УДК 517.948

С. В. Пономарева[1], О. Н. Пыжкова[2]
[1]Белорусский государственный университет
[2]Белорусский государственный технологический университет

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ ЛОГАРИФМА

Рассматриваются уравнения первого рода со степенно-логарифмическими ядрами с действительными степенями логарифмов на отрезке действительной оси в пространстве абсолютно непрерывных на отрезке функций. К таким уравнениям приводят задачи как из некоторых разделов математики, в частности, дифференциальных уравнений, так и из физики, механики и других естественных наук. При этом проблема обращения с точки зрения приложений является одной из центральных. С этой проблемой тесно связана задача получения условий разрешимости рассматриваемых уравнений в различных пространствах. Ограничимся в данной работе случаем абсолютной непрерывности весовой функции и значениями параметра на промежутке $0 < \alpha < 1$ (для значений α за границами этого промежутка придется дополнительно дифференцировать или интегрировать дополнительно соответствующее выражение $[\alpha]$ раз). Решение такого уравнения было представлено в [1], но с использованием производной от выражения, содержащего интеграл от свободного члена с функцией Вольтерра в ядре. В данной работе получены достаточные условия разрешимости рассматриваемого уравнения в пространстве абсолютно непрерывных на отрезке функций и представляется другой вид решения в терминах правой части. Уравнение решается методами дробного интегрирования с использованием классических интегралов Римана – Лиувилля, специальных функций Вольтерра и операторов типа свертки.

Ключевые слова: интегральное уравнение, уравнения со степенно-логарифмическими ядрами, интегральный оператор типа свертки.

S. V. Ponomareva[1], O. N. Pyzhkova[2]
[1]Belarusian State University
[2]Belarusian State Technological University

THE SUFFICIENT CONDITIONS OF SOLVABILITY OF EQUATIONS WITH POWER-LOGARITHMIC KERNELS

The integral equations of the first kind with power-logarithmic kernels with real degrees of logarithms on a segment of the real axis in the space of absolutely continuous functions are investigated. The problems from certain sections of mathematics (in particular differential equations) as well as from physics, mechanics, and other natural sciences result in such equations. In this case, the problem of addressing from the point of applications view is one of the central ones. This problem is closely connected with the problem of obtaining the solvability conditions for the equations in various spaces. In this paper, we limited ourselves to the case of absolute continuity of weight function and parameter values on the interval $0 < \alpha < 1$ (for values α beyond this interval we need to differentiate or integrate appropriate expression $[\alpha]$ times additional). The solution of thus equation was presented in [1], but using a derivative of the expression containing the integral of the free member with the Volterra function in the kernel. We obtain the sufficient conditions for the solvability of the considered equations and establish a different kind of solution in terms of the right side. The equation can be solved by fractional integration methods using classical Riemann-Liouville integrals, special Volterra functions and operators of convolution type.

Key words: integral equation, equation with power-logarithmic kernels, operator of convolution type.

Введение. Решение интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами с целыми степенями логарифмов в пространствах интегрируемых и непрерывных функций исследовалось в монографии [1], другой вид решения и достаточные условия разрешимости в тех же пространствах были получены в [2], для уравнений с чисто логарифмическим ядром с действительными степенями логарифмов – в [3]. В [1] был предложен метод решения уравнений с действительными степенями логарифмов, однако не было получено условий разрешимости этого уравнения в определенных пространствах функций, при которых решение может выражаться в терминах правой части исходного уравнения. Для решения указанной задачи понадобилось исследование некоторых интегральных операторов. Более того, представляет также интерес исследование рассматриваемых уравнений с комплексными значениями параметра.

Основная часть.

1. Предварительные сведения. Рассматриваются уравнения

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x c(x-t)(x-t)^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-t}\phi(t)\,dt = f(x),$$

$$(a<x<b<\infty) \qquad (1)$$

со степенно-логарифмическими ядрами с действительными степенями логарифмов на отрезке $[a,b]$ действительной оси $-\infty<a<b<\infty$, $\gamma>b-a$ в пространстве абсолютно непрерывных на отрезке функций $AC[a,b]$. Будем рассматривать случай абсолютной непрерывности функции $c(x)$ и $0<\alpha<1$, $\beta>-1$.

Для решения нам понадобятся некоторые специальные функции и обозначения:

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} x^{z-1}e^{-x}dx, \quad \operatorname{Re} z>0,$$

$$\mu_{t,\beta}(x)=\int_0^{\infty}\frac{x^t t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(t+1)}dt =$$

$$=I_{\tau}^{\beta}\left[\frac{1}{\Gamma(\tau)}\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\tau-1}\right](t), \quad -\infty<\beta<\infty$$

и некоторые другие. Их определения и свойства описываются, например, в [1] и [4].

В монографии [1] приводится формула обращения интегрального оператора типа свертки

$$\left(I_{a+}^{\alpha,\beta}\varphi\right)(x)\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-t}\phi(t)\,dt = f(x), \quad (2)$$

$$(a<x<b<\infty)$$

и условия разрешимости уравнения (1) в следующей формулировке.

