6. Сполдинг Д. Б. Горение и массообмен. М., 1985.
7. Spalding D. B. GENMIX — a general computer program for two-dimensional parabolic phenomena. HMT Ser., N 1. Oxford: Pergamon Press, 1978.
8. Gear C. W. // Commun. ACM. 1971. Vol. 14, N 3. P. 176—180.
9. Lockwood F. C., Moneib H. A. // Combustion and flame. 1982. Vol. 47. P. 291—314.
10. Jeng S.-M., Faeth G. M. // Jour. heat transf. 1984. Vol. 106. P. 721—727.
11. Sommer H. T. // Jour. non-equilibr. thermodynamics. 1982. Vol. 7, N 1. P. 55—70.

Московский энергетический институт *08.12.87.*

УДК 532.542.3

Л. А. Ротт

К ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Устанавливаются критерии перехода ламинарного течения в турбулентное как следствия вероятностных оценок взаимодействия отдельных слоев жидкости.

Известные феноменологические уравнения переноса (законы сохранения) для сплошной среды могут быть получены с помощью статистических (кинетических) функций распределения. В качестве последних сначала использовались одноиндексные (безусловные) коррелятивные функции [1—3], а затем и многоиндексные функции условных распределений [4]. С их помощью определяются основные макроскопические величины (плотность массы, скорость течения, плотность энергии, тензор напряжений, плотность теплового потока и т. п.).

Выполняемая при этом операция усреднения любой рассматриваемой динамической величины предполагает кроме проведения усреднения по пространству импульсов молекул среды усреднение и по малому объему конфигурационного пространства. Так, в методе условных распределений достаточно провести усреднение по объему молекулярной ячейки. Следствием такой операции является «сокрытие» внутреннего микроскопического флуктуационного механизма среды, его явного влияния на ее макроскопические свойства. Вместе с тем такое влияние может вулканизироваться, что, очевидно, имеет место наряду с внешним возмущением при переходе ламинарного течения жидкости в турбулентное.

Представляется ли возможным это каким-то образом учесть, оставаясь в рамках феноменологического подхода и не прибегая априори к неизбежному усреднению исходных гидродинамических уравнений в области свершившегося перехода? Самое главное, можно ли на этом пути предвидеть и область перехода от ламинарного к турбулентному течению, пользуясь в обоих случаях единым описанием? Попытаемся положительно ответить на этот вопрос.

В силу наличия собственного флуктуационного механизма среды правомерно детерминированное гидродинамическое описание дополнить и вероятностными представлениями, т. е. наряду с механическим предсказанием, что в данный момент времени в данной точке пространства $\mathbf{r}$ жидкость будет иметь скорость $\mathbf{v}$, исходим из того, что данное свойство — иметь скорость $\mathbf{v}$ — обладает вероятностным законом распределения: это свойство может проявиться с той или иной вероятностью в окрестности точки $\mathbf{r}$. Окрестность эффективного проявления ожидаемого свойства может оказаться немалой и является определяющей характеристикой поведения жидкости.

Введем $f(\mathbf{r}'|\mathbf{v}(\mathbf{r}))$ — плотность вероятности того, что в объеме dV около точки $\mathbf{r}'$ среда обладает скоростью $\mathbf{v}$, найденной как решение уравнения Навье—Стокса для точки пространства $\mathbf{r}$. Определяемая таким образом функция имеет смысл условной функции распределения для исходного стационарного течения жидкости. Изначально предполагаемое ламинарное течение гипотетически остается таковым при любых значениях скорости (числах Рейнольдса).

Очевидно, что, когда скорость течения во всех точках среды одинаковая ($\mathbf{v} = \mathrm{const}$), должен иметь место предельный случай

$$f(\mathbf{r}'|\mathbf{v}(\mathbf{r})) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}). \qquad (1)$$

В этом случае быть скорости $\mathbf{v}$ в точке $\mathbf{r}$ является достоверным событием.

