УДК 517.925.6

В. И. Мататов, доцент (БГУ);
Т. А. Любецкая, ассистент (БГТУ); Н. В. Рабчун, ассистент (БГЭУ)

К ВОПРОСУ О ПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧКАХ РЕШЕНИЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА ШЕСТОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ, КОГДА ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ АРГУМЕНТЫ ГАМИЛЬТОНИАНА – ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Статья посвящена исследованию подвижных особых точек решений автономной системы Гамильтона шестого порядка в случае, когда промежуточные аргументы гамильтониана – дробно-линейные функции. Найдены коэффициентные условия, при выполнении которых решения указанной системы в плоскости независимой переменной имеют подвижные точки ветвления второго порядка. Отдельно изучен случай, когда решения исходной системы Гамильтона в плоскости независимой переменной не имеют никаких подвижных особенностей.

The article is devoted to the research of movable singular points of the solutions of Hamilton autonomous system of sixth order when intermediate Hamiltonian arguments are fraction linear functions. Coefficient conditions have been found. If these conditions are fulfilled the solutions of the given system in the plane of independent variable have the branching points of the second degree as movable singular points. The case when the solutions of initial Hamilton system have no movable peculiarities in the plane of independent variable has been studied separately.

Введение. Многие прикладные задачи моделируются с помощью систем дифференциальных уравнений Гамильтона [1–3]. Часто они бывают автономными, т. е. их гамильтонианы явно не зависят от времени.

Решения дифференциальных уравнений и систем таких уравнений, рассматриваемые как аналитические функции комплексной переменной, характеризуются в основном особыми точками. Представляет интерес исследование подвижных особых точек решений нелинейных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений [4–12]. Под выражением «подвижные особые точки» подразумевают особые точки решений дифференциальных уравнений и систем уравнений, положение которых зависит от начальных данных.

В работе [8] исследованы подвижные особые точки решений систем вида $x' = R_1(z, y)$, $y' = R_2(z, x)$, где R_1, R_2 – рациональные функции относительно вторых аргументов с голоморфными по z коэффициентами. Статья [9] посвящена изучению подвижных особых точек решений неавтономной системы $\dfrac{dx}{dz} = \dfrac{P_2(z,x,y)}{P_1(z,x,y)}$, $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{Q_2(z,x,y)}{Q_1(z,x,y)}$, где $P_1(z,x,y)$, $P_2(z,x,y)$, $Q_1(z,x,y)$, $Q_2(z,x,y)$ – полиномы не выше второй степени относительно x, y с голоморфными по z коэффициентами. В статье [10] исследована автономная система Гамильтона второго порядка на предмет однозначности подвижных особых точек ее решений. В работе [11] рассмотрена неавтономная система второго порядка $x' = P_3(z,x,y)$, $y' = Q_3(z,x,y)$, где P_3, Q_3 – полиномы третьей степени по x, y с голоморфными по z коэффициентами. Получены условия того, что решения изучаемых систем имеют подвижные особенности не сложнее полюсов.

В статье [12] исследованы подвижные особые точки решений автономной системы Гамильтона шестого порядка в случае, когда промежуточные аргументы гамильтониана имеют следующий вид: $\varphi_1 = \dfrac{x_1}{y_1}$, $\varphi_2 = \dfrac{x_2}{y_2}$, $\varphi_3 = \dfrac{x_3}{y_3}$.

В работе [13] рассмотрена автономная система Гамильтона $\dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y_i}$, $\dfrac{dy_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial x_i}$, $i = \overline{1,n}$, $H = F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\varphi_i = \dfrac{x_i}{y_i}$, где F – голоморфная функция относительно φ_i. Показано, что решения данной системы в качестве подвижных особых точек имеют точки ветвления второго порядка.

Статья [14] посвящена изучению подвижных особых точек решений автономной системы Гамильтона четвертого порядка.