Теорема 1. Для разрешимости уравнения (2) в пространстве $L_p(a,b), 1\le p\le\infty$ необходимо и достаточно, чтобы свободный член f был представим в виде

$$f(x)=\int_a^x \mu_{\alpha,\beta}(x-t)\chi(t)\,dt, \chi(t)\in L_p(a,b). \quad (3)$$

При выполнении этого условия решение φ единственно и выражается формулой

$$\varphi(x)=\left(E+T_{\psi}\right)^{-1}\times$$

$$\times\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\gamma}\int_a^x \mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t)f(t)\,dt\right), \qquad (4)$$

где оператор $\left(T_{\psi}\varphi\right)(x)=\int_a^x \psi(x-t)\varphi(t)\,dt$ (см. [1, с. 487]).

2. Интегральный оператор типа свертки. Для того чтобы получить другой вид решения уравнения (1), введем обозначение по аналогии с целочисленным случаем (см. [1, с. 483]):

$$\left(J_{\gamma,\alpha,\beta}^{a+}f\right)(x)=\frac{1}{\gamma}\int_a^x \mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t)f(t)\,dt. \qquad (5)$$

Для оператора $J_{\gamma,\alpha,\beta}^{a+}f$ в пространстве абсолютно непрерывных на отрезке функций выполняется следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $f(x)\in AC[a,b]$. Тогда $\left(J_{\gamma,\alpha,\beta}^{a+}f\right)(x)\in AC[a,b]$.

Доказательство. Так как функция $f(x)\in AC[a,b]$, то она представима в виде $f(x)=\int_a^x f'(t)dt+f(a)$. Подставим это представление в (3) и, осуществляя перестановку порядка интегрирования во втором слагаемом по формуле Дирихле, имеем:

$$\left(J_{\gamma,\alpha,\beta}f\right)(x)=$$

$$=\frac{1}{\gamma}\int_a^x \mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t)\left[f(a)+\int_a^t f'(\tau)\,d\tau\right]dt=$$

$$=\frac{f(a)}{\gamma}\int_a^x \mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\gamma}\int_a^x f'(\tau)\,d\tau\int_{\tau}^x \mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t)\,dt.$$

В силу свойств функции $\mu_{\alpha,\beta}$ (см. [4, с. 230]), а также равенства $I_{+}^{\alpha}\varphi(x)=\frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$ для $\varphi(x)=1$, $x>a$, имеем:

$$\left|\mu_{1-\alpha,-\beta}(x)\right|\le K \text{ на } [a,b],$$

где $K=\max\left\{\frac{|b-a|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)},\frac{|b-a|^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right\}$.

Отсюда следует оценка

$$\int_a^x \left|\mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t)\right| dt \le K(b-a),$$

что означает абсолютную непрерывность первого слагаемого.

Для второго слагаемого снова используем оценку $\left|\mu_{1-\alpha,-\beta}(x)\right| \le K$ и абсолютную непрерывность, а значит, ограниченность функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$:

$$\frac{1}{\gamma}\int_a^x f'(\tau)\,d\tau \int_\tau^x \mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t)\,dt \le$$

$$\le \int_a^x \left|f'(\tau)\cdot K\cdot(b-a)\right| d\tau \le K\cdot(b-a)\int_a^x \left|f'(\tau)\right| d\tau,$$

откуда следует, что и второе слагаемое является абсолютно непрерывной функцией. Что и завершает доказательство теоремы.

Следствие. Оператор $J^{a+}_{\gamma,\alpha,\beta}f$ ограничен в пространстве $AC[a,b]$.

Теорема 3. Пусть функция $f(x)\in AC[a,b]$. Тогда она может быть представлена в виде

$$f(x)=\int_a^x \mu_{\alpha,\beta}(x-t)\chi(t)dt,\ \chi(t)\in L\ (a,b). \quad (6)$$

Доказательство. Согласно [1, с. 487], для функции $f(x)$ выполняется равенство

$$f(x)=\int_a^x \mu_{\alpha,\beta}(x-t)\left[c_0\varphi(t)+\int_a^t \psi(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\right]dt.$$

Здесь $c_0=\lim\limits_{x\to a} c(x)$. Так как оператор T_ψ вполне непрерывен в $L_p(a,b), 1\le p\le\infty$, то в качестве функции $\chi(t)\in L_p(a,b)$ можно взять $\chi(t)= =(c_0E+T_\psi)(\varphi(t))$.

Далее рассматриваем пространство $AC_0[a,b]$ абсолютно непрерывных на отрезке и обращающихся в нуль в его начале функций.

Теорема 4. Пусть $f(x)\in AC_0[a,b]$. Тогда $\left(J_{\gamma,\alpha,\beta}f\right)(x)\in AC_0[a,b]$, при этом

$$\frac{\partial}{\partial x}J_{\gamma,\alpha,\beta}f=$$

$$=\frac{1}{\gamma}\int_a^x \mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t)f'(t)\,dt=\left(J^{a+}_{\gamma,\alpha,\beta}f'\right)(x). \quad (7)$$

Доказательство. По теореме 2, $\left(J^{a+}_{\gamma,\alpha,\beta}f\right)(x)\in AC[a,b]$. В силу аналитичности функции $\mu_{\alpha,\beta}$, абсолютной непрерывности и равенства нулю в точке a функции $f(x)$, $\left(J_{\gamma,\alpha,\beta}f\right)(a)=0$.

