

УДК 519.872

В. И. Кудрявцев, д-р техн. наук (БГТУ); О. Ф. Зирко, лаборант (БГТУ)

### ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В статье представлен метод анализа комплексных систем массового обслуживания (КСМО), в котором были соединены воедино графические изображения систем и математические описания теории массового обслуживания (ТМО). Базовой структурой исследования явился комплексный узел оргграфа, включающий химеры, которые позволяют достичь эффекта. В модели рассмотрена схема комплексного узла на основе систем массового обслуживания, выявлены зависимости сложных структур от функционалов (трансформации, переиздания и издания), доказана возможность использования графоаналитического метода в рамках ТМО для анализа КСМО.

In the paper the authors occurred the method of presentation in Complex by Queuing systems (CQS). The method will have to tie graphic produces and analytics analyses together. In one's own made the structure of CQS. It was try to find the new algorithms of analyzer the objects of queuing systems after there elaboration. For analyze there were created three functions (function of transformation, function of republish, function of publish) and respective transports. The system was divided into tree stages (transformation, republish, publish) which were the base. On every stage the probability of appearance or respective functions were accounted. For direction the structures were completed auxiliary elements which were not real but in analyze there were using as «analytical» form. As the result it was formed the possibilities for direction in CQS.

**Введение.** Комплексными системами массового обслуживания (КСМО) являются системы массового обслуживания, обладающие структурной или контентной сложностью. Под контентной сложностью понимается показатель требования  $Z_k$  входных потоков, который можно представить в комплексной форме, а именно:

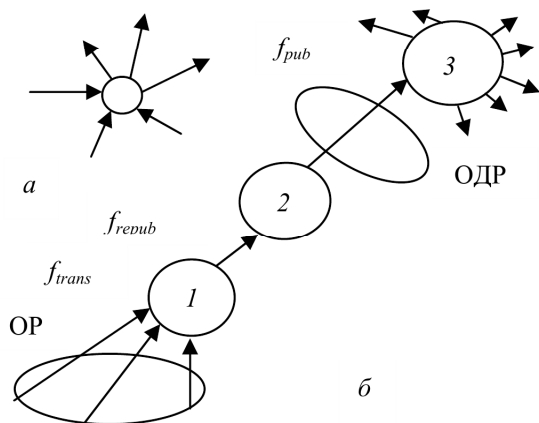
$$Z_k = T_k + iQ_k, \quad (1)$$

где  $k$  – номер поступившего в систему  $k$  требования;  $T_k$  – момент поступления требования в систему  $k$  требования;  $Q_k$  – объектный показатель требования.  $k$  требование является требованием КСМО, если оно является требованием одной из  $\{СМО_n\}$  – систем комплекса КСМО. Под структурной сложностью КСМО понимается набор взаимосвязанных СМО в направлении источник – источник (И – И), обслуживающий прибор – обслуживающий прибор (ОП – ОП), обслуживающий прибор – источник (ОП – И). Такие связи позволяют моделировать сложные иерархические и сетевые наборы, состоящие из отдельных СМО. Моделирование сложных конгломератов СМО со сложным контентом актуально при анализе и управлении сложными производственными и вычислительными системами. При разработке метода представления КСМО для такого моделирования требуется, с одной стороны, создать дополнительные возможности для анализа сложных взаимосвязей между СМО и сложного контента СМО, а с другой стороны, необходима полная совместимость такого моделирования с теорией массового обслуживания без потерь ее функциональности, что и является целью данной статьи.

**Основная часть.** Рассмотрим моделирование структурной сложности при связи ОП – И. В анализе КСМО связь ОП – И последовательно распределяет две СМО и представляет собой инверсную СМО, в которой требования перемещаются в очереди от обслуживающего прибора (ОП) к источнику (И). Таким образом, ОП фактически совмещает в себе функции ОП для одной очереди и функции И для смежной очереди в инверсной СМО. Аналогично И совмещает функции И для одной очереди и ОП для смежной очереди в инверсной СМО. Такие структурно связанные объекты И и ОП в КСМО целесообразно представить в виде комплексных узлов  $V$ , а очереди – в виде направленных ребер  $R$ , входящих в состав ориентированных графов [1] (**орграфов**  $G$ ). При этом в один узел может входить и выходить несколько ребер [2], что предполагает структурную связь в свою очередь связанных групп ОП – ОП и И – И. Такая модель позволяет осуществлять графоаналитический анализ [2] иерархических и сетевых наборов СМО неограниченной сложности, по мере необходимости сворачивать их полностью или частично на выбранном участке иерархии до уровня комплексного узла и не отказываться при этом от инструментов анализа, разработанных в теории массового обслуживания [3–5].