В дальнейшем примем для f гауссовый закон распределения. Раскладывая дисперсионные коэффициенты закона распределения в ряд по градиентам скорости и учитывая возможность (1), для среднеквадратичного отклонения σ изотропной жидкости получим в первом приближении:

$$\sigma = a(\nabla\mathbf{v})^2, \quad a = \mathrm{const}. \qquad (2)$$

Рассмотрим разность $\sigma_1 - \sigma_2$, которая безусловно будет зависеть от разности положений двух соответствующих точек среды $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Соотношение между ними может принять принципиально различный характер при определении ламинарного и турбулентного течения жидкости. Первому случаю будет соответствовать неравество

$$|\sigma_1 - \sigma_2| < \beta|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, \quad \beta = \mathrm{const}, \qquad (3)$$

а второму — обратное неравенство.

В том, что возможны оба случая, легко убедиться на примере стационарного течения Пуазейля. При постоянном градиенте давления (ось x направлена вдоль оси трубы) для любых двух точек в поперечном сечении трубы и в одном радиальном направлении

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \frac{a}{4\eta^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 |r_1^2 - r_2^2|, \qquad (4)$$

и неравенство (3) означает, что

$$\frac{a^*}{4\eta^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 (2r_1 + H) < 1, \quad H = r_2 - r_1 > 0, \quad a^* = \frac{a}{\beta}. \qquad (5)$$

Граница перехода ламинарного течения в турбулентное связана с обращением (5) в равенство, из которого определим

$$a^* = \frac{2\eta^2}{R\left(\frac{dp}{dx}\right)^2_{\text{кр}}}, \quad 2r_1 + H \leqslant 2R. \qquad (6)$$

Действительно, если градиент давления меньше критического значения, неравенство (5) с учетом (6) выполняется при любых значениях r_1 и r_2. Этого заведомо не будет, если градиент давления больше критического значения.

То, что при нарушении неравенства (3) следует качественно новое состояние жидкости, видно из общих соображений: так как (3) относится и к сколько угодно близким точкам, нарушение неравества означает и «разрушение» дифференциального уравнения, описывающего ламинарное течение. Вывод уравнения становится неправомерным из-за потери смысла производной скорости. Она становится случайной величиной.

Из изложенного можно получить три следствия, имеющие экспериментальное подтверждение. Это прежде всего тот факт, что турбулентность зарождается не одновременно по всему сечению по мере роста градиента давления, а непременно начинается от поверхности трубы.

Нетрудно определить толщину слоя турбулентности $R—R_0$, используя неравенство, обратное (5):

$$R_0 = R\left[2\frac{\left(\frac{dp}{dx}\right)^2_{\text{кр}}}{\left(\frac{dp}{dx}\right)^2} - 1\right]. \tag{7}$$

Теперь неравенство (5) справедливо только для точек сердцевины потока радиуса R_0. Обратное неравенство имеет место для указанного пристеночного слоя турбулентности. Полная турбулизация потока наступит при $dp/dx=\sqrt{2}(dp/dx)_{\text{кр}}$, когда R_0 обращается в нуль. В тесной связи с первым следствием находится и второе. Так как градиент давления пропорционален числу Рейнольдса, ширина области полного перехода ламинарного течения в турбулентное определяется отношением $\mathrm{Re}/\mathrm{Re}_{\text{кр}}=\sqrt{2}$. При увеличении $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$, как это имеет место, ширина переходной области увеличивается.

Отметим попутно, что при течении жидкости между двумя параллельными неподвижными плоскостями высота пристеночного слоя турбулентного движения y определяется выражением:

$$y = \frac{h}{2}\left[1 - \frac{\left(\frac{dp}{dx}\right)^2_{\text{кр}}}{\left(\frac{dp}{dx}\right)^2}\right], \tag{8}$$

где h — расстояние между плоскостями. Как видно из (8), в отличие от течения по трубе полная турбулизация в принципе наступает при $|dp/dx|\to\infty$.

