УДК 519.2

А. М. Волк, доцент (БГТУ)

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СТЕПЕННО-ПОКАЗАТЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрено степенно-показательное распределение, которое обобщает гамма-распределение, распределения Релея, Вейбулла – Гнеденко, скоростей Максвелла и имеет широкое применение в статистических методах исследования физических процессов, в теории надежности, при описании дисперсного состава частиц. Исследованы его свойства, найдены числовые характеристики и получена характеристическая функция. Методом наибольшего правдоподобия выполнена статистическая оценка параметров данного распределения. Показана возможность описания дисперсной фазы в центробежных сепараторах.

The article under consideration deals with the power-exponential distribution. It's generalize gamma density, distributions of Relay, Veibull – Gnedenko, velocities of Maxwell, and it has wide application in statistic methods for studying the physical processes, in the theory of reliability, in describing the dispersed particle composition. Its properties were investigated, the characteristic function was found, and with the method of the most likelihood the statistical evaluation of these distribution parameters was performed. The possibility of using this distribution to describe the dispersed phase in the centrifugal separators was revealed.

Введение. В статистических методах исследования физических процессов, в теории надежности, при описании дисперсного состава частиц применяются распределения, которые имеют вид

$$f(x,\theta,p,c)=\frac{|c|}{\theta\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{p-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{c}\right). \quad (1)$$

Распределение (1) обобщает гамма-распределение ($c = 1$), распределения Релея ($p = 2$, $c = 2$), Вейбулла – Гнеденко ($p = c$), скоростей Максвелла ($p = 3$, $c = 2$) [1–3]. Актуальной является задача исследования свойства этого распределения и статистической оценки его параметров.

Свойства степенно-показательного распределения. Рассмотрим степенно-показательное распределение (1) некоторой случайной величины ξ. Отметим, что параметр θ является параметром масштаба, а p и c есть параметры формы. Выполним переход к безразмерной случайной величине $\eta = \xi / \theta$:

$$f(t,\theta,p,c)=\frac{|c|}{\theta\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}(t)^{p-1}\exp\left(-(t)^{c}\right). \quad (2)$$

Функция распределения непрерывной случайной величины η

$$F(t,\theta,p,c)=\frac{|c|}{\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}\int_0^t \tau^{p-1}\exp\left(-\tau^{c}\right)d\tau \quad (3)$$

сводится к неполной гамма-функции [4].

Если $c > 0$, то

$$F(t,\theta,p,c)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}\gamma\left(\frac{p}{c},t^{c}\right), \quad (4)$$

а при $c < 0$

$$F(t,\theta,p,c)=1-\frac{1}{\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}\gamma\left(\frac{p}{c},t^{c}\right). \quad (5)$$

Если $\frac{p-1}{c}>0$, то распределение (2)–(3) имеет моду

$$t_{\text{mod}}=\left(\frac{p-1}{c}\right)^{\frac{1}{c}},$$
$$\xi_{\text{mod}}=\theta\ t_{\text{mod}}=\theta\left(\frac{p-1}{c}\right)^{\frac{1}{c}}. \quad (6)$$

Для функции распределения мода будет точкой перегиба.

Для распределения (2)–(3) определены начальные моменты порядка k, удовлетворяющего условию $p + k > 0$, причем

$$\alpha_k(\eta)=\Gamma\left(\frac{p+k}{c}\right)/\Gamma\left(\frac{p}{c}\right), \quad (7)$$

$$\alpha_k(\xi)=\theta^{k}\Gamma\left(\frac{p+k}{c}\right)/\Gamma\left(\frac{p}{c}\right). \quad (8)$$

Рассчитаем характеристическую функцию распределения (2)–(3) случайной величины ξ:

$$\varphi(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\xi x)f(x)dx=$$

$$=\varphi(\xi)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{p+k}{c}\right)}{k!}(i\xi\theta)^k=$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{p+k}{c}\right)}{k!}(i\xi\theta)^k.$$

Выполним замену $t^c=y$ и, разлагая функцию $\exp(i\xi\theta t)$ в ряд, найдем

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(i\xi\theta)^k}{k!}\int_0^{+\infty}y^{\frac{p+k}{c}-1}\exp(-y)dy=$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{p+k}{c}\right)}{k!}(i\xi\theta)^k. \qquad (9)$$

Для исследования сходимости полученного ряда применим признак Коши и используем формулу Стирлинга [5]. При $c<0$ или $c>1$ данный ряд сходится и характеристическая функция аналитическая при любых значениях ξ. В данном случае распределение случайной величины однозначно определяется ее моментами.

Статистическая оценка параметров. Статистическая оценка параметров распределения может быть выполнена методом моментов, при котором параметры распределения находятся из условия равенства теоретических и статистических моментов. Распределение однозначно определяется своими моментами, если характеристическая функция аналитическая.

Метод моментов требует решения достаточно сложной системы уравнений, а также проверки соответствия полученной функции статистическим данным с помощью критериев согласия.

Выполним статистическую оценку параметров распределения (2) методом наибольшего правдоподобия [1].