Комплексный узел может быть представлен в свернутом виде (рисунок, *a*) и в развернутом виде (рисунок, *б*) как последовательное соединение двух СМО, которые включают узлы 1, 2 и 3, осуществляющие соответственно три функции: трансформацию требований  $f_{trans}$ , переиздание требований  $f_{repub}$  и издание требований  $f_{pub}$ . Кроме того, на рисунке изображены

связанные между собой множества требований ОР (основания для реализации) и ОДР (основания для дереализации).



Изображение комплексного узла:  
 а – в виде простейшего узла;  
 б – в виде развернутого графа

Множество ОР (основание для реализации – далее множество  $\{MR\}$ , что означает multitude for realization) представляет собой минимальное множество требований на входе в узел трансформации 1, которое обеспечивает получение целого числа требований после узла трансформации, составляющих множество ОДР (основание для дереализации – далее множество  $\{MD\}$ , т. е. multitude for de-realization). Тогда для функционала трансформации можно записать следующие соотношения:

$$[\eta\{MR\}] \rightarrow \min \eta\{MD\}, \quad (2)$$

$$f_{trans}\{MR\} = \{MD\}. \quad (3)$$

Таким образом, функционал трансформации  $f_{trans}$  представляет собой функцию, которая реализует множество условий, накладываемых на контент требований, при их преобразовании из множества  $\{MR\}$  в множество  $\{MD\}$ . Функционал переиздания  $f_{repub}$  – физическая функция, которая реализует множество условий, накладываемых на контент требований, при формировании множества  $\{MD\}$ . Основные обязанности, накладываемые на  $f_{repub}$ , – распознать в потоке требований необходимые параметры. Основное отличие функционала переиздания от функционала трансформации состоит в том, что он не влияет ни на объектную часть, ни на системную. Функционал издания  $f_{pub}$  представляет собой физическую функцию, которая реализует множество условий, накладываемых на контент требований, при формировании множества требований в смежных СМО. Для проведения графоаналитического метода все три функционала должны быть определены.

Связанные термины «реализация» и «дереализация» в названии множеств подразумевают возможность осуществления между  $\{MR\}$  и  $\{MD\}$  транзакционных связей, когда при нарушении условий транзакционности происходит откат функционала трансформации в отношении этих двух множеств. Кроме того, применение модели, подобной на рисунке, б, подразумевает представление требований как объектов, имеющих объектную часть  $Q_k$  и системную часть, в которую входят характеристики, определяющие состояние объекта в отношении конкретной СМО.

Поскольку в случае комплексного узла речь идет о нескольких связанных СМО, то очевидно, что простого  $T_k$  для характеристики такой связи в показателе требования  $Z_k$  будет недостаточно. Есть и другие основания для такого предположения. В данной модели комплексного узла множества  $\{MR\}$  и  $\{MD\}$  представляют собой сущности особого рода, которые мы обозначим как химеры, т. е. структурные объекты дополнительной реальности, вызванные к жизни потребностями конкретного вида анализа. В данном случае речь идет о моделировании отношений предок – потомок, которые описывают отношения внутри сетевых и иерархических структур. При этом множество  $\{MR\}$  играет роль предка, а множество  $\{MD\}$  – потомка, но тогда для отслеживания отношений предок – потомок в системной части показателя требований должна быть отражена связь этого требования не только с конкретной СМО комплексной системы, но и с конкретными множествами  $\{MR\}$  и  $\{MD\}$  его породившими. Очевидно, что в завершении описания функционала трансформации к формулам (2) и (3) следует добавить выражение трансформации, которое отражает изменение не только количественного состава  $\{MR\}$  как в уравнении (2), но и контента требований как в системной, так и в объектной его частях. Через  $\{MD\}$  возможно исследовать выборочные параметры, которые были изменены в процессе трансформации. На контентном уровне исследования должно происходить наблюдение за показателем требования, а именно, за объектной и системной характеристиками требования. Следовательно, выраженные трансформации можно описать

