

УДК 532.517;621.928

А. М. Волк, кандидат технических наук, доцент (БГТУ),  
А. И. Вилькоцкий, кандидат технических наук, доцент (БГТУ)

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРОВАНИЯ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Исследовано пленочное ламинарное течение вязкой жидкости по внутренней стенке проницаемого цилиндра под воздействием закрученного газового потока. Получены точные автомодельные решения для уравнений Навье – Стокса, описывающих рассматриваемые движения. При постоянной скорости оттока найдены составляющие скорости в пленке жидкости. Данные зависимости позволяют определить объемный расход жидкой фазы на единицу периметра, толщину пленки и ее давление на проницаемую поверхность, скорость оттока жидкой фазы. Приведены расчетные зависимости для определения скорости оттока жидкости в зависимости от свойств проницаемой поверхности и перепада давления на ней. Математическое моделирование рассмотренных процессов позволяет найти оптимальные соотношения между геометрическими и режимными параметрами, значительно повысить интенсивность и эффективность процессов разделения.

Studied film laminar flow of viscous fluid on the inner wall of a permeable cylinder under the influence of swirling gas flow. We obtain exact self-similar solutions for the equations of Navier – Stokes equations describing the motion under consideration. At a constant rate of outflow velocity components are found in the liquid film. These dependences allow us to determine the volume flow of the liquid phase per unit perimeter, the thickness of the film and its pressure on the porous surface, the rate of outflow of the liquid phase. Shows the calculated to determine the rate of outflow of fluid, depending on the properties of the porous surface and the pressure drop across it. Mathematical simulation of these processes allows us to find the optimal ratio between the geometric and regime-eters significantly increase the intensity and efficiency of separation processes.

**Введение.** Гидродинамика пленочного течения на проницаемых поверхностях имеет существенное значение для процессов фильтрования суспензий, отвода жидкой фазы в процессе сепарации газожидкостных потоков, при тепло-массообмене. В этих случаях пленочное течение осуществляется на проницаемых поверхностях.

Отсос используется также для управления пограничным слоем и воздействия на устойчивость ламинарного режима движения [1, 2].

Воздействия газового потока на пленку жидкости передаются посредством сил трения, возникающих на границе взаимодействия фаз.

Касательные напряжения на стенке трубы диаметром  $D = 2R$  определяются гидродинамическим напором [1]:

$$\tau_R = \frac{\lambda_0 \rho_{\Gamma} \bar{W}_Z^2}{4 \cdot 2} \quad (1)$$

При степенном распределении осевой скорости газового потока с показателем  $1/7$  коэффициент трения для гладких труб вычисляется по формуле Блазиуса [1]

$$\lambda_0 = 0,3164 / \text{Re}^{0,25}, \quad (2)$$

который зависит от числа Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\bar{W}_Z D}{\nu_{\Gamma}}$$

При наличии пленочного течения на внутренней поверхности трубы волновая поверх-

ность рассматривается как нерегулярная шероховатость стенок канала. Обобщением экспериментальных данных в этом случае для коэффициента трения на границе раздела фаз получено соотношение [3, 4]

$$\lambda = \lambda_0 \left( 1 + \frac{300\delta}{D} \right). \quad (3)$$

Для определения тензора касательных напряжений в исследуемых диапазонах изменения скорости газового потока могут быть использованы рассмотренные ранее зависимости, которые дают осевую составляющую

$$\tau_z = \frac{0,0791 \rho_{\Gamma} \bar{W}_Z^2}{\text{Re}^{0,25} \cdot 2} \left( 1 + \frac{300\delta}{D} \right). \quad (4)$$

Касательная составляющая зависит от угла закрутки потока и при этом будет равна

$$\tau_{\varphi} = \tau_z \text{tg}(k\beta). \quad (5)$$

Установившееся пленочное течение характеризуется равновесием сил тяжести и возникающих сил трения.

Теоретически исследуются только автомодельные течения с постоянным отсосом или вдувом по всей поверхности.

