN GENERAL CYCLIC CASE

The paper deals with the modal control problem for the stationary two-dimensional dynamical system with retarded argument of neutral type with one input and one state delay in general cyclic case. The definition of a modal control problem for the system is given. For the solution for such a problem we use linear regulators of feedback type, comprising both linear and integral part. The regulators are obtained in an explicit form as a basic function of the initial parameters of the system and its state vector.

Key words: neutral type systems, modal control, regulators, feedback control, lag.

Введение. Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Такая задача хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом и систем нейтрального типа [1, 2] решение задачи модального управления значительно сложнее. Это обусловлено тем, что пространство состояний таких систем, как правило, бесконечномерно. Изучению такой задачи посвящена данная статья.

Основная часть. Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 \dot{x}(t-h) + bu(t),\ t>0, \tag{1}$$

где $A_i,\ i=0,1,2$ – постоянные 2×2-матрицы; $h>0$ – постоянное запаздывание; b – ненулевой 2-вектор. Не ограничивая общности, считаем $b'=[0,1]$ («′» означает транспонирование).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = q'_{00}x(t) + \sum_{i=0}^{L}\sum_{j=1}^{M} q'_{ij}x^{(i)}(t-jh) + \int_{-h}^{0} g'(s)x(t+s)\,ds, \tag{2}$$

где q_{00}, q_{ij} – 2-векторы; $g(s)$, $s\in[-h,0]$ – непрерывная 2-вектор-функция;

$$x^{(i)}(t) \overset{def}{=} \frac{d^i}{dt^i}x(t),\ x^{(0)}(t)\equiv x(t).$$

Характеристическое уравнение системы (1) имеет следующий вид:

$$\det\left[A_0 + A_1e^{-\lambda h} + A_2\lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_2\right] \equiv \equiv \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}\tilde{\alpha}_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h} = 0, \tag{3}$$

где числа $\tilde{\alpha}_{ij}$ вычисляются как функции матриц $A_i,\ i=0,1,2$, в частности $\tilde{\alpha}_{00}=\det A_0$, $\tilde{\alpha}_{20}=1$, $\tilde{\alpha}_{22}=\det A_2$.

Определение. Система (1) модально управляема регулятором вида (2), если для любых наперед заданных чисел $\alpha_{ij},\ i=0,1,2,$ $j=0,1,2,\ \alpha_{20}=1$, найдется регулятор (2) такой, что характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (2) имеет вид (ср. с (3)):

$$\det\left[A_0 + A_1e^{-\lambda h} + A_2\lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_2 + bU(\lambda)\right] \equiv \equiv \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}\alpha_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h} = 0, \tag{5}$$

где $U(\lambda)$ – регулятор (2) в частотной области.

Введем (2×2)-матрицы:

$$\mathrm{A}(\lambda) = A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h},$$

$$W(\lambda) = \left[\mathrm{A}(\lambda) b, \quad b\right], \lambda \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим общециклический случай:

$$\det W(\lambda) = c\left(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}\right), (c \neq 0).$$

Матрица $\mathrm{A}(\lambda)$ в этом случае имеет следующий вид:

$$\mathrm{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} & c\left(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}\right) \\ a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

где β_i, $i = 0, 1, 2$, γ_0 – некоторые действительные числа; $a_j(\lambda)$, $j = 1, 2$ – квазиполиномы:

$$a_i(\lambda) = a_{i0} + a_{i1} e^{-\lambda h} + a_{i2} \lambda e^{-\lambda h},$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$; $i = 1, 2$, $j = 0, 1, 2$.