$$\{T_n\}_{\{MD\}} = f_{trans}\{MR\} \operatorname{Re}(Z_k - Z_1), \quad (4)$$

$$\{Q_n\}_{\{MD\}} = f_{trans}\{MD\} \operatorname{Im}\{Z_k\} P_{12}(T_k),$$

где  $P_{12}(T_k)$  – переходная вероятность требований, поступивших в момент  $T_k$  в СМО. Эта вероятность сформирована на отрезке от узла 1 к узлу 2 в процессе трансформации (рисунок, б).

Согласно рисунку, б, процесс трансформации включает в себя, кроме узла 1, очередь 1–2 и завершается переизданием требований в узле 2, где выявляются характеристики требований, проверяется соответствие их ограничениям на дальнейшее использование и определяется фактический состав  $\{MD\}$ . При этом очередь 1–2 выделена для анализа вероятностных характеристик трансформации с использованием инструментария теории массового обслуживания. Не следует считать, что таким образом функциональная и вероятностная модели процесса трансформации полностью отделены друг от друга. Если в ходе вероятностного анализа будут выявлены устойчивые изменения в процессе трансформации, они могут быть учтены при коррекции функционала трансформации. При этом могут анализироваться три версии  $\{MD\}$  – фактическая, планированная в соответствии с функционалом трансформации по выражению (3) и предсказанная в рамках теории массового обслуживания.

Переиздание требований в узле 2 на практике широко поддерживается средствами контроля готовой продукции и другими соответствующими инструментами. Однако если такого промежуточного контроля нет, то включение в рассматриваемую модель узла переиздания 2 становится избыточным, так как значение функционала переиздания становится равным 1. Тогда вероятностные процессы трансформации анализируются совместно с вероятностными характеристиками процесса издания в модели единой очереди между узлами 1 и 3.

Процесс издания представляет собой распределение множества требований  $\{MD\}$  на этапе переиздания в других СМО и в своей функциональной части может основываться на следующих принципах:

- 1) периодический (во временном цикле или по упорядоченным квотам);
- 2) по контентным ограничениям показателей издаваемых требований;
- 3) в зависимости от структурных ограничений последовательно расположенных СМО (переполнение последующей СМО, задержки реализации в последующей СМО и др.);
- 4) исходя из конъюнктурных ограничений, реализуемых через функционал актуальности;
- 5) смешанный (контентный, структурный, периодический, конъюнктурный) в различных сочетаниях;
- 6) случайный.

Как и при переиздании, изменение контента требований при их издании касается только системной части требований. Таким образом, вне зависимости от принципа издания задача анализа на данном этапе состоит в определении систем-

ных характеристик требований  $\{MD\}$  на этапе издания, отражающие их распределение разных СМО. При этом последняя так же, как и  $\{MD\}$ , на этапе переиздания может иметь три версии.

В целом задачей анализа комплексного узла является анализ трех версий  $\{MD\}$  на этапе издания, соответствующих фактической, предсказанной или планированной версиям конкретной  $\{MR\}$ . В этом случае анализ может быть последовательно распространен на всю КСМО, состоящую из множества подобных комплексных иерархически связанных узлов. Такой анализ может быть представлен для комплексного узла с одним из описанных принципов издания, например контентным.

Из искоемых трех версий  $\{MD\}$  получение планированной и фактической версий является задачей тривиальной, а получение предсказанной версии  $\{MD\}$  является основной задачей данного исследования. Поступающие с интенсивностью  $\lambda$  на входы комплексного узла требования описываются показателем требования по формуле (1), значение которого отражает отдельные состояния требования. В свою очередь, состояния на уровне  $\{MR\}$  формируются в векторные множества:

$$\bar{Z} = \{Z_n\}, \quad (5)$$

где  $n = 1, 2, \dots, k$  – количество требований, которые образуют множество  $\{MR\}$ .

