УДК 519.624

И. Ф. Соловьева
Белорусский государственный технологический университет

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

В данной работе для решения двухточечных граничных задач с пограничным слоем рассматриваются методы, позволяющие процесс численного решения граничной задачи заменить решением нескольких задач Коши и некоторых нелинейных систем численных уравнений. Такие методы называются методами редукции граничных задач к задачам Коши. Сильной стороной такого подхода к решению граничных задач является то, что в этом случае для вычисления решений задач Коши можно применять численные методы, имеющие достаточно полное математическое обеспечение. Кроме этого, задачи Коши можно решать с шагом интегрирования, выбранным автоматически, причем на каждом шаге можно проводить контроль точности вычислений. В работе вводится понятие изолированности решения в предлагаемом методе множественной двусторонней пристрелки. Этот метод позволяет на заключительном этапе решать системы численных уравнений с небольшим числом неизвестных. Подробно строятся вычислительные схемы метода множественной двусторонней пристрелки. Сформулированы теоремы, обосновывающие и устанавливающие сходимость метода множественной двусторонней пристрелки.

Ключевые слова: малый параметр, пограничный слой, двухточечные граничные задачи, сходимость, изолированность решения.

I. F. Solov'yeva
Belarusian State Technological University

FEATURES OF SOLVING BORDER TASKS WITH BORDER LAYER

In this paper, to solve two-point boundary problems with a boundary layer, methods are considered that allow the numerical solution of the boundary value problem to be replaced by solving several Cauchy problems and some nonlinear systems of numerical equations. Such methods are called methods of reducing boundary value problems to Cauchy problems. The strong side of this approach to solving boundary problems is that in this case, numerical methods that have a sufficiently complete mathematical support can be used to calculate solutions of Cauchy problems. In addition, Cauchy problems can be solved with an integration step selected automatically, and at each step it is possible to control the accuracy of the calculations. In this paper we introduce the notion of solution isolation in the proposed method of multiple-sided two-sided alignment. This method allows us at the final stage to solve systems of numerical equations with a small number of unknowns. Computational schemes of the method of multiple two-sided alignment are constructed in detail. Theorems that substantiate and establish the convergence of the method of a multiple two-sided alignment are formulated.

Key words: small parameter, boundary layer, two-point boundary problems, convergence, solution, isolation.

Введение. Классы граничных задач многочисленны и разнообразны. Это определяется видом правой части уравнения, формой нелинейности, видом и типом граничных условий, порядком уравнения, входящих в систему дифференциальных уравнений, и т. д.

Проблемы исследования методов численного решения граничных задач весьма актуальны. В настоящее время интерес к этим задачам достаточно высок вследствие их многочисленных приложений. Область применения у них достаточно широка. Они распространены в физике, электродинамике, механике, акустике и других областях науки и техники.

В общем случае, когда рассматривается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (о. д. у.) первого порядка

$$y' = f(t, y), \ \ a \le t \le b,$$

для характеристики жесткости задачи используется большая классическая константа Липшица $L(t) = \sup\limits_{u \in M_t} \left\| \dfrac{\partial f(t,u)}{\partial y} \right\| \gg 0, \quad a \le t \le b$.

Если константа Липшица имеет большие значения, то такие задачи принято относить к числу жестких задач. Эта характеристика жесткости оценивается как вполне достаточная. К задачам такого вида можно отнести, например, задачи о вычислении сопротивления, возникающего при обтекании тела, о вычислении сопротивления трения корабля, профиля крыла или лопатки турбины, а также задачи, описывающие всевозможные диффузионно-конвективные процессы.

Проблеме численного решения нелинейных двухточечных граничных задач с пограничными слоями уделяется в настоящее время все большее внимание.

В ряде случаев при решении нелинейных граничных задач интересной является идея построения итерационных процессов таким образом, чтобы они приводили к необходимости численного решения только задач линейного вида, и чтобы итерационная последовательность приближенных решений этих линейных задач сходилась к искомому решению исходной нелинейной задачи.