Скорость оттока сплошной среды определяется свойствами проницаемой поверхности и перепадом давления на ней [5, 6]. При турбулентном режиме движения среды через отверстия в стенке на основании уравнения Бернулли получаем квадратичный закон:

$$U_0 = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho(1+\xi-\bar{f}^2)}} = \gamma \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}. \quad (6)$$

Для потоков, не имеющих относительной продольной скорости, коэффициент расхода  $\gamma$  зависит только от свойств проницаемой поверхности. Идельчиком И. Е. [7] при обработке экспериментальных данных получена формула зависимости коэффициента расхода  $\gamma$  от относительной площади  $\bar{f}$  отверстий:

$$\gamma^2 = \left(0,707\sqrt{1-\bar{f}} + 1 + \bar{f}\right)^2 / \bar{f}^2. \quad (7)$$

Для исследования процессов разделения многофазных потоков необходимо математическое моделирование движения закрученного газового потока и пленочного течения жидкости с учетом взаимодействия фаз как внутри непроницаемого цилиндра, так и при оттоке жидкой фазы на проницаемых поверхностях.

Экспериментальные исследования более полно характеризуют происходящие процессы, но они не всегда позволяют выделить и проанализировать доминирующие факторы.

Гидродинамика данного процесса в значительной степени зависит от оттока жидкой фазы. В настоящее время практически не имеется адекватной модели и метода расчета процесса разделения фаз при пленочном течении суспензии.

Наиболее полными и достоверными данные и расчеты будут при сочетании экспериментальных и теоретических методов анализа исследуемых процессов.

**Математическая модель.** Рассмотрим установившееся осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости по внутренней стенке проницаемого цилиндра под воздействием закрученного газового потока (рис. 1). Ось  $z$  цилиндрической системы координат направим вниз по оси цилиндров.

Скорость оттока жидкой фазы  $U_0$  на некотором элементарном цилиндре длиной  $\Delta z$  будем считать постоянной. Объемный расход несжимаемой жидкости через цилиндрические поверхности равной длины будет одинаков:  $2\pi r U_r \Delta z = 2\pi R U_0 \Delta z$ . Отсюда находим радиальную скорость в пленке жидкости  $U_r = \frac{U_0 R}{r}$ .

Тогда из уравнения неразрывности

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

получим  $\frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$  и  $U_z = U_z(r)$ . Принимаем

$\Psi = \frac{\partial P}{\partial z} = \text{const}$ . С учетом осесимметричности

$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$  уравнения Навье – Стокса для составляющих скорости и давления приводим к виду:

$$\frac{d^2 U_z}{dr^2} - \frac{1}{r} \left( \frac{U_0 R}{v} - 1 \right) \frac{dU_z}{dr} = - \frac{\rho g - \Psi}{\mu};$$

$$\frac{d^2 U_\varphi}{dr^2} - \frac{1}{r} \left( \frac{U_0 R}{v} - 1 \right) \frac{dU_\varphi}{dr} - \frac{1}{r^2} \left( \frac{U_0 R}{v} + 1 \right) U_\varphi = 0;$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \left( \frac{U_\varphi^2}{r} + \frac{U_0^2 R^2}{r^3} \right).$$

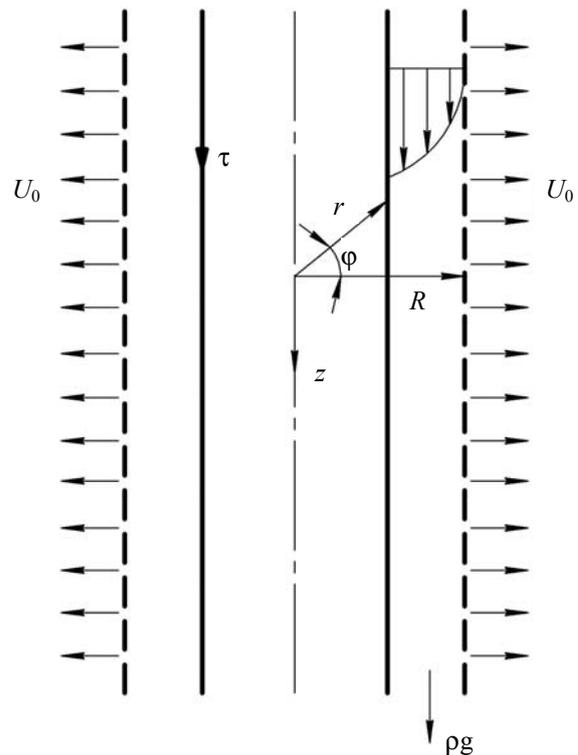


Рис. 1. Схема двухфазного пленочного течения на проницаемой цилиндрической поверхности