Требования могут быть неоднородны, т. е. иметь различную функцию распределения. Процесс трансформации множества  $\{MR\}$  начинается с момента начала поступления в узел 1 первого из требований  $\{MR\}$ , а завершается с моментом окончания формирования множества  $\{MD\}$ , соответствующего  $\{MR\}$ , т. е. с поступлением в это  $\{MD\}$  на этапе переиздания последнего его требования. В соответствии с выбранным графоаналитическим методом будем считать, что в СМО определены следующие значения:

$$\{f_{prog}^n\} = \{f_{trans}^{prog}, f_{repub}^{prog}, f_{pub}^{prog}\}, \quad (6)$$

$$\{f_{plan}^n\} = \{f_{trans}^{plan}, f_{repub}^{plan}, f_{pub}^{plan}\}, \quad (7)$$

где  $f_{prog}$  – множество функционалов трансформации, которые можно прогнозировать;  $f_{plan}$  – множество функционалов трансформации, работу с помощью которых можно планировать.

Вероятность трансформации  $k$  требования  $P_{trans}(T_k)$  в данной СМО определяется статистически либо функционально. Значение контента в  $\{MD\}$  рассчитывается по формуле (4), в которой переходные вероятности можно вычислить по формуле К. Шеннона. Для дискретных требований  $P_{12}$  имеет вид [4]

$$P_{12}(T_k) = -P_{trans}(T_k) \log_2 P_{trans}(T_k), \quad (8)$$

для непрерывного потока [4] –

$$P_{12}(T) = - \int_{-\infty}^{+\infty} P_{trans}(T) \log_2 P_{trans}(T) dT. \quad (9)$$

Среднее количество требований в  $\{MD\}$  в момент  $T_k$  составляет

$$N\{MD\} = \left[ \sum_{l=1}^k f_{trans}^l(T_l) P_{12}(T_l) \right]. \quad (10)$$

После окончания процесса трансформации в СМО начинается 2-й этап – процесс переиздания, в котором в отличие от процесса трансформации внимание акцентируется на объектных характеристиках требования при сохраненных системных изменениях. При заданном функционале переиздания  $f_{repub}$ , рассчитанном по формулам (2)–(10), числе требований, находящихся в  $\{MD\}$ , и новых объектных характеристиках требований  $Q_k$  процесс переиздания можно рассматривать как модель СМО с ограниченными суммарными объектными характеристиками требований  $QS$  и описывать процессом:

$$PR_{repub} = \begin{cases} (f_{repub}, N\{MD\}, Q_n); 0 \leq N\{MD\} \leq N, \\ (f_{repub}, N\{MD\}, F(Q_n), Q_n); 0 \leq N\{MD\} \leq \infty, \end{cases}$$

где  $PR_{repub}$  – процесс переиздания;  $F(Q_n)$  – матрица, каждый элемент которой равен вероятности того, что до момента  $T$  в СМО было обслужено  $N$  из множества  $\{MR\}$  требований и от момента  $T$  пройдет  $dQ_n, dQ_{n+1}, \dots, dQ_{N\{MD\}}$  изменений объектных характеристик.

Для оценки процесса  $PR_{repub}$  при измененных объектных характеристиках  $\Delta Q = Q_n - Q_{n-k}$  формируются матрицы интенсивности входного потока требований  $\Lambda$  и интенсивности проведения переиздания. Элементы соответствующих матриц равны

$$\lambda_n = \mu \int_0^{\infty} P_{12}(T_k) dB(T_k), \quad (11)$$

$$\mu_n = \frac{Q_k}{\sum_{k=0}^N Q_k}, \quad (12)$$

где  $\mu$  – интенсивность трансформации;  $B(T_k)$  – функция распределения  $k$  требования.

Завершение переиздания определяет возможность появления требований на узле 3 (этапе издания).