Постановка задачи. Пусть задана нелинейная двухточечная задача с неразделенными граничными условиями:

$$y' = f(t, y), a \le t \le b, \quad (1)$$

$$g(y(a), y(b)) = 0, \quad (2)$$

где

$$y : [a,b] \to R^n, f : [a,b] \times R^n \to R^n,$$
$$g : R^n \times R^n \to R^n.$$

В качестве решения данной задачи предлагается метод множественной двусторонней пристрелки (м. м. д. п.), позволяющий заменить процесс численного решения граничной задачи решением нескольких задач Коши. Методы такого рода называют методами редукции граничных задач к задачам Коши. Сильной стороной такого подхода к решению граничных задач является тот момент, что для решения задач Коши в настоящее время можно применять сильно развитые, хорошо работающие и имеющие полное математическое обеспечение численные методы, в том числе обладающие, например, B-устойчивостью и D-устойчивостью [1].

При решении указанного выше типа задач стандартными численными методами возникают большие трудности, причина которых чаще всего заключается в неустойчивости численного процесса. В качестве специальных методов будем рассматривать метод множественной двусторонней пристрелки, обладающий необходимой гибкостью.

Алгоритм метода множественной двусторонней пристрелки. Предлагаемый метод множественной двусторонней пристрелки состоит в следующем [2].

Разбиваем отрезок на совокупность точек. Назовем их точками пристрелки:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{2m-1} < t_{2m} = b.$$

Множественную пристрелку организовываем таким образом, чтобы вычислительный процесс развивался в обоих направлениях.

Пристрелочные задачи Коши построим в прямом и обратном направлениях:

$$\begin{cases} u' = f(t, u), t \in J_{2j-1}^{(+)} = \{t_{2j-1} \le t \le t_{2j}\}; \\ u(t, y_{2j-1})\big|_{t=t_{2j-1}} = y_{2j-1}, \quad y_{2j-1} \in R^n, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} v' = f(t, v), \quad t \in J_{2j-1}^{(-)} = \{t_{2j-1} \ge t \ge t_{2j-2}\}, \\ v(t, y_{2j-1})\big|_{t=t_{2j-1}} = y_{2j-1}, \; y_{2j-1} \in R^n, \; j = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (4)$$

где t_{2j-1} – точки пристрелки; t_{2j} – точки сшива решений; y_{2j-1} – параметры пристрелки.

Для полученных пристрелочных задач Коши составляем замыкающую систему уравнений вида

$$\begin{cases} u(t_{2j}, y_{2j-1}) - v(t_{2j}, y_{2j+1}) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \\ g(v(t_0, y_1), u(t_{2m}, y_{2m-1})) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Обозначим:

$$z = (y_1^T, y_2^T, \ldots, y_{2m-1}^T)^T.$$

Перепишем замыкающую систему вида (5) в операторной форме

$$H(z) = 0, \quad (6)$$

где

$$H : R^N \to R^N, \quad N = m \times n.$$

Свойства замыкающих систем уравнений (5), (6) зависят от правой части *f*, исходного уравнения, формы граничных условий, области интегрирования $[a, b]$, точек пристрелки $u(t, y_{2j-1})$ и траекторий пристрелки $u(t, y_{2j-1})$, $v(t, y_{2j-1})$. Эти свойства наиболее полно характеризуются матрицами Якоби для соответствующих отображений *H*.

Для замыкающей системы уравнений (5) матрица Якоби будет иметь вид

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \begin{bmatrix} \Phi_2^{(k)} & -\Omega_2^{(k)} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_4 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \Phi_{2m-2}^{(k)} & -\Omega_{2m-2}^{(k)} \\ G_1^{(k)} & 0 & \ldots & 0 & G_{2m-1}^{(k)} \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{2j}^{(k)} = \frac{\partial v(t_{2j}, y_{2j-1}^{(k)})}{\partial y_{2j-1}}, \; \Omega_{2j}^{(k)} = \frac{\partial u(t_{2j}, y_{2j+1})}{\partial y_{2j+1}},$$

$$G_1^{(k)} = \frac{\partial g(P_{0,2m}^{(k)})}{\partial u} \Omega_0, \; G_{2m-1}^{(k)} = \frac{\partial g(P_{0,2m}^{(k)})}{\partial v} \Phi_{2m}^{(k)}.$$

Пусть $y(t)$ – искомое решение исходной граничной задачи. Введем обозначения:

$$z^* = (y_1^{*T}, ..., y_{2m-1}^{*T})^T. \qquad (7)$$

Понятно, что $H(z^*) = 0$, где z^* – решение исходной системы (1), (2).