Регулятор вида (2) в частотной области будем искать в виде

$$U(\lambda) = \left(\tfrac{1}{c}\eta_1(\lambda) - a_1(\lambda), \quad \eta_2(\lambda) - a_2(\lambda)\right).$$

Рассмотрим уравнение

$$\lambda^2 + (\gamma_1 - \beta_0)\lambda + \beta_1\gamma_0 - \beta_0\gamma_1 \equiv$$
$$\equiv (\lambda - \xi_1)(\lambda - \xi_2) = 0, \quad \lambda, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}. \qquad (4)$$

Пусть выполнено условие:

$$\xi_1 \neq \xi_2. \qquad (5)$$

Рассмотрим величины

$$\delta(\xi_i) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\xi_i h} - \xi_i, \ i = 1, 2.$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема. Для того, чтобы система (1) была модально управляема регулятором вида (2) в случае (5), необходимо и достаточно выполнения условий

$$\delta(\xi_i) \neq 0, \ i = 1, 2.$$

При этом компоненты регулятора вида (2) в частотной области имеют вид:

$$\eta_1(\lambda) = -\alpha_{22}\lambda e^{-\lambda h} + \left(\alpha_{22}\beta_0 - \alpha_{21}\beta_1\right)e^{-\lambda h} -$$
$$-\left(\alpha_{12} + \alpha_{22}(\xi_1 + \xi_2)\right)e^{-\lambda h} + \frac{1}{\beta_1}\Big(-\alpha_{22}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right) +$$
$$+\alpha_{12}\beta_0 + \alpha_{22}\beta_0(\xi_1 + \xi_2) - \alpha_{11}\beta_1 - \beta_1^2 -$$
$$-\alpha_{02} - \alpha_{22}\xi_1\xi_2 - \alpha_{21}\beta_1(\xi_1 + \xi_2) - \alpha_{12}(\xi_1 + \xi_2)\Big) +$$
$$+\frac{1}{\beta_1(\xi_1 - \xi_2)\delta(\xi_1)\delta(\xi_2)}\Big(\alpha_{22}\left(\delta(\xi_1)\xi_2^4 - \delta(\xi_2)\xi_1^4\right) +$$
$$+\left(\alpha_{21}\beta_1 + \alpha_{12} - 2\alpha_{22}\beta_0\right)\left(\delta(\xi_1)\xi_2^3 - \delta(\xi_2)\xi_1^3\right) +$$
$$+\left(-2\alpha_{12}\beta_0 + \alpha_{02} - \alpha_{21}\beta_0\beta_1 + \alpha_{11}\beta_1 + \beta_1^2 + \alpha_{22}\beta_0^2\right) \times$$
$$\times\left(\delta(\xi_1)\xi_2^2 - \delta(\xi_2)\xi_1^2\right) +$$
$$+\left(\alpha_{10}\beta_1^2 - \alpha_{11}\beta_0\beta_1 - 2\alpha_{02}\beta_0 + \alpha_{12}\beta_0^2 + \alpha_{01}\beta_1\right) \times$$
$$\times\left(\delta(\xi_1)\xi_2 - \delta(\xi_2)\xi_1\right) +$$
$$+\left(\alpha_{00}\beta_1^2 + \alpha_{02}\beta_0^2 - \alpha_{01}\beta_0\beta_1\right)\left(\delta(\xi_1) - \delta(\xi_2)\right)\Big) +$$
$$+\frac{1}{(\xi_1 - \xi_2)\delta(\xi_1)\delta(\xi_2)} \times$$
$$\times\left(\alpha_{22}\left(\delta(\xi_1)\xi_2^4 \frac{e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_2)} - \delta(\xi_2)\xi_1^4 \frac{e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_1)}\right) + \right.$$
$$+\left(\alpha_{21}\beta_1 + \alpha_{12} - 2\alpha_{22}\beta_0\right) \times$$
$$\times\left(\delta(\xi_1)\xi_2^3 \frac{e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_2)} - \delta(\xi_2)\xi_1^3 \frac{e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_1)}\right) +$$
$$+\left(-2\alpha_{12}\beta_0 + \alpha_{02} - \alpha_{21}\beta_0\beta_1 + \alpha_{11}\beta_1 + \beta_1^2 + \alpha_{22}\beta_0^2\right) \times$$
$$\times\left(\delta(\xi_1)\xi_2^2 \frac{e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_2)} - \delta(\xi_2)\xi_1^2 \frac{e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_1)}\right) +$$
$$+\left(\alpha_{10}\beta_1^2 - \alpha_{11}\beta_0\beta_1 - 2\alpha_{02}\beta_0 + \alpha_{12}\beta_0^2 + \alpha_{01}\beta_1\right) \times$$
$$\times\left(\delta(\xi_1)\xi_2 \frac{e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_2)} - \delta(\xi_2)\xi_1 \frac{e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_1)}\right) +$$
$$+\left(\alpha_{00}\beta_1^2 + \alpha_{02}\beta_0^2 - \alpha_{01}\beta_0\beta_1\right) \times$$
$$\left.\times\left(\delta(\xi_1) \frac{e^{-\xi_2 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_2)} - \delta(\xi_2) \frac{e^{-\xi_1 h} - e^{-\lambda h}}{(\lambda - \xi_1)}\right)\right).$$