В результате получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Это означает, что решение  $U = U(r)$  будет автомодельным. Выполним переход к безразмерной координате  $\tilde{r} = r / R$ , обозначим  $\alpha = \frac{U_0 R}{v}$  и получим:

$$\frac{d^2 U_z}{d\tilde{r}^2} - \frac{(\alpha-1)}{\tilde{r}} \frac{dU_z}{d\tilde{r}} = - \frac{\rho g - \Psi}{\mu} R^2; \quad (9)$$

$$\frac{d^2 U_\varphi}{d\tilde{r}^2} - \frac{(\alpha-1)}{\tilde{r}} \frac{dU_\varphi}{d\tilde{r}} - \frac{(\alpha+1)}{\tilde{r}^2} U_\varphi = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \left( \frac{U_\varphi^2}{r} + \frac{U_0^2 R^2}{r^3} \right). \quad (11)$$

Для граничных условий используем значения составляющих скорости жидкости на цилиндрической поверхности и компонентов тензора касательных напряжений:

$$\tau_z = -\mu \frac{\partial U_z}{\partial r}, \quad \tau_\varphi = -\mu \left( \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r} \right), \quad (12)$$

на границе раздела фаз.

Частные решения уравнений (9–11) ищем в виде  $r^k$  и получаем общие решения:

$$U_z = c_1 + c_2 \tilde{r}^\alpha + \frac{\rho g - \Psi}{2\mu(\alpha-1)} \tilde{r}^2; \quad (13)$$

$$U_\varphi = \frac{c_3}{\tilde{r}} + c_4 \tilde{r}^{\alpha+1}. \quad (14)$$

За граничные условия принимаем условие прилипания на стенке и равенство касательных напряжений (12) на границе раздела фаз:

$$U_z|_{\tilde{r}=1} = U_\varphi|_{\tilde{r}=1} = 0; \quad \tau_z = -\frac{\mu}{R} \frac{dU_z}{d\tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}}; \quad (15)$$

$$\tau_\varphi = -\mu \left( \frac{\partial U_\varphi}{R \partial \tilde{r}} - \frac{U_\varphi}{R \tilde{r}} \right) \Big|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}}. \quad (16)$$

Из условия равновесия сил, действующих на газовый поток:

$$\pi(R-\tilde{\delta})^2 \Delta P = 2\pi(R-\tilde{\delta}) \tau'_z l,$$

получим

$$\Psi = \frac{\Delta P}{l} = \frac{2\tau'_z}{R(1-\tilde{\delta})} = -\frac{2\tau_z}{R(1-\tilde{\delta})}.$$

Учитывая граничные условия (15, 16), получаем распределение скорости в пленке жидкости:

$$U_z = \left[ \frac{\tau_z R}{\mu(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-1}} + \frac{\rho g R^2}{\mu\alpha(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-2}} \right] \times \\ \times (1-\tilde{r}^\alpha) - \left[ \frac{\rho g R^2}{2\mu\alpha(\alpha-2)} + \frac{\tau_z R}{\mu(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})} \right] (1-\tilde{r}^2); \quad (17)$$

$$U_\varphi = \frac{R\tau_\varphi(1-\tilde{\delta})^2}{\mu\alpha(1-\tilde{\delta})^{\alpha+2} + 2\mu} \left( \frac{1}{\tilde{r}} - \tilde{r}^{\alpha+1} \right). \quad (18)$$

Найдем объемный расход жидкой фазы на единицу периметра

$$q = R \int_{1-\tilde{\delta}}^1 U_z \tilde{r} d\tilde{r} = \\ = \left[ \frac{\tau_z R^2}{\mu(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-1}} + \frac{\rho g R^3}{\mu\alpha(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-2}} \right] \times$$

$$\times \left[ \frac{1-(1-\tilde{\delta})^2}{2} - \frac{1-(1-\tilde{\delta})^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right] - \\ - \left[ \frac{\rho g R^3}{2\mu(\alpha-2)} + \frac{\tau_z R^2}{\mu(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})} \right] \times \\ \times \left[ \frac{1-(1-\tilde{\delta})^2}{2} - \frac{1-(1-\tilde{\delta})^4}{4} \right]. \quad (19)$$

