ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.935.2+519.71

И. М. Борковская, О. Н. Пыжкова
Белорусский государственный технологический университет

О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ГИБРИДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Изучение представления решений гибридных динамических систем и их качественных свойств является актуальной проблемой. Адекватность гибридных систем определяет их важность с точки зрения практических приложений. В работе рассмотрены свойства линейных гибридных дискретно-непрерывных систем, в частности, гибридных систем с многомерным (2-D-мерным) временем, состоящих из непрерывной и дискретной составляющих. Для указанных систем в симметрической форме представлены условия устойчивости разных типов (слабой асимптотической устойчивости, сильной асимптотической устойчивости, (α, γ)-устойчивости). Исследована возможность стабилизации указанных систем регулятором, не выводящим систему за пределы рассматриваемого класса. Даны теоремы, представляющие собой условия устойчивости указанных типов. Сформулированы достаточные условия стабилизируемости систем в скалярном случае (в смысле рассматриваемых типов сходимости). Предложенный подход возможен для исследования стабилизируемости и в смысле других типов устойчивости.

Ключевые слова: гибридные дискретно-непрерывные системы, сильная асимптотическая устойчивость, стабилизация, достаточные условия стабилизируемости.

I. M. Borkovskaya, O. N. Pyzhkova
Belarusian State Technological University

ON THE STABILIZATION OF SOME KINDS OF HYBRID DYNAMIC SYSTEMS

The study of the representation of solutions of hybrid dynamical systems and their qualitative properties is an actual problem. The adequacy of hybrid systems determines their importance from the point of view of practical applications. The properties of linear hybrid discrete-continuous systems, hybrid systems with multidimensional (2-D-dimensional) time, consisting of continuous and discrete components are considered. For such systems in symmetrical form, the stability conditions of various types (weak asymptotic stability, strong asymptotic stability, stability) are presented. The possibility of stabilization of these systems by a controller that does not lead the system beyond the limits of the considered class is studied. Theorems which are the stability conditions of the indicated types are presented. Sufficient conditions for the stabilizability of systems in the scalar case (in the sense of the considered types of convergence) are formulated. The proposed approach is possible for the study of stabilization in the sense of other types of stability.

Key words: hybrid discrete-continuous systems, strong asymptotic stability, stabilization, sufficient conditions of stabilizability.

Введение. Гибридные системы – это математические модели реальных систем управления, в которых непрерывная динамика находится в комбинации с дискретной, либо наряду с динамическими связями имеют место и алгебраические зависимости. Таким образом, гибридные системы описывают процессы, природа которых носит неоднородный характер.

Такие системы широко используются в автомобилестроении, авиастроении, робототехнике и других областях. Классическим примером гибридной системы является система нагрева и охлаждения жилого дома. Печь и кондиционер, наряду с характеристиками теплового потока, формируют систему, которая должна управляться. Термостат управляет этой системой дискретно: в блок термостата передаются сигналы выносных или встроенных датчиков температуры. В основе работы термостата лежит принцип терморегулятора, посредством которого происходит автоматическая установка и регулирование температуры отопительных приборов. Примером гибридной системы может также служить система коммутации, поведение которой описывается конечным числом динамических моделей вместе со сводом правил для переключения среди этих моделей. Адекватность гибридных систем определяет их важность с точки зрения практических приложений. Изучение представления решений таких систем и их качественных свойств является актуальной проблемой. Исследованию гибридных систем посвящены, в частности, работы [1–6].

К важнейшим задачам теории управления для гибридных систем относятся вопросы представления решений, относительной управляемости, задачи устойчивости, стабилизации, модального управления и другие. Виды гибридных систем многообразны. Среди них выделяют, в частности, ГДР системы (дифференциально-разностные системы), которые описывают процессы, где наряду с динамическими связями встречаются и алгебраические зависимости, и ГДН системы (дискретно-непрерывные системы), содержащие как непрерывные, так и дискретные переменные:

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(kh),\ t \in [kh,(k+1)h), \quad (1)$$

$$y(kh+h) = A_{21}x(kh) + A_{22}y(kh) + Bu(kh), \quad (2)$$

$$k = 0,1,2,\dots,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(kh) \in \mathbb{R}^m$, $u(kh) \in \mathbb{R}^r$, $h > 0$, и $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B$ – постоянные матрицы соответствующих размеров, начальные условия для системы (1), (2) зададаются в виде

$$x(0) = x(+0) = x_0,\ \ y(0) = y_0 .$$

Изучение устойчивости указанной выше ГДН системы проводится, например, в работе [7], а в работе [8] подобная система изучается с точки зрения ее относительной управляемости и достижимости.

