

УДК 532.517

А. М. Волк

Белорусский государственный технологический университет

**ГИДРОДИНАМИКА ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ
НА ПРОНИЦАЕМОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Выполнен анализ исследований гидродинамики пленочных движений в сепарационных, фильтровальных, тепло- и массообменных, газожидкостных аппаратах и реакторах. Проведено теоретическое исследование пленочного движения жидкой фазы на внутренней поверхности проницаемого цилиндра под воздействием массовых сил поля тяжести и закрученного газового потока. Впервые получены дифференциальные уравнения движения, найдены точные решения для составляющих скорости при условии прилипания пленки на поверхности проницаемого цилиндра и равенстве касательных напряжений на границе раздела фаз, определена толщина пленки. Найдены гидродинамические характеристики пленочного течения и аналитические условия для возможных режимов движения при условии отвода жидкой фазы через проницаемую поверхность.

Ключевые слова: аппараты, пленочное движение, закрученный поток, проницаемая поверхность, точные решения, гидродинамические характеристики, режимы движения.

A. M. Volk

Belarusian State Technological University

**HYDRODYNAMICS OF LIQUID FILM
ON A PERMEABLE CYLINDRICAL SURFACE**

The studies of the hydrodynamics of film movements in the separation, filtration, heat and mass transfer, gas-liquid reactors and apparatuses are analyzed. The theoretical study of film movement in the liquid phase on the inner and outer surfaces of the cylinder under the influence of the gravitational field of mass forces and swirling gas flow is done. For the first time, the differential equations of motion is obtained, the exact solutions for the velocity components subject to adherence of the film on the surface of a permeable cylinder and equality of shear stresses at the interface are found, the film thickness is determined. The hydrodynamic characteristics of film flow and analytical conditions for the possible modes of motion are found.

Key words: apparatus, film motion, swirling flow, permeable surface, exact solutions, hydrodynamic characteristics, motion regimes.

Введение. Гидродинамика пленочного течения на проницаемых поверхностях имеет существенное значение для процессов фильтрования суспензий, отвода жидкой фазы в процессе сепарации газожидкостных потоков, при тепло-массообмене. В этих случаях пленочное течение осуществляется на проницаемых поверхностях.

Отсос используется также для управления пограничным слоем и влияния на устойчивость ламинарного режима движения [1, 2].

Воздействия газового потока на пленку жидкости передаются посредством сил трения, возникающих на границе взаимодействия фаз.

Касательные напряжения на стенке трубы диаметром $D = 2R$ определяются гидродинамическим напором [1]:

$$\tau_R = \frac{\lambda_0 \rho_{\Gamma} \bar{W}_Z^2}{4 \cdot 2}. \quad (1)$$

При степенном распределении осевой скорости газового потока с показателем $1/7$ коэффициент трения для гладких труб вычисляется по формуле Блазиуса [1]:

$$\lambda_0 = \frac{0,3164}{\text{Re}^{0,25}}, \quad (2)$$

который зависит от числа Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\bar{W}_Z D}{\nu_{\Gamma}}.$$

При наличии пленочного течения на внутренней поверхности трубы волновая поверхность рассматривается как нерегулярная шероховатость стенок канала. Обобщением экспериментальных данных в этом случае для коэффициента трения на границе раздела фаз получено соотношение [3, 4]

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + \frac{300\delta}{D} \right). \quad (3)$$

Для определения тензора касательных напряжений в исследуемых диапазонах изменения скорости газового потока могут быть использованы рассмотренные ранее зависимости, которые дают осевую составляющую

$$\tau_z = \frac{0,0791}{\text{Re}^{0,25}} \rho_{\Gamma} \bar{W}_z^2 \left(1 + \frac{300\delta}{D} \right). \quad (4)$$

Касательная составляющая зависит от угла закрутки потока и при этом будет

$$\tau_{\varphi} = \tau_z \text{tg}(k\beta). \quad (5)$$

Установившееся пленочное течение характеризуется равновесием сил тяжести и возникающих сил трения.

Теоретически исследуются только автомодельные течения с постоянным отсосом или вдувом по всей поверхности.

