НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977.1

И. М. Борковская, доцент (БГТУ)

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

В статье рассматривается проблема стабилизации дескрипторных систем в двумерном случае. Задача стабилизации – одна из важнейших задач при синтезе систем автоматического регулирования. В работе используется стабилизирующая обратная связь в форме разностных регуляторов. Получены достаточные условия стабилизации дескрипторных систем. Особое внимание уделено изучению проблемы стабилизации двумерных систем при любых положительных значениях запаздывания. Представлен пример, иллюстрирующий рассмотренный метод.

The article considers the problem of the stabilization of second-order time-delay systems unsolved with respect to derivative. The problem of the stabilization is one of the most important problems under the synthesis of the automatic control systems. The stabilizing feedback in the form of difference regulators is used in this paper. The sufficient conditions for stabilization are obtained. The special attention is paid to the all positive delay stabilization of the second-order systems. The example illustrated is also presented.

Введение. В статье рассматривается проблема стабилизации двумерных дескрипторных динамических систем с запаздывающим аргументом с помощью регуляторов разностного типа, реализация которых существенно проще регуляторов интегрального типа. Задача стабилизации такого класса систем управления, как дескрипторные системы, представляет определенный интерес, поскольку такие системы достаточно достоверно описывают в физически реальных переменных работу систем автоматического управления и технологические процессы. Теория дескрипторных систем является интенсивно развивающимся разделом качественной теории управления.

Представлены алгоритмы построения регуляторов разностного типа, не требующие знания характеристических значений.

Основная часть. Рассмотрим систему с запаздывающим аргументом, не разрешенную относительно производной:

$$\begin{gathered} S\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + bu(t),\ t>0, \\ u(\cdot)\in R,\ x(\cdot)\in R^n,\ S,\ A_i\in R^{n\times n},\ i=0,1, \end{gathered} \qquad (1)$$

где h – постоянное запаздывание.

Присоединим к системе (1) разностный регулятор типа обратной связи вида

$$u(t) = q_0'x(t) + q_1'x(t-h), \quad q_0, q_1 \in R^n. \qquad (2)$$

Систему (1), где $\det S = 0$, но S – ненулевая, назовем $Sx(t)$-стабилизируемой регулятором вида (2), если существует регулятор (2) такой, что замкнутая система (1) является $Sx(t)$-асимптотически устойчивой [1].

Рассмотрим систему (1) при $n=2$. Обратную связь (2) запишем в операторной форме:

$$u(t) = [\beta_1(e^{-ph}), \beta_2(e^{-ph})]x(t),$$
$$\beta_1(e^{-ph}) = \beta_{10} + \beta_{11}e^{-ph},$$
$$\beta_2(e^{-ph}) = \beta_{20} + \beta_{21}e^{-ph},$$

$$[\beta_{10}, \beta_{20}] = q'_0, \ [\beta_{11}, \beta_{21}] = q'_1,$$
$$\beta_{ij} \in R, \ i = 1, 2, \ j = 0, 1,$$

где e^{-ph} – оператор запаздывания ($e^{-ph}x(t) = x(t-h)$, $p = d / dt$).

Используя канонические формы для систем с запаздывающим аргументом, получим достаточные условия $Sx(t)$-стабилизируемости системы (1), (2) в двумерном случае.

I. Пусть $\det[b, Sb] \neq 0$. Тогда найдется такая матрица D, $\det D \neq 0$, что преобразование $x = Dy$ приведет исходную систему (1) к виду

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) +$$
$$+ \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & \alpha_{12}^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t). \qquad (3)$$

Дальнейшее преобразование системы (3) в случае $\alpha_{11} \neq 0$ приводит ее к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot{z}_2(t) = z_1(t) + \alpha_1 z_1(t-h) + \alpha_2 z_2(t-h), \\ 0 = \beta_{10} z_1(t) + \beta_{11} z_1(t-h) + \beta_{20} z_2(t) + \\ + \beta_{21} z_2(t-h). \end{cases} \qquad (4)$$

Из второго уравнения системы получаем:

$$z_1(t) = -\frac{1}{\beta_{10}} \left(\beta_{11} z_1(t-h) + \beta_{20} z_2(t) + \beta_{21} z_2(t-h) \right),$$

$$\dot{z}_2(t) = -\frac{1}{\beta_{10}} \left(\beta_{11} z_1(t-h) + \beta_{20} z_2(t) + \right.$$
$$\left. + \beta_{21} z_2(t-h) \right) + \alpha_1 z_1(t-h) + \alpha_2 z_2(t-h).$$

Выбираем $\beta_{11}, \beta_{10} : \beta_{11} = \beta_{10}\alpha_1$. Имеем:

$$\dot{z}_2(t) = -\frac{\beta_{20}}{\beta_{10}} z_2(t) + \left(-\frac{\beta_{21}}{\beta_{10}} + \alpha_2 \right) z_2(t-h). \qquad (5)$$