Из сказанного выше вытекает также и третье следствие — неизбежность существования пограничного слоя. Это особенно наглядно видно на примере течения Куэтта. При отсутствии такого слоя неравенство (3) никогда не могло бы нарушиться (левая часть всегда равна нулю) и турбулентное течение не должно было возникнуть.

В то же время видно, что нарушение условия (3) не является достаточным для перехода ламинарного течения в турбулентное, так как не содержит требования существования минимального масштаба турбулентности (гипотеза Колмогорова). По условию (3) толщина начального турбулентного пристеночного слоя могла бы быть сколь угодно малой, что на самом деле, как будет показано ниже, не имеет места.

В дальнейшем будем рассматривать только пуазейлево течение по трубе радиуса R. Разделим радиус на ряд участков и рассмотрим два соседних отрезка b_1 (от стенки) и b_2. Пусть v_1 — скорость в одной из точек отрезка b_1 — является решением уравнения Навье—Стокса в предположении существования стационарного ламинарного течения. Соответственно v_2 — для точки отрезка b_2.

Нарушение условия (3) означает, что первый слой жидкости (толщиной b_1) «захлестывает» слой b_2 в том смысле, что теперь наверняка при $\sigma_1 \gg \sigma_2$ на втором внутреннем участке может быть скорость v_2 или v_1 (последняя, конечно, как переносная скорость жидкости).

Действительно, если проявление скорости v_1 в конечной окрестности dy, принадлежащей интервалу b_2, назовем событием A, а скорости v_2 — событием B, то вероятность наступления события $A+B$ (A и B — совместимые и независимые события)

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

и все слагаемые в правой части становятся теперь сравнимыми величинами.

Таким образом, во втором слое наступает чередование ламинарного и турбулентного движения жидкости (автоколебательный режим). Вступает в силу сильное взаимодействие слоев жидкости, что и является определяющей чертой турбулентности.

Разобьем радиус R на конечное, но произвольное число отрезков b_k. Располагая выражением (2), можно построить интегральную функцию распределения для данной скорости v, вычисленной для произвольной фиксированной точки данного отрезка. Если таковой точкой будет y_{0k-1} на отрезке b_{k-1} (ось y взята вдоль радиуса R), в которой и найдена скорость v_{k-1} как решение уравнения Навье—Стокса, то интегральная функция распределения $\Phi(y_{k-1})$ равна:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{k-1}} \int\limits_{-\infty}^{y_{k-1}} \exp\left\{-\frac{(y_{k-1}-y_{0k-1})^2}{2\sigma_{k-1}^2(y_{0k-1})}\right\} dy_{k-1}. \tag{9}$$

Аналогичную функцию построим и для соседнего участка b_k. При этом всегда $\sigma_{k-1}(y_{0k-1}) > b_k(y_{0k})$. В силу этого разность их можно связать с тем, что, начиная с некоторого значения числа Рейнольдса, первая функция $\Phi(y_{k-1})$ пересечет вторую — $\Phi(y_k)$ — именно на соседнем отрезке b_k. Имеет место «столкновение» двух кривых, что и послужит аналогом столкновения двух соседних слоев гипотетически ламинарного потока жидкости. Произойдет это тогда, когда при

$$y_k \leqslant \frac{b_{k-1}}{2} + b_k, \tag{10}$$

если связать y_{0k-1} с серединой отрезка b_{k-1} и положить $y_{0k-1}=0$, значения двух интегральных функций распределения станут одинаковыми в точке $y_{k-1}^* \equiv y_k^*$:

$$\Phi(y_{k-1}^*,\ \sigma_{k-1}) = \Phi(y_k^*,\ \sigma_k). \tag{11}$$

Равенство (11) позволяет в принципе найти кординату y^*, а вместе с (10) определить еще одно независимое от (3) условие для разности $\sigma_{k-1}-\sigma_k$. Однако для промежуточных качественных оценок (предварительных) поиск точки пересечения двух интегральных кривых распределения заменим поиском точки пересечения соответствующих дифференциальных кривых распределения (правых их ветвей), что не является принципиальным отступлением от рассматриваемой идеологии. Тогда следует

$$y_k^* \simeq \frac{b_{k-1}+b_k}{2}\left[1+\frac{\sigma_k}{\sigma_{k-1}}\sqrt{1+\frac{8A\sigma_{k-1}^2}{(b_{k-1}+b_k)^2}\ln\frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}}\right],$$
$$A = \frac{\sigma_{k-1}^2-\sigma_k^2}{\sigma_{k-1}^2}, \tag{12}$$

и для искомой разности $\sigma_{k-1}-\sigma_k$, используя (10) и (12), получим дополнительное условие турбулизации потока в слое жидкости:

$$\sigma_{k-1}-\sigma_k \geqslant \frac{\sigma_{k-1}(b_{k-1}+b_k)}{(b_{k-1}+2b_k)(\sigma_{k-1}+\sigma_k)}\left[\sigma_{k-1} + \sigma_k\sqrt{1+\frac{8A\sigma_{k-1}^2}{(b_{k-1}+b_k)^2}\ln\frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}}\right]. \tag{13}$$

В отличие от первого (необходимого) условия нарушения ламинарного течения (3) условие (13) не допускает сколь угодно малой ширины слоя турбулизации, т. е. действительно имеет место конечный масштаб турбулентности. Мы вправе назвать условие (13) достаточным.

Действительно, рассматривая два соседних слоя b_1 и b_2, легко убедиться, что они не могут быть сколь угодно малыми, чтобы при этом не нарушилось условие (13). Существенно, что ширина первого пристеночного ламинарного слоя b_1 имеет минимальное значение. И именно этот слой служит «внешним» источником возмущения для соседнего слоя b_2. Последний в свою очередь является таковым для третьего слоя и т. д.

Все рассмотрение основано на известном расширении динамического формализма. С одной стороны, для используемых функций $\Phi(y)$ требуется решение гидродинамической задачи (уравнения Навье—Стокса), с другой, время существования такого решения (ламинарного течения) является конечным и периодически сменяется на время существования турбулентного вихря. Если полный период принять за единицу, то указанные времена удобно обозначить как $2\Delta t_k$ — время (вероятность) жизни переносной скорости слоя жидкости на участке b_k и $1-2\Delta t_k$ — время жизни первоначальной скорости ламинарного течения v_k на том же участке b_k. Граница этих временных интервалов определяется условием (11):

$$1-2\Delta t_k=\Phi(y^*). \tag{14}$$

Здесь и далее Φ—удвоенное значение интеграла вероятностей в интервале $[0,\ y^*_{k-1}]$.

С помощью интегральных функций распределения (9) формально можно получить два уравнения $y_{k-1}(t)$ и $y_k(t)$, которые приобретают смысл квазикинематических уравнений движения. Основное предположение и основано на том, что взаимодействие слоев жидкости как причина турбулизации может быть описано на языке столкновений указанных уравнений движения. Поэтому $2\Delta t_k$ — время от момента пересечения кривых $y_{k-1}(t)$ и $y_k(t)$ до конца периода (время жизни турбулентного вихря). Динамический формализм дополняется оператором трансформации, собственными значениями которого и являются искомые величины Δt_k. До какого-то критического значения напора (первого критического значения числа Рейнольдса) оператор работает «вхолостую» (нет пересечения кривых $y_{k-1}(t)$ и $y_k(t)$ на отрезке b_k) и вступает в силу при $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{\text{кр}}$. Тогда и происходит разделение скорости течения на переносную поступательную, навязываемую соседним слоем, и относительную вращательную скорость.

