ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 1 1990
СЕРЫЯ ФІЗІКА-ЭНЕРГЕТЫЧНЫХ НАВУК

СТАТЫСТЫЧНАЯ ФІЗІКА

УДК 532.542.3

Л. А. РОТТ

ОПИСАНИЕ ПЕРЕХОДНОЙ ОБЛАСТИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Сколь ни отдаленным все еще представляется решение проблемы турбулентности во всем желаемом объеме, достижения последних лет в понимании физической природы перехода ламинарного течения жидкости в турбулентное представляются бесспорными и настраивают на оптимистический лад.

Привлечение мощных вычислительных средств позволило на ряде модельных подходов — с той или иной степенью правдоподобия с турбулентностью — имитировать переход регулярного решения динамической задачи в хаотическое (фазовое превращение порядок — беспорядок). Извлекаемые из таких моделей физические следствия обладают большой эвристической ценностью [1]. Привлекательны и более просты модели, не требующие столь громоздких вычислений, но достигающие определенной наглядности в области зарождения хаоса [2]. Возможности вычислительной техники с наибольшей полнотой пока удалось раскрыть в области развитой турбулентности, опираясь на новые и вполне оправданные физические модели взаимодействия вихрей [3].

Самое значительное научное достижение последнего времени, могущее встать вровень с классическими работами по теории турбулентности нашего века, связано с раскрытием структуры хаоса, существованием в нем определенной степени организованности, структурного порядка [4, 5].

Большое впечатление производит *S*-теорема Ю. Л. Климонтовича, сравнимая по своему значению со знаменитой *H*-теоремой Больцмана. Согласно *S*-теореме, при переходе от гипотетически нестационарного ламинарного течения к стационарному турбулентному (при числах Рейнольдса, бóльших первого критического значения) производство энтропии и сама энтропия оказываются меньшими. Это позволяет рассматривать переход от ламинарного движения к турбулентному как неравновесный фазовый переход к более упорядоченной фазе. Как ни парадоксально это звучит, имеет место переход к более упорядоченному состоянию: молекулярный перенос импульса сменяется упорядоченным кооперативным переносом [6].

Теория турбулентности как традиционный раздел классической физики не избавлена от влияния и неклассических методов. Вполне оправданная миграция идей и методов квантовой электродинамики на область развитой турбулентности породила новое направление фундаментальных исследований. К такому направлению относится попытка обосновать классический подход А. Н. Колмогорова (колмогоровский скейлинг) методом квантово-полевого описания с помощью так называемой ренормгруппы [7]. Но именно такие попытки, очевидно, вызвали определенный пессимизм, небезынтересно выраженный Г. Моффатом в обзоре, посвященном современной гидродинамике [8].

Приведем характерную и весьма показательную выдержку из этого обзора: «Существует опасность возникновения серьезного коммуникационного барьера между «пуристами» и «традиционалистами» из-за недостаточных попыток каждой из сторон выразить проблемы или результаты в понятной для другой стороны форме... Хорошо сделают пуристы, если заметят, что все существенные успехи в теории турбулентности в прошлом были стимулированы мощными физическими аргументами. Математические методы в изоляции мало чего приносили, за исключением тяжкого труда и страдания!»

Вряд ли дано предугадать, на каком — физическом или математическом — языке будет построена окончательная теория турбулентности. Но одно несомненно: путь к ней не заказан от влияния новых языков, необходимости введения новых понятий и представлений. Вместе с тем, каковыми бы они ни были, новая теория всегда будет обязана ориентироваться на три классических результата: существование минимального масштаба турбулентности (гипотеза Колмогорова), одночастотного автоколебательного процесса как модели начального этапа возникновения турбулентности (картина ее зарождения по Ландау) и упомянутую выше теорему Климонтовича для другого предельного случая — развитой турбулентности (самоорганизации течения). Все три результата служат контрольными рубежами теории, основанной на едином рассмотрении ламинарного и турбулентного течений.

В строгой и заветной постановке теория турбулентности является задачей статистической физики, из общих принципов которой следуют известные феноменологические уравнения переноса (законы сохранения сплошной среды). Они могут быть получены с помощью статистических (кинетических) функций распределения различных групп молекул (унарных, бинарных и т. д.) в конфигурационном и импульсном — фазовом пространстве. В качестве таких функций сначала использовались одноиндексные (безусловные) коррелятивные функции [9—11], а затем и многоиндексные функции условных распределений [12]. С их помощью определяются основные макроскопические величины (плотность массы, скорость течения, плотность энергии, тензор напряжений, плотность теплового потока и т. п.).

Выполняемая при этом операция усреднения любой рассматриваемой динамической величины предполагает, кроме проведения усреднения по пространству импульсов молекул среды, усреднение и по малому объему конфигурационного пространства. Так, в методе условных распределений достаточно провести усреднение по объему молекулярной ячейки. Следствием такой операции является «сокрытие» внутреннего микроскопического флуктуационного механизма среды, его явного влияния на ее макроскопические свойства. Вместе с тем такое влияние может вулканизироваться, что, очевидно, имеет место (наряду с внешним возмущением) при переходе ламинарного течения жидкости в турбулентное.

Взаимное влияние гидродинамического движения на флуктуационный механизм среды (когда первое возбуждает флуктуации, передавая им энергию и импульс, а второй тормозит движение жидкости) подробно исследуется в [14, 15] на основе неравновесной статистической термодинамики [16]. Методом неравновесного статистического оператора получается связанная система гидродинамических уравнений для средних плотностей энергии и импульса и уравнения Фоккера—Планка для функций распределения коротковолновых флуктуаций.