Опираясь на формулы (11), (12), процесс переиздания  $PR_{repub}$  можно описать с помощью системы интегродифференциальных уравнений (ИДУ) при любых  $n \leq N$ :

$$\frac{dP(Q_1)}{dQ_1} = \Lambda \circ P(Q_0) \circ L(QS) + M \circ P(Q_1),$$

$$\begin{aligned} \frac{dP(Q_n)}{dQ_n} = & -\Lambda \circ \int_{-QS}^{QS} P(Q_{n-1}) \circ L(Q_{n-1}) dQ_{n-1} - \\ & - (\Lambda + M) \circ \int_{-QS}^{QS} P(Q_n) \circ L(Q_n) dQ_n + \\ & + M \circ \int_{-QS}^{QS} \dots \int_0^{Q_n} F(Q_n) \circ e^{-\Lambda \circ Q_n} dQ_1 dQ_2 \dots dQ_{n+1}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $L(Q_n)$  – функции распределения  $Q_n$ ;  $P(Q_n)$  – матрица, каждый элемент  $p(Q_n)$  которой равен

$$p(Q_n) = \int_0^{\infty} g^n(Q_n, T_n) dT_n, \quad (14)$$

при этом  $g^n(Q_n, T) dT$  означает вероятность того, что на коротком промежутке времени  $\Delta T$  существует вероятность того, что в множество  $\{MD\}$  поступит  $n$  требований, которые будут заключены в границы  $Q_n + dQ_n$ .

Решение ИДУ существует, если выполняются следующие условия: существует матрица загрузки  $\rho$  и инфинитезимальная матрица  $D$ ; загрузка  $\rho(n)$  ограничена и существует набор пределов для значений вероятности трансформации, самих объектных характеристик и их функций распределения; существуют матрицы оценки загрузки. В этом случае для процесса переиздания  $PR_{repub}$ , выраженном в виде СМО, можно утверждать, что для системы ИДУ (13) существует стационарный режим работы. Учитывая влияние функционала переиздания  $f_{repub}$  на процесс переиздания, представим решение в виде

$$P(Q_n) = -P_0 \circ e^{-f_{repub}|Z_n|}, \quad (15)$$

где  $P_0$  – стандартная начальная вероятность переиздания требований;  $|Z_n|$  – модуль от множества показателя, сформированного в  $\{MD\}$ . При условиях

$$P(Q_{n-1}) = -\Lambda \circ P_0 \circ e^{-\Lambda \circ Q_{n-1}}, \quad (16)$$

$$F(Q_n) = P_0 \circ (M)^{n!} \circ e^{-M \sum_{l=0}^{n+z} Q_n} \circ e^{\Lambda \circ Q_n}. \quad (17)$$

Подставляя (15)–(17) в (13), получаем

$$P(Q_n) = -\psi \Lambda \circ P_0 + \psi M \circ P_0 (-1)^n \circ e^{-M \times QS}, \quad (18)$$

где  $\psi$  задан начальными условиями.

Вероятность  $P_0$  вычисляется с учетом ограничений вероятностных характеристик процесса переиздания, а именно, равенства единице вероятностей  $P(Q_n)$  процесса переиздания. Таким образом,

$$P_0 = (1 - \rho + \sum_{n=2}^N [\psi \Lambda + \psi M \circ (-1)^n \circ e^{-M \circ QS}])^{-1}. \quad (19)$$

Из зависимости (18) при существовании вероятности  $P(Q_k)$  переиздания как этапа переиздания  $PR_{repub}$  КСМО получают фактические значения функционала переиздания  $f_{repub}$ :

$$f_{repub} = -\ln(\Psi\Lambda - \Psi M \circ (-1)^k \circ e^{-M \circ QS}) |Z_n|^{-1}. \quad (20)$$

Рассчитав значения

$$\Delta f_{repub}^{plan} = \frac{f_{repub}^{plan} - f_{repub}}{N\{MD\! \}}, \quad (21)$$

$$\Delta f_{repub}^{prog} = \frac{f_{repub}^{prog} - f_{repub}}{N\{MD\! \}}, \quad (22)$$