Основная часть. Пусть гамильтониан некоторой системы имеет вид $H = F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, где F – голоморфная функция своих аргументов $\varphi_1 = \dfrac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_0}{\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_0}$, $\varphi_2 = \dfrac{\gamma_1 x_2 + \gamma_2 y_2 + \gamma_0}{\delta_1 x_2 + \delta_2 y_2 + \delta_0}$, $\varphi_3 = \dfrac{\varepsilon_1 x_3 + \varepsilon_2 y_3 + \varepsilon_0}{\eta_1 x_3 + \eta_2 y_3 + \eta_0}$.

Соответствующая система Гамильтона будет такой:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial y_1} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}, & (1)\\ \dot{x}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial y_2} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_2}, & (2)\\ \dot{x}_3 = \dfrac{\partial H}{\partial y_3} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_3}\dfrac{\partial \varphi_3}{\partial y_3}, & (3)\\ \dot{y}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, & (4)\\ \dot{y}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, & (5)\\ \dot{y}_3 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_3} = -\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_3}\dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x_3}, & (6)\end{cases}$$

где независимая переменная $t \in C$, $x_1 = x_1(t), \ldots, y_3 = y_3(t) \in \tilde{C} = C \cup \{\infty\}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Если хотя бы один из определителей $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}\gamma_1 & \gamma_2\\ \delta_1 & \delta_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{vmatrix}$ не равен нулю, то решения системы (1)–(6) имеют подвижные точки ветвления второго порядка.

Доказательство. Систему (1)–(6) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1}\dfrac{-\Delta_1 x_1 + \alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2}{\left(\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_0\right)^2}, & (7)\\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_2}\dfrac{-\Delta_2 x_2 + \gamma_2\delta_0 - \gamma_0\delta_2}{\left(\delta_1 x_2 + \delta_2 y_2 + \delta_0\right)^2}, & (8)\\ \dfrac{dx_3}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_3}\dfrac{-\Delta_3 x_3 + \varepsilon_2\eta_0 - \varepsilon_0\eta_2}{\left(\eta_1 x_3 + \eta_2 y_3 + \eta_0\right)^2}, & (9)\\ \dfrac{dy_1}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1}\dfrac{-\Delta_1 y_1 + \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}{\left(\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_0\right)^2}, & (10)\\ \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_2}\dfrac{-\Delta_2 y_2 + \gamma_0\delta_1 - \gamma_1\delta_0}{\left(\delta_1 x_2 + \delta_2 y_2 + \delta_0\right)^2}, & (11)\\ \dfrac{dy_3}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_3}\dfrac{-\Delta_3 y_3 + \varepsilon_0\eta_1 - \varepsilon_1\eta_0}{\left(\eta_1 x_3 + \eta_2 y_3 + \eta_0\right)^2}, & (12)\end{cases}$$

где $\Delta_1 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$, $\Delta_2 = \gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1$, $\Delta_3 = \varepsilon_1\eta_2 - \varepsilon_2\eta_1$.

Возможны следующие случаи:

1) $\Delta_1 \neq 0,\ \Delta_2 \neq 0,\ \Delta_3 \neq 0$;

2) $\Delta_1 = 0,\ \Delta_2 \neq 0,\ \Delta_3 \neq 0$;

3) $\Delta_1 \neq 0,\ \Delta_2 = 0,\ \Delta_3 \neq 0$;

4) $\Delta_1 \neq 0,\ \Delta_2 \neq 0,\ \Delta_3 = 0$;

5) $\Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = 0,\ \Delta_3 \neq 0$;

6) $\Delta_1 = 0,\ \Delta_2 \neq 0,\ \Delta_3 = 0$;

7) $\Delta_1 \neq 0,\ \Delta_2 = 0,\ \Delta_3 = 0$.

Рассмотрим более подробно первый случай, т. е. когда $\Delta_1 \neq 0,\ \Delta_2 \neq 0,\ \Delta_3 \neq 0$.