Изменение данного объемного расхода по длине описывается уравнением

$$\frac{dq}{dz} = -U_0.$$

Разложение правой части в ряд до четвертой степени включительно имеет вид

$$q = \frac{\tau_z R^2}{\mu} \left[ \frac{\tilde{\delta}^2}{2} + \frac{2\alpha}{3!} \tilde{\delta}^3 + \frac{3(\alpha^2+1)\tilde{\delta}^4}{4!} + \dots \right] + \\ + \frac{\rho g R^3}{\mu} \left( \frac{2\tilde{\delta}^3}{3!} + \frac{3\alpha-8}{4!} \tilde{\delta}^4 + \dots \right) = \\ = \frac{\tau_z \delta^2}{\mu} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{U_0 \delta}{v} + \frac{1}{8} \left( \frac{U_0^2 \delta^2}{v^2} + \frac{\delta^2}{R^2} \right) + \dots \right] + \\ + \frac{\rho g \delta^3}{\mu} \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{24} \left( 3 \frac{U_0 \delta}{v} - 8 \frac{\delta}{R} \right) + \dots \right]. \quad (20)$$

Данное разложение показывает, что изменение гидродинамических характеристик вследствие оттока жидкой фазы происходит, когда безразмерный комплекс Рейнольдса  $\frac{U_0 \delta}{v}$  соизмерим с единицей.

Исследуем пленочное течение воды в проницаемом цилиндре диаметром 0,15 м под воздействием газового потока со средней расходом скоростью 15 м/с с углом закрутки в 45°. Расход жидкой фазы примем равной 0,5 м³/ч, а скорость оттока – 0,001 м/с. В данном случае из уравнения (20) получена толщина пленки 1,1 мм, а на рис. 1, 2 представлены графики составляющих скорости.

Графические зависимости выявляют неожиданный факт, что распределение скоростей в пленке жидкости на проницаемой поверхности является линейным.

Среднее значение тангенциальной составляющей скорости пленки и перепад давления в радиальном направлении будет:

$$\bar{U}_\varphi = \frac{1}{\tilde{\delta}} \int_{1-\tilde{\delta}}^1 U_\varphi d\tilde{r} = \frac{R\tau_\varphi}{\tilde{\delta}\mu} \frac{(1-\tilde{\delta})^2}{\alpha(1-\tilde{\delta})^{\alpha+2} + 2} \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{\alpha + 2} - \frac{(1 - \tilde{\delta})^{\alpha + 2}}{\alpha + 2} - \ln(1 - \tilde{\delta}) \right], \quad (21)$$

$$\Delta P_r = \rho \int_{1-\tilde{\delta}}^1 \left( \frac{U_\phi^2}{r} + \frac{U_0^2 R^2}{r^3} \right) d\tilde{r}. \quad (22)$$