Важным классом гибридных систем является класс гибридных систем с многомерным (2-D-мерным) временем. Такие системы включают непрерывную и дискретную составляющие:

$$\dot{x}_1(t,k) = A_{11}x_1(t,k) + A_{12}x_2(t,k) + B_1u(t,k),$$

$$t \in [0,+\infty),$$

$$x_2(t,k+1) = A_{21}x_1(t,k) + A_{22}x_2(t,k) + B_2u(t,k),$$

$$k = 0,1,2,\dots$$

Такие системы изучаются, в частности, в статье [9]. В работе [10] для линейных гибридных дискретно-непрерывных систем с многомерным (2-D-мерным) временем в симметрической форме получены явные представления решения на основе сопряженных систем и путем разложения в ряды по решениям определяющих уравнений таких систем. В статье [11] исследуется такое важнейшее свойство указанных систем, как устойчивость.

В настоящей работе продолжено исследование устойчивости гибридных систем с многомерным временем, рассматривается задача стабилизации таких систем.

Основная часть. В работе [7] получено условие стабилизируемости указанной выше ГДН системы (1), (2) регулятором вида

$$u(kh) = Q_1 x(kh) + Q_2\, y(kh),\ k = 0,1,\dots, \quad (3)$$

где Q_1 и Q_2 – постоянные матрицы размеров $r \times n$ и $r \times m$ соответственно. Замкнутая система имеет вид:

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(kh),\ t \in [kh,(k+1)h),$$

$$y(kh+h) = (A_{21} + BQ_1)x(kh) + (A_{22} + BQ_2)y(kh).$$

Теорема 1. Система (1), (2) является стабилизируемой дискретным регулятором (3) тогда и только тогда, когда

$$rank[\lambda I_{n+m} - \Sigma_h, \Delta] = n + m,$$

для всех комплексных чисел λ таких, что $|\lambda| \geq 1$, где

$$\Sigma_h = \begin{bmatrix} e^{A_{11}h} & \int\limits_0^h e^{A_{11}(h-\tau)}d\tau\, A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\ \Delta = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим теперь гибридную дискретно-непрерывную 2-D-систему в симметрической форме (по отношению к операторам дифференцирования и сдвига):

$$\dot{x}_1(t,k) = A_{11}x_1(t,k) + A_{12}x_2(t,k) + B_1u(t,k), \quad (4)$$

$$t \in [0,+\infty),$$

$$x_2(t,k+1)=A_{21}x_1(t,k)+ \\ +A_{22}x_2(t,k)+B_2u(t,k), \quad (5)$$

$$k=0,1,2,...,$$

где $\dot{x}_1(t,k)=\dfrac{\partial x_1(t,k)}{\partial t}$, $x_1(t,k)\in\mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t,k)\in\mathbb{R}^{n_2}$, $x_1(t,k), x_2(t,k)$ – n_1- и n_2-векторы состояния системы; $u(t,k)\in\mathbb{R}^r$ – вектор управляющего воздействия, $t\geq 0, k=0,1,2,\ldots$; $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$ – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Пусть граничные (начальные) условия для (4) и (5) заданы в виде

$$x_1(0,k)=x_1(k),\ \ k=0,1,2,..., \quad (6)$$

$$x_2(t,0)=x_2(t),\ t\in[0,+\infty). \quad (7)$$

В нормальной форме гибридную модель 2-D-системы можно записать следующим образом:

$$\dot{x}_1(t,i)=A_{11}x_1(t,i)+A_{12}x_2(t,i)+B_1u(t,i), \quad (8)$$

$$t\in[0,+\infty),$$

$$x_2(t,i)=A_{21}x_1(t,i)+A_{22}x_2(t,i-1)+B_2u(t,i), \quad (9)$$

$$i=0,1,2,...,$$

начальные условия:

$$x_1(0,i)=x_1(i),\ \ i=0,1,2,..., \quad (10)$$

$$x_2(t,-1)=x_2(t),\ t\in[0,+\infty). \quad (11)$$

Далее будем рассматривать систему (4), (5) в симметрической форме при выключенном управлении ($B_1=B_2=0$).