С помощью линейной замены искомых функций

$$x_1 = X_1 + a,\ x_2 = X_2 + b,\ x_3 = X_3 + c,$$
$$y_1 = Y_1 + d,\ y_2 = Y_2 + e,\ y_3 = Y_3 + f$$

промежуточные аргументы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ можно преобразовать к виду

$$\tilde{\varphi}_1 = \frac{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 Y_1}{\beta_1 X_1 + \beta_2 Y_1},$$
$$\tilde{\varphi}_2 = \frac{\gamma_1 X_2 + \gamma_2 Y_2}{\delta_1 X_2 + \delta_2 Y_2},$$
$$\tilde{\varphi}_3 = \frac{\varepsilon_1 X_3 + \varepsilon_2 Y_3}{\eta_1 X_3 + \eta_2 Y_3}.$$

С учетом этого система (7)–(12) запишется так:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = \dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1}\dfrac{-\Delta_1 X_1}{\left(\beta_1 X_1 + \beta_2 Y_1\right)^2}, & (13)\\ \dot{X}_2 = \dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_2}\dfrac{-\Delta_2 X_2}{\left(\delta_1 X_2 + \delta_2 Y_2\right)^2}, & (14)\\ \dot{X}_3 = \dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_3}\dfrac{-\Delta_3 X_3}{\left(\eta_1 X_3 + \eta_2 Y_3\right)^2}, & (15)\\ \dot{Y}_1 = -\dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1}\dfrac{-\Delta_1 Y_1}{\left(\beta_1 X_1 + \beta_2 Y_1\right)^2}, & (16)\\ \dot{Y}_2 = -\dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_2}\dfrac{-\Delta_2 Y_2}{\left(\delta_1 X_2 + \delta_2 Y_2\right)^2}, & (17)\\ \dot{Y}_3 = -\dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_3}\dfrac{-\Delta_3 Y_3}{\left(\eta_1 X_3 + \eta_2 Y_3\right)^2}. & (18)\end{cases}$$

Из уравнений (13) и (16) получаем, что $\dfrac{dY_1}{dX_1} = \dfrac{Y_1}{X_1}$. Откуда $\dfrac{X_1}{Y_1} = C_1$, где C_1 – произвольная постоянная. Используя полученный первый интеграл, запишем дифференциальное уравнение (13) в следующем виде:

$$\frac{dX_1}{dt} = \Phi_1\left(C_1, C_2, C_3\right)\frac{-\Delta_1 C_1^2}{\left(\beta_2 + \beta_1 C_1\right)^2 X_1}, \quad (19)$$

где $\Phi_1\left(C_1, C_2, C_3\right) = \dfrac{\partial F}{\partial \tilde{\varphi}_1}\Bigg|_{\substack{\tilde{\varphi}_1 = \frac{\alpha_1 C_1 + \alpha_2}{\beta_1 C_1 + \beta_2}\\ \tilde{\varphi}_2 = \frac{\gamma_1 C_1 + \gamma_2}{\delta_1 C_1 + \delta_2}\\ \tilde{\varphi}_3 = \frac{\varepsilon_1 C_1 + \varepsilon_2}{\eta_1 C_1 + \eta_2}}}$.

После интегрирования уравнения (19) получим следующее:

$$X_1 = \sqrt{\frac{-2\Delta_1 C_1^2 \Phi_1\left(C_1, C_2, C_3\right)}{\left(\beta_2 + \beta_1 C_1\right)^2}\left(t - C_4\right)}, \quad (20)$$

где C_4 – произвольная постоянная.

Используя первый интеграл $\frac{X_2}{Y_2} = C_2$ и уравнение (14), будем иметь равенство

$$X_2 = \sqrt{\frac{-2\Delta_2 C_2^2 \Phi_2\left(C_1, C_2, C_3\right)}{\left(\delta_2 + \delta_1 C_2\right)^2}\left(t - C_5\right)}, \qquad (21)$$

где C_5 – произвольная постоянная.

Аналогично из уравнения (15) получим

$$X_3 = \sqrt{\frac{-2\Delta_3 C_3^2 \Phi_3\left(C_1, C_2, C_3\right)}{\left(\eta_2 + \eta_1 C_3\right)^2}\left(t - C_6\right)}, \qquad (22)$$

где C_6 – произвольная постоянная.