можно оценить точность проведенных в  $\{MD\}$  перераспределений и трансформаций, происшедших при переходе от множества  $\{MR\}$  к множеству  $\{MD\}$ . Если одно из значений велико, необходимо выполнить оценку вероятностей  $P_{12}$  и  $P(Q_k)$ : найти начальные моменты вероятностей, которые помогут определить центры тяжести (под кривыми), и центральные моменты (меру рассеяния). Оценив моменты, необходимо осуществить статистическое перераспределение параметров требований и изменить значения функционалов (6) и (7). При малых значениях  $\Delta f_{repub}$  процесс переиздания автоматически переходит в процесс издания, в ходе которого ставятся следующие задачи:

1) зафиксировать количество  $N$  СМО, готовых в данный момент времени  $T_k$  принять на обработку требования из  $\{MD\}$  с объективными характеристиками  $Q_k$ ; определить структуру каждой СМО; синтез требований в очереди будет происходить по мере поступления требований в узел 3;

2) рассчитать вероятность попадания отобранных требований в систему  $СМО_N$ , которая равна вероятности того, что в момент  $T$  в системе  $СМО_N$  существует  $\eta(T)$  требований, находящихся в множестве  $\{MD\}$  и сформированных в множестве  $\{Q_n\}$ . Учитывая, что для каждого значения  $Q_n$  существует свой прогнозируемый функционал издания  $f_{pub}(Q_n)$  и изменения  $dQ_n$  ( $Q_n \in R$ ) объектных характеристик, которые формируются в множества, вероятность попадания отобранных требований в систему можно оценить через предполагаемый функционал издания с учетом прошедших с требованиями изменений следующим образом:

$$P(Q) = P\{\eta(T) \in N\{MD\}\} = \int \prod_{i=1}^n f_{pub}^{prog}(Q_i) dP(Q_i), \quad (23)$$

где  $P(Q_n)$  вычисляется по формуле (18); значения функционала издания выбираются из множества, которое задается выражением (6);

3) рассчитать вероятность того, что  $n$  требование будет издано в заданной СМО – системе  $P_{pub}\{Z_n\}$ ; вероятность находится как регрессивная зависимость с учетом функционала издания по формуле

$$P_{pub}\{Z_n\} = P_{pub}(T, Q_n) = \int_0^T \int_0^{Q_n} P(Q) dL(Q) dB(T), \quad (24)$$

где  $L(Q)$ ,  $B(T)$  – функции распределения объектных характеристик  $Q$  и времени  $T$ , определенных в  $СМО_N$ ;

4) установить начальный и центральный моменты вероятности  $P\{\eta\}$  (23) и  $P_{pub}(Z_n)$  (24); а также планируемого функционала издания  $f_{pub}$  из (6);

5) оценив соответственно центры тяжести и меры рассеяния каждого из параметров, можно определить разницу между планируемым и прогнозируемым параметрами функционалов и выявить факты появления ошибок.

Анализ этапа 3 можно считать завершенным тогда, когда с некоторой вероятностью результаты издания  $PR_{repub}$  удовлетворяют исследователя.

**Заключение.** В описанном в статье представлении КСМО удалось связать разные методы моделирования систем – графоаналитический и теорию массового обслуживания, соединив возможности двух моделей. Описана базовая структура, а именно структура комплексного узла, включая так называемые химеры, которые позволяют достичь данного эффекта. Представлена теоретически обоснованная, опирающаяся на классические определения теории вероятности и теории массового обслуживания, система прогнозирования характеристик требований в одной из связанных СМО по характеристикам требований предыдущей СМО. Такое представление создает предпосылки для новых возможностей при анализе сложных систем.

### Литература

- Оре, О. Теория графов / О. Оре. – М.: Наука, 1968. – 336 с.
- Уилсон, Р. Введение в теорию графов / Р. Уилсон. – М.: Мир, 1977. – 208 с.
- Тихоненко, О. М. Модели массового обслуживания в информационных системах: учеб. пособие / О. М. Тихоненко. – Минск: Технопринт, 2003. – 327 с.
- Джейсуол, Н. Очереди с приоритетами / Н. Джейсуол. – М.: Мир, 1973. – 277 с.
- Бочаров, П. П. Теория массового обслуживания / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – М.: Изд-во Рос. ун-та Дружбы Народов, 1995. – 579 с.

Поступила в редакцию 31.03.2010