Обозначим k-е приближение к решению z^*:

$$z^{(k)} = (y_1^{(k)T},\ y_3^{(k)T}, ..., y_{2m-1}^{(k)T})^T \in R^n.$$

Все оставшиеся приближения найдем, применяя модифицированный метод Ньютона, основанный на аппроксимации матрицы Якоби [3]:

$$\frac{\partial H(z^{(k)})}{\partial z} \Delta z^{(k)} = -H(z^{(k)}),$$

где $\frac{\partial H(z^{(k)})}{\partial z} \in L(R^n, R^n)$ – матрица Якоби.

Теперь искомое решение $y(t)$ исходной граничной задачи представляем формулой

$$y(t) = \begin{cases} v(t), y_{2j-1}^*), & t \in J_{2j-1}^{(-)}, \\ u(t, y_{2j-1}^*), & t \in J_{2j-1}^{(+)}, \quad j = \overline{1, m}. \end{cases} \qquad (8)$$

Для исследования сходимости м. м. д. п. вводится понятие изолированности решения исходной задачи [4].

Определение. Решение граничной задачи (1), (2) называется слабо изолированным или изолированным, если выполняются условия:

$$\det\left[\frac{\partial g(y(a), y(b))}{\partial y(a)} + \frac{\partial g(y(a), y(b))}{\partial y(b)}\Phi(a)\right] \neq 0,$$

$$\det\left[\frac{\partial g(y(a), y(b))}{\partial y(a)} + \frac{\partial g(y(a), y(b))}{\partial y(b)}\Phi(b)\right] \neq 0$$

на точном решении задачи (1), (2). Функция $\Phi(t)$ – это матричное решение задачи Коши

$$\Phi'(t) = \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y}\Phi(t),\ \Phi(a) = E,$$

где $a \le t \le b$, взятое при $t = b$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

1. Решение задачи (1), (2) есть вектор-функция $y(t) \in C[a, b]$.

2. $f(t, y) \in C^2(S_p)$,

где $S_p = \{(t, y) \in [a, b] \times R^n \,\big|\, \|y - y(t)\| \le p,\ p > 0\}$.

3. $g(u, v) \in C^2(\Theta_p)$,

где $\Theta_p = \{(u, v) \in R^n \times R^n \,\big|\, \|u - y(a)\| \le p,$ $\|v - y(b)\| \le p\}$

и отрезок $[a, b]$ достаточно мал.

Введем обозначения:

$$\Delta t_{i-1} = t_i - t_{i-1},\ u(t_{2j-1} - \tau\Delta t_{2j-2}, y_{2j-1}) \equiv \varphi_{2j-2}(\tau),$$

$$v(t_{2j-1} + \tau\Delta t_{2j-2}, y_{2j-1}) \equiv \psi_{2j-1}(\tau),\ 0 \le \tau \le 1,$$

$$j = \overline{1, m}.$$

Рассмотрим следующие задачи Коши:

$$\begin{cases} \varphi'(\tau) = B(\Delta t)\Phi(\tau, \varphi(\tau)),\ 0 \le \tau \le 1, \\ \varphi(\tau, z)\big|_{\tau=0} = z, \end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} \psi'(\tau) = C(\Delta t)W(\tau, \psi(\tau)),\ 0 \le \tau \le 1, \\ \psi(\tau, z)\big|_{\tau=0} = z, \end{cases} \qquad (10)$$

где

$$\varphi(\tau) = (\varphi_0^T(\tau),\ \varphi_2^T(\tau), ..., \varphi_{2m-2}^T(\tau))^T,$$

$$\Phi(\tau, \varphi(\tau)) = (f_0^T(\tau, \varphi_0(\tau)), ..., f_{2m-2}^T(\tau, \varphi_{2m-2}(\tau))^T,$$

$$\psi(\tau) = (\psi_1^T(\tau),\ \psi_3^T(\tau), ..., \psi_{2m-1}^T(\tau))^T,$$

$$W(\tau, \psi(\tau)) = (f_1^T(\tau, \psi_1(\tau)), ..., f_{2m-1}^T(\tau, \psi_{2m-1}(\tau)))^T,$$

где

$$B(\Delta t) = diag[-\Delta t_0 E, -\Delta t_2 E, ..., -\Delta t_{2m-2} E],$$

$$C(\Delta t) = diag[-\Delta t_1 E, -\Delta t_3 E, ..., -\Delta t_{2m-1} E].$$

Обозначим константу Липшица относительно φ для $\Phi(\tau, \varphi)$ на $S_p(X)$ через L^*, а константу Липшица относительно ψ для $W(\tau, \psi)$ на $S_p(Y)$ через L^{**}.