Для обеспечения асимптотической устойчивости последнего уравнения определим условия, при которых отрицательны действительные части корней характеристического уравнения

$$\lambda + \frac{\beta_{20}}{\beta_{10}} - \left(\alpha_2 - \frac{\beta_{21}}{\beta_{10}} \right) e^{-\lambda h} = 0. \qquad (6)$$

В случае, когда точка с координатами (β_{20} / β_{10}, $\beta_{21} / \beta_{10} - \alpha_2$) принадлежит области устойчивости Ω, граница которой L описывается линиями [2] (рис. 1):

$$\beta = -\alpha \quad \text{и} \quad \begin{cases} \alpha + \beta\cos(hg) = 0, \\ g - \beta\sin(hg) = 0, \end{cases} \quad 0 < g < \frac{\pi}{h},$$

корни уравнения (6) будут иметь отрицательные действительные части.

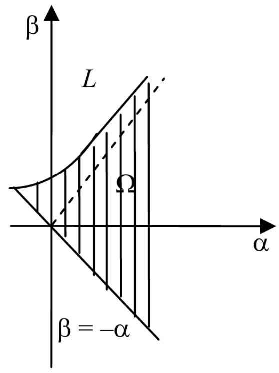

Рис. 1. Ω – область устойчивости

При соответствующем выборе коэффициентов регулятора всегда можно обеспечить попадание точки в требуемую область, а следовательно, и система (1) в этом случае является $Sx(t)$-стабилизируемой.

При выборе $\left(\beta_{20} / \beta_{10}, \beta_{21} / \beta_{10} - \alpha_2 \right) \in \Omega_1$ система $Sx(t)$-стабилизируема при всех значениях запаздывания h (Ω_1 – область, изображенная на рис. 2).

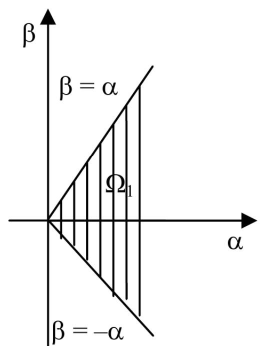

Рис. 2. Ω_1 – область устойчивости при любых h

Пусть в (3) $\alpha_{11} = 0$. Тогда система имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) +$$
$$+ \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & \alpha_{12}^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t),$$

$$\begin{cases} \dot{y}_2(t) = \alpha_{12} y_2(t) + \alpha_{11}^1 y_1(t-h) + \alpha_{12}^1 y_2(t-h), \\ 0 = \beta_{10} y_1(t) + \beta_{11} y_1(t-h) + \\ + \beta_{20} y_2(t) + \beta_{21} y_2(t-h). \end{cases}$$

При $\alpha_{11}^1 = 0$ первое уравнение системы устойчиво тогда и только тогда, когда точка $(-\alpha_{12}, -\alpha_{12}^1)$ принадлежит вышеуказанной области устойчивости Ω. Для всех значений запаздывания h условие устойчивости выполняется, если точка $(-\alpha_{12},\ -\alpha_{12}^1)$ принадлежит области устойчивости Ω_1.

Если $\alpha_{11}^1 \neq 0$, то перейдем при помощи невырожденного преобразования к системе

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \\ + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t),$$

из которой получим:

$$\begin{cases} \dot{z}_2(t) = \alpha_{12} z_2(t) + z_1(t-h), \\ 0 = \beta_{10} z_1(t) + \beta_{11} z_1(t-h) + \\ + \beta_{20} z_2(t) + \beta_{21} z_2(t-h). \end{cases}$$

Пусть $\beta_{10} = 0,\ \beta_{11} = 1,$ тогда

$$0 = z_1(t-h) + \beta_{21} z_2(t-h) + \beta_{20} z_2(t),$$

$$\dot{z}_2(t) = (\alpha_{12} - \beta_{20}) z_2(t) - \beta_{21} z_2(t-h). \quad (7)$$

Выбирая $\beta_{20},\ \beta_{21}$ так, чтобы точка $(\alpha_{12} + \beta_{20}, \beta_{21})$ попадала в область устойчивости Ω, обеспечим асимптотическую устойчивость уравнения (7). Таким образом, исходная система является $Sx(t)$-стабилизируемой. Для устойчивости при всех значениях запаздывания h следует обеспечить попадание точки $(-\alpha_{12} + \beta_{20},\ \beta_{21})$ в область Ω_1.

Обобщим рассмотренные случаи [3].