Скорость оттока сплошной среды определяется свойствами проницаемой поверхности и перепадом давления на ней [5, 6]. При турбулентном режиме движения среды через отверстия в стенке на основании уравнения Бернулли получаем квадратичный закон:

$$U_0 = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho(1+\xi-\bar{f}^2)}} = \gamma \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}. \quad (6)$$

Для потоков, не имеющих относительной продольной скорости, коэффициент расхода γ зависит только от свойств проницаемой поверхности. Идельчиком [7] при обработке экспериментальных данных получена формула зависимости коэффициента расхода γ от относительной площади \bar{f} отверстий:

$$\gamma^{-2} = \frac{(0,707\sqrt{1-\bar{f}} + 1 + \bar{f})^2}{\bar{f}^2}. \quad (7)$$

Для исследования процессов разделения многофазных потоков необходимо математическое моделирование движения закрученного газового потока и пленочного течения жидкости с учетом взаимодействия фаз как внутри непроницаемого цилиндра, так и при оттоке жидкой фазы на проницаемых поверхностях.

Экспериментальные исследования более полно характеризуют происходящие процессы, но они не всегда позволяют выделить и проанализировать доминирующие факторы.

Гидродинамика данного процесса в значительной степени зависит от оттока жидкой фазы. В настоящее время практически не имеется адекватной модели и метода расчета процесса разделения фаз при пленочном течении суспензии.

Наиболее полными и достоверными данные и расчеты будут при сочетании экспериментальных и теоретических методов анализа исследуемых процессов.

Математическая модель. Рассмотрим установившееся осесимметричное течение вязкой

несжимаемой жидкости по внутренней стенке проницаемого цилиндра под воздействием закрученного газового потока (рис. 1). Ось z цилиндрической системы координат направим вниз по оси цилиндров.

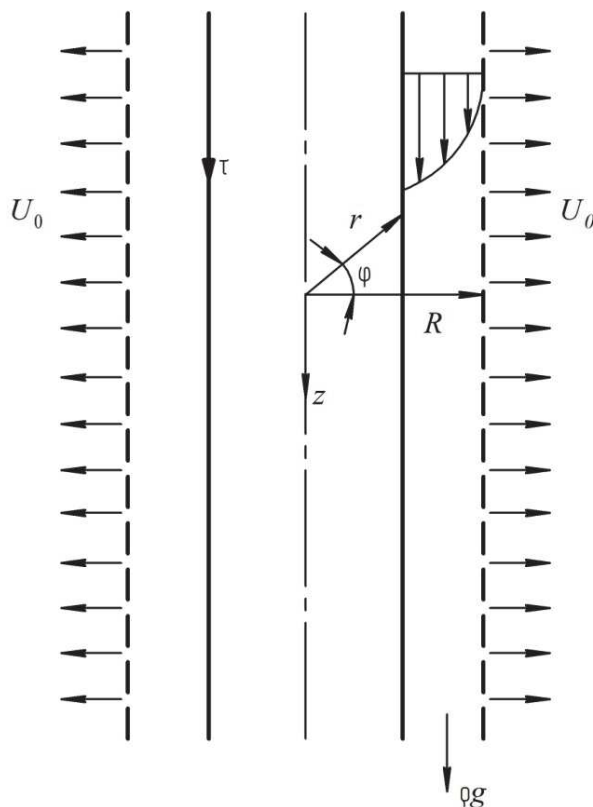


Рис. 1. Схема двухфазного пленочного течения на проницаемой цилиндрической поверхности

Скорость оттока жидкой фазы U_0 на некотором элементарном цилиндре длиной Δz будем считать постоянной. Объемный расход несжимаемой жидкости через цилиндрические поверхности равной длины будет одинаков: $2\pi r U_r \Delta z = 2\pi R U_0 \Delta z$. Отсюда находим радиальную скорость в пленке жидкости $U_r = \frac{U_0 R}{r}$.

Тогда из уравнения неразрывности

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

получим $\frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$ и $U_z = U_z(r)$.