Обозначим $\Delta t^* = \max\limits_{1 \le j \le m} \Delta t_{2j-2}$, $\Delta t^{**} = \max\limits_{1 \le j \le m} \Delta t_{2j-1}$.

$$\delta = p\min\left[\exp(-L^*\Delta t^*), \exp(-L^{**}\Delta t^{**})\right],$$

$$\Omega_\delta = \left\{z \in R^n \,\big\|\, \|z^* - z\| \le \delta\right\}.$$

Теорема. Пусть выполняются условия 1 и 2. Тогда:

1) задачи Коши (9), (10) имеют соответственно единственные решения $\varphi(\tau, z)$ и $\psi(\tau, z)$, если $z \in \Omega_\delta$ и $\varphi(\tau, z) \in S_p(X)$ и $\psi(\tau, z) \in S_p(Y)$;

2) $\varphi(1, z) \in C^2(\Omega_\delta)$, $\psi(1, z) \in C^2(\Omega_\delta)$;

3) матрицы Якоби $\frac{\partial \varphi(\tau, z)}{\partial z}$ и $\frac{\partial \psi(\tau, z)}{\partial z}$ удовлетворяют соответственно следующим задачам Коши:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \varphi(\tau, z)}{\partial z}\right) = B(\Delta t)\frac{\partial \Phi(\tau, \varphi(\tau, z))}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial \varphi(0, z)}{\partial z} = E, \quad 0 \le \tau \le 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}\left(\dfrac{\partial\psi(\tau,z)}{\partial z}\right) = C(\Delta t)\dfrac{\partial W(\tau,\psi(\tau,z))}{\partial\varphi}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial\psi(0,z)}{\partial z} = E, \quad 0\le\tau\le 1. \end{cases}$$

Теорема. Пусть выполняются условия 1–3, и решение $y(t)$ задачи (1)–(2) слабо изолированное. Тогда имеют место:

1) $H(z)\in C^2\,(\Omega_\delta)$ и $H(z)=0$ при $z=z^*$;

2) $\det\left(\dfrac{\partial H(z)}{\partial z}\right)\ne 0$ при $z=z^*$ и существуют

такие разбиения $\{t_i\}_1^{2m}$ заданного отрезка $[a,b]$ и числа $\delta>0, \nu>0$, при которых выполняется $\left\|\left[\dfrac{\partial H(z)}{\partial z}\right]^{-1}\right\|<\delta$ для $\forall z\in\Omega_\delta\bigcap\bar{S}(z^*,\nu)$, где $\bar{S}(z^*,\nu)=\left\{z\in R^n \left\|z-z^*\right\|\le\nu\right\}$.

В случае прямого направления матрицы-блоки для пристрелочных задач Коши будут иметь вид:

$$\begin{cases} U'_{2j-1}(t)=\Phi_{2j-1}(u)U_{2j-1}(t), \\ U_{2j-1}(t_{2j-1})=I, \quad t\in J_{2j-1}^{(+)}, \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \Phi_{2j-1}(u)=\dfrac{\partial f(t,\ u(t,\ y_{2j-1}))}{\partial u}, \\ U_{2j-1}(t)=\dfrac{\partial u(t,\ y_{2j-1})}{\partial u}. \end{cases} \tag{12}$$

Аналогичным образом получаем матрицы-блоки для пристрелочных задач Коши, решаемых в обратном направлении:

$$\begin{cases} V'_{2j-1}(t)=\Phi_{2j-1}(v)V_{2j-1}(t), \\ V_{2j-1}(t_{2j-1})=I, t\in\ J_{2j-1}^{(-)}, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} &\Phi_{2j-1}(v)=\frac{\partial f(t,\ v(t,\ y_{2j-1}))}{\partial v}, \\ &V_{2j-1}(t)=\frac{\partial v(t,\ y_{2j-1})}{\partial y_{2j-1}}, \quad j=\overline{1,m}, \end{aligned} \tag{14}$$