Утверждение 1. Для $Sx(t)$-стабилизируемости системы (1) регулятором вида (2) достаточно, чтобы выполнялось условие $\det[b, Sb] \neq 0$ и при этом α_{11} из (3) было отлично от нуля. В случае $\det[b, Sb] \neq 0,\ \alpha_{11} = 0$ систему можно стабилизировать либо если $\alpha_{11}^1 = 0$ и точка $(-\alpha_{12}, -\alpha_{12}^1) \in \Omega$, либо если $\alpha_{11}^1 \neq 0$.

Выделим результаты, относящиеся к стабилизируемости двумерных дескрипторных систем при любых значениях запаздывания h.

Утверждение 2. Для $Sx(t)$-стабилизируемости системы (1) регулятором вида (2) при любых положительных значениях запаздывания h достаточно, чтобы выполнялось условие $\det[b, Sb] \neq 0$ и при этом α_{11} из (3) было отлично от нуля. В случае $\det[b, Sb] \neq 0$, $\alpha_{11} = 0$ систему можно стабилизировать при любых значениях запаздывания либо если $\alpha_{11}^1 = 0$ и точка $(-\alpha_{12}, -\alpha_{12}^1) \in \Omega_1$, либо если $\alpha_{11}^1 \neq 0$.

II. Пусть $\det[b, Sb] = 0$. Тогда матрица S принимает вид $S = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$, и в силу того, что $\det S = 0$, имеем:

1) $s_{11} = 0$. Приходим к следующему характеристическому уравнению:

$$\lambda(-\tilde{\alpha}_{11} s_{22} + \tilde{\alpha}_{12} s_{21}) + (\beta_2 \tilde{\alpha}_{11} - \tilde{\alpha}_{12}\beta_1) = 0.$$

Пусть $\beta_1,\ \beta_2$ таковы, что $\beta_2\tilde{\alpha}_{11} - \tilde{\alpha}_{12}\beta_1 = A(-\tilde{\alpha}_{11}s_{22} + \tilde{\alpha}_{12}s_{21})$, где $A > 0$. При определенном выборе коэффициентов регулятора вида (2) и выполнении условий на параметры исходной системы удается обеспечить неотрицательность действительных частей корней указанного уравнения. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3. В случае $\det[b, Sb] = 0$, $s_{11} = 0$ при выполнении условия

$$\left| \frac{\alpha_{11}s_{22} - \alpha_{12}s_{21}}{\alpha_{12}^1 s_{21} - \alpha_{11}^1 s_{22}} \right| > 1$$

система (1) стабилизируема регулятором вида (2) при любых положительных значениях запаздывания h (если $\alpha_{12}^1 s_{21} - \alpha_{11}^1 s_{22} = 0$, то стабилизируемость имеет место при $\alpha_{12} \neq \alpha_{11}$);

2) $s_{22} = 0$. Имеем характеристическое уравнение

$$\lambda(\beta_2 s_{11} + \tilde{\alpha}_{12} s_{21}) + (\beta_2\tilde{\alpha}_{11} - \tilde{\alpha}_{12}\beta_1) = 0.$$

При $s_{11} \neq 0$ приходим к следующему утверждению.

Утверждение 4. В случае $\det[b, Sb] = 0$, $s_{22} = 0$ система (1) стабилизируема регулятором вида (2) при любых положительных значениях запаздывания h.

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \\ + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

После упрощения (случай $\det[b, Sb] \neq 0$) система принимает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) + \\ + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t).$$

В результате применения изложенного метода (выбираем $v(t) = [\beta \quad 0] y(t),\quad \beta \neq -1$, затем возвращаемся к $u(t)$, $x(t)$) построен стабилизирующий регулятор

$$u(t) = [\alpha \quad 2] x(t) + [2 \quad 0] x(t-h), \quad \alpha \neq -1.$$

Заключение. В работе представлены результаты по стабилизации двумерных дескрипторных систем с запаздыванием в виде достаточных условий через параметры исходной системы. Для стабилизации предлагается разностный регулятор типа обратной связи. Выделяются утверждения, касающиеся возможности стабилизации таких систем при любых значениях запаздывания. По параметрам исходной системы проводится построение линейной обратной связи в виде разностных регуляторов вида (2), обеспечивающих асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Рассмотрен пример, иллюстрирующий данный метод.

Литература

1. Борковская, И. М. Стабилизация двумерных дескрипторных систем с запаздыванием / И. М. Борковская // X Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 3–7 нояб. 2008 г. / Ин-т математики НАН Беларуси. – Минск, 2008. – Ч. 3. – С. 89.

2. Борковская, И. М. О стабилизации линейных двумерных систем с запаздывающим аргументом / И. М. Борковская, В. М. Марченко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. – 1995. – Вып. II. – С. 23–33.

3. Борковская, И. М. Построение стабилизирующих регуляторов типа обратной связи для двумерных динамических систем с запаздыванием / И. М. Борковская // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. – 2009. – Вып. XVII. – С. 8–10.

Поступила в редакцию 31.03.2010