$$\eta_2(\lambda) = -\beta_0 - \alpha_{10} - \alpha_{21}\lambda e^{-\lambda h} +$$
$$+\left(\frac{1}{\beta_1}\Big(\left(\beta_0 - (\xi_1 + \xi_2)\right)\left(\alpha_{22}\left(\beta_0 - (\xi_1 + \xi_2)\right) - \right.\right.$$
$$\left. - \alpha_{21}\beta_1 - \alpha_{12}\right) - \alpha_{21}\beta_1 - \alpha_{12}\Big) +$$
$$\left. +\beta_0\left(\alpha_{12} + \alpha_{22}(\xi_1 + \xi_2)\right)\right) -$$
$$-\frac{1}{\beta_1(\xi_1 - \xi_2)}\Big(\alpha_{22}\left(\xi_1^3 - \xi_2^3\right) + \left(\alpha_{12} + \alpha_{21}\beta_1\right)\left(\xi_1^2 - \xi_2^2\right) +$$
$$+\alpha_{22}\beta_1\left(\xi_1^2 e^{-\xi_1 h} - \xi_2^2 e^{-\xi_2 h}\right) +$$
$$+\alpha_{11}\beta_1\left(\xi_1 - \xi_2\right) + \alpha_{12}\beta_1\left(\xi_1 e^{-\xi_1 h} - \xi_2 e^{-\xi_2 h}\right) +$$
$$+\alpha_{02}\beta_1\left(e^{-\xi_1 h} - e^{-\xi_2 h}\right)\Big) + \frac{\beta_1}{\delta(\xi_1)\delta(\xi_2)(\xi_1 - \xi_2)} \times$$