Принимаем $\psi = \frac{\partial P}{\partial z} = \text{const}$. С учетом осе-

симметричности $\frac{\partial U}{\partial \varphi} \equiv 0$ уравнения Навье –

Стокса для составляющих скорости и давления приводим к виду:

$$\frac{d^2U_z}{dr^2} - \frac{1}{r} \left(\frac{U_0 R}{v} - 1 \right) \frac{dU_z}{dr} = -\frac{\rho g - \Psi}{\mu},$$

$$\frac{d^2U_\phi}{dr^2} - \frac{1}{r} \left(\frac{U_0 R}{v} - 1 \right) \frac{dU_\phi}{dr} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{U_0 R}{v} + 1 \right) U_\phi = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \left(\frac{U_\phi^2}{r} + \frac{U_0^2 R^2}{r^3} \right).$$

В результате получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Это означает, что решение $U = U(r)$ будет автомодельным. Выполним переход к безразмерной координате $\tilde{r} = r/R$, обозначим $\alpha = \frac{U_0 R}{v}$ и получим:

$$\frac{d^2U_z}{d\tilde{r}^2} - \frac{(\alpha-1)}{\tilde{r}} \frac{dU_z}{d\tilde{r}} = -\frac{\rho g - \Psi}{\mu} R^2, \quad (9)$$

$$\frac{d^2U_\phi}{d\tilde{r}^2} - \frac{(\alpha-1)}{\tilde{r}} \frac{dU_\phi}{d\tilde{r}} - \frac{(\alpha+1)}{\tilde{r}^2} U_\phi = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \left(\frac{U_\phi^2}{r} + \frac{U_0^2 R^2}{r^3} \right). \quad (11)$$

Для граничных условий используем значения составляющих скорости жидкости на цилиндрической поверхности и компонентов тензора касательных напряжений:

$$\tau_z = -\mu \frac{\partial U_z}{\partial r}, \quad \tau_\phi = -\mu \left(\frac{\partial U_\phi}{\partial r} - \frac{U_\phi}{r} \right) \quad (12)$$

на границе раздела фаз.

Частные решения уравнений (9–11) ищем в виде r^k и получаем общие решения:

$$U_z = c_1 + c_2 \tilde{r}^\alpha + \frac{\rho g - \Psi}{2\mu(\alpha-1)} \tilde{r}^2; \quad (13)$$

$$U_\phi = \frac{c_3}{\tilde{r}} + c_4 \tilde{r}^{\alpha+1}. \quad (14)$$

За граничные условия принимаем условие прилипания на стенке и равенство касательных напряжений (12) на границе раздела фаз:

$$U_z|_{\tilde{r}=1} = U_\phi|_{\tilde{r}=1} = 0; \quad \tau_z = -\frac{\mu}{R} \frac{dU_z}{d\tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}}, \quad (15)$$

$$\tau_\phi = -\mu \left(\frac{\partial U_\phi}{R \partial \tilde{r}} - \frac{U_\phi}{R \tilde{r}} \right) \Big|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}}. \quad (16)$$

Из условия равновесия сил, действующих на газовый поток,

$$\pi(R - \tilde{\delta})^2 \Delta P = 2\pi(R - \tilde{\delta}) \tau'_z l$$

получим

$$\Psi = \frac{\Delta P}{l} = \frac{2\tau'_z}{R(1-\tilde{\delta})} = -\frac{2\tau_z}{R(1-\tilde{\delta})}.$$

Учитывая граничные условия (15, 16), получаем распределение скорости в пленке жидкости:

$$U_z = \left[\frac{\tau_z R}{\mu(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-1}} + \frac{\rho g R^2}{\mu\alpha(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-2}} \right] \times \\ \times (1 - \tilde{r}^\alpha) - \left[\frac{\rho g R^2}{2\mu\alpha(\alpha-2)} + \frac{\tau_z R}{\mu(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})} \right] (1 - \tilde{r}^2), \quad (17)$$

$$U_\phi = \frac{R\tau_\phi(1-\tilde{\delta})^2}{\mu\alpha(1-\tilde{\delta})^{\alpha+2} + 2\mu} \left(\frac{1}{\tilde{r}} - \tilde{r}^{\alpha+1} \right). \quad (18)$$