Традиционно имеет место смена средств описания при переходе ламинарного течения в турбулентное. Уравнения Навье—Стокса, описывающие регулярные движения жидкости, после необходимой процедуры усреднения в области турбулентности переходят в незамкнутые уравнения Рейнольдса со всеми вытекающими отсюда трудностями. Единый подход к описанию ламинарного и турбулентного движений нарушается.

Возможно ли этого избежать, оставаясь в рамках феноменологического подхода и не прибегая априори к неизбежному и традиционному усреднению исходных гидродинамических уравнений в области свершившегося перехода? Самое главное, можно ли на этом пути предвидеть область перехода от ламинарного к турбулентному течению, пользуясь в обоих случаях единым описанием? На этот вопрос можно дать положительный ответ.

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ УСЛОВНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В силу наличия собственного флуктуационного механизма среды правомерно детерминированное гидродинамическое описание дополнить и вероятностными представлениями. Наряду с механическим предсказанием, что в данный момент времени в данной точке пространства $\mathbf{r}$ жидкость будет иметь скорость $\mathbf{v}$, исходим из того, что данное свойство — иметь скорость $\mathbf{v}$ — обладает вероятностным законом распределения. Это свойство может проявиться с той или иной вероятностью в окрестности точки $\mathbf{r}$. Окрестность эффективного проявления ожидаемого свойства может оказаться немалой и является определяющей характеристикой поведения жидкости [13].

Введем функцию $f(\mathbf{r}'|\mathbf{v}(\mathbf{r}))$ — плотность вероятности того, что в объеме dV около точки $\mathbf{r}'$ среда обладает скоростью $\mathbf{v}$, найденной как решение уравнения Навье—Стокса для точки пространства $\mathbf{r}$. Определяемая таким образом функция имеет смысл условной функции распределения для исходного стационарного течения жидкости. Изначально предполагаемое ламинарное течение гипотетически остается таковым при любых значениях скорости (числах Рейнольдса).

Очевидно, что, когда скорость течения во всех точках среды одинаковая ($\mathbf{v}=\text{const}$), должен иметь место предельный случай

$$f(\mathbf{r}' \mid \mathbf{v}(\mathbf{r})) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}). \tag{1}$$

В этом случае возможность быть скорости $\mathbf{v}$ в точке $\mathbf{r}$ является достоверным событием (δ — функция Дирака).

В дальнейшем примем для f гауссовый закон распределения. Для изотропной жидкости запишем его в простейшем виде

$$f(\mathbf{r}' \mid \mathbf{v}(\mathbf{r})) = A \exp\left\{-\frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2}{2\rho^2(\mathbf{v})}\right\}. \tag{2}$$

Имея в виду, что из (2) должно следовать и (1), последнее возможно только при $\rho \to 0$. Но это означает, что коэффициенты дисперсии должны зависеть только от градиента скорости. Раскладывая их в ряды по указанным градиентам и ограничиваясь первыми ненулевыми членами, для среднеквадратичного отклонения ρ изотропной жидкости получим

$$\rho = a(\nabla \mathbf{v})^2, \quad a = \text{const}. \tag{3}$$

Для параболического пуазейлевого профиля скорости ρ равно:

$$\rho = \frac{a}{4\eta^2} \left| \frac{dp}{dx} \right|^2 r^2. \tag{4}$$

Здесь p — давление, ось x направлена вдоль оси трубы, η — коэффициент сдвиговой вязкости, r — расстояние точки до оси трубы.

Нетрудно установить связь дисперсионных характеристик с вязким тензором напряжений v_{ij}. Через последний определяется, как известно (см. [4], с. 305), производство энтропии за счет внутренних диссипативных процессов. В дальнейшем будем рассматривать стационарное течение изотермической несжимаемой изотропной жидкости. В этом случае производство энтропии σ равно:

$$\sigma = \frac{\eta}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad x_i = x,\ y,\ z. \tag{5}$$

Тогда, используя (3) и (5), при заданной температуре T получим соотношение

$$\rho = \frac{2aT}{\eta}\sigma. \tag{6}$$

Рассмотрим пуазейлевое течение по трубе радиуса R. Разделим радиус на ряд участков (концентрических слоев жидкости) различной ширины b_i. Пусть $\mathbf{v}_1$ — скорость в одной из точек внутри отрезка b_1 — является решением уравнения Навье—Стокса в предположении существования стационарного ламинарного течения. Соответственно $\mathbf{v}_2$ — скорость для точки внутри соседнего отрезка b_2. С другой стороны, располагая функцией распределения f, можно оценить вероятность наступления события A, состоящего в том, что переносная скорость движения жидкости $\mathbf{v}_1$ проявится в конечной окрестности dy, принадлежащей интервалу b_2 (проявление на этом же интервале скорости $\mathbf{v}_2$ назовем событием B). Тогда вероятность P наступления события A или B, т. е. $A+B$ (A и B — совместимые и независимые события):

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

и при некоторых условиях все слагаемые в правой части становятся сравнимыми величинами. Как увидим, произойдет это при турбулентном переносе жидкости.

Событие A означает, что происходит резекция переносной скорости $\mathbf{v}_2$ гипотетического ламинарного течения на переносную скорость $\mathbf{v}_1$ и относительную скорость, связанную с возникающим вихревым движением (соответственно разделяется кинетическая энергия). Событие B означает наличие вероятности восстановления $\mathbf{v}_2$ — первоначального ламинарного режима течения. Возникает процесс перемежаемости [17, 18].