В работе [10] доказано, что существует единственное решение системы (4), (5), удовлетворяющее начальным условиям (6), (7), в работе [11] представлены условия асимптотической устойчивости системы (4), (5). Приведем определения устойчивости, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Определение 1. Система (4), (5) называется:

1) слабо асимптотически устойчивой, если для любых ограниченных начальных функций $x_1(\cdot), x_2(\cdot)$ в (3), (4) соответствующее решение $x_1(t,k), x_2(t,k)$ системы (1), (2) обладает свойством:

$$\lim_{\substack{t\to+\infty \\ k\to+\infty}}\left(\|x_1(t,k)\|+\|x_2(t,k)\|\right)=0,$$

где символ $\|d\|$ обозначает норму (евклидову) вектора d;

2) сильно асимптотически устойчивой, если найдутся такие действительные числа $M>0$, $\alpha>0$, $0<\gamma<1$, что для любых ограниченных начальных функций соответствующее решение системы (4), (5) обладает следующим свойством:

$$\|x_1(t,k)\|+\|x_2(t,k)\|\leq M\left(e^{-\alpha t}+|\gamma|^k\right), \quad (12)$$

$$t>0,\ k=1,2,...;$$

3) (α,γ)-устойчивой, если найдется такое действительное число $M>0$, что для любых ограниченных начальных функций соответствующее решение системы (4), (5) удовлетворяет требованию (12).

Отметим, что между указанными понятиями устойчивости существует следующая связь:

$$3)\Rightarrow 2)\ \Rightarrow 1)$$

Здесь 1) – 3) означают соответствующие понятия устойчивости из определения 1.

Определение 2. Уравнение вида

$$\det\begin{bmatrix}\lambda I_{n_1}-A_{11} & -A_{12}\\ -A_{21} & \mu I_{n_2}-A_{22}\end{bmatrix}=0 \quad (13)$$

назовем характеристическим уравнением, а его корни (в общем случае комплексные) – характеристическими числами (значениями) системы (4), (5).

Теорема 2 (необходимые условия асимптотической устойчивости):

1) если система (4), (5) слабо асимптотически устойчива, то для корней (λ,μ) характеристического уравнения (13) выполняется условие: $\mathrm{Re}\lambda<0$ и $|\mu|\leq 1$ или $\mathrm{Re}\lambda\leq 0$ и $|\mu|<1$;

2) если система (4), (5) сильно асимптотически устойчива, то для корней (λ,μ) характеристического уравнения (13) соблюдается условие: $\mathrm{Re}\lambda<0$ и $|\mu|<1$;

3) если система (4), (5) (α,γ)-устойчива, то для корней (λ,μ) характеристического уравнения (13) выполняется условие: $\mathrm{Re}\lambda\leq-\alpha$ и $|\mu|\leq\gamma$ [11].

Рассмотрим теперь систему (4), (5) в скалярном случае, когда $A_{11}=a_{11}$, $A_{12}=a_{12}$, $A_{21}=a_{21}$, $A_{22}=a_{22}$ – действительные числа. Верна теорема 3 [11].

Теорема 3. Для того, чтобы система (4), (5) скалярных уравнений была сильно асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$1)\ a_{12}a_{21}=0;$$

$$2)\ |a_{22}|<1,\quad a_{11}<0.$$

Вид характеристического уравнения в скалярном случае упрощается: $\det\begin{bmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & \mu-a_{22}\end{bmatrix}=$

$= (\lambda - a_{11})(\mu - a_{22}) - a_{12}a_{21} = 0$, откуда $\mu = a_{22} + + \dfrac{a_{12}a_{21}}{\lambda - a_{11}}$ и с учетом необходимого $\mathrm{Re}\lambda < 0$ и $|\mu| < 1$ заключаем, что система сильно асимптотически устойчива, когда, во-первых, $a_{12}a_{21} = 0$, во-вторых, $|a_{22}| < 1$, $a_{11} < 0$.