Пусть имеется некоторая выборка $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ генеральной совокупности распределения (2)–(3). Рассмотрим функцию правдоподобия

$$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{|c|}{\theta\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{p-1}\exp\left\{-\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c\right\}. \qquad (10)$$

Прологарифмируем данную функцию

$$\ln L=n\left[\ln\frac{|c|}{\theta}-\ln\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)+(p-1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{\theta}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c\right]$$

и рассмотрим функцию

$$G=\frac{\ln L}{n}=\ln\frac{|c|}{\theta}-\ln\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)+$$

$$+(p-1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{\theta}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c.$$

Максимум данной функции совпадает с максимумом функции правдоподобия (10).

Находим частные производные функции G:

$$\frac{\partial G}{\partial\theta}=-\frac{p}{\theta}+\frac{c}{\theta}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c, \qquad (11)$$

$$\frac{\partial G}{\partial p}=-\frac{1}{c}\psi\left(\frac{p}{c}\right)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{\theta}, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial G}{\partial c}=\frac{1}{c}+\frac{p}{c^2}\psi\left(\frac{p}{c}\right)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c\ln\frac{x_i}{\theta}. \qquad (13)$$

Применим необходимое условие экстремума функции многих переменных, приравняем найденные частные производные к нулю и получим уравнения правдоподобия для определения параметров распределения:

$$\theta=\left(\frac{c}{p}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^c\right)^{\frac{1}{c}}, \qquad (14)$$

$$\frac{1}{c}\psi\left(\frac{p}{c}\right)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{\theta}=0, \qquad (15)$$

$$\frac{1}{c}+\frac{p}{c^2}\psi\left(\frac{p}{c}\right)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c\ln\frac{x_i}{\theta}=0. \qquad (16)$$

Поскольку логарифмическая производная гамма-функции монотонно возрастает, непрерывна на интервале $(0,+\infty)$ и принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$ [4, 5], то при известных параметрах θ и c уравнение правдоподобия (15) имеет единственное решение относительно параметра p:

$$p=c\psi^{-1}\left(\frac{c}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{\theta}\right). \qquad (17)$$

Уравнение правдоподобия (16) разрешимо относительно параметра c при известных θ и p.

Решение уравнений (14)–(16) дает статистическую оценку параметров распределения (2)–(3).

Описание дисперсного состава частиц дробления. Распределение (2)–(3) инвариантно относительно величины ξ^k. Применяя его к описанию величины порядка d^k относительно

диаметра при исследовании дисперсного состава частиц дробления частиц, получаем распределение:

$$f(t, \theta, p, c) = \frac{|c|}{\theta\Gamma\left(\frac{p+k}{c}\right)} t^{p+k-1} \exp\left(-t^{c}\right), \quad (18)$$

$$F(t, \theta, p, c) = \frac{|c|}{\Gamma\left(\frac{p+k}{c}\right)} \int_0^t \tau^{p+k-1} \exp\left(-\tau^{c}\right) d\tau. \quad (19)$$

Функции (18)–(19) описывают распределение количества ($k = 0$), диаметров ($k = 1$), поверхности ($k = 2$) и объема ($k = 3$) в зависимости от размера частиц и позволяют найти все необходимые характеристики этих распределений, предварительно получив статистическую оценку параметров по полученным уравнениям правдоподобия.

Рассмотрим экспериментальные значения распределения веса капель дисперсной фазы, уносимых из сепарационного элемента [6]. Средние значения шести опытов, полученных методом отбора проб, приведены в таблице.

Распределение веса капель дисперсной фазы

Диаметр капель $d_i - d_{i+1}$, мкм	Относительный вес
0–20	0,03
20–40	0,23
40–60	0,38
60–80	0,21
80–100	0,15

Решение уравнений правдоподобия (14)–(16) дает значения параметров: $\theta = 49{,}2$, $c = 2{,}233$, $p = 3{,}373$ и функцию распределения объемов

$$F_3(d) = 2{,}52 \int_0^{d/49{,}2} t^{2{,}373} \exp\left(-t^{2{,}233}\right) dt. \quad (20)$$

Полученное распределение позволяет рассчитать все необходимые характеристики распределения количества, размера, поверхности и объема исследуемой дисперсной фазы и применить их для расчета эффективности процессов разделения газожидкостных потоков [7].

Заключение. Выполненные исследования степенно-показательного распределения и найденные характеристики могут быть использованы при решении многих прикладных задач.

Метод наибольшего правдоподобия позволяет получить достоверную оценку параметров распределения на основании имеющихся статистических данных исследуемых физических процессов.

Полученное распределение объемов (20) частиц дисперсной фазы может быть использовано для расчета эффективности разделения фаз в газожидкостных потоках.

Литература

1. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2 т. Т. 2 / В. Феллер; пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 738 с.

2. Гнеденко, Б. В. Математические методы в теории надежности / Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев. – М.: Наука, 1965. – 236 с.

3. Коузов, П. А. Основы анализа дисперсионного состава промышленных пылей и измельченных материалов / П. А. Коузов. – Л.: Химия, 1987. – 264 с.

4. Янке, Е. Специальные функции: Формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмдэ, Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 458 с.

5. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – Минск: Наука, 1984. – 831 с.

6. Левданский, Э. И. О законе распределения частиц при дроблении / Э. И. Левданский, А. М. Волк, И. М. Плехов // ТОХТ. – 1986. – № 5. – С. 672–677.

7. Волк, А. М. Эффективность разделения газожидкостных потоков / А. М. Волк // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. – 2006. – Вып. XIV. – С. 42–45.

Поступила в редакцию 31.03.2010