Знание функции f и соответствующей ей интегральной функции распределения Φ позволит построить замкнутый динамический формализм такого процесса, дополняющий исходное гидродинамическое описание гипотетического ламинарного течения. Создаваемый таким образом формализм послужит альтернативой традиционному подходу, связанному с усреднением исходных дифференциальных уравнений движения.

§ 2. ДВА КРИТЕРИЯ ПЕРЕХОДА ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОЕ

Рассмотрим разность двух значений среднеквадратического отклонения $\rho(\mathbf{r}_1)$ и $\rho(\mathbf{r}_2)$. Она, безусловно, будет зависеть от разности положений двух соответствующих точек среды $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Соотношение между ними может принять принципиально различный характер, определяя ламинарное и турбулентное течения жидкости. Первому случаю будет соответствовать неравенство

$$|\rho_1 - \rho_2| < \beta |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, \quad \beta = \text{const}, \tag{7}$$

а второму — обратное неравенство

$$|\rho_1 - \rho_2| > \beta |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|. \tag{8}$$

В том, что возможны оба случая, легко убедиться на примере стационарного течения Пуазейля. При постоянном градиенте давления dp/dx для любых двух точек в поперечном сечении трубы и в одном радиальном направлении

$$|\rho_1 - \rho_2| = \frac{a}{4\eta^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 |r_1^2 - r_2^2|, \tag{9}$$

и неравенство (7) означает, что

$$\frac{a^*}{4\eta^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2(2r_1+h)<1,\quad h=r_2-r_1>0,\ a^*=\frac{a}{\beta}. \qquad (10)$$

Граница перехода ламинарного течения в турбулентное связана с обращением (7) в равенство, из которого определим коэффициент a^*:

$$a^*=\frac{2\eta^2}{R\left(\frac{dp}{dx}\right)^2_{\text{кр}}},\quad 2r_1+h\leqslant 2R. \qquad (11)$$

Действительно, если градиент давления меньше критического значения, неравенство (7) с учетом (11) выполняется при любых значениях r_1 и r_2. Этого заведомо не будет, если градиент давления больше критического значения.

То, что при нарушении неравенства (7) следует качественно новое состояние жидкости, видно из общих соображений: так как (7) относится и к сколько угодно близким точкам, нарушение неравенства означает и «разрушение» дифференциального уравнения, описывающего ламинарное течение. Вывод уравнения становится неправомерным из-за потери смысла производной скорости. Она становится случайной величиной. Действительно, производная скорости (градиент) будет иметь физический смысл, если вероятности появления соответственно скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r}+\triangle\mathbf{r})$ будут определенно различаться (здесь $\triangle\mathbf{r}$ — при всей малости — макроскопический масштаб). Но это имеет место только при соблюдении условия (7), т. е. в ламинарном режиме течения жидкости, а не в турбулентном, когда вступает в силу неравенство (8). Те же рассуждения справедливы и для производной по времени: для сохранения ее смысла различие $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{v}(t+\triangle t)$ должно отличаться устойчивостью, «долгоживучестью» (хотя и в масштабе времени $\triangle t$; см. § 3).

Из всего изложенного выше можно получить три следствия, имеющие экспериментальное подтверждение. Это прежде всего тот факт, что турбулентность зарождается не одновременно по всему сечению по мере роста градиента давления, а непременно начинается от поверхности трубы. Нетрудно определить толщину слоя турбулентности $R-R_0$, используя неравенство (10):

$$R_0=R\left[2\frac{\left(\frac{dp}{dx}\right)^2_{\text{кр}}}{\left(\frac{dp}{dx}\right)^2}-1\right]. \qquad (12)$$

Теперь неравенство (10) справедливо только для точек сердцевины потока радиуса R_0. Обратное неравенство (8) имеет место для указанного пристеночного слоя турбулентности. Полная турбулизация потока наступит при $\frac{dp}{dx}=\sqrt{2}\left(\frac{dp}{dx}\right)_{\text{кр}}$, когда R_0 обращается в нуль.

В тесной связи с первым следствием находится и второе. Так как градиент давления пропорционален числу Рейнольдса Re, то ширина области полного перехода ламинарного течения в турбулентное определяется отношением $\mathrm{Re}/\mathrm{Re}_{\text{кр}}=\sqrt{2}$. При увеличении $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$, как это имеет место, ширина переходной области увеличивается.

Отметим попутно, что при течении жидкости между двумя параллельными неподвижными плоскостями высота пристеночного слоя турбулентного движения y определяется выражением

$$y=\frac{h}{2}\left[1-\frac{\left(\frac{dp}{dx}\right)^2_{\text{кр}}}{\left(\frac{dp}{dx}\right)^2}\right], \qquad (13)$$

где h — расстояние между плоскостями. Как видно из (13), в отличие от течения по трубе полная турбулизация в принципе наступает при $\left|\frac{dp}{dx}\right| \to \infty$.

Из сказанного выше вытекает также и третье следствие — неизбежность существования пограничного слоя. Это особенно наглядно видно на примере течения Куэтта. При отсутствии такого слоя неравенство (7) никогда не могло бы нарушиться (левая часть всегда равна нулю в силу линейного характера профиля скорости) и турбулентное течение не должно было возникнуть.

В то же время видно, что условие (8) не является достаточным для перехода ламинарного течения в турбулентное, так как не содержит требования существования минимального масштаба турбулентности (гипотеза Колмогорова). По условию (8) толщина начального турбулентного пристеночного слоя могла бы быть сколь угодно малой, что на самом-то деле, как будет показано ниже, не имеет места.

Обратимся снова к пуазейлевому течению и на его примере продолжим иллюстрацию развиваемой теории. Рассмотрим два соседних слоя ширины b_1 (от стенки) и b_2 (соответственно $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — скорости течения, о которых речь шла выше). Условие (8) означает, что первый слой жидкости шириной b_1 «захлестывает» слой b_2. Теперь, наверняка, при $\rho_1 \gg \rho_2$ на втором внутреннем участке может быть скорость $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_1$ (последняя, конечно, как переносная скорость жидкости). Таким образом, во втором слое наступает чередование ламинарного и турбулентного движения жидкости (автоколебательный режим). Вступает в силу сильное взаимодействие слоев жидкости, что и является определяющей чертой турбулентности.

Разобьем радиус R на конечное, но произвольное число отрезков b_k. Располагая выражением (3), можно построить интегральную функцию распределения для данной скорости $\mathbf{v}$, вычисленной для произвольной фиксированной точки данного отрезка. Если таковой точкой будет $y_{0\,k-1}$ на отрезке b_{k-1} (ось y направлена от внутренней поверхности трубы вдоль его радиуса), в которой и найдена скорость $\mathbf{v}_{k-1}$ как решение уравнения Навье—Стокса, то интегральная функция распределения $\Phi(y_{k-1})$ равна:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\rho_{k-1}} \int\limits_{-\infty}^{y_{k-1}} \exp\left\{-\frac{(y_{k-1} - y_{0\,k-1})^2}{2\rho_{k-1}^2(y_{0\,k-1})}\right\} dy_{k-1}. \tag{14}$$

Аналогичную функцию построим и для соседнего участка b_k. При этом всегда $\rho_{k-1}(y_{0\,k-1}) > \rho_k(y_{0\,k})$. В силу этого разность их можно связать с тем, что, начиная с некоторого значения числа Рейнольдса, первая функция $\Phi(y_{k-1})$ пересечет вторую — $\Phi(y_k)$ именно на соседнем отрезке b_k. Имеет место «столкновение» двух кривых, что и послужит аналогом столкновения двух соседних слоев гипотетически ламинарного потока жидкости. Все это и является следствием нарушения условия (7), т. е. наступления условия (8). Произойдет это тогда, когда при

$$y_k \leqslant \frac{b_{k-1}}{2} + b_k, \tag{15}$$

если связать $y_{0\,k-1}$ с серединой отрезка b_{k-1} и положить $y_{0\,k-1} = 0$, значения двух интегральных функций распределения станут одинаковыми в точке $y_{k-1}^* = y_k^* \in b_k$:

$$\Phi(y_{k-1}^*,\ \rho_{k-1}) = \Phi(y_k^*,\ \rho_k). \tag{16}$$

Равенство (16) позволяет в принципе найти координату y^*, а вместе с (15) определить еще одно независимое от (7), (8) условие для разности $\rho_{k-1} - \rho_k$.

Для промежуточных качественных оценок (предварительных) поиск точки пересечения двух интегральных кривых распределения заменим поиском точки пересечения соответствующих дифференциальных кривых распределения (правых их ветвей), что не является принципиальным отступлением от рассматриваемой идеологии. Тогда следует

$$y_k^* \simeq \frac{b_{k-1}+b_k}{2}\left[1+\frac{\rho_k}{\rho_{k-1}}\sqrt{1+\frac{8A\rho_{k-1}^2}{(b_{k-1}+b_k)^2}\ln\frac{\rho_{k-1}}{\rho_k}}\right],$$

$$A=\frac{\rho_{k-1}^2-\rho_k^2}{\rho_{k-1}^2} \tag{17}$$

и для искомой разности $\rho_{k-1}-\rho_k$, используя (15) и (17), получим дополнительное условие турбулизации потока в слое жидкости:

$$\rho_{k-1}-\rho_k \geqslant \frac{\rho_{k-1}(b_{k-1}+b_k)}{(b_{k-1}+2b_k)(\rho_{k-1}+\rho_k)}\left[\rho_{k-1}+\right.$$

$$\left.+\rho_k\sqrt{1+\frac{8A\rho_{k-1}^2}{(b_{k-1}+b_k)^2}\ln\frac{\rho_{k-1}}{\rho_k}}\right]. \tag{18}$$

В отличие от первого (необходимого) условия нарушения ламинарного течения (8) условие (18) не допускает сколь угодно малой ширины слоя турбулизации, т. е. действительно имеет место конечный масштаб турбулентности. Мы вправе назвать условие (18) достаточным.

Действительно, рассматривая два соседних слоя b_1 и b_2, легко убедиться, что они не могут быть сколь угодно малыми, чтобы при этом не нарушилось условие (18). Существенно, что ширина первого пристеночного ламинарного слоя b_1 имеет минимальное значение. И именно этот слой служит «внешним» источником возмущения для соседнего слоя b_2. Последний в свою очередь является таковым же для третьего слоя и т. д.

§ 3. ПРОЦЕСС ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ. ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Как уже отмечалось выше, все рассмотрение основано на известном расширении динамического формализма. С одной стороны, для используемых функций $\Phi(y)$ требуется решение гидродинамической задачи (уравнения Навье—Стокса), с другой, время существования такого решения (ламинарного течения) является конечным и периодически сменяется на время существования турбулентного вихря. Если полный период принять за единицу, то указанные времена удобно обозначить как $2\Delta t_k$ — время (вероятность) жизни переносной скорости слоя жидкости $\mathbf{v}_{k-1}$ на участке b_k и $1-2\Delta t_k$ — время жизни первоначальной скорости ламинарного течения $\mathbf{v}_k$ на том же участке b_k. Граница этих временных интервалов определяется условием (16)

$$1-2\Delta t_k=\Phi(y^*). \tag{19}$$

Здесь и далее Φ — удвоенное значение интеграла вероятностей в интервале $[0,\ y_{k-1}^*]$.

С помощью интегральных функций распределения (14) формально можно получить два уравнения $y_{k-1}(t)$ и $y_k(t)$, которые приобретают смысл квазикинематических уравнений движения. Основное предположение и основано на том, что взаимодействие слоев жидкости как причина турбулизации может быть описано на языке столкновений указанных уравнений движения. Поэтому $2\Delta t_k$ — время от момента пересечения кривых $y_{k-1}(t)$ и $y_k(t)$ до конца периода (время жизни турбулентного вихря).

Динамический формализм дополняется оператором трансформации, собственными значениями которого и являются искомые величины Δt_k. До какого-то критического значения напора (первого критического значения числа Рейнольдса) оператор работает «вхолостую» (нет пересечения кривых $y_{k-1}(t)$ и $y_k(t)$ на отрезке b_k) и вступает в силу при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\text{кр}}$. Тогда и происходит разделение скорости течения на переносную поступательную, навязываемую соседним слоем, и относительную вращательную скорость.

Развиваемый динамический формализм явился в известном смысле аналогом ранее предложенного формализма для квантовомеханических задач, в которых набор точечных материальных объектов, составляющих систему, сохраняется в среднем: имеет место периодическая трансформация системы (растворение в среде-континууме и возрождение отдельных частиц) [19]. Характер трансформации является собственным динамическим свойством системы. Описание последней основывается на задании оператора трансформации (наряду с оператором-гамильтонианом). Вводится понятие квазикинематических уравнений движения виртуальных частиц, по которым система получает естественное динамическое развитие: первоначальное стартовое распределение в соответствии с вариационным принципом претерпевает последующие «исчезновения» и «возрождения» части частиц. Уравнения движения определяются с помощью собственной волновой функции уравнения Шредингера для исходного числа частиц. Вычисляются средние динамические характеристики системы. Из-за различных возможных стартовых распределений возникают новые дополнительные квантовые числа. Расширяется классификация возможных квантовых переходов.

Если представить характерную скорость гипотетического ламинарного потока при данном градиенте (перепаде) давления в одной из точек в слое b_k (определяется из условия сохранения потока, а k отсчитывается от стенки и равно 1, 2, ... n) как сумму двух скоростей

$$v_k = \bar{v}_k + \delta v_k, \tag{20}$$

где $\bar{v}_k$ — средняя скорость переносного движения турбулизованного слоя толщиной b_k, то

$$\bar{v}_k = v_k \Phi_k(\gamma) + v_{k-1}(1 - \Phi_k(\gamma)), \quad \gamma = \frac{\dfrac{dp}{dx}}{\left(\dfrac{dp}{dx}\right)_{\text{кр}}}. \tag{21}$$

Здесь и далее используем интеграл вероятностей Φ как функцию γ-отношения градиента давления к его критическому значению.

С помощью (21) можно вычислить среднепоточную скорость, а затем и кривую гидравлического сопротивления $\lambda(\gamma)$ с непрерывным переходом от ламинарного к турбулентному течению, с характерными особенностями переходной области.

Найдем искомую кривую в первом простейшем случае существования двух слоев — ламинарного шириной $b_1 = R/3$ и турбулизованного $b_2 = 2/3R$. Тогда, согласно (2), (17) и (19), для параболического пуазейлевского профиля скоростей

$$1 - 2\Delta t_2 = \Phi(y^*), \quad \Phi(y^*) \equiv \Phi\left(\frac{1{,}47}{\gamma^4}\right). \tag{22}$$

Среднепоточная скорость переносного движения турбулентной жидкости U определяется через вероятности $2\Delta t_2$ и $1 - 2\Delta t_2$, т. е. $\Phi_2(\gamma)$ и $1 - \Phi_2(\gamma)$:

$$U = \frac{5}{9} v_1 + \frac{4}{9}\left[v_2 \Phi(\gamma) + v_1(1 - \Phi(\gamma))\right]. \tag{23}$$

Напомним, что $2\Delta t_2$ — время (вероятность) жизни переносной скорости $\mathbf{v}_1$ на участке b_2 и $1-2\Delta t_2$ — время жизни первоначальной скорости ламинарного течения $\mathbf{v}_2$ на том же участке b_2. Граница этих временных интервалов определяется условием (22) как частным случаем (19). Скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ определим из условия сохранения гипотетического ламинарного потока (как средние значения в соответствующих поперечных сечениях двух слоев жидкости):

$$v_1 = \frac{5R^2}{72\eta}\left|\frac{dp}{dx}\right|, \quad v_2 = \frac{7R^2}{36\eta}\left|\frac{dp}{dx}\right|. \tag{24}$$

Коэффициент сопротивления трубы в первой критической точке ($\gamma = 1$)

$$\lambda_{\gamma=1} = \frac{32\eta^2}{\rho R^3 \left|\frac{dp}{dx}\right|^2_{\text{кр}}}. \tag{25}$$

Здесь ρ — плотность жидкости; среднепоточная скорость ламинарного течения

$$U = \frac{R^2}{8\eta}\left|\frac{dp}{dx}\right|. \tag{26}$$

При числе Рейнольдса $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\text{кр}}$ $(\gamma > 1)$ коэффициент сопротивления λ определяется с помощью выражения для среднепоточной скорости переносного движения жидкости (23). Так как по определению

$$\lambda = \frac{\rho v_*^2}{\rho U^2}, \; v_* = \frac{R}{2\rho}\left|\frac{dp}{dx}\right|, \tag{27}$$

после подстановки (24) получим окончательно

$$\frac{\lambda_\gamma}{\lambda_{\gamma=1}} = \frac{81}{\gamma\left(5 + 4\Phi\left(\frac{1{,}47}{\gamma^4}\right)\right)^2}. \tag{28}$$

При $\gamma \leqslant 1$ $\Phi \simeq 1$ и $\lambda \sim \frac{1}{\gamma}$, что соответствует гиперболическому закону сопротивления трубы при ламинарном течении. Но далее с ростом γ (градиента давления) значения λ начинают возрастать, и кривая проходит через максимум в интервале $1 < \gamma < \sqrt{2}$. Сам интеграл вероятностей $\Phi(\gamma)$ существен для переходной области, и его роль достаточно быстро исчезает. Так, при $\gamma = \sqrt{2}$ $\Phi = 0{,}29$, $\gamma = \sqrt{3}$ и $\Phi(\gamma) = 0{,}13$, при $\gamma = 2$ $\Phi = 0{,}072$. А это означает, что время жизни периодически возрождающегося ламинарного течения $1-2\Delta t_2 \to 0$. С ростом γ, согласно (23), скорость $U \to v_1$ и профиль переносных скоростей сильно сплющивается.

§ 4. ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД

Фундаментальный вопрос для развиваемой теории, который до сих пор оставался открытым, состоит в том, чтобы выяснить, на сколько и каких слоев возможен распад исходного ламинарного потока. Условия (8) и (16) — соответствующие два критерия возникновения турбулентности — с ростом числа Рейнольдса допускают все больше вариантов распада. Этого и следовало ожидать.

Поиск ответа на поставленный вопрос должен быть, безусловно, связан с вариационным принципом. Таковым на первый взгляд мог бы быть принцип Пригожина о минимуме производства энтропии в стационарном состоянии [20], хотя сразу же возникает сомнение в правомерности его применения к такой нелинейной задаче, как турбулентность.

Если и поступиться сомнением, все равно прямое вычисление нужного для поставленной цели вязкого тензора напряжений труднодостижимо, если и вообще достижимо для турбулентного течения. Даже в случае ламинарного движения жидкости производство энтропии как функционал внутренних физически варьируемых структурных переменных явно неизвестно, хотя, безусловно, решение уравнения Навье—Стокса является экстремалью искомого функционала.

Среднее значение производства энтропии для гипотетического ламинарного течения при любом значении числа Re

$$\overline{\sigma}_{л} = \frac{R^2\left(\frac{dp}{dx}\right)^2}{24\eta T}. \tag{29}$$

Та же характеристика для турбулентного движения $\overline{\sigma}_{т}$ уже будет зависеть в развиваемой теории от того, на сколько и каких слоев распадался ламинарный поток. В выражение для $\overline{\sigma}_{т}$ явно войдет варьируемый параметр n (число слоев жидкости). Это и позволяет использовать вариационный подход.

Остановимся на изучении разности средних значений производств энтропии гипотетического ламинарного и осредненного турбулентного течений

$$\overline{\sigma}_{л} - \overline{\sigma}_{т} = \frac{\eta}{2T}\left(\overline{v_{ij}^2} - \overline{\bar{v}_{ij}^2}\right), \tag{30}$$

где тензор $\bar{v}_{ij}$, определяющий $\overline{\sigma}_{т}$, построен с помощью вектора (21), а усреднение имеется в виду по всем возможным слоям b_k.

Прямое вычисление (30) показывает, что эта разность имеет минимум и достигается при распаде потока на слои равной толщины $b_k = \frac{R}{n}$, хотя на самом-то деле этот минимум должен быть условным: он сочетается с требованиями критериев (8) и (16).

Перейдем теперь непосредственно к рассмотрению тех следствий, которые вытекают из минимизации выражения (30) с учетом сказанного выше. Для качественных оценок в силу отмеченных в § 2 трудностей критерий турбулизации (16) заменим более доступным выражением (18), которое в свою очередь при малости логарифмического члена запишем в форме

$$\rho_{k-1} - \rho_k \geqslant \frac{\rho_{k-1}(b_{k-1} + b_k)}{b_{k-1} + 2b_k}. \tag{31}$$

Рассмотрим два соседних слоя у поверхности трубы $(b_1 = b_2 = b)$. Необходимое условие турбулизации (8) дает неравенство

$$b < R\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right), \ \gamma > 1,$$

но достаточное условие (31) показывает, что b принимает ненулевое минимальное значение, не зависящее от γ (градиента давления, а значит, числа Рейнольдса), т. е. $b = 0{,}347\,R$. Значит, пограничный слой имеет толщину примерно $b/2 = 0{,}173\,R$.

Другое дело, если рассмотреть два соседних слоя от оси цилиндра $(b_{n-1} = b_n = b)$. Здесь все происходит как бы наоборот: достаточное условие (31) реализуется при любых значениях γ, а из необходимого условия следует, что

$$b_{\min} = \frac{R}{\gamma^2}. \tag{32}$$

Это и будет минимальным масштабом Колмогорова при заданном перепаде давления $\gamma \geqslant \sqrt{2}$ (за пределом переходной области [1, 17]). Таким образом, с сердцевины трубы реализуется мелкомасштабная турбулизация потока, что подтверждает известные представления [1]. Напомним, что зарождается турбулентность, напротив, вблизи поверхности трубы при $\gamma > 1$, где прежде всего начинают выполняться условия (8), (16).

Окончательно видим, что распад ламинарного потока связан с известной асимметрией. Это дополнительное требование позволяет по минимуму разности производств энтропии (30) окончательно определить число турбулизованных слоев. Последнее принимает избранные значения в соответствии с требованием (32) при определенных значениях перепада давления. С ростом числа Рейнольдса происходит скачкообразная перестройка турбулентного потока.

§ 5. ТУРБУЛЕНТНАЯ ВЯЗКОСТЬ

Располагая приведенными выше результатами, можно вычислить турбулентную вязкость $\eta_т$. Следуя Климонтовичу [21], запишем

$$\eta_т = \eta \left[1 + \frac{\overline{(\delta v_{ij})^2}}{\overline{v}_{ij}^2} \right]. \tag{33}$$

Представляя градиенты скоростей аналогично (20) и заменяя их конечными разностями

$$\nabla \overline{v}_k = 2 \, \frac{\overline{v}_k - \overline{v}_{k-1}}{b_{k-1} + b_k} = \frac{2\Delta \overline{v}_k}{b_{k-1} + b_k},$$

получим

$$\eta_т = \eta \, \frac{\overline{(\Delta v_k)^2}}{(\Delta \overline{v}_k)^2}, \tag{34}$$

где

$$\Delta \overline{v}_k = v_k \Phi_k - v_{k-1} (1 - \Phi_k - \Phi_{k-1}) + v_{k-2} (1 - \Phi_{k-1}). \tag{35}$$

С помощью этих же интегральных функций распределения Φ вычисляется среднее значение квадрата разности скоростей в двух соседних слоях $\overline{(v_k - v_{k-1})^2}$.

Исходное определение критического числа Рейнольдса $\mathrm{Re}^0_{кр}$, соответствующего минимальному масштабу турбулентности $b_{\min}$, приводится к виду:

$$\mathrm{Re}^0_{кр} = \frac{\overline{v}_n b_{\min}}{\nu_т} = \frac{\overline{v}_n R \, (\Delta \overline{v}_n)^2}{\nu_т \gamma^2 \, \overline{(\Delta v_n)^2}}, \tag{36}$$

где $\nu_т$ — кинематическая вязкость.

В качестве примера рассмотрим распад потока на три слоя (при $\gamma = \sqrt{3}$ — за максимумом на кривой гидравлического сопротивления; $b_{\min} = \frac{R}{3}$ и $b_1 = b_2 = b_3 = b_{\min}$). Скорости определим для середин отрезков

$$v_1 = \frac{R^2 \left| \frac{dp}{dx} \right|}{4\eta} \left(1 - \frac{25}{4\gamma^4} \right), \quad v_2 = \frac{R^2 \left| \frac{dp}{dx} \right|}{4\eta} \left(1 - \frac{9}{4\gamma^4} \right),$$

$$v_3 = \frac{R^2 \left| \frac{dp}{dx} \right|}{4\eta} \left(1 - \frac{1}{4\gamma^4} \right).$$

Тогда

$$\frac{\overline{(\Delta v_3)^2}}{(\Delta \overline{v}_3)^2} = \frac{64 \, (\Phi_3 - 2\Phi_2 + 2)}{A(\gamma) \, \Phi_2 + B(\gamma) \, \Phi_3 + C(\gamma) \, \Phi_2 \Phi_3}, \tag{37}$$

где A, B и C—полиномы восьмой степени γ. Отсюда следует, что $\mathrm{Re}^0_{\text{кр}} \ll \ll \mathrm{Re}$ уже при $\gamma \geqslant \sqrt{3}$ (различие более чем на два порядка).

§ 6. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Развиваемая теория последовательно вскрывает многочастотный механизм турбулентности. При этом обнаруживается существование двух спектров частот: один связан с пульсациями скорости, другой — с процессом перемежаемости. Характер частот зависит от конкретной реализации возможного распада ламинарного потока. Каждому отдельному турбулизованному слою соответствуют две частоты, хотя с некоторого значения γ частота перемежаемости обращается в нуль (подразумевается, что при этом система еще не перестроилась на более высокое число турбулизованных слоев жидкости).

Если ламинарный поток распался на два слоя $(R=b_1+b_2)$, а так оно и будет в начальный (переходный) период турбулизации, то процесс перемежаемости характеризуется частотой $\omega_1^{(2)}(\gamma)$. Значение этой частоты определяется относительными временами жизни соответственно ламинарного и турбулентного потоков в слое b_2 или вероятностями $\Phi(\gamma, y^*)$ и $1-\Phi(\gamma, y^*)$. Частота $\omega_1^{(2)}=0$ при $\Phi=1$ ($\gamma=1$ — начало турбулизации) и при $\Phi=0$ ($\gamma=\sqrt{2}$ — вторая критическая точка). Напротив, максимальное значение достигается при $\Phi=\frac{1}{2}$. Все это позволяет аппроксимировать функцию $\omega(\gamma)$ в виде

$$\omega = \omega_{\max} \sin \frac{2\pi\Delta t}{T}, \tag{38}$$

где $\dfrac{2\Delta t}{T} = 1-\Phi(\gamma,\ y^*)$.

Когда поток распадается на три слоя (с ростом γ), возникают две частоты перемежаемости $\omega_1^{(3)}$ и $\omega_2^{(3)}$ (первый слой от поверхности трубы взаимодействует со вторым (внутренним), второй — с третьим). Определяются они соответственно через функции $\Phi_2(\gamma)$ и $\Phi_3(\gamma)$. Так

$$\omega_1^{(3)} = \omega_{1\,\max}^{(3)} \sin \pi (1-\Phi_2). \tag{39}$$

С увеличением γ (напора) первой обращается в нуль частота $\omega_1^{(3)}$.

Спектр частот пульсации скорости определяется той частью кинетической энергии ламинарного потока, которая связана с замедлением поступательного переноса жидкости и соответственно образованием вихревого движения. Эта часть кинетической энергии определяется для каждого отдельного турбулизованного слоя через известную теперь разность квадратов скоростей $v_k^2-\bar{v}_k^2$. И частота пульсации

$$\omega \sim \frac{\left(v_k^2-\overline{v}_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}{b_k}. \tag{40}$$

Тогда по соседству с ламинарным пограничным слоем (у первого турбулизованного слоя) $\omega \sim \gamma$ (как было показано, b не зависит от γ), а в сердцевине трубы $\omega \sim \gamma^3$, так как и скорость, и масштаб b в соответствии с (32) зависят от перепада давления (γ). Здесь при выводе (40) имеется в виду, что момент инерции вихря определяется квадратом линейного размера b (толщиной турбулизованного слоя).

Summary

The theory of a unified decription of laminar and turbulent liquid flow in terms of the new dynamic formalism is presented. The starting hydrodynamic equations of hypothetic laminar flow are supplemented with the introduced probability functions of conditional distributions that has made it possible to avoid their traditional averaging in the field of turbulence. The latter is described as a consequence of probability estimates of the strong interaction of separate layers of the liquid flow. A transient region of the steady-state Poiseulle flow is considered in a detail.

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М., 1986. 736 с.
2. Kadanoff L. P. // Physics Today, December 1983. P. 46; Физика за рубежом. Серия А. М. 1985.
3. Levich E. // Phys. Rep. 1987. Vol. 151, N 3—4. P. 129—238.
4. Климонтович Ю. Л. Статистическая физика. М., 1982. 608 с.
5. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику (От маятника до турбулентности и хаоса). М., 1988. 368 с.
6. Климонтович Ю. Л. // Письма в ЖТФ, 1983. Т. 9, вып. 18. С. 1089—1093; 1984. Т. 10, вып. 2. С. 80—83; Z. Phys. B — Condensed Matter. 1987. Vol. 66. P. 125—127; Physica. 1987. Vol. 142 A. P. 390—404.
7. De Dominicis C., Martin P. C. // Phys. Rev. A. 1979. Vol. 19. P. 419—421; Аджемян Л. Ц., Антонов Н. В., Васильев А. Н. // ЖЭТФ. 1989. Т. 95, вып. 4. С. 1272—1288.
8. Современная гидродинамика (успехи и проблемы). М., 1984. С. 66—67.
9. Боголюбов Н. Н. Избр. тр. Т. 2. Киев, 1970. 520 с.
10. Kirkwood J. G. // J. Chem. Phys. 1946. Vol. 14, N 3. P. 180—201.
11. Green H. S. Molecular Theory of Fluids. Amsterdam, 1952.
12. Ротт Л. А. Статистическая теория молекулярных систем. М., 1979. 280 с.
13. Ротт Л. А. // ИФЖ. 1989. Т. 56, № 6. С. 894—900; Т. 57, № 3. С. 382—386.
14. Зубарев Д. Н. // Теор. и мат. физ. 1981. Т. 46, № 1. С. 71—85; 1982. Т. 53, № 1. С. 313—317.
15. Зубарев Д. Н., Морозов В. Г., Трошкин О. В. // ДАН СССР. 1986. Т. 290, № 2. С. 313—317.
16. Зубарев Д. Н. Неравновесная статистическая термодинамика. М., 1971. 415 с.
17. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Т. 2. М., 1967. 720 с.
18. Зельдович Я. Б., Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. // ЖЭТФ. 1985. Т. 89, вып. 6 (12). С. 2061—2072.
19. Ротт Л. А., Бокун Г. С., Труханович Л. И., Зайцева Н. В. // Алгоритмы и программы: Информ. бюллетень ВНТИЦ. 1986. № 1 (70). С. 43.
20. Гленсдорф М., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М., 1973. 280 с.
21. Климонтович Ю. Л., Энгель-Херберт Х. // ЖТФ. 1984. Т. 54, вып. 3. С. 440—449.

Белорусский технологический институт имени С. М. Кирова

Поступила в редакцию 29.05.89

УДК 532.542

Э. С. БРОДТ, В. С. ВИХРЕНКО

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТЕРМОДИФФУЗИИ В КРИСТАЛЛЕ

Как известно, термодиффузия вакансий в кристалле приводит к явлению, аналогичному эффекту Киркендала,— вещество кристалла перемещается при наличии градиента температуры относительно лабораторной системы отсчета [1]. Очевидно, что этот процесс в значительной мере определяется характером распределения вакансий в кристалле. В большом количестве работ (например, в [2]) предполагается, что концентрация вакансий квазиравновесна. Существуют, однако, указания на то, что вакансии распределены в температурном поле по более сложному закону [2, 3]. Но в любом случае есть основания полагать, что неоднородное температурное поле создает в кристалле поле концентрации ва-