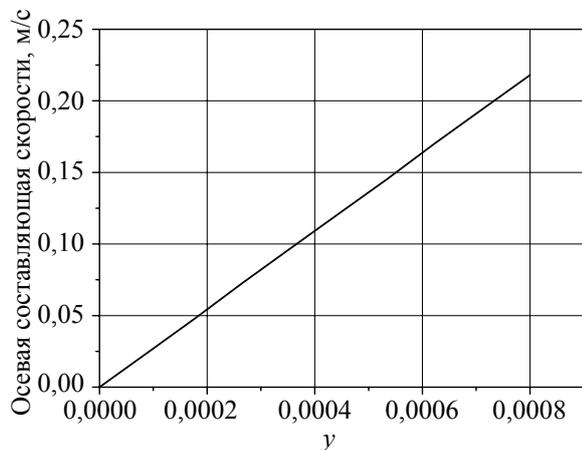


Рис. 2. Осевая составляющая скорости в пленке жидкости

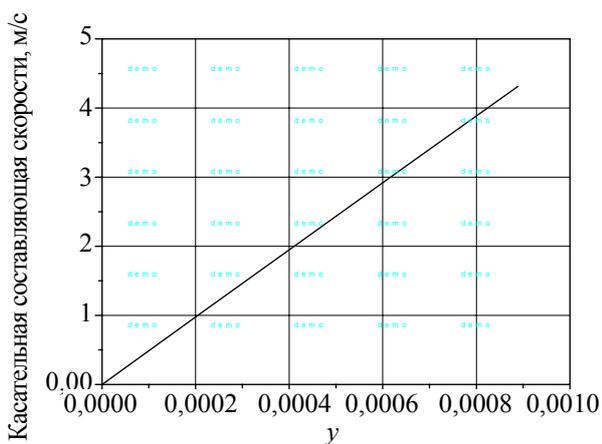


Рис. 3. Касательная составляющая скорости в пленке жидкости

**Вывод.** Создание моделей процессов разделения, происходящих в конструируемых аппаратах, является важной и достаточно сложной задачей. Математическое описание позволяет выполнить расчет основных характеристик, исследовать влияние на процесс различных факторов, сочетать теоретические и экспериментальные методы исследования, определить оптимальные конструкционные и технологические параметры. Применение математического аппарата позволяет производить достаточно сложные расчеты.

Полученная математическая модель позволяет определять гидродинамические характеристики пленочного течения под воздействием закрученного газового потока с учетом оттока

жидкой фазы и учитывать их при исследовании процессов фильтрования.

Математическое моделирование рассмотренных процессов позволяет найти оптимальные соотношения между геометрическими и режимными параметрами, значительно повысить интенсивность и эффективность процессов разделения.

**Основные обозначения.** Г – газ;  $d$  – дифференциал;  $D$  – диаметр цилиндра, м;  $f$  – относительная площадь отверстий проницаемой поверхности;  $k$  – коэффициент;  $l$  – длина цилиндра, м;  $\Delta P$  – перепад давления, Па;  $q$  – удельный объемный расход,  $\text{м}^3/(\text{м}\cdot\text{с})$ ;  $R$  – радиус, м;  $\tilde{r} = r/R$  – безразмерная радиальная координата;  $Re$  – число Рейнольдса;  $U_\phi$ ,  $U_z$ ,  $U_r$  – тангенциальная, осевая и радиальная составляющие скорости жидкости, м/с;  $W_\phi$ ,  $W_z$ ,  $W_r$  – тангенциальная, осевая и радиальная составляющие скорости газового или жидкостного потока, м/с;  $\bar{W}_z$ ,  $\bar{U}$  – средняя скорость газа, жидкости, м/с;  $U_0$  – скорость оттока (притока) газа, жидкости через проницаемую поверхность, м/с;  $x, y, z$  – прямоугольная система координат;  $\beta$  – угол;  $\delta$  – толщина пленки, м;  $\tilde{\delta} = \delta/R$  – безразмерная толщина пленки жидкости;  $\pi = 3,14159$ , отношение длины окружности к диаметру;  $\gamma$  – коэффициент расхода;  $\lambda$  – коэффициент трения;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости газа, несущей среды, суспензии,  $\text{Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2$ ;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $\xi$  – коэффициент сопротивления;  $\rho$  – плотность,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $\tau$  – касательные напряжения,  $\text{Н}/\text{м}^2$ ;  $\phi, r, z$  – цилиндрическая система координат;  $\rho$  – плотность,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $\psi$  – перепад давления по длине трубы;

### Литература

1. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1969. – 742 с.
2. Ерошенко, В. М. Гидродинамика и теплообмен на проницаемых поверхностях / В. М. Ерошенко, Л. И. Зайчик. – М.: Наука, 1984. – 274 с.
3. Уоллис, Г. Б. Одномерные двухфазные течения / Г. Б. Уоллис. – М.: Мир, 1972. – 440 с.
4. Соколов, В. И. Газожидкостные реакторы / В. И. Соколов, И. В. Доманский. – Л.: Машиностроение, 1976. – 216 с.
5. Берд, Р. Явления переноса / Р. Берд, В. Стьюарт, Е. Лайфут. – М.: Химия, 1974. – 688 с.
6. Гельперин, Н. И. Основные процессы и аппараты химической технологии: в 2 кн. / Н. И. Гельперин. – М.: Химия, 1981. – 812 с. – (Процессы и аппараты химической и нефтехимической технологии).
7. Идельчик, И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / И. Е. Идельчик. – М.: Машиностроение, 1975. – 560 с.

Поступила 03.03.2011