Приравняв значения разности $\sigma_{k-1}-\sigma_k$ из двух условий наступления турбулизации (2) и (13), получим возможность оценить, на сколько же слоев скорее всего разбивается турбулизованный поток жидкости. Для двух первых слоев b_1 и b_2 (на участке b_2 инициируется турбулентность и при $b_1+b_2\ll R$ ввиду близости значений σ_1 и σ_2 можно упростить выражение (12)) запишем

$$\beta(r_1-r_2)=\frac{\sigma_1(b_1+b_2)}{b_1+2b_2}. \tag{15}$$

Для пуазейлева течения

$$\sigma_1\approx\frac{\gamma^2}{8R}(2R-b_1)^2,$$

где γ — отношение градиента давления (напора) к его критическому значению; σ_1 вычислено для середины отрезка b_1; r_1 и r_2 также соответствуют серединам b_1 и b_2 $(r_1-r_2=(b_1+b_2)/2)$. С помощью (15) нетрудно получить условие

$$b_1+b_2\leqslant\frac{\gamma^2}{2\beta}R. \tag{16}$$

Для случая образования трех слоев вместо рассмотренных двух получим более жесткое условие, которое начинает выполняться при бóльших значениях γ (напора). Более мелкое дробление одной и той же части потока на отдельные слои происходит с ростом γ, т. е. числа Рейнольдса. Происходит это скачкообразно, что соответствует известным модельным представлениям о хаотизации потока жидкости (см. работы [5, 6]). Наряду с этим теперь представляется возможным оценить время жизни (вероятность) того или иного масштаба турбулентности, их сменяемости. Возникает многочастотный механизм турбулентности. С ростом числа Рейнольдса вероятность проявления больших масштабов стремится к нулю.

В заключение остановимся на простейшем примере существования двух слоев $b_1 = R/3$ и $b_2 = 2R/3$. Тогда, согласно (14):

$$1 - 2\Delta t_2 = \Phi(\gamma). \tag{17}$$

Скорости v_1 и v_2 определим из условия сохранения гипотетически ламинарного потока $\left(v_1 = \frac{5R^2}{72\eta}\left|\frac{dp}{dx}\right| \text{ и } v_2 = \frac{7R^2}{36\eta}\left|\frac{dp}{dx}\right|\right)$. Среднепоточная скорость переносного движения турбулентной жидкости U определяется тогда через вероятности $2\Delta t_2$ и $1 - 2\Delta t_2$:

$$U = \frac{5}{9} v_1 + \frac{4}{9} [v_2 \Phi(\gamma) + v_1 (1 - \Phi(\gamma))]. \tag{18}$$

Для коэффициента сопротивления трубы получим окончательное выражение

$$\frac{\lambda_\gamma}{\lambda_{\gamma=1}} = \frac{81}{\gamma (5 + 4\Phi(\gamma))^2}. \tag{19}$$

При $\gamma \leqslant 1$ $\Phi \simeq 1$ и $\lambda \sim 1/\gamma$ (ламинарное течение), но далее с ростом γ (градиента давления) значения λ начинают возрастать и кривая проходит через максимум в интервале $1 < \gamma < \sqrt{2}$. Функция (19) передает характерные особенности известной экспериментальной кривой зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса.

Сам интеграл вероятностей Φ существен для переходной области, и его роль достаточно быстро исчезает. А это означает, что время жизни периодически возрождающегося ламинарного течения $1 - 2\Delta t \to 0$. Система становится постоянно турбулизованной и по-своему более организованной, что и подтверждает S-теорему Ю. Л. Климонтовича об уменьшении энтропии при переходе от ламинарного течения к турбулентному [7].

С ростом γ, согласно (18), скорость $U \to v_1$ и профиль скоростей сильно сплющивается. Теперь выражение для коэффициента дисперсии (2) следует дополнить следующим членом разложения по градиенту скорости, который сильно возрастает.