$$\times\Big(\alpha_{22}\left(\xi_1^2\delta(\xi_2)e^{-2\xi_1 h}-\xi_2^2\delta(\xi_1)e^{-2\xi_2 h}\right)+$$
$$+\alpha_{21}\left(\xi_1^2\delta(\xi_2)e^{-\xi_1 h}-\xi_2^2\delta(\xi_1)e^{-\xi_2 h}\right)+$$
$$+\xi_1^2\delta(\xi_2)-\xi_2^2\delta(\xi_1)+$$
$$+\alpha_{12}\left(\xi_1\delta(\xi_2)e^{-2\xi_1 h}-\xi_2\delta(\xi_1)e^{-2\xi_2 h}\right)+$$
$$+\alpha_{11}\left(\xi_1\delta(\xi_2)e^{-\xi_1 h}-\xi_2\delta(\xi_1)e^{-\xi_2 h}\right)+$$
$$+\alpha_{10}\left(\xi_1\delta(\xi_2)-\xi_2\delta(\xi_1)\right)+$$
$$+\alpha_{02}\left(\delta(\xi_2)e^{-2\xi_1 h}-\delta(\xi_1)e^{-2\xi_2 h}\right)+$$
$$+\alpha_{01}\left(\delta(\xi_2)e^{-\xi_1 h}-\delta(\xi_1)e^{-\xi_2 h}\right)+$$
$$+\alpha_{00}\left(\delta(\xi_2)-\delta(\xi_1)\right)\Big)\Big)e^{-\lambda h}+\frac{1}{\beta_1\delta(\xi_1)\delta(\xi_2)(\xi_1-\xi_2)}\times$$
$$\times\Bigg(\alpha_{22}\left((\beta_0-\xi_1)\delta(\xi_1)\xi_2^4\frac{\left(e^{-\xi_2 h}-e^{-\lambda h}\right)}{(\lambda-\xi_2)}-\right.$$
$$\left.-(\beta_0-\xi_2)\delta(\xi_2)\xi_1^4\frac{\left(e^{-\xi_1 h}-e^{-\lambda h}\right)}{(\lambda-\xi_1)}\right)+$$
$$+\left(-2\alpha_{22}\beta_0+\alpha_{21}\beta_1+\alpha_{12}\right)\times$$
$$\times\left((\beta_0-\xi_1)\delta(\xi_1)\xi_2^3\frac{\left(e^{-\xi_2 h}-e^{-\lambda h}\right)}{(\lambda-\xi_2)}-\right.$$
$$\left.-(\beta_0-\xi_2)\delta(\xi_2)\xi_1^3\frac{\left(e^{-\xi_1 h}-e^{-\lambda h}\right)}{(\lambda-\xi_1)}\right)+$$
$$+\left(-2\alpha_{12}\beta_0+\alpha_{02}-\alpha_{21}\beta_0\beta_1+\right.$$
$$\left.+\alpha_{11}\beta_1+\beta_1^2+\alpha_{22}\beta_0^2\right)\times$$
$$\times\left((\beta_0-\xi_1)\delta(\xi_1)\xi_2^2\frac{\left(e^{-\xi_2 h}-e^{-\lambda h}\right)}{(\lambda-\xi_2)}-\right.$$
$$\left.-(\beta_0-\xi_2)\delta(\xi_2)\xi_1^2\frac{\left(e^{-\xi_1 h}-e^{-\lambda h}\right)}{(\lambda-\xi_1)}\right)+$$
$$+\left(\alpha_{10}\beta_1^2-\alpha_{11}\beta_0\beta_1-2\alpha_{02}\beta_0+\alpha_{12}\beta_0^2+\alpha_{01}\beta_1\right)\times$$
$$\times\left((\beta_0-\xi_1)\delta(\xi_1)\xi_2\frac{\left(e^{-\xi_2 h}-e^{-\lambda h}\right)}{(\lambda-\xi_2)}-\right.$$
$$\left.-(\beta_0-\xi_2)\delta(\xi_2)\xi_1\frac{\left(e^{-\xi_1 h}-e^{-\lambda h}\right)}{(\lambda-\xi_1)}\right)+$$
$$+\left(\alpha_{00}\beta_1^2+\alpha_{02}\beta_0^2-\alpha_{01}\beta_0\beta_1\right)\times$$
$$\times\left((\beta_0-\xi_1)\delta(\xi_1)\frac{\left(e^{-\xi_2 h}-e^{-\lambda h}\right)}{(\lambda-\xi_2)}-\right.$$
$$\left.-(\beta_0-\xi_2)\delta(\xi_2)\frac{\left(e^{-\xi_1 h}-e^{-\lambda h}\right)}{(\lambda-\xi_1)}\right)\Bigg).$$

Заключение. В работе исследуется случай $\xi_1\neq\xi_2$. Случай $\xi_1=\xi_2$ требует дальнейшего исследования.

Литература

1. Якименко А. А. Модальное управление одной запаздывающей системой // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–7.

2. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 18–21.

References

1. Yakimenka A. A. Modal control for one delayed system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 3–7 (In Russian).

2. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 18–21 (In Russian).

Информация об авторе

Якименко Андрей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

Information about the author

Yakimenka Andrei Aliaksandravich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

Поступила 14.04.2017