Найдем объемный расход жидкой фазы на единицу периметра:

$$q = R \int_{1-\tilde{\delta}}^1 U_z \tilde{r} d\tilde{r} = \\ = \left[\frac{\tau_z R^2}{\mu(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-1}} + \frac{\rho g R^3}{\mu\alpha(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-2}} \right] \times \\ \times \left[\frac{1 - (1-\tilde{\delta})^2}{2} - \frac{1 - (1-\tilde{\delta})^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right] - \\ - \left[\frac{\rho g R^3}{2\mu(\alpha-2)} + \frac{\tau_z R^2}{\mu(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})} \right] \times \\ \times \left[\frac{1 - (1-\tilde{\delta})^2}{2} - \frac{1 - (1-\tilde{\delta})^4}{4} \right]. \quad (19)$$

Изменение данного объемного расхода по длине описывается уравнением

$$\frac{dq}{dz} = -U_0.$$

Разложение правой части в ряд до четвертой степени включительно имеет вид

$$q = \frac{\tau_z R^2}{\mu} \left[\frac{\tilde{\delta}^2}{2} + \frac{2\alpha}{3!} \tilde{\delta}^3 + \frac{3(\alpha^2+1)\tilde{\delta}^4}{4!} + \dots \right] + \\ + \frac{\rho g R^3}{\mu} \left(\frac{2\tilde{\delta}^3}{3!} + \frac{3\alpha-8}{4!} \tilde{\delta}^4 + \dots \right) =$$

$$= \frac{\tau_z \delta^2}{\mu} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{U_0 \delta}{v} + \frac{1}{8} \left(\frac{U_0^2 \delta^2}{v^2} + \frac{\delta^2}{R^2} \right) + \dots \right] + \frac{\rho g \delta^3}{\mu} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{24} \left(3 \frac{U_0 \delta}{v} - 8 \frac{\delta}{R} \right) + \dots \right]. \quad (20)$$

Данное разложение показывает, что изменение гидродинамических характеристик вследствие оттока жидкой фазы происходит, когда безразмерный комплекс Рейнольдса $\frac{U_0 \delta}{v}$ соизмерим с единицей.

Среднее значение тангенциальной составляющей скорости пленки и перепад давления в радиальном направлении будет:

$$\bar{U}_\phi = \frac{1}{\tilde{\delta}} \int_{1-\tilde{\delta}}^1 U_\phi d\tilde{r} = \frac{R \tau_\phi}{\tilde{\delta} \mu} \frac{(1-\tilde{\delta})^2}{\alpha(1-\tilde{\delta})^{\alpha+2} + 2} \times \left[\frac{1}{\alpha+2} - \frac{(1-\tilde{\delta})^{\alpha+2}}{\alpha+2} - \ln(1-\tilde{\delta}) \right], \quad (21)$$

$$\Delta P_r = \rho \int_{1-\tilde{\delta}}^1 \left(\frac{U_\phi^2}{r} + \frac{U_0^2 R^2}{r^3} \right) d\tilde{r}. \quad (22)$$

Исследуем пленочное течение воды в проницаемом цилиндре диаметром 0,15 м, под воздействием газового потока со средней расходной скоростью 15 м/с с углом закрутки в 45°. Расход жидкости примем равным 0,5 м³/ч, а скорость оттока жидкой фазы – 0,001 м/с. В данном случае из уравнения (20) получена толщина пленки 1,1 мм, а на рис. 2, 3 представлены графики составляющих скорости в зависимости от переменной $y = R - r$.

Графические зависимости показывают, что отток жидкой фазы через проницаемую поверхность существенно изменяет профили скоростей жидкой пленки. Распределение скоростей в пленке жидкости на проницаемой поверхности является линейным.

Вывод. Создание моделей процессов разделения, происходящих в конструируемых аппаратах, является важной и достаточно сложной задачей. Математическое описание позволяет выполнить расчет основных характеристик,

исследовать влияние на процесс различных факторов, сочетать теоретические и экспериментальные методы исследования, определять оптимальные конструкционные и технологические параметры.