Из формул (20)–(22) видим, что компоненты X_1, X_2, X_3 имеют в C подвижные точки ветвления второго порядка. Поскольку $Y_1 = \frac{X_1}{C_1}$, $Y_2 = \frac{X_2}{C_2}$, $Y_3 = \frac{X_3}{C_3}$, то компоненты Y_1, Y_2, Y_3 также имеют подвижные точки ветвления второго порядка. Аналогичным образом исследуются подвижные особенности системы (7)–(12) в случаях 2–7. Во всех этих случаях компоненты системы (7)–(12) имеют подвижные точки ветвления второго порядка. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если имеют место равенства $\Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = 0,\ \Delta_3 = 0$, то решения системы (7)–(12) не имеют в C никаких подвижных особенностей. Доказательство теоремы 2 проводится аналогичным образом. Существенно используются первые интегралы системы (7)–(12), а также равенства $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = p, \frac{\gamma_1}{\delta_1} = \frac{\gamma_2}{\delta_2} = q, \frac{\varepsilon_1}{\eta_1} = \frac{\gamma_2}{\delta_2} = r.$

Заключение. В статье рассмотрены автономные системы Гамильтона шестого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y_i}, \\ \dfrac{dy_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial x_i},\ i = 1,\ 2,\ 3, \end{cases}$$

где $H = F\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_n\right)$, $F\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_n\right)$ – голоморфная функция промежуточных аргументов $\varphi_1 = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_0}{\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_0}$, $\varphi_2 = \frac{\gamma_1 x_2 + \gamma_2 y_2 + \gamma_0}{\delta_1 x_2 + \delta_2 y_2 + \delta_0}$, $\varphi_3 = \frac{\varepsilon_1 x_3 + \varepsilon_2 y_3 + \varepsilon_0}{\eta_1 x_3 + \eta_2 y_3 + \eta_0}$.

Показано, что если хотя бы один из определителей $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}$ не равен нулю, то решения исходной системы имеют подвижные точки ветвления второго порядка. Если все указанные определители равны нулю, то рассматриваемая система не имеет никаких подвижных особенностей.

Литература

1. Айзерман, М. А. Классическая механика / М. А. Айзерман. – М.: Наука, 1971. – С. 367.
2. Мышкис, А. Д. Математика. Специальные курсы / А. Д. Мышкис. – М.: Наука, 1974. – С. 632.
3. Петкевич, В. В. Теоретическая механика / В. В. Петкевич. – М.: Наука, 1981. – С. 496.
4. Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс. – Харьков: ГНТИУ, 1939. – С. 718.
5. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. – С. 436.
6. Еругин, Н. П. Проблема Римана / Н. П. Еругин. – Минск: Наука и техника, 1982. – С. 336.
7. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – М.: Мир, 1987. – С. 480.
8. Яблонский, А. И. Системы дифференциальных уравнений, критические особые точки которых неподвижны / А. И. Яблонский // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. 3, № 3. – С. 468–478.
9. Мататов, В. И. Системы дифференциальных уравнений без подвижных критических особых точек / В. И. Мататов // Дифференциальные уравнения. – 1973. – Т. 9, № 12. – С. 2267–2269.
10. Мататов, В. И. Об условиях однозначности подвижных особых точек автономных систем Гамильтона / В. И. Мататов, С. Н. Филиппович // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 11. – С. 2016–2019.
11. Мататов, В. И. Неавтономные кубические системы двух дифференциальных уравнений, обладающие свойством Пенлеве / В. И. Мататов, Л. В. Михайловская // Дифференциальные уравнения. – 1998. – Т. 34, № 2. – С. 216–221.
12. Крычавец, А. Я. Уласцівасці рашэнняў аўтаномнай сістэмы Гамільтона шостага парадку / А. Я. Крычавец, В. І. Мататаў // Весці БДПУ. Сер. 3. – 2005. – № 2. – С. 11–12.
13. Крычавец, А. Я. Даследаванне рухомых асаблівых пунктаў аўтаномнай сістэмы Гамільтона 2*n*-га парадку / А. Я. Крычавец, В. І. Мататаў // Весці БДПУ. Сер. 3. – 2007. – № 3. – С. 12–13.
14. О подвижных особых точках решений автономной системы Гамильтона четвертого порядка / В. И. Мататов [и др.] // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. – 2009. – Вып. XVII. – С. 14–16.

Поступила в редакцию 31.03.2010