Это условие является и достаточным. Действительно, поскольку $a_{12}a_{21} = 0$, то либо $a_{12} = 0$, либо $a_{21} = 0$. Пусть, например, $a_{12} = 0$. Тогда система (4), (5) принимает вид:

$$\dot{x}_1(t,k) = a_{11}x_1(t,k),$$
$$x_2(t,k+1) = a_{22}x_2(t,k) + a_{21}x_1(t,k),$$

откуда

$$x_1(t,k) = e^{a_{11}t}x_1(0,k) = e^{a_{11}t}x_1(k),$$

$$x_2(t,k+1) = a_{22}x_2(t,k) + a_{21}e^{a_{11}t}x_1(k) =$$
$$= a_{22}{}^{k+1}x_2(t,0) + a_{22}{}^{k}a_{21}e^{a_{11}t}x_1(0) + a_{22}{}^{k-1}a_{21}e^{a_{11}t} \times$$
$$\times x_1(1) + \ldots + a_{22}a_{21}e^{a_{11}t}x_1(k-1) + a_{21}e^{a_{11}t}x_1(k) =$$
$$= a_{22}{}^{k+1}x_2(0) + a_{21}e^{a_{11}t}\left(a_{22}{}^{k}x_1(0) + \ldots + x_1(k)\right).$$

Поскольку начальные функции ограничены: $\|x_1(k)\| \le L, \|x_2(t)\| \le L$ при некотором числе $L > 0$ для всех $t > 0, k = 1, 2, \ldots,$ то

$$\|x_1(t,k)\| + \|x_2(t,k)\| = \left\|e^{a_{11}t}x_1(k)\right\| +$$
$$+ \left\|a_{22}{}^{k}x_2(0) + a_{21}e^{a_{11}t}\left(a_{22}{}^{k-1}x_1(0) + \ldots + x_1(k-1)\right)\right\| \le$$
$$\le Le^{a_{11}t} + L|a_{22}|^k + L|a_{21}|e^{a_{11}t}\left(|a_{22}|^{k-1} + \ldots + 1\right) \le$$
$$\le Le^{a_{11}t} + L|a_{22}|^k + \frac{L|a_{21}|}{1 - |a_{22}|}e^{a_{11}t} \le$$
$$\le M\left(e^{a_{11}t} + |a_{22}|^k\right),\ t > 0, k = 1, 2, \ldots,$$

где $M = \max\left\{L, \dfrac{L|a_{21}|}{1 - |a_{22}|} + 1\right\}$, и система (4), (5) в скалярном случае и $a_{12} = 0$ является сильно асимптотически устойчивой. В случае $a_{21} = 0$ система принимает вид:

$$\dot{x}_1(t,k) = a_{11}x_1(t,k) + a_{12}x_2(t,k),$$
$$x_2(t,k+1) = a_{22}x_2(t,k),$$

откуда с учетом формулы Коши получаем:

$$x_2(t,k) = a_{22}{}^{k}x_2(t),$$

$$x_1(t,k) = e^{a_{11}t}x_1(0,k) + \int_0^t e^{a_{11}(t-\tau)}a_{22}{}^{k}x_2(\tau)\,d\tau.$$

Тогда

$$\|x_1(t,k)\| + \|x_2(t,k)\| \le e^{a_{11}t}\|x_1(k)\| +$$
$$+ \int_0^t e^{a_{11}(t-\tau)}|a_{22}|^k\|x_2(\tau)\|d\tau + |a_{22}|^k\|x_2(t)\| \le Le^{a_{11}t} +$$
$$+ L\frac{1 - e^{a_{11}t}}{a_{11}}|a_{22}|^k + L|a_{22}|^k \le M\left(e^{a_{11}t} + |a_{22}|^k\right),$$

где $M = \max\left\{L, \dfrac{L}{a_{11}} + 1\right\}$, и система (4), (5) в скалярном случае и $a_{21} = 0$ является сильно асимптотически устойчивой.