Обозначения

r — радиус-вектор; x, y — координаты; **v** — скорость; δ — функция Дирака; f — плотность вероятности; Φ — интегральная функция распределения; σ — среднеквадратичное отклонение; ∇ — оператор градиента; η — коэффициент сдвиговой вязкости; p — давление; R — радиус трубы; t — время; Re — число Рейнольдса; γ — отношение числа Рейнольдса к его критическому значению; U — среднепоточная скорость; λ — коэффициент сопротивления трубы.

Nomenclature

r, radius-vector; x, y, coordinates; **v**, velocity; δ, Dirac function; f, probability density; Φ, integral distribution function; σ, root-mean-square deviation; ∇, gradient operator; η, shear viscosity coefficient; p, pressure; R, tube radius; t, time; Re, Reynolds number; γ, Reynolds number to its critical value ratio; U, mean flow velocity; λ, tube resistance coefficient.

Summary

The criteria for the transition from a laminar to turbulent flow are developed from the probabilistic estimates of strong interaction of individual liquid layers. Physical consequences including characteristic features of the tube resistance coefficient in the transient Poiseuille flow region are considered.

Литература

1. **Боголюбов Н. Н.** Избранные труды. Т. 2. Киев, 1970.
2. **Kirkwood I. G.** // J. Chem. Phys., 1946. Vol. 14, N 3. P. 180—201.
3. **Green H. S.** Molecular Theory of Fluids. Amsterdam, 1952.
4. **Ротт Л. А.** Статистическая теория молекулярных систем. М., 1979.
5. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Гидродинамика. М., 1986.
6. **Kadanoff L. P.** // Physics Today. December 1983. P. 46; см. также Физика за рубежом. Сер. А. М., 1985. С. 9—32.
7. **Климонтович Ю. Л.** // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10, вып. 2. С. 80—83.

20.01.88.

Белорусский технологический институт им. С. М. Кирова

УДК 532.517.2

И. А. Белов, Б. А. Коловандин, Н. А. Кудрявцев

РАЗВИТИЕ И ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР У ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДОЙ СТЕНКИ

На основе численного интегрирования нестационарных двумерных уравнений Навье—Стокса выполнено моделирование динамики крупномасштабных вихрей вблизи поверхности пластины.

Крупномасштабные вихревые структуры, организованные у поверхности твердой стенки, существенно влияют на процессы переноса количества движения и могут служить средством управления течением и теплообменом в пристеночном слое [1, 2]. В этом отношении выполненное авторами исследование развития и перемещения вихрей у поверхности твердой стенки представляет не только теоретический интерес, но и позволяет по крайней мере на качественном уровне ответить на вопрос о влиянии вихрей на такую важную характеристику течения, какой является трение на стенке.

Объектом исследования выбрана полубесконечная плоская горизонтально расположенная пластина. Вихри генерируются круговым цилиндром, установленным симметричным образом относительно пластины у ее передней кромки; предусматривается вращение цилиндра попеременно в направлении по и против часовой стрелки с заданной скоростью. Метод исследования основан на численном интегрировании полных двумерных уравнений Навье—Стокса. Непосредственно анализу полученных результатов предшествует описание особенностей построения численной процедуры, предназначенной для моделирования нестационарных течений, и ее апробация на примере решения тестовой задачи развития следа за изолированным круговым цилиндром.

1. **Численная процедура.** При построении численной процедуры используем разностную сетку с вычислением составляющих скорости в узлах, отстоящих на полшага относительно узлов, где хранится давление. Элемент сетки и характерный контрольный объем, окружающий узел P, показаны на рис. 1. Интегрирование по контрольному объему сводит систему уравнений неразрывности и изменения количества движения к виду:

$$I = 0, \tag{1}$$

$$(\partial \Phi / \partial t)\,\mathrm{vol} + F = 0, \tag{2}$$