причем

$$\begin{cases} U_{2j-1}^{(2j)}=U_{2j-1}(t_{2j}), \\ V_{2j-1}^{(2j-2)}=V_{2j-1}(t_{2j-2}). \end{cases} \tag{15}$$

Построим последовательные приближения:

$$z^{(k+1)}=z^{(k)}+\Delta z^{(k)}, \quad k=0,1,2,...$$

Найдем поправки $\Delta z^{(k)}$ в методе Ньютона:

$$\Delta z^{(k)}=(\Delta z_1^{(k)T},\Delta z_3^{(k)T},\ ...,\Delta z_{2m-1}^{(k)T})^T,$$

где

$$H=(h_1^{(k)},h_3^{(k)},...,h_m^{(k)})^T, \quad h_i^{(k)}=h_i(z^{(k)}).$$

На точном решении z^* выполняется неравенство

$$\det D_m(z^*)\ne 0$$

и, следовательно, решение граничной задачи изолировано. Значит, при хорошем начальном приближении $z^{(0)}$ нетрудно обеспечить сходимость метода Ньютона [5]. Вычислительные свойства метода Ньютона достаточно сильно зависят от свойств матрицы Якоби $\dfrac{\partial H}{\partial z}$. Свойства матрицы Якоби, в свою очередь, определяются числом и длинами положительных $J_{2j-1}^{(+)}$ и отрицательных $J_{2j-1}^{(-)}$ подинтервалов пристрелки.

Заключение. Выбор числа и определение длин положительных и отрицательных подинтервалов пристрелки позволяет повысить качество пристрелочных траекторий, а также дает возможность регулирования свойств матрицы Якоби [3]. Это существенно влияет на сходимость итерационного процесса и повышает его устойчивость к погрешностям округления.

Данный метод позволяет улучшать свойства пристрелочных траекторий, ослабляет условия на локализацию начальных приближений, уменьшает число неизвестных.

Предложенная схема метода множественной двусторонней пристрелки позволяет решать широкие классы граничных задач с пограничным слоем.

Литература

1. Соловьева И. Ф. Влияние малого параметра при старшей производной на решение граничных задач // Труды БГТУ. 2015. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 15–18.

2. Соловьева И. Ф. Численное решение граничных задач с малым параметром при старшей производной // Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов: материалы Междунар. науч.-техн. конф., Минск, 22–24 октября 2015 / БГТУ. Минск, 2015. С.177– 180.

3. Соловьева И. Ф. Исследование матриц Якоби и чисел обусловленности при решении нелинейных граничных задач // Труды БГТУ. 2016. № 6 (188): Физ.-мат. науки и информатика. С. 14–17.

4. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутта для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1983. 200 с.

5. Холл Д., Уатт Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1989. 312 с.

References

1. Solov'yeva I. F. The Influence of a Small Parameter in the Highest Derivative on the Solution of Boundary Problems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 15–18 (In Russian).

2. Solov'yeva I. F. Numerical solution of boundary value problems with a small parameter for the highest derivative. *Materialy Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii (Avtomaticheskiy control' i avtomatizatsiya proizvodstvennykh protsessov)* [Materials of the International Scientific and Technical Conference (Automatic control and automation of production processes)]. Minsk, 2015, pp. 177–180 (In Russian).

3. Solov'yeva I. F. Investigation of Jacobi matrices and condition numbers in the solution of nonlinear boundary value problem [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6 (188): Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 14–17 (In Russian).

4. Dekker K., Verver Ya., *Ustoychivost' metodov Runge-Kutta dlya zhestkikh differentsial'nykh uravneniy nelineynykh* [Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1983. 200 p.

5. Holl D., Uatt D. *Sovremennye chislennye metody resheniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Modern numerical methods for solving ordinary differential equation]. Moscow, Mir Publ., 1989. 312 p.

Информация об авторе

Соловьева Ирина Федоровна − кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ira1234568@tut.by

Information about the author

Solov'yeva Irina Fedorovna – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ira1234568@tut.by

Поступила 17.04.2017