Аналогично можно получить следующую теорему [11].

Теорема 4. Для того, чтобы система (4), (5) скалярных уравнений была (α, γ)-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $a_{12}a_{21} = 0$;

2) $a_{11} \le -\alpha$, $|a_{22}| < \gamma$.

Присоединим к системе (4), (5) регулятор, не выводящий систему за пределы заданного класса:

$$u(t,k) = Q_1x_1(t,k) + Q_2x_2(t,k), \qquad (14)$$

где Q_1 – матрица размера $r \times n_1$, Q_2 – матрица размера $r \times n_2$.

Определение 3. Система (4), (5) называется стабилизируемой (в смысле сильной асимптотической устойчивости) регулятором (14), если найдутся такие матрицы Q_1, Q_2 из (14), что замкнутая система (4), (5), (14) является сильно асимптотически устойчивой.

Задача. Получить условия стабилизируемости гибридной 2-D-системы (4), (5) в симметрической форме регулятором (14).

Будем использовать полученные ранее условия сильной асимптотической устойчивости. Пусть $A_{11} = a_{11}$, $A_{12} = a_{12}$, $A_{21} = a_{21}$, $A_{22} = a_{22}$, $B_1 = b_1, B_2 = b_2, Q_1 = q_1, Q_2 = q_2$ – действительные числа, то есть система (4), (5), (14) рассматривается в скалярном случае.

Замкнутая система имеет вид:

$$\dot{x}_1(t,k) = (a_{11} + b_1q_1)x_1(t,k) +$$
$$+ (a_{12} + b_1q_2)x_2(t,k),$$

$$x_2(t,k+1) = (a_{21} + b_2q_1)x_1(t,k) +$$
$$+ (a_{22} + b_2q_2)x_2(t,k).$$

Для выполнения первого условия теоремы 3 возможны следующие способы выбора коэффициентов регулятора (11):

$$1)\ q_2 = -\frac{a_{12}}{b_1};\ 2)\ q_1 = -\frac{a_{21}}{b_2}.$$

Тогда в первом случае при условии $\left|a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1}\right| < 1$ коэффициент q_1 можно выбрать следующим образом:

$$\text{при } b_1 > 0: \quad q_1 < -\frac{a_{11}}{b_1},$$

$$\text{при } b_1 < 0: \quad q_1 > -\frac{a_{11}}{b_1}.$$

Во втором случае при условии $a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} < 0$ коэффициент q_2 будем выбирать так, чтобы $|a_{22} + b_2 q_2| < 1$.

Полученный регулятор обеспечит согласно теореме 3 сильную асимптотическую устойчивость замкнутой системы (4), (5), (14). Таким образом, достаточное условие стабилизируемости можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 5. Для того, чтобы система (4), (5) в скалярном случае была стабилизируема (в смысле сильной асимптотической устойчивости) регулятором (14), достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

$$1)\left|a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1}\right| < 1;$$

$$2)\ a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} < 0.$$

Рассмотрим теперь условия стабилизируемости в смысле (α, γ)-устойчивости. По аналогии с предыдущими выкладками, используя теорему 4, приходим к следующим выводам: если $q_2 = -\frac{a_{12}}{b_1}$, то при $\left|a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1}\right| < \gamma$ и выборе $q_1 \le \frac{-\alpha - a_{11}}{b_1}$ при $b_1 > 0$, $q_1 \ge \frac{-\alpha - a_{11}}{b_1}$ при $b_1 < 0$, получаем (α, γ)-устойчивую замкнутую систему. При $q_1 = -\frac{a_{21}}{b_2}$ условием устойчивости будет выполнение неравенства $a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} \le -\alpha$. Приходим к следующей теореме.

Теорема 6. Для того, чтобы система (4), (5) в скалярном случае была стабилизируема (в смысле (α, γ)-устойчивости) регулятором (14), достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$1)\ \left|a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1}\right| < \gamma;$$

$$2)\ a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} \le -\alpha.$$

Заключение. В работе проведен анализ результатов по стабилизации дискретно-непрерывных систем. Для линейной гибридной 2-D-системы в симметрической форме в скалярном случае получены достаточные условия стабилизируемости (в смысле сильной асимптотической устойчивости, (α, γ)-устойчивости) регулятором, не выводящим систему за пределы заданного класса. С помощью предложенного подхода можно также провести исследование стабилизируемости и в смысле других типов устойчивости.

Литература

1. Dai L. Singular control systems // Lecture notes in control and information sciences: 118. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. 319 p.

2. De la Sen M. A note about total stability of a class of hybrid systems // Informatica. 2006. Vol. 17, no. 4. P. 565–576.

3. Van der Schaft A., Schumacher H. An introduction to hybrid dynamical systems. Berlin: Springer, 2000. 324 p.

4. Ахундов А. А. Управляемость линейных гибридных систем // Управляемые системы: сб. ст. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1975. Вып. 14. С. 4–10.

5. Куржанский А. Б. Отчет о 16-м международном конгрессе ИФАК (IFAC) – международной федерации по автоматическому управлению // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 183–189.

6. Точилин П. А., Куржанский А. Б. Задачи достижимости и синтеза управлений для гибридных систем. М.: МГУ, 2008. 176 с.

7. Марченко В. М., Борковская И. М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем // Труды БГТУ. 2012. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 7–10.

8. Марченко В. М., Пыжкова О. Н. Относительная достижимость линейных стационарных систем, управляемых дискретным регулятором // Труды БГТУ. 2012. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 11–13.

9. Марченко В. М., Пыжкова О. Н. Относительная управляемость линейных стационарных гибридных систем с многомерным временем // Труды БГТУ. 2008. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–5.

10. Марченко В. М., Борковская И. М., Пыжкова О. Н. Гибридные динамические системы с многомерным временем. Представление решений // Труды БГТУ. 2015. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–9.

11. Марченко В. М., Борковская И. М., Пыжкова О. Н. Устойчивость гибридных динамических систем с многомерным временем. // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 5–9.

References

1. Dai L. Singular control systems. *Lecture notes in control and information sciences*: 118. Berlin; Heidelberg, Springer-Verlag, 1989. 319 p.

2. De la Sen M. A note about total stability of a class of hybrid systems. *Informatica*, 2006, vol. 17, no. 4, pp. 565–576.

3. Van der Schaft A., Schumacher H. An introduction to hybrid dynamical systems. Berlin: Springer, 2000. 324 p.

4. Akhundov A. A. Controllability of the linear hybrid systems. *Upravlyaemye sistemy: sbornik statey* [Controlled systems]. Novosibirsk, Institute of Mathematics, 1975, pp. 4–10 (In Russian).

5. Kurzhanskiy A. B. The 16-th IFAC Congress report. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 2006, no. 1, pp. 183–189 (In Russian).

6. Tochilin P. A., Kurzhanskiy A. B. *Zadachi dostizhimosti i sinteza upravleniy dlya gibridnykh sistem* [The tasks of reachability and control synthesis for hybrid systems]. Moscow, MGU, 2008. 176 p.

7. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M. Stability and stabilization of the linear hybrid discrete-continues stationary systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 7–10 (In Russian).

8. Marchenko V. M., Pyzhkova O. N. Relative reachability of the linear stationary hybrid systems controlled by the discrete regulator. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 11–13 (In Russian).

9. Marchenko V. M., Pyzhkova O. N. Relative controllability of the linear stationary hybrid systems with multidimensional time. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series VI, Physical-mathematical sciences and informatics, 2008, issue VI, pp. 3–5 (In Russian).

10. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M., Pyzhkova O. N. Hybrid dynamic 2-D-systems. Representation of solutions. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 3–9 (In Russian).

11. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M., Pyzhkova O. N. The stability of hybrid dynamic 2-D-systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 5–9 (In Russian).

Информация об авторах

Борковская Инна Мечиславовна − кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: borkovskaia@gmail.com

Пыжкова Ольга Николаевна − кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: olga.pyzhcova@gmail.com

Information about the authors

Borkovskaya Inna Mechislavovna − PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: borkovskaia@gmail.com

Pyzhkova Olga Nikolaevna − PhD (Physics and Mathematics), Head of the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: olga.pyzhcova@gmail.com

Поступила 21.04.2017