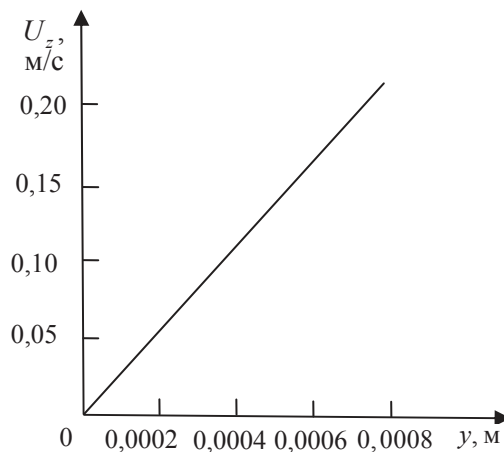


Рис. 2. Осевая составляющая скорости в пленке жидкости

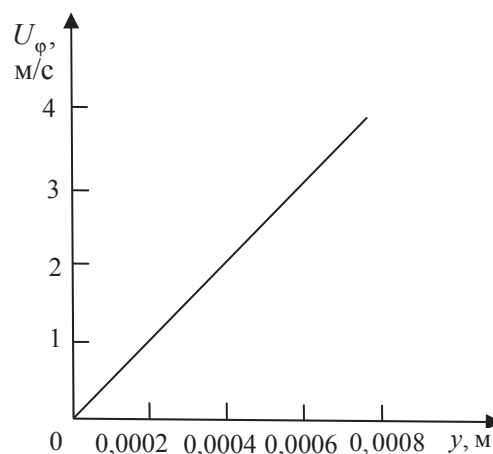


Рис. 3. Касательная составляющая скорости в пленке жидкости

Полученная математическая модель дает возможность определить гидродинамические характеристики пленочного течения под воздействием закрученного газового потока с учетом оттока жидкой фазы и учитывать их при исследовании процессов фильтрования, а также найти оптимальные соотношения между геометрическими и режимными параметрами исследуемых процессов.

Литература

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
2. Ерошенко В. М., Зайчик Л. И. Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях. М.: Наука, 1984. 274 с.
3. Уоллс Г. Б. Одномерные двухфазные течения. М.: Мир, 1972. 440 с.
4. Соколов В. И., Доманский И. В. Газожидкостные реакторы. Л.: Машиностроение, 1976. 216 с.
5. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М.: Химия, 1974. 688 с.

6. Гельперин Н. И. Основные процессы и аппараты химической технологии: в 2 кн. М.: Химия, 1981. 812 с.
7. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1975. 560 с.

References

1. Schlikhting G. *Teoriya pogranichnogo sloya* [The theory of the boundary layer]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 742 p.
2. Yeroshchenko V. M., Zaychik L. I. *Gidrodinamika i teplomassoobmen na pronitsayemykh poverkhnostyakh* [Hydrodynamics and heat and mass transfer on permeable surfaces]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 274 p.
3. Uolis G. B. *Odnomernye dvukhfaznye techeniya* [One-dimensional two-phase flows]. Moscow, Mir Publ., 1972. 440 p.
4. Sokolov V. I., Domanskiy I. V. *Gazozhidkostnye reaktory* [Gas-liquid reactors]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1976. 216 p.
5. Berd R., St'yuart V., Laytfut Ye. *Yavleniya perenosa* [Transport phenomena]. Moscow, Khimiya Publ., 1974. 688 p.
6. Gel'perin N. I. *Osnovnye protsessy i apparaty khimicheskoy tekhnologii* [The main processes and apparatus of chemical technology]: in 2 books. Moscow, Khimiya Publ., 1981. 812 p.
7. Idel'chik I. Ye. *Spravochnik po gidravlicheskim soprotivleniyam* [Reference book on hydraulic resistance]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 560 p.

Информация об авторе

Волк Анатолий Матвеевич – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: volk@belstu.by

Information about the author

Volk Anatoliy Matveevich – PhD (Engineering), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: volk@belstu.by

Поступила 05.05.2017