Значит, $\left(J_{\gamma,\alpha,\beta}f\right)(x)\in AC_0[a,b]$. Далее, по аналогии с доказательством теоремы 2, так как функция $f(x)\in AC_0[a,b]$, то она представима в виде $f(x)=\int_a^x f'(t)dt,\ f'(t)\in L(a,b)$. Подставим это представление в (5):

$$\left(J^{a+}_{\gamma,\alpha,\beta}f\right)(x)=\frac{1}{\gamma}\int_a^x \mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t)\int_a^t f'(\tau)\,d\tau dt.$$

Изменяя порядок интегрирования по теореме Фубини и учитывая свойства функции $\mu_{\alpha,\beta}$, получим

$$\left(J^{a+}_{\gamma,\alpha,\beta}f\right)(x)=\frac{1}{\gamma}\int_a^x dt\int_a^t \mu_{1-\alpha,-\beta}(t-\tau)f'(\tau)\,d\tau,$$

что равнозначно представлению (7).

3. Достаточные условия разрешимости уравнения (1). И наконец, сформулируем следующую теорему, дающую достаточные условия разрешимости уравнения (1) и другую форму его решения.

Теорема 5. Пусть $f(x)\in AC_0[a,b]$, $c(x)\in AC[a,b]$. Тогда уравнение (1) разрешимо в $L_p(a,b), 1\le p\le\infty$ и его единственное решение дается формулой

$$\varphi(x)=\left(c_0E+T_\psi\right)^{-1}\left(J^{a+}_{\gamma,\alpha,\beta}f'\right)(x). \quad (8)$$

Доказательство. Согласно теореме 3, функция $f(x)$ представима в виде (3), а значит, по теореме 1, уравнение (2) разрешимо в $L_p(a,b), p\ge 1$ и его единственное решение может быть представлено в виде (4). Далее, используя теорему 4, формулу (7), обозначение (5) и [1, теорему 32.2], получим

$$\varphi(x)=\left(c_0E+T_\psi\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(J^{a+}_{\gamma,\alpha,\beta}f\right)(x)=$$

$$=\left(c_0E+T_\psi\right)^{-1}\left(J^{a+}_{\gamma,\alpha,\beta}f'\right)(x),$$

что равносильно (8).

Заключение. Получены достаточные условия разрешимости уравнений со степенно-логарифмическими ядрами с действительной степенью логарифма в пространстве абсолютно непрерывных на отрезке функций; дано решение рассматриваемых уравнений в терминах правой части.

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

2. Демьянко С. В. Решение интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами в пространствах интегрируемых и непрерывных функций: Автореферат дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.01; БГУ. Минск, 2002. 20 с.

3. Пономарева С. В. Решение интегральных уравнений первого рода в некоторых пространствах // Физико-математические науки: тезисы 78-й науч.-техн. конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием), Минск, 3–13 февр. 2014 г. / Белорус. гос. технол. ун-т; отв. за издание И. М. Жарский. Минск, 2014. С. 39.

4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. М.: Наука, 1965–1967. Т. 3: Эллиптические и автоморфные функции. 1967. 299 с.

References

1. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1987. 688 p.

2. Demyanko S. V. *Reshenie integral'nykh uravneniy so stepenno-logarifmicheskimi yadrami v prostranstvakh integriruemykh i nepreryvnykh funktsiy* [Solution of integral equations with power-logarithmic kernels in the spaces of integrable and continuous functions: Abstract of thesis dis. cand. of Physics and Mathematics sci.]. Minsk, 2002. 20 p.

3. Ponomareva S. V. [Solution of integral equations first order in some space]. *Tezisy 78-y nauch.-tekhn. konferentsii professorsko-prepodavatel'skogo sostava, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov (s mezhdunarodnym uchastiem) (Fiziko-matematicheskie nauki)* [Abstracts of the 78th scientific conference of the faculty researchers and graduate students (with international participation]. Minsk, 2014, p. 39 (In Russian).

4. Beytmen G., Erdeyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii* [Higher transcendental functions: in 3 vol.]. Moscow, Nauka Publ., 1965–1967. Vol. 3: Elliptic and automorphic functions. 1967. 299 p.

Информация об авторах

Пономарева Светлана Владимировна − кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики и информатики. Белорусский государственный университет (220050, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: demyanko@bsu.by

Пыжкова Ольга Николаевна − кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: olga.pyzhcova@gmail.com

Information about the authors

Ponomareva Svetlana Vladimirovna − PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of General Mathematics and Informatics. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220050, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: demyanko@bsu.by

Pyzhkova Olga Nikolaevna − PhD (Physics and Mathematics), Head of the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: olga.pyzhcova@gmail.com